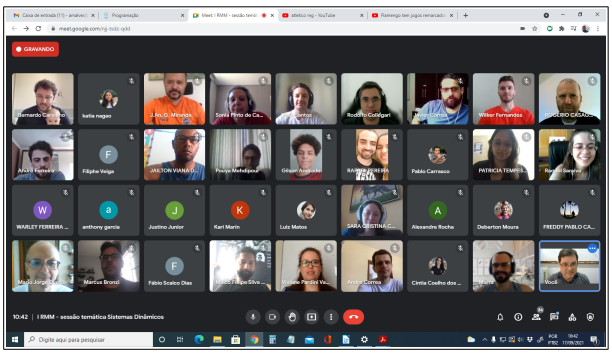
JMat UFV

N°8 **Versão on-line ISSN:** 2675-987X

12 de Maio de 2022 || 10:49h

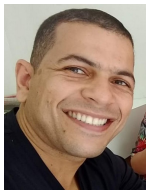
I Reunião Mineira de Matemática



A I Reunião Mineira de Matemática foi realizada com sucesso na forma online de 15/09 a 17/09 de 2021. O evento contou com uma comissão organizadora composta por 10 professores das seguintes instituições: UFJF, UFMG, UFOP, UFU, UFV e UNIFEI. O evento contou com mais de 400 inscritos de instituições mineiras, 4 palestras plenárias, 9 sessões temáticas, 86 palestras, além de apresentações de pôsteres. Houve uma sessão de homenagem aos Professores Olímpio H. Miyagaki e Márcio G. Soares. O evento finalizou com uma mesa redonda na qual foi decidida a criação da Rede Mineira de Matemática.

A. M. Alves

A. L. A. Araujo



A. C. Junior

E. J. F. Leite

Existence, nonexistence, and asymptotic behavior of solutions for N-Laplacian equations involving critical exponential growth in the whole $\mathbb{R}^N$,

Anderson L. A. de Araujo and Luiz F. O. Faria; *MATHEMATISCHE ANNALEN*, 2022. DOI[*Classif. CAPES: A1*]

Principal eigenvalues and eigenfunctions to Lane-Emden systems on general bounded domains,

Edir J. F. Leite and Marcos Montenegro; *ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS*, 2022. [*Classif. CAPES: A1*]

On totally umbilical surfaces in the warped product $M(k)_f \times I$,

Ady Cambraia Jr., Abigail Folha e Carlos Peñafiel; *PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS*, 2021. DOI [*Classif. CAPES: A2*]

Geometric limit of Julia set of a family of rational functions with odd degree,

Alexandre. M. Alves and Mostafa Salarinoghabi; *DYNAMICAL SYSTEMS-AN INTERNATIONAL JOURNAL*, 2021. DOI [*Classif. CAPES: B1*]

Encoding n-to-1 baker's transformations,

Pouya Mehdipour and Neemias Martins, *ARCHIV DER MATHEMATIK*, 2022. DOI [*Classif. CAPES: B1*].

TÓPICOS PRINCIPAIS

-GRANDES MATEMÁTICOS p. 2

-Encontro Ex-Alunos p. 3

-ENTREVISTA COM PROFª: Simone Maria de Moraes p. 4

-DISSERTAÇÕES DE MESTRADO p. 7

-DESAFIO MATEMÁTICO p. 8

-NOTÍCIAS p. 9

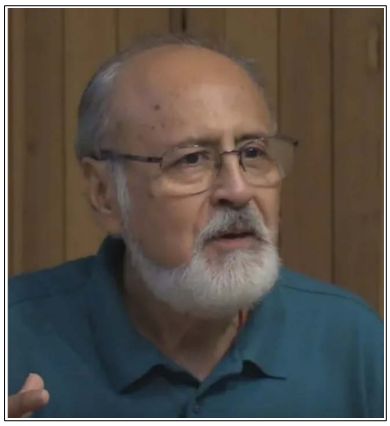
COLABORADORES:
***Sara Silvério**
***Ígor S. Reis**

JMat UFV

EDITORES

André Junqueira da S. Corrêa
Ady Cambraia Junior
http://www.dma.ufv.br/jmat/

Jorge Manuel Sotomayor Tello 1942-2022



J.M. Sotomayor - Impa 2018

Jorge Manuel Sotomayor Tello (Soto) nasceu no Peru em 25/03/1942. Ele foi casado com Marilda Antonia de Oliveira Sotomayor e pai de Leonardo e Mariana. Juntamente com Ivan Kupka foram os dois primeiros doutores pelo IMPA. Orientado por Maurício Peixoto (1921-2019), defendeu sua tese de doutorado intitulada "*Estabilidade Estrutural de Primeira Ordem e Variedades de Banach*", em 1964, aos 22 anos de idade.

No Brasil, sua atividade profissional foi ligada ao IMPA até 1992 e à USP (1992 até sua aposentadoria) e foi professor visitante na UNIFEI (Itajubá, MG). Era Pesquisador Sênior do CNPq e anteriormente pesquisador 1A. Orientou 12 dissertações de mestrado e 22 teses de doutorado. Publicou mais de cem artigos científicos em várias áreas, escreveu livros, ensaios, contos etc.

Com Carlos Gutierrez (1944-2008) introduziu o conceito de estabilidade estrutural e inaugurou a teoria qualitativa das equações diferenciais na Geometria Diferencial, publicando em 1982 dois trabalhos pioneiros sobre o comportamento qualitativo das linhas de curvatura em superfícies imersas no espaço Euclidiano tridimensional. Uma geração de matemáticos aprendeu EDO's no seu livro inspirador intitulado *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. O livro *Foundations of Mechanics*, de R. Abraham e J.E. Marsden, leitura obrigatória no estudo da Mecânica Clássica e dos Sistemas Dinâmicos, na segunda edição, traz o seguinte comentário, na página 544, numa tradução livre:

"*A origem da teoria das bifurcações, como um ramo da dinâmica diferenciável, é geralmente atribuída a Poincaré, o pai da dinâmica. A ênfase atual – sobre a relação entre bifurcações e estabilidade estrutural – começa com os trabalhos de Andronov e Leontovich. Esta teoria assumiu sua forma moderna durante os anos da década de 1960, especialmente nos trabalhos de Sotomayor.*"

Soto recebeu homenagens da Universidade Nacional de San Marcos, Facultad de Ciencias – Universidad Nacional de Ingenieria – Peru, da Ordem Nacional do Mérito Científico, em grau de Grã-Cruz, e foi membro titular da Academia Brasileira de Ciências (ABC). Também foi bolsista da Fundação Guggenheim.

Palavras do Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira/Unicamp

"Como seus livros, artigos, ensaios têm sido, e certamente serão ainda mais, sobejamente discutidos em diversos canais de comunicação, abordarei aqui alguns aspectos e atividades de Jorge Sotomayor pouco conhecidos decorrentes de nossos inúmeros encontros e nossa amizade. Conheci o personagem deste texto, no início dos anos 70, quando de uma palestra que ele proferiu no IMECC. Na época ele estava interessado em se aprofundar na Teoria de Singularidades e Catástrofes e conversamos sobre alguns pontos envolvendo a minha dissertação. Ele me convidou para dar uma palestra no IMPA sobre "Conjuntos Estratificados" (titulo de minha dissertação) e daí começamos a nos corresponder por carta e iniciamos uma amizade. Um tempo depois, ele e Jacob Palis vieram dar um curso em Campinas sobre Sistemas Dinâmicos (havia um revezamento semanal entre eles). Nesta ocasião nos foi apresentada uma lista de problemas em aberto, um dos quais viria a ser o título de minha tese de Doutorado, obtido no IME-USP, em 1975, orientado pelo Angelo Barone e cuja participação do Jorge foi enorme. Uma vez por mês eu ia ao IMPA, para conversar com ele sobre o andamento da tese, quando percebi, muito cedo, quão enorme era seu conhecimento cientifico, criatividade, versatilidade, além do seu fascínio com a Geometria e os geômetras ancestrais. O meu agradecimento e admiração a ele já eram latentes nessa época. Estampava em suas palestras a enorme admiração que dedicava à Maurício Peixoto.

Sotomayor deixa um enorme legado pessoal, literário, acadêmico e científico, sendo seu passamento inestimável para a Ciência e Educação. A sua obra já está eternizada e só nos resta aprender com suas memórias e perpetuar nossa admiração. Se perdi um grande amigo de longa data, com quem tive o prazer de partilhar diversos momentos inesquecíveis, para a Matemática, brasileira e peruana, representa a perda de um de seus mais prestigiosos representantes. O que me conforta é ter plena convicção que ele cumpriu sua missão entre nós e que Deus o receba de braços abertos." (Link Completo)

Palavras do Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello/UNIFEI

"Entre 1965 e 1969, Soto lecionou matemática no Peru e nos Estados Unidos. Em 1969, retornou ao IMPA como pesquisador, permanecendo lá até 1992. Em 1993, tornou-se professor titular do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Manteve o vínculo com esse instituto até sua morte. De agosto de 2012 a julho de 2014 foi também professor visitante da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI). Soto, como era carinhosamente chamado, contribuiu de maneira essencial para o desenvolvimento da Teoria das Bifurcações das Equações Diferenciais Ordinárias e, com C. Gutiérrez, criou a Teoria Qualitativa das Linhas de Curvatura, sempre com a originalidade que lhe era peculiar. "Lições de Equações Diferenciais Ordinárias" é um clássico, considerado livro de referência em cursos de pós-graduação no Brasil." (Link Completo)

V Encontro de Ex-Alunos do DMA/UFV

50 DMA
ANOS
V ENCONTRO DE EX-ALUNOS DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UFV

Ex-Alunos

O V Encontro de Ex-Alunos do DMA/UFV – Prata da Casa aconteceu de 02 a 04 de fevereiro de 2022, de modo remoto, ainda em comemoração aos 50 anos do DMA (criado em 1969) e do Curso de Matemática, que teve seu início com turma por vestibular em 1972. A Comissão Organizadora do evento contou com a participação das professoras Ariane Piovezan Entringer, Lílian Neves Santa Rosa Valentim, Marinês Guerreiro, Rosane Soares Moreira Viana, da UFV, Catarina Mendes Sánchez, da UFJF, dos discentes do curso de Matemática da UFV, Bruno Wellington Moreira, Carolina Santana Tomaz, Ellen Batista Dundas Chaves, Ellen Peixoto de Oliveira, Kellton de Oliveira Sabino, Luana Aparecida Soares Costa, Luísa Rangão Miranda e da ex-secretária do DMA, Maria de Lourdes Carvalho Zaidan. O Comitê Científico foi composto pelos professores Jhone Caldeira Silva da UFG, Margareth da Silva Alves e Mercio Botelho Faria, da UFV. (Demais informações sobre o evento encontram-se no link V Encontro de Ex-Alunos).

Breve histórico sobre o evento:

De onde surgiu a ideia destes Encontros de Ex-Alunos?

Em 2003, o DMA não contava com muitos recursos para realizar um evento, mas havia uma demanda discente por atividades extracurriculares que precisava ser suprida. Muitos egressos do Curso de Matemática da UFV, que haviam terminado seus mestrados e doutorados com sucesso, já atuavam em instituições de ensino superior e outras. Alguns já tinham boas experiências para compartilhar e foram convidados a colaborar no evento de modo solidário. Após aceitarem o desafio, o I Encontro de Ex-Alunos do DMA foi realizado com sucesso e com a participação expressiva dos estudantes da época também na organização. Este evento trouxe um novo ânimo tanto para os discentes do Curso de Matemática quanto para os docentes do DMA.

Em 2006, II Encontro de Ex-Alunos ocorreu com um Workshop de Matemática realizado em parceria com a UFSJ, do qual participaram como palestrantes muitos professores que ocupavam posições importantes nos órgãos de fomento à epoca. Foi decisivo para colocar a UFV no cenário nacional da Matemática e mostrar a qualidade da formação dos egressos do Curso de Matemática da UFV. No ano seguinte, foi submetido à CAPES o projeto do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFV, associado à UFMG, que foi aprovado. O Programa iniciou em março de 2008 e obteve sua independência em 2010.

O III Encontro de Ex-Alunos foi realizado em paralelo a outro Workshop de Matemática, em 2009, com uma participação muito grande dos ex-alunos. O IV Encontro de Ex-Alunos aconteceu em 2011, nas comemorações dos 40 anos do DMA e em paralelo ao III Workshop de Matemática e à Semana Acadêmica de Matemática.

Em todos os eventos, a contribuição dos ex-alunos foi muito importante, pois além das palestras com conteúdo de Matemática e de Ensino de Matemática, a interação com os estudantes que outrora cursavam a Licenciatura ou o Bacharelado serviu de estímulo a muitos para que não desistissem do curso, apesar de suas dificuldades. Para os docentes, a certeza de que seu trabalho estava dando frutos muito consistentes.

A quinta edição do evento, embora realizada de modo remoto, teve uma excelente repercussão entre os estudantes do Curso. A contribuição com palestras, minicursos, participação em mesas redondas dos egressos e dos docentes do DMA abrilhantou o Encontro. Houve um emocionante momento de homenagens a todos os que contribuíram com o DMA e com o Curso de Matemática ao longo de seus 50 anos. Parabéns a todos!

Frases de Grandes Matemáticos:

**Embora a física e a matemática possam nos dizer como o universo começou,
elas não são muito úteis para prever o comportamento humano
porque há muitas equações para resolver.**

-Stephen Hawking.

Profª. Simone Maria de Moraes (UFBA)

Simone Maria de Moraes

Profª. Simone Maria de Moraes possui Graduação em Matemática pela PUC-SP (1993), Mestrado em Matemática pelo ICMC-USP (1995), Doutorado em Matemática pela UNICAMP (2002) e Pós-Doutorado pela Universidade de Valência na Espanha (2007-2008). Foi docente da Universidade Federal de Viçosa (UFV) entre 1996 e 2014 e atualmente é Professora da Universidade Federal da Bahia (UFBA). Sua área de pesquisa é Geometria e Topologia.

(1) ***Uma breve informação sobre sua formação acadêmica.***
Sou da cidade de São Paulo, fui criada em um bairro da periferia e estudei em escola pública no ensino fundamental e médio. Fiz o ensino médio na modalidade noturna, pois já trabalhava desde essa época. Minha geração foi a primeira a completar o ensino médio na minha família. Eu queria continuar estudando e, mesmo não tendo condições tão favoráveis, com meu salário conseguia pagar a mensalidade. Fui fazer Matemática na PUC-SP, pois gostava da matéria. Com alguns meses de curso, a mensalidade aumentou absurdamente e eu não conseguia mais pagar, foi então que consegui uma bolsa para continuar o curso. Na graduação conheci a professora Silvia Machado, uma pessoa muito importante pra mim, que me apresentou a coisas de matemática mais abstratas. Fiz Iniciação Científica com ela na área da Álgebra e com o professor Benedito Silva, na área da Análise. Daí, comecei a me interessar mais e queria continuar, tentei o mestrado na USP, mas não fui aceita. Acabei entrando como aluna especial e fiquei dois anos refazendo algumas disciplinas do bacharelado e fazendo algumas disciplinas do mestrado. Então fui aceita e fiz o mestrado na área de Topologia Algébrica na USP- campus de São Carlos. Eu tinha bolsa, por isso eu não precisava trabalhar e conseguia me concentrar totalmente nos estudos. Quando estava no último período do mestrado, comecei a dar aula na Faculdade Tecnológica do Estado de São Paulo (FATEC), em Taquaritinga. Depois fiz concurso para UFV e para Universidade Estadual de Maringá, obtive sucesso nos dois, mas escolhi ir para UFV. Fiquei 2 anos em Viçosa e fui fazer o doutorado na UNICAMP, já pensando em fazer um doutorado sanduíche. Fui para a Espanha, fiquei dois anos lá e voltei para Viçosa, onde trabalhei bastante até ir para Valência fazer o pós-doutorado.

(2) ***Durante esses anos, que funções acadêmicas você assumiu? Quanto tempo em cada uma delas?***
Na UFV fui professora e não tive muitos cargos administrativos. Trabalhei em diversas comissões para organizar eventos, comissão coordenadora de curso, participei de várias reformulações curriculares, por exemplo quando estava separando a licenciatura do bacharelado. Fui orientadora de diversos trabalhos de iniciação científica e fui coordenadora da pós-graduação do mestrado acadêmico por 4 anos, inclusive ajudei as articulações para o início do mestrado. Na UFBA, participo desse tipo de comissões também e tenho participado do núcleo docente estruturante. Meu maior foco atualmente é acolher bem as pessoas negras dentro da matemática, levando a matemática para as escolas públicas de Salvador.

(3) ***Qual sua área de pesquisa?***
No mestrado trabalhei com Topologia Algébrica, mas comecei a estudar mais coisas ligadas à Geometria Diferencial, sendo esse o tema que trabalhei na minha tese, mais especificamente o estudo da Geometria Diferencial usando técnicas de Teoria de Singularidades.

(4) ***Qual dos seus projetos de pesquisa você considera mais importante?***
Eu acho que minha tese de doutorado sobre Elipse de Curvatura em Superfícies Imersas em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$ foi uma ótima contribuição, pois na época haviam alguns trabalhos desse tipo, mas para superfícies imersas em dimensão 4, e penso que houve, a partir da minha tese, nesse sentido, alguns desenvolvimentos bem interessantes.

(5) ***A universidade que você trabalha tem um programa de pós-graduação em Matemática? Existe um grupo de pesquisa em sua área?***
A UFBA tem programas de mestrado profissional, mestrado acadêmico e também tem um doutorado associado com a Universidade Federal de Alagoas que já é um programa consolidado. O mestrado acho que existe desde 1974 e o doutorado tem 10 anos ou até mais. Eu faço parte do programa de mestrado profissional. Na UFBA não tem grupo de pesquisa na minha área, mas tem um grupo de 2 ou 3 professores da área de Geometria, focado em geometria Riemanniana e eu já contribuí bastante com esse grupo de pesquisa em alguns cursos, minicursos, palestras e até o ano de 2020, por exemplo, fizemos uma semana de geometria nos programas de verão do Departamento de Matemática.

(6) ***Como podemos criar atrativos para melhorar o nível de pesquisa em universidades?***
Vemos estudantes brilhantes tendo que abandonar a pós-graduação por não ter bolsa, pois as pessoas precisam se alimentar, pagar aluguel, transporte. E a estrutura do mestrado não mudou, então as exigências que vai ter sobre o estudante que não tem bolsa é a mesma de um estudante com bolsa, assim realmente estamos em um momento muito difícil que não imaginávamos que aconteceria. Eu acho que a primeira coisa que temos que fazer é lutar para reverter esse quadro de desmonte das nossas estruturas de ensino e pesquisa porque isso é uma situação muito séria. Tirar sonhos de jovens é um problema sério. Eu sinto o seguinte: sobre a questão da pesquisa, ter motivação, ter um ambiente apropriado, ter grupos de pesquisa, conseguir pessoas com quem seja possível discutir o que é pesquisado, é tudo muito importante. Mas antes disso os estudantes e pesquisadores precisam se sustentar, porque se a pessoa não

comer, não dormir e não descansar, será difícil fazer pesquisa, pois fazer pesquisa requer concentração, tempo, disposição e para tudo isso precisamos estar, no mínimo, bem.

(7) ***Uma breve explicação sobre sua área de pesquisa, de 5 à 10 linhas, listando os principais focos e possíveis aplicações.***

Ao utilizar as ferramentas de teoria de singularidades para estudar superfícies, teve uma coisa que quando eu descobri eu achei muito bonito que é aplicar o Teorema da transversalidade de Thom. Dentro da geometria, dentro da teoria de singularidades existe uma parte que é chamada geometria genérica onde podemos analisar propriedades e descartar algumas, esse teorema de Thom analisa quando um conjunto dentro de outro, é um conjunto denso ou um conjunto residual que podemos descartar. Na verdade, o que eu estou querendo dizer com isso é que podemos ter uma propriedade em uma superfície e podemos nos perguntar se essa propriedade é importante. Ou, será que tem muitas superfícies com essa propriedade? Assim, com técnicas de teoria de singularidades podemos algebrizar essa propriedade e conseguir ver qual é a codimensão desse conjunto, ou qual a dimensão desse conjunto que encontramos dentro do conjunto todo e dependendo disso podemos dizer se esse conjunto é descartável, ou seja, que ele é quase que como um ponto isolado dentro do espaço todo.

Frases de Grandes Matemáticos:

- A matemática é a rainha das ciências e a aritmética é a rainha da matemática.
Ela muitas vezes se digna a prestar um serviço à astronomia e outras ciências naturais,
mas em todos os relacionamentos ela tem direito à primeira fila.

-Carl Gauss

XIII Workshop de Verão do DMA

O XIII Workshop de Verão em Matemática do DMA/UFV ocorreu de forma virtual dos dias 16 a 18 de fevereiro de 2022.

Breve histórico sobre o evento:

Desde 2008, o Departamento de Matemática da UFV oferece um Programa de Verão em Matemática. Nesses 13 anos, ofereceu cursos de Álgebra Linear, Análise na Reta, Análise no R^n, Álgebra e Medida e Integração, em nível de pós-graduação, além de minicursos e palestras de divulgação das áreas de pesquisa dos docentes do DMA.

Os períodos de verão também foram utilizados para reuniões entre pesquisadores do DMA e de outras instituições para discutir projetos e pesquisas em andamento.

Desde a edição de 2009 do Programa de Verão, vem sendo realizado um Workshop em Matemática, com o objetivo de promover o intercâmbio entre pesquisadores, estudantes de graduação e pós-graduação em Matemática da região com pesquisadores de Matemática de centros de excelência, ampliar a formação acadêmica de estudantes da graduação e da pós-graduação em Matemática e áreas afins e despertar o interesse de estudantes para a pesquisa e o ensino de Matemática.

A décima terceira edição do evento, realizada integralmente de modo remoto, foi um sucesso e contou com expressiva participação de professores e estudantes de cursos de graduação e de pós-graduação do DMA/UFV e de outras instituições do país e do exterior. Inclusive, justamente pelo fato do evento ter ocorrido de modo virtual, foi possível contar com a participação de palestrantes de instituições renomadas do país, como UnB, UFOP, UFMG, UEL, UFG e de instituições do exterior como Universidad de la República no Uruguai e University of California.

O evento contou com 11 palestras, 4 minicursos e 10 apresentações de vídeo-pôsteres. (Mais informações sobre o evento encontram-se no link XIII Workshop de Verão do DMA/UFV). Parabéns a todos os envolvidos!

Piadas Matemáticas:

- Por que o 3 e o 7 não podem se casar?
Porque são primos. O que é uma pena, pois eles formariam um casal 10.

- Como o matemático come o x-burguer?
Ele tira x e come o burguer.

Uma análise de um modelo íntegro-diferencial do tipo Lotka-Volterra com controle ótimo

Estudante: *Kamila Fernanda Lobo Madalena*
Orientador: *Prof. Dr. Anderson Luis Albuquerque de Araujo*
Ano de Obteção do título: 2021

Contextualização

Neste trabalho, apresentamos um modelo matemático do tipo Lotka-Volterra associado à modelagem e estudo do crescimento de câncer composto por um sistema de equações íntegro-diferenciais parciais parabólicas.

O modelo inicial de Lotka-Volterra é o que hoje chamamos de modelo predador-presa. O modelo de Lotka-Volterra desempenha um papel importante no estudo de sistemas ecológicos, pois foi o primeiro modelo proposto para tentar compreender como duas espécies estão relacionadas na dinâmica entre presas e predadores. De fato, é possível categorizar as interações entre duas espécies em três tipos, cada qual descrito por um modelo do tipo Lotka-Volterra generalizado. Assim pode-se ter:

a) **predação ou parasitismo**:

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= a_u u(t) - b_u u(t)v(t)\\ \frac{dv(t)}{dt} &= a_v u(t)v(t) - b_v v(t).\end{aligned} \tag{1}$$

b) **simbiose ou mutualismo** - ocorre quando as espécies envolvidas se beneficiam entre si:

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= u(t)\left(a + bv(t)\right)\\ \frac{dv(t)}{dt} &= v(t)\left(cu(t) + e\right).\end{aligned} \tag{2}$$

c) **competição** - ocorre quando as espécies envolvidas disputam algo entre si:

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= \rho_1 u(t)\left(1 - u(t) - a_{12}v(t)\right)\\ \frac{dv(t)}{dt} &= \rho_2 v(t)\left(1 - v(t) - a_{21}u(t)\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Consideramos os modelos apresentados anteriormente e com algumas adaptações aplicamos tais modelos para o estudo da interação (e competição, que generalisa (3)) entre células normais e células tumorais ou infectadas com ambas as populações apresentando processos difusivos e não-localidade nos termos de competição.

Sejam $T \in (0,\infty)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ e $(a,b) \in \mathbb{R}$ um intervalo aberto e limitado. Denotemos por $Q = (a,b) \times (0,T)$. Nesta dissertação estudamos o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} = D_N N_{xx} + \Big(r_N(x) - \\ \alpha_{NN}\displaystyle\int_a^b N dx - \alpha_{IN}\int_a^b I dx\Big)N + f, \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = D_I I_{xx} + \Big(r_I(x) - \alpha_{II}\displaystyle\int_a^b I dx \\ -\alpha_{NI}\displaystyle\int_a^b N dx\Big)I + g, \\ N_x(a,t) = N_x(b,t) = 0, \\ I_x(a,t) = I_x(b,t) = 0, \\ N(x,0) = N_0(x), I(x,0) = I_0(x). \end{cases} \tag{4}$$

em que N representa as células normais em um dado tecido do corpo humano e I representa as células infectadas neste tecido. O parâmetro $r_N(x)$ representa a reprodução total de células normais, e $r_I(x)$ representa a reprodução total de células infectadas, ambos são assumidos não-constantes.

Contribuições

Descrevemos resultados sobre existência e unicidade de soluções para (4). Além disso, estudamos um problema de controle ótimo, mostrando a existência de um controle ótimo e estabelecendo resultados de otimalidade para tal controle.

Teorema 1. *Suponhamos que $r_N, r_I \in L^\infty(a,b)$, $N_0, I_0 \in H^1(a,b)$ e $f, g \in L^4(Q)$ satisfazendo $N_0, I_0, f, g \geq 0$. Então, existe uma única solução $(N,I) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ do sistema (4). Mais ainda,*

$$\begin{aligned}&\|(N,I)\|_{W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)} \leq \\ &M_0\left(\|(f,g)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)} + \right.\\ &\left(1 + \|(f,g)\|_{L^4(Q)\times L^4(Q)} + \right.\\ &\left.\|(N_0,I_0)\|_{L^4(a,b)\times L^4(a,b)}\right)\\ &\left.\times\|(N_0,I_0)\|_{H^1(a,b)}\right),\end{aligned}$$

onde M_0 depende de α_{NN}, α_{IN}, α_{II}, α_{NI}, $\|r_N\|_{L^\infty}$, $\|r_I\|_{L^\infty}$, T, a e b.

Considerando o seguinte funcional de custo:

$$\begin{aligned}J[N,I;f,g] &:= \frac{\alpha_1}{2}\int_Q |N - N_d|^2\, dxdt\\ &+ \frac{\alpha_2}{2}\int_Q |I - I_d|^2\, dxdt + \frac{\beta_1}{2}\int_Q |f|^4 dxdt\\ &+ \frac{\beta_2}{2}\int_Q |g|^4 dxdt,\end{aligned} \tag{5}$$

com $N_d, I_d \in L^2(Q)$ funções dadas, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ satisfazendo $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $\beta_1, \beta_2 \geq 1$. Demonstramos a existência de um controle ótimo que minimize o funcional (5).

Suponha $\mathcal{U}_{ad}$ um subconjunto convexo, fechado e não-vazio do espaço de Banach $L^4(Q) \times L^4(Q)$, demonstramos ainda o seguinte resultado:

Teorema 2. *Suponha que $N_d, I_d \in L^2(Q)$. Então existe um controle ótimo $(f_{opt}, g_{opt}) \in \mathcal{U}_{ad}$ minimizando o funcional (5), isto é,*

$$J\left[N,I;f_{opt},g_{opt}\right] = \inf_{(\widehat{f},\widehat{g})\in\mathcal{U}_{ad}} J[R,S;\widehat{f},\widehat{g}]$$

onde $(N,I) = F\left(f_{opt}, g_{opt}\right)$ e $(R,S) = F(\widehat{f},\widehat{g})$.

Os teoremas apresentados são resultados originais desta dissertação de mestrado.

Referências:

[B]- BREZIS, H. **Function Analysis, Sobolev Spaces e Partial Differential Equations**. Springer, 2011.

[E]- EVANS, L. **Partial Differential Equations**. Berkeley: University of California, 1998.

[F]- FRIEDMAN, A. **Partial Differential Equations of Parabolic Type**. New York: Mineola, Dover Publications, 2008

Envelope de retas intermediárias de curvas planas

Autor: *Diego Vieira Trindade*
Professor substituto na UTFPR - Toledo,
Orientador: *Prof. Dr. Ady Cambraia Junior*
Ano de Obteção do título: 2021

Contextualização

No campo da geometria diferencial afim de uma curva γ plana, convexa e fechada, um estudo interessante está relacionado com um certo conjunto conhecido como envelope de uma família de retas chamadas de retas médias associadas à curva γ.

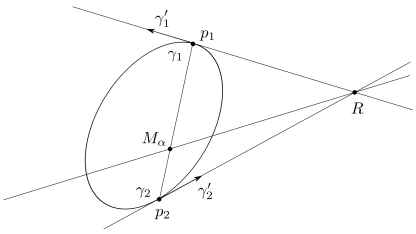
Nesse sentido, os resultados apresentados a seguir estão relacionados com a generalização do envelope das retas médias, conjunto o qual chamamos de envelope de retas intermediárias.

Precisamente, o *Envelope das Retas Intermediárias* (*EIL*) é composto por 3 outros conjuntos: o *Affine Envelope of Intermediate Lines (AEIL)*, o qual está associado aos pares de pontos (p_1, p_2) de γ com tangentes não paralelas; o *Intermediate-Parallel Tangent Locus (IPTL)*, associado aos pares de pontos (p_1, p_2), $p_1 \neq p_2$, com tangentes paralelas e o *Coincident Tangent Lines (CTL)*, o qual está relacionado com o caso limite, quando p_1 tende a p_2. Tais conjuntos foram recentemente apresentados por Cambraia Junior, Salarinoghabi e Trindade no artigo **[2]** e esse assunto foi o tema central da dissertação apresentada em 2021 por este que vos escreve.

A seguir, serão apresentados os resultados a respeito do envelope das retas intermediárias quando as tangentes nos pontos p_1 e p_2 da curva γ são concorrentes e distintas. Fica o convite ao leitor, visitar a dissertação **[3]** para acompanhar os detalhes técnicos e os outros dois casos.

Resultados

Definição 1. Dada uma curva oval γ, a **reta intermediária** de $p_1 = \gamma_1(t)$ e $p_2 = \gamma_2(s)$, quando l_1 e l_2 são concorrentes, isto é, $t \neq s$, é a reta que passa pelo ponto intermediário $M_\alpha = (1-\alpha)\gamma_1(t) + \alpha\gamma_2(s)$, $\alpha \in (0,1)$, e R o ponto de intersecção de l_1 com l_2.



O primeiro passo é encontrarmos a equação da reta intermediária. Para tanto, usaremos o funcional linear definido a seguir.

Definição 2. Os conormais ν_1 e ν_2 referentes a cada um dos pontos p_1 e p_2, respectivamente, são $\nu_1(u) = \frac{[\gamma_1', u]}{[\gamma_1', \xi_1]^{\frac{1}{3}}}$ $\nu_2(u) = \frac{[\gamma_2', u]}{[\gamma_2', \xi_2]^{\frac{1}{3}}}$, $u \in \mathbb{R}^2$, de forma que $\nu_1(\gamma_1'(t)) = 0$ e $\nu_1(\xi_1) = 1$, $\nu_2(\gamma_2'(s)) = 0$ e $\nu_2(\xi_2) = 1$, onde ξ_1 e ξ_2 são os normais afins nos pontos p_1 e p_2, respectivamente.

Lema 3. *A equação da reta intermediária é dada por:*

$$(1-\alpha)\nu_2(C)\nu_1(X - M_\alpha) + \alpha\nu_1(C)\nu_2(X - M_\alpha) = 0,$$

onde $\alpha \in (0,1)$ e $C = p_2 - p_1$ é a corda ligando os pontos p_1 e p_2.

Considere a família $F : \gamma_1 \times \gamma_2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por: $F(s,t,X) = (1-\alpha)\nu_2(C)\nu_1(X - M_\alpha) + \alpha\nu_1(C)\nu_2(X - M_\alpha)$, com $\alpha \in (0,1)$.

Logo, o envelope $\mathcal{E}_F$ da família F é: $\mathcal{E}_F = \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists (s,t);\ F = F_t = F_s = 0 \text{ em } (s,t,X)\}$.

Teorema 4. *A condição necessária e suficiente para que um par (s,t) determine um ponto no envelope das retas intermediárias é que $\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C)$, onde $\lambda = \left(\frac{(1-\alpha)\nu_1(\gamma_1'')\nu_1^2(\gamma_2')}{\alpha\nu_2(\gamma_2'')\nu_2^2(\gamma_1')}\right)^{\frac{1}{3}}$.*

De posse da condição do teorema anterior, encontramos uma parametrização para um ponto $X \in \mathcal{E}_F$.

Teorema 5. *Seja F a família de retas intermediárias. Um ponto X pertencente ao envelope de retas intermediárias com tangentes não paralelas é dado por:*

$$X - M_\alpha = \frac{\alpha\nu_1(C)}{\alpha\nu_2(\gamma_1')\nu_1(C) + b\nu_2^2(C)}\left((1-\alpha)\nu_2(C)\gamma_1' - \frac{\alpha\nu_1(C)\nu_2(\gamma_1')}{\nu_1(\gamma_2')}\gamma_2'\right).$$

O modelo local abaixo pode ser uado para estudar a estrutura local do envelope das retas intermediárias. Para γ uma curva plana, suave e fechada, $p_1 = \gamma(t)$ e $p_2 = \gamma(s)$ dois pontos distintos de γ, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(t, \frac{1}{2}t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 + O_6(t)\right), \\ p_2 &= \left(s, b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + b_4s^4 + b_5s^5 + O_6(s)\right), \end{aligned}$$

em que $b_0 > 0$, $a_3 > 0$, $b_1^2 - b_0 > 0$ e $O_6(t)$ (resp. $O_6(s)$) representa os termos de ordem maiores ou iguais a 6 em relação ao parâmetro t (resp. s).

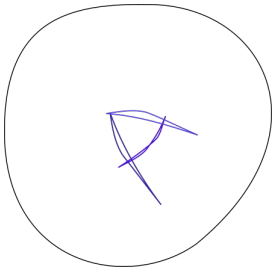
Teorema 6. *Dada uma curva plana γ, suponha que dois pontos de γ, p_1 e p_2, satisfazem a parametrização local anterior, de modo que não tenham tangentes paralelas. Assim:*

i) Se p_1 e p_2 não são pontos de inflexão, a condição de regularidade do envelope da família de retas intermediárias é que

$$\begin{cases} \alpha \neq \frac{b_0}{b_1^2}, 1 \\ b_3 \neq \frac{(\alpha-1)(-6\alpha a_3 b_0 b_1^2 + 4\alpha a_3 b_0^2 - 3\alpha b_1^3 - 2a_3 b_0^2)}{2\alpha b_0(6\alpha a_3 b_0 b_1 + 3\alpha b_1^2 + 2\alpha b_0 - b_0)}, \end{cases}$$

ii) Se p_1 é um ponto de inflexão, então o envelope da família de retas intermediárias é regular em $s = 0$ se $b_3 \neq 0$. De forma equivalente, se p_2 é um ponto de inflexão na origem.

A seguir, temos a curva $\gamma(t) = (0.1\cos(2\pi t) + \cos(\pi t), 0.1\sin(2\pi t + 1) + \sin(\pi t))$, em preto, e o envelope de retas intermediárias com tangentes concorrentes, em azul, quando $\alpha = 0.6$



Resultados mais aprofundados da Teoria de Singularidades nos mostram que quando o Envelope das retas intermediárias deixa de ser regular, ou seja, quando possui uma singularidade, tal singularidade é do tipo A_2 e, localmente, o envelope é difeomorfo à uma cúspide.

Os detalhes técnicos dessa constatação podem ser encontrados em **[1]**.

Referências:

[1] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. **Curves and Singularities**: A geometrical introduction to singularity theory. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 340 p.

[2] CAMBRIA JUNIOR, A.; SALARINOGHABI, M.; TRINDADE, D. **Envelope of intermediate lines of a planar curve.** Results Math. v. 75, n. 87, 2020.

[3] TRINDADE, D. **Sobre envelopes de retas intermediárias de curvas planas**. 2021. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2021.

Desafios Matemáticos

André Junqueira: andre.junqueira@ufv.br

Nessa edição vamos abordar o tema equações funcionais, que são equações cujas incógnitas são funções a serem determinadas. Note que equações diferenciais ou integrais são um tipo particular de equações funcionais que não abordaremos aqui, já que são estudadas nos cursos de graduação. Uma atenção especial deve ser dada sobre as condições da função f (contínua, diferenciável,...). Vamos citar agora algumas equações funcionais importantes na teoria:

1. A Primeira Equação de Cauchy: Determinar todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas tais que:
$$f(x+y) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
2. A Segunda Equação de Cauchy: Determinar todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas tais que:
$$f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
3. A Terceira Equação de Cauchy: Determinar todas as funções $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ contínuas tais que:
$$f(xy) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$
4. A Quarta Equação de Cauchy: Determinar todas as funções $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ contínuas tais que:
$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}_+.$$
5. A Primeira Equação de D'Alembert Poisson: Determinar todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas tais que:
$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y),$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}.$$
6. A Segunda Equação de D'Alembert Poisson: Determinar todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas tais que:
$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2-[f(y)]^2,$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Equações funcionais são bastante cobradas em questões de Olimpíadas de Matemática e também podem aparecer, quando menos se espera, em diversos temas de pesquisa matemática como, por exemplo, a equação cohomológica em sistemas dinâmicos entre outras. Sendo assim, aprender técnicas de equações funcionais pode ser bastante útil. Para a solução das equações acima e mais informações sobre o tema ver a referência bibliográfica.

Desafio: Determine todas as funções $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tais que:
$$f(z+w) = f(z) + f(w), \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Referências:

E- Costas Efthimiou; Introduction to Functional Equations, Department of Physics, University of Central Florida.

Piadas Matemáticas:

- O que o x disse ao y na equação $x + y = z$?
Aceite. Você não é a solução e sim parte do problema.

- As retas paralelas têm tanto em comum.
É uma pena que nunca se encontrarão!

NOTÍCIAS DO DMA

Canal do Jornal no YouTube

JMAT agora tem um canal no YouTube no qual vamos postar vídeos associados com cada edição do jornal e a entrevista com a professora Simone já pode ser encontrada por lá. Se inscrevam e ativem o sininho no seguinte link JMAT UFV

O Processo Seletivo

Estão abertas as inscrições para o processo seletivo para ingresso no curso de Mestrado em Matemática da UFV até o dia 15/07/2022. Para mais informações acesse o site Pós-graduacão

OBMEP

A OBMEP expandiu sua tradicional competição para incluir também alunos do segundo e terceiro ano do ensino fundamental e que está sendo chamada de Olimpíada Mirim de Matemática. As inscrições para essa nova modalidade estão abertas até o dia 16 de junho no link OBMEP

SOTO 80

Para homenagear a memória do professor Jorge Sotomayor está sendo organizado, na Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), um conjunto de seminários, realizados de forma remota, ao longo do primeiro semestre de 2022, intitulado SOTO 80. Link do site

Referências:

1- $https://www.lifeder.com/frases-matematicas/$
2- $https://planetapi.es/2017/01/29/frases-de-matematicas-gauss/$
3- $https://chalababa.com.br/piadas-matematicas-para-rir-e-aprender/$

Agradecimento: Agradecemos o apoio dos membros da Comissão do JMat UFV e os estudantes colaboradores.