UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

BRUNO DE SOUSA FERREIRA

EMPARELHAMENTOS DE ARESTAS DE POLÍGONOS ASSOCIADOS A GRAFOS REGULARES

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2020

BRUNO DE SOUSA FERREIRA

EMPARELHAMENTOS DE ARESTAS DE POLÍGONOS ASSOCIADOS A GRAFOS REGULARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Mercio Botelho Faria

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T

F383e
2020

Ferreira, Bruno de Sousa, 1995-
Emparelhamentos de arestas de polígonos associados a grafos regulares / Bruno de Sousa Ferreira. – Viçosa, MG, 2020.
136 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Mercio Botelho Faria.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 135-136.

1. Geometria hiperbólica. 2. Polígonos. 3. Teoria dos grafos. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 516.154

BRUNO DE SOUSA FERREIRA

EMPARELHAMENTOS DE ARESTAS DE POLÍGONOS ASSOCIADOS A GRAFOS REGULARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 16 de dezembro de 2020.

Assentimento:

Bruno de Sousa Ferreira

Bruno de Sousa Ferreira
Autor

Mercio Botelho Faria
Orientador

Dedico este trabalho aos meus pais,
Enilson e Maria.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por guiar-me nos momentos de incerteza e alimentar minhas esperanças de alcançar o final!

Aos meus familiares, a quem sempre pude buscar apoio durante toda minha formação acadêmica.

À minha namorada Nathalia, que esteve a meu lado nos momentos mais difíceis, com quem sempre pude desabafar e buscar consolo.

Aos meus professores de graduação Silvino e Jossara, pelo amizade construída no IFMG-SJE e pelo incentivo a enfrentar essa jornada.

Aos meus colegas de curso, pelo companheirismos e amizade ao longo do curso. Foram muitos momentos de estudos, tensões e até de descontração que passamos juntos e serão inesquecíveis, principalmente das conversas na salinha 306.

Agradeço a meu orientador Mercio, pela atenção, paciência, confiança e principalmente, pelas orientações e conhecimentos compartilhados.

Agradeço aos membros do corpo docente do DMA-UFV, pela cordialidade e disponibilidade em esclarecer dúvidas.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro de amparo a pesquisa. Graças a este apoio pude dedicar-me exclusivamente às atividades do curso.

Provamos através da lógica, mas
descobrimos a partir da intuição.

Henri Poincaré

Resumo

FERREIRA, Bruno de Sousa, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2020. **Emparelhamentos de arestas de polígonos associados a grafos regulares**. Orientador: Mercio Botelho Faria.

Este trabalho tem como objetivo descrever emparelhamentos de arestas para polígonos hiperbólicos, associados a grafos regulares, mergulhados em superfícies compactas e orientáveis. Os emparelhamentos descritos determinam um conjunto de isometrias do espaço hiperbólico, que é um conjunto de geradores de um grupo Fuchsiano Γ em que o espaço orbital $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma superfície compacta e orientável. Explicitamos todos os emparelhamentos de arestas associados a grafos regulares, mergulhados em uma superfície compacta e orientável de gênero 2. Construímos grafos com estrutura indutiva os quais utilizamos para obter novos grafos que geram emparelhamentos para polígonos da tesselação $\{8g-4, 4\}$ e assim explicitamos emparelhamentos generalizados para polígonos da tesselação $\{8g-4, 4\}$.

Palavras-chave: Emparelhamento de Arestas. Grafos. Geometria Hiperbólica.

Abstract

FERREIRA, Bruno de Sousa, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2020. **Side-pairings of polygons associated with regular graphs**. Orientador: Mercio Botelho Faria.

This work aims to describe side-pairings for hyperbolic polygons, associated with regular graphs, imbedded on compact orientable surfaces. The side-pairings described determine a set of isometry of hyperbolic space, which is a set of generators of a Fuchsian group Γ where the $\frac{\mathbb{H}}{\Gamma}$ orbital space is a compact orientable surface. We explain all side-pairings associated with regular graphs, imbedded on a compact orientable surface of genus 2. We build graphs which inductively structured which we use to obtain new graphs that generate side-pairings for polygons of the tesselation $\{8g-4, 4\}$ and thus we explain generalized side-pairings for tesselation polygons $\{8g-4, 4\}$.

Keywords: Side-pairings. Graphs. Hyperbolic Geometry.

Sumário

Introdução **10**

1 Topologia das Superfícies **12**

1.1 Espaço Topológico e Variedades 12

1.2 Estruturas Simpliciais 15

1.2.1 Simplexos em $\mathbb{R}^n$ 16

1.2.2 Complexos Simpliciais 17

1.2.3 Complexos Simpliciais Abstratos 20

1.3 Topologia Quociente e Superfícies Compactas 22

1.3.1 Topologia Quociente 22

1.3.2 Superfícies Compactas 24

1.3.3 Característica de Euler 31

2 Geometria Hiperbólica **34**

2.1 Transformações de Möbius 34

2.2 O Modelo $\mathbb{H}^2$ para a Geometria Hiperbólica 39

2.3 O Modelo $\mathbb{D}^2$ para a Geometria Hiperbólica 45

2.4 Grupos Fuchsianos 48

3 Teoria de Grafos **54**

3.1 Grafos 54

3.1.1 Classes Especiais de Grafos 55

3.1.2 Representações Matriciais 59

3.1.3 Isomorfismos e Automorfismos de Grafos 61

3.1.4 Representação Topológica de Grafos 62

3.2 Grafos em Superfícies 63

3.2.1 Mergulho de grafos em Superfícies 63

3.2.2 Decomposição em faixas e Sistemas de rotação 65

4 Emparelhamento de aresta de polígonos hiperbólicos associados a grafos **70**
4.1 Emparelhamentos para P_{12}, P_{10} e P_8 70
4.1.1 Emparelhamentos para P_{12} 77
4.1.2 Emparelhamentos para P_{10} 97
4.1.3 Emparelhamentos para P_8 109
4.2 Emparelhamentos Generalizados para P_{8g-4} 111

Considerações Finais **134**

Referências Bibliográficas **135**

Introdução

Este trabalho tem como objetivo descrever emparelhamentos de arestas para polígonos hiperbólicos, associados a grafos regulares. É conhecido na literatura que o emparelhamento de arestas de um polígono hiperbólico determina um grupo discreto Γ, de isometrias do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2$, também denominado grupo Fuchsiano. A ação de tal grupo tessela o espaço hiperbólico e sob determinadas condições, o espaço orbital $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma superfície compacta e orientável.

Iniciamos descrevendo, no Capítulo 1 aspectos topológicos das superfícies compactas, onde apresentamos os conceitos de Espaço Topológico, Variedades e Estruturas Simpliciais. Nesse contexto, damos atenção especial à Topologia Quociente e aos espaços quocientes, tratados na Seção 1.3.

No Capítulo 2 apresentamos o Modelos de Lobachevski e o Modelo de Poincaré para a Geometria Hiperbólica. Fazemos também uma breve discussão sobre o grupo de isometrias do Espaço Hiperbólico e damos um destaque especial aos subgrupos discretos de isometrias, conhecidos na literatura como Grupos Fuchsianos. Os conceitos tratados no capítulo culminam no teorema de Poincaré para polígonos.

No Capítulo 3, apresentamos as definições básicas e classes especiais de grafos. Fazemos o estudo de grafos em superfícies e sistemas de rotações para grafos. Esses conceitos serão as principais ferramentas para a construção dos emparelhamentos.

No Capítulo 4, apresentamos nossa contribuição a qual fazemos uso dos conceitos da Teoria de Grafos para determinar emparelhamentos de aresta para polígonos regulares com 8, 10 e 12 arestas e emparelhamentos generalizados. Primeiramente, na Seção 4.1 utilizamos o método do mergulho de grafos em superfícies para determinar todos os emparelhamentos para P_8, P_{10} e P_{12}. Esse método foi utilizado em [13] para determinar os possíveis padrões de emparelhamento para um polígono hiperbólico com dezoito arestas. Salientamos que em [8] e em [23] são apresentados alguns desses emparelhamentos.

Já na Seção 4.2 construímos emparelhamentos generalizados para polígonos da tesselação hiperbólica $\{8g-4, 4\}$ associados a grafos 4-regulares. Em [23] são apresentados alguns emparelhamentos generalizados para polígonos dessa tesselação. Aqui

construímos novos emparelhamentos generalizados estabelecidos por meio da extensão de grafos 4-regulares.

Capítulo 1

Topologia das Superfícies

Neste capítulo descreveremos aspectos básicos da teoria das superfícies. Nos baseamos, principalmente, nas obras [15], [16],[18], [19] e [20]. para este tratamento topológico.

1.1 Espaço Topológico e Variedades

Nesta seção descreveremos aspectos relacionados a espaços topológicos e definimos variedades topológicas. Iniciemos definindo um espaço Topológico.

Definição 1.1 (Espaço Topológico)**.** *Seja X é um conjunto não vazio, uma topologia em X é uma coleção τ de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes condições:*

1. *X e $\emptyset$ são elementos de τ;*
2. *τ é fechado sob a interseção finita. Ou seja, se $U_1, U_2, \ldots, U_n$ estão em τ, então a interseção $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ está em τ;*
3. *τ é fechado sob a união arbitrária. Ou seja, se $(U_\lambda)_{\lambda \in A}$ é uma família (finita ou infinita) de elementos de τ, então a união $\cup_{\lambda \in A} U_\lambda$ está em τ.*

Um par (X, τ), constituído de um conjunto X não vazio e uma topologia τ sobre X é denominado Espaço Topológico.

Sendo X um conjunto dotado de uma topologia τ diremos que os elementos de X são seus pontos e os subconjuntos de X que compõem a topologia τ são chamados de subconjuntos abertos de X. Diremos que uma topologia τ_1 é mais fina que uma topologia τ_2 se, $\tau_1 \supset \tau_2$, ou seja, cada conjunto da coleção τ_2 é também um conjunto da coleção τ_1.

Com essas observações podemos expressar as três condições da Definição 1.1 da seguinte forma:

- X e $\emptyset$ são abertos de X;
- A interseção de uma família finita de subconjuntos abertos de X é também um subconjunto aberto de X;
- A união arbitrária de conjuntos abertos de X é também um conjunto aberto de X.

Dizemos que um subconjunto Y, aberto de X, é uma vizinhança aberta de um ponto $p \in X$ se $p \in Y$. De modo análogo dizemos que Y é vizinhança aberta de um subconjunto K se $K \subset Y$.

Além da noção de conjunto aberto, outro tipo de conjunto que desempenha papel relevante em um Espaço Topológico são os conjuntos fechados. Se X é um Espaço Topológico, um subconjunto F é dito subconjunto fechado de X se seu complementar $X \setminus F$ é um subconjunto aberto de X.

Segue da definição de Espaço Topológico as seguintes propriedades:

- X e $\emptyset$ são subconjuntos fechados de X;
- A interseção arbitrária de subconjuntos fechados de X é um subconjunto fechado de X;
- A união finita de subconjuntos fechados de X é um subconjunto fechado de X.

Uma topologia de um conjunto X pode ser definida descrevendo a coleção de seus subconjuntos fechados, desde que ela satisfaça as três condições acima, pois os conjuntos abertos do Espaço X são exatamente os complementares dos conjuntos fechados de X.

Suponhamos que X seja um Espaço Topológico e Y um subconjunto de X. Definimos o Fecho de Y em X, denotado como $\overline{Y}$, por;

$$\overline{Y} = \bigcap \Big\{ B \subseteq X \mid B \supseteq Y \text{ e } B \text{ é fechado em } X \Big\}.$$

Definimos o interior de Y em X, denotado por $Int\ Y$, como;

$$Int\ Y = \bigcup \Big\{ D \subseteq X \mid D \subseteq Y \text{ e } D \text{ é aberto em } X \Big\}.$$

Segue das propriedades dos conjuntos abertos em um espaço topológico que $Int\ Y$ é um subconjunto aberto do espaço. Decorre das propriedades dos conjuntos fechados que $\overline{Y}$ é um subconjunto fechado do espaço. O exterior de um subconjunto Y, denotado por $Ext\ Y$, de um espaço topológico X é o conjunto $Ext\ Y = X \setminus \overline{Y}$ e a fronteira de Y, denotado por ∂Y é o conjunto $\partial Y = X \setminus (Int\ Y \cup Ext\ Y)$.

Se A e B são espaços topológicos, uma aplicação $g : A \longrightarrow B$ é dita contínua se para cada subconjunto aberto $U \subseteq B$, a pré-imagem $g^{-1}(U)$ for um aberto de A. A continuidade de aplicações entre espaços topológicos também pode ser caracterizada pela pré-imagem de conjuntos fechados. A seguinte proposição fundamenta esta caracterização.

Proposição 1.1. *Uma aplicação entre espaços topológicos é contínua se e somente se, a pré-imagem de cada subconjunto fechado for também um subconjunto fechado.*

Um homeomorfismo entre dois espaços topológicos é uma aplicação bijetiva, contínua e cuja a inversa é também contínua. Dados dois espaços topológicos X e Y tais que existe homeomorfismo $\phi : X \longrightarrow Y$ dizemos que X é homeomorfo a Y ou que X e Y são topologicamente equivalentes.

Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos abertos de um espaço X é dita uma **cobertura aberta** de X (ou cobrindo X), se a união dos elementos de $\mathcal{A}$ é igual a X.

Definição 1.2. *Um espaço X é dito **compacto** se toda cobertura aberta de X admitir uma subcobertura finita de X.*

Um espaço topológico X é dito ser Espaço de Hausdorff se para quaisquer dois de seus pontos p_1 e p_2, existir vizinhança U_1 de p_1 e U_2 de p_2 com $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. A condição de ser Hausdorff diz a grosso modo que quaisquer dois pontos desse espaço podem ser separados por conjuntos abertos.

Uma base para uma topologia em um conjunto X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos abertos de X, chamados de elementos básicos, que satisfaz a seguinte condição: **todo subconjuntos aberto $A \subset X$ se exprime como a união de elementos básicos de $\mathcal{B}$.**

Se $\mathcal{B}$ satisfaz esta condição, definimos a topologia τ gerada por $\mathcal{B}$ da seguinte maneira: um subconjunto U de X é dito aberto em X se para cada $x \in U$, existir um elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset U$. Se existir uma correspondência biunívoca $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow L \subseteq \mathbb{N}$ diremos que $\mathcal{B}$ é uma base enumerável.

Definição 1.3. *Um espaço topológico M é dito ser localmente Euclidiano de dimensão n se todo ponto de M possuir vizinhança em M, homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.*

A seguinte proposição nos permite substituir os conjuntos abertos da definição acima por bolas abertas em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.2. *Um espaço topológico M é localmente Euclidiano se, e somente se, uma das duas condições abaixo é satisfeitas.*

(a) Cada ponto de M possui uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$.

(b) Cada ponto de M possui vizinhança homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.4. *Uma variedade topológica n-dimensional M é um espaço topológico de Hausdorff localmente euclidiano com base enumerável.*

Diremos a partir daqui que uma 1-variedade C é uma curva e uma 2-variedade S (ou variedade bidimensional) é uma superfície. Um exemplo de variedade n-dimensional é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. A esfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ é um exemplo de superfície. A seguinte proposição nos permite citar mais exemplos de variedades a partir de uma variedade conhecida.

Proposição 1.3. *Cada subconjunto aberto de uma n-variedade é também uma n-variedade.*

Uma variedade n-dimensional com bordo é um Espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, tal que cada ponto tem vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ ou ao subconjunto aberto de $\overline{\mathbb{H}^n} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$, considerando $\overline{\mathbb{H}^n}$ como um espaço topológico com a topologia Euclidiana. O bordo de uma n-variedade é o conjuntos de todos os seus pontos que têm vizinhança homeomorfa a $\overline{\mathbb{H}^n}$. Notemos que uma n-variedade com bordo satisfaz a Definição 1.4 se e somente se, seu bordo é vazio. Como exemplo de uma variedade bidimensional com bordo, citamos a faixa de Möbius.

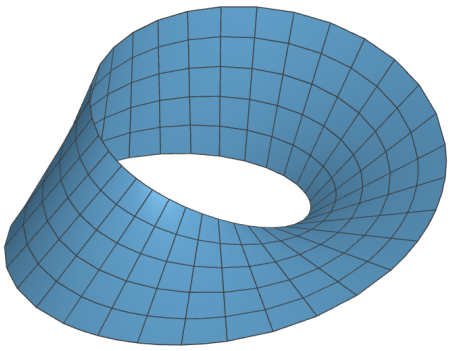

Figura 1.1: Faixa de Möbius.

Entendemos por superfície fechada, uma superfície compacta cujo o bordo é vazio, tal como a Esfera S^2, o Toro e a Garrafa de Klein.

1.2 Estruturas Simpliciais

Nessa seção trataremos das estruturas básicas que utilizaremos para tratar superfícies. Os conceitos aqui apresentados podem se consultados pelo leitor em [15], [16] ou [19].

1.2.1 Simplexos em $\mathbb{R}^n$

Consideremos $W = \{v_0, \ldots, v_k\}$ um subconjunto de ponto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Diremos que os pontos de W são geometricamente independentes (ou de maneira abreviada, independentes) se o conjunto $\{v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0\}$ é linearmente independente.

Definição 1.5. *Seja $W = \{v_0, \ldots, v_k\}$ um subconjunto de $k+1$ pontos do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, independentes. O k-simplexo, denotado por $s_k = \langle v_0, \ldots, v_k \rangle$, é o conjunto de todas as combinações convexas dos pontos de W. Ou seja,*

$$s_k = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i \cdot v_i \mid t_i \geq 0 \; e \; \sum_{i=0}^{k} v_i = 1 \right\},$$

com a topologia herdada do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Para cada ponto $x = \sum_{i=0}^{k} t_i \cdot v_i \in s_k$, os números t_i são chamados coordenadas baricêntricas de x com respeito a $v_0, \ldots, v_n$. Cada ponto v_i é chamado vértice do simplexo. O número k é dito a dimensão do simplexo.

Um k-simplexo geométrico é o menor invólucro convexo (fecho convexo) de $k+1$ pontos (ou vértices) independentes no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Seja $W = \{v_0, \ldots, v_k\}$ um subconjunto de pontos independentes de $\mathbb{R}^n$ e $s_k = \langle v_0, \ldots, v_k \rangle$ o k-simplexo gerado por W. Cada simplexo gerado por um subconjunto não-vazio de W é denominado uma **face** do simplexo s_k. Os 0-simplexos são denominados **vértices** de s_k e correspondem a cada v_i, os 1-simplexos são denominados **arestas** de s_k e os $k-1$-simplexos são denominados faces de fronteira. Cada face de dimensão $d < k$ é denominada face própria do simplexo s_k. A união de todas as faces próprias de um simplexo é denominado **bordo** do simplexo e será denotado por $\partial(s_k)$. O **interior** de s_k é o conjunto $Int\, s_k = s_k \setminus \partial(s_k)$.

A seguinte proposição formaliza algumas propriedades dos simplexos.

Proposição 1.4. *Seja s_k o simplexo determinado pelo conjunto de pontos geometricamente independentes $\{v_0, \ldots, v_k\}$. Se $x \in s_k$, denotemos suas coordenadas baricêntricas por $\{t_i(x)\}$, que são determinadas unicamente pelas condições $x = \sum_{i=0}^{k} t_i \cdot a_i$ e $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$. Então as seguintes propriedades seguem:*

(a) As coordenadas baricêntricas $t_i(x)$, com respeito a $v_0, \ldots, v_k$, são funções contínuas de x.

(b) s_k é a união de todos os segmentos de reta ligando v_0 a pontos do simplexo $s = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ e quaisquer dois desses segmentos se intersectam somente no ponto v_0.

(c) s_k é um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$ e é igual a interseção de todos os subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ contendo $v_0, \ldots, v_k$.

(d) *Dado um simplexo* $s_k = \langle v_0, \ldots, v_k \rangle = \langle c_0, \ldots, c_k \rangle$, *então* $\{v_0, \ldots, v_k\} = \{c_0, \ldots, c_k\}$. *Em outros termos, exite um e, somente um conjunto geometricamente independentes que gera* s_k.

(e) *Int* s_k *é um subconjunto convexo e aberto no plano* P *e seu fecho é* s_k. *Além disso, Int* s_k *é igual a união de todos os segmentos de reta abertos ligando* v_0 *pontos do interior de* $s = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

(f) *Existe um homeomorfismo de* s_k *com a bola unitária* B^k *que leva* $\partial(s_k)$ *sobre a esfera unitária* S^{n-1}.

Exemplo 1.1. *Consideremos* $W = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ *em* $\mathbb{R}^3$ *onde* $v_0 = (0,0,0)$, $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0)$ *e* $v_3 = (1,0,0)$ *e o simplexo gerado por* W. *Temos um simplexo de dimensão* 3: $\langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$, *o simplexo gerado por* W. *Quatro complexos de dimensão* 2: $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$, $\langle v_0, v_1, v_3 \rangle$, $\langle v_0, v_2, v_3 \rangle$ *e* $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. *Seis simplexos de dimensão* 1: $\langle v_0, v_1 \rangle$, $\langle v_0, v_2 \rangle$, $\langle v_0, v_3 \rangle$, $\langle v_1, v_2 \rangle$, $\langle v_1, v_3 \rangle$ *e* $\langle v_2, v_3 \rangle$. *Quatro simplexos de dimensão* 0: $\langle v_0 \rangle$, $\langle v_1 \rangle$, $\langle v_2 \rangle$ *e* $\langle v_3 \rangle$.

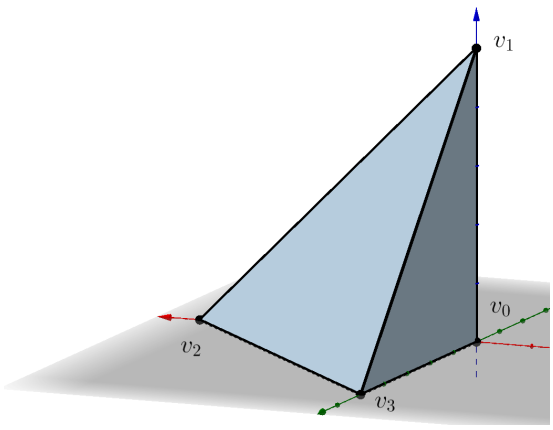

Figura 1.2: Representação geométrica do Exemplo 1.1.

1.2.2 Complexos Simpliciais

Definição 1.6. *Um* ***Complexo Simplicial Geométrico*** K *é uma coleção de simplexos que satisfaz as seguintes condições:*

(a) *Cada face de um simplexo em* K *também está em* K;

(b) *A intercessão de dois simplexos é um simplexo de* K.

Uma subcoleção de um complexo K que satisfaz a Definição 1.6 é chamado um **subcomplexo** de K. Um subcomplexo que é a coleção de todos os simplexos de

dimensão no máximo p é denominado p-complexo ou p-esqueleto de K e será denotado por $K^{(p)}$. Um complexo K é finito se possui quantidade finita de simplexos.

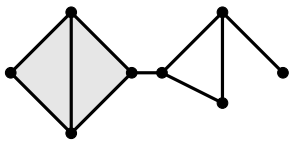

Figura 1.3: Complexo simplicial geométrico em $\mathbb{R}^2$.

Consideremos K um complexo simplicial geométrico e $|K| = \bigcup_{s \in K} s$, o subconjunto de $\mathbb{R}^n$, união de todos os simplexos de K. Dando a cada simplexo s a topologia herdada de $\mathbb{R}^n$, definimos uma topologia τ para $|K|$ afirmando que um subconjunto A de $|K|$ é fechado de $|K|$ se e somente se $A \cap s$ é fechado em s para cada $s \in K$. O espaço $|K|$ com a topologia τ é chamado de espaço subjacente de K, ou o politopo de K ou poliedro de K.

De acordo com [19], a topologia τ definida acima é mais fina que a topologia de $|K|$, herdada como subespaço de $\mathbb{R}^n$. De fato, se F é fechado em $|K|$ com a topologia de subespaço, então $F = A \cap |K|$ para algum conjunto A fechado em $\mathbb{R}^n$. Segue então que $A \cap s$ é fechado em s para cada simplexo s em K e assim $F = A \cap |K|$ é fechado em $|K|$ pela topologia τ.

As duas topologias de $|K|$, τ e a topologia herdada como subespaço de $\mathbb{R}^n$, coincidem quando K é finito. Com efeito, suponhamos K finito e $F \subset |K|$ fechado. Então, $F \cap s$ é fechado em s e em $\mathbb{R}^n$ para cada $s \in K$. Como F é a união finita de conjuntos $F \cap s$ e o conjunto F é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.5. *Uma aplicação $f : |K| \longrightarrow X$ é contínua se, e somente se, a restrição de f a cada simplexo $s \in K$ é contínua.*

Se f é contínua, então a restrição $f|_s$ de f a cada simplexo $s \in K$ é contínua uma vez que cada simplexo s é um subespaço de K. Reciprocamente, suponha cada mapa $f|_s$ contínuo. Se F é fechado em X, então $f^{-1}(F) \cap s = (f|_s)^{-1}(F)$ é fechado em s pela continuidade de $f|_s$. Portanto f é contínua pela Proposição 1.1.

■

Agora apresentaremos uma definição que nos fornecerá argumento para a demonstração da Proposição 1.6.

Definição 1.7. *Se x é um ponto de um poliedro $|K|$, x é interior a exatamente um simplexo s de K, cujos os vértices são $v_1, \ldots, v_n$. Então, $x = \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot v_i$, onde $t_i > 0$ e $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$. Se v é um*

vértice arbitrário de K, definimos a coordenada baricêntrica $t_v(x)$ de x com respeito a v por:

$$t_v(x) = \begin{cases} 0, & se\ v \neq v_i; \\ t_i, & se\ v = v_i. \end{cases}$$

para algum i.

Para v fixado, a função $t_v(x)$ é contínua quando restrita a um simplexo fixado s, uma vez que $t_v(x) \equiv 0$ ou igual a coordenada baricêntrica de x com respeito ao vértice v de s, no sentido da Definição 1.5. Portanto $t_v(x)$ é contínua pela Proposição 1.5.

Proposição 1.6. *$|K|$ é Hausdorff.*

Suponhamos $x_0 \neq x_1$ em $|K|$, então existe pelo menos um vértice v tal que $t_v(x_0) \neq t_v(x_1)$. Tomando $r > 0$ entre um desses números, digamos $t_v(x_0)$, teremos que os conjuntos $\{x \mid t_v(x) < r\}$ e $\{x \mid t_v(x) > r\}$ são subconjuntos abertos disjuntos que satisfazem a condição de Hausdorff.

■

Proposição 1.7. *Seja K e L complexos e $f : K^{(0)} \longrightarrow L^{(0)}$ uma aplicação. Suponha que sempre que os vértices $v_0, \ldots, v_n$ de K geram um simplexo de K, os pontos $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ são os vértices de um simplexo de L. Então f pode ser estendido como um mapa contínuo $g : |K| \longrightarrow |L|$ tal que:*

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot v_i \longmapsto g(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot f(v_i).$$

Chamamos g mapa simplicial (linear) induzido pelo mapa de vértices f.

Proposição 1.8. *Suponhamos $f : K^{(0)} \longrightarrow L^{(0)}$ uma correspondência tal que os vértices $v_0, \ldots, v_n$ são vértices de um simplexo em K se, e somente se, $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ geram um simplexo de L. Então o mapa simplicial induzido $g : |K| \longrightarrow |L|$ é um homeomorfismo.*

Diremos que g é um homeomorfismo simplicial, ou isomorfismo entre K e L.

Definição 1.8. *Um espaço C é dito uma célula (fechada) de dimensão n se é homeomorfo ao disco n-dimensional $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$. C é dito ser uma célula aberta se é homeomorfo a Int D^n.*

Uma célula é uma estrutura mais geral que um simplexo. Notemos que um simplexo de dimensão n é uma célula de dimensão n.

Definição 1.9. *Um Complexo Celular (ou complexo CW) é um espaço topológico X e uma coleção finita $\{C_\alpha\}_{\alpha \in L}$ de células abertas disjuntas, cuja união é X, tal que:*

(a) X é Hausdorff;

(b) Para cada n-célula aberta C_α da coleção, existe uma aplicação contínua $f_\alpha : D^n \longrightarrow X$ que mapeia homeomorficamente Int D^n sobre C_α e mapeia ∂D^n em uma união finita de células abertas, cada uma de dimensão menor que n.

(c) Um conjunto F é fechado em X se, e somente se, $F \cap \overline{C}_\alpha$ é fechado em $\overline{C}_\alpha$, para cada α.

Segundo [19], a condição de finitude da parte (b) é denominada pelo termo em inglês ***closure-finiteness***, atribuido por J. H. C. Whitehead. A condição (c) expressa o fato de que o espaço X tem o que J. H. C. Whitehead chamou de ***weak topology***, relativa a coleção $\{\overline{C}_\alpha\}_{\alpha\in L}$. Esses termos dão origem às letras C e W que compõe termo em inglês CW ***complexes***, cuja tradução para o português é Complexos CW. A coleção $\{C_\alpha\}_{\alpha\in L}$ é denominada **decomposição celular** do espaço X ou CW-decomposição de X. O poliedro de complexo simplicial é evidentemente um complexo celular.

Definição 1.10. *Uma triangulação de um espaço topológico X é um homeomorfismo h do poliedro de um complexo simplicial K sobre X, se existir. Caso exista tal homeomorfismo h dizemos que X é triangulável.*

A triangulação de um espaço X determina um decomposição celular de X. A imagem de cada 2-simplexo é dita um triângulo da triangulação e a imagem de cada 1-simplexo e 0-simplexo são ditas arestas e vértices. Um espaço X pode admitir triangulações distintas. Feitas estas observações, enunciamos o seguinte resultado, provado por Tibor Radó em 1925.

Teorema 1.9 (Triangulação de Superfícies)**.** *Toda superfície é homeomorfa ao poliedro de algum complexo simplicial bidimensional, de modo que cada* 1*-simplexo é aresta de exatamente dois simplexos.*

1.2.3 Complexos Simpliciais Abstratos

Definição 1.11. *Um Complexo Simplicial Abstrato é uma coleção $\mathcal{S}$ de conjuntos não vazios finitos, tal que, se A é um elemento de $\mathcal{S}$, então cada subconjunto não vazio de A também pertence a $\mathcal{S}$.*

Cada elemento $A \in \mathcal{S}$ é chamado **simplexo abstrato** de $\mathcal{S}$. Definimos a **dimensão** de A, denotada por $dim\,(A)$, como a maior dimensão de um seus subconjuntos, tomado dentre todos seus subconjuntos não vazios, dada por $dim(A) = \#A - 1$, onde $\#A$ é a cardinalidade de A. Os subconjuntos não vazios de A são chamados **faces** de A.

A **dimensão** de $\mathcal{S}$ é a maior dimensão de um de seus simplexos e infinito, se não tem uma tal maior dimensão. O conjunto V dos vértices de $\mathcal{S}$ é a união de todos os

subconjuntos unitários de $\mathcal{S}$. Não faremos distinção entre o vértice $v \in V$ e o 0-simplexo abstrato $\{v\} \in \mathcal{S}$.

Exemplo 1.2. *Consideremos a coleção;*

$$\begin{aligned}\mathcal{S} \;=\; \Big\{&\{a_1,a_2,a_3\},\{a_2,a_3,a_4\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\},\{a_2,a_4\},\{a_3,a_4\},\{a_4,a_5\},\{a_5,a_6\},\\ &\{a_6,a_7\},\{a_6,a_8\},\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_4\},\{a_5\},\{a_6\},\{a_7\},\{a_8\}\Big\}.\end{aligned}$$

Pela definição 1.11, $\mathcal{S}$ é um complexo simplicial abstrato tal que $dim(\mathcal{S}) = 2$.

Notemos que $\mathcal{S}$ é um subconjunto do conjunto $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ das partes de $V = \{a_1, \ldots, a_8\}$. De modo mais geral, um Complexo Simplial Abstrato é um par (V, C), onde V é um conjunto finito não vazio e C é uma coleção de subconjuntos finitos e não vazios de V de modo que a união dos elementos de C é V e cada subconjunto de um membro de C é também um membro de C.

Dois Complexos Simpliciais Abstratos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ são ditos isomorfos se existe uma correspondência biunívoca f, entre o conjunto de vértices V de $\mathcal{S}$ e o conjunto de vértices V' de $\mathcal{S}'$ tal que, $\{v_0, \ldots, v_n\} \in \mathcal{S}$ se, e somente se, $\{f(v_0), \ldots, f(v_n)\} \in \mathcal{S}'$.

Definição 1.12. *Seja K um complexo simplicial geométrico e V seu conjunto de vértices. Definamos $\mathcal{K}$ a coleção de todos os subconjuntos $\{v_0, \ldots, v_n\}$ de V tal que os vértices $v_1, \ldots, v_n$ geram algum simplexo de K. A coleção $\mathcal{K}$ é chamada* ***esquema de vértices*** *de K.*

Notemos que das Definições 1.6 e 1.11 conclui-se que $\mathcal{K}$ é um Complexo Simplicial Abstrato.

O seguinte teorema deixa essa afirmação mais precisa.

Teorema 1.10. *(a) Todo Complexo Simplicial Abstrato $\mathcal{S}$ é isomorfo ao esquema de vértice de algum complexo simplicial K.*

(b) Dois complexos simpliciais geométricos são lineamente isomorfos se, e somente se, seus esquemas de vértices são isomorfos como complexos simpliciais abstratos.

Definição 1.13. *Se um complexo simplicial $\mathcal{S}$ é isomorfo ao esquema de vértices de um complexo simplicial geométrico K, dizemos que K é uma* ***realização geométrica*** *de $\mathcal{S}$. Esta realização é determinada unicamente por um isomorfismo linear.*

O complexo da Figura 1.3 é uma realização geométrica do complexo simplicial abstrato do Exemplo 1.2.

Notemos que pela parte (b) do Teorema 1.10, se dois complexos simpliciais abstratos S_1 e S_2 são isomorfos, suas realizações geométricas K_1 e K_2, respectivamente,

também são isomorfas e pela Proposição 1.8 o poliedro de K_1 é homeomorfo ao poliedro de K_2.

Agora digamos que para dois complexos simpliciais K e L tenhamos $|K|$ homeomorfo a $|L|$. Os complexos simpliciais abstratos associados a K e L são isomorfos? A resposta é não! Através da operação de subdivisão, que definimos a seguir, é possível construir exemplos que corroboram esta afirmação.

Definição 1.14. *Se K é um complexo simplicial, uma* ***subdivisão de*** *K é um complexo simplicial K' tal que, cada simplexo de K' está contido em um simplexo de K e cada simplexo de K é a união de simplexos de K'.*

Segue que $|K| = |K'|$. Notemos ainda que K não é isomorfo qualquer uma de suas subdivisões não trivial, assim como seus complexos simpliciais abstratos associados. Dizemos que dois complexos simpliciais são **combinatóriamente equivalentes** se eles têm uma subdivisão comum. Segundo [12] e [16], Ernest Steinitz e Heinrich Tietzeem conjecturaram em 1908 que **se dois complexos simpliciais têm poliedros homeomorfos eles são combinatóriamente equivalentes**. Esta conjectura é conhecida como ***Hauptvermutung***, da Topologia Combinatória. A conjectura segue para complexos de dimensão 2 e 3. Para complexos simpliciais de dimensão $d \geq 4$ a conjectura não procede.

Na Subseção anterior mencionamos que uma dada superfície triangulável pode admitir mais de uma triangulação distinta. Uma questão que se levanta é se existe alguma relação entre os poliedros de duas determinadas triangulações de uma mesma superfície? ***Hauptvermutung*** garante que tais poliedros são homeomorfos.

1.3 Topologia Quociente e Superfícies Compactas

Na Subseção 1.2.1 definimos o objeto simplexo, bem como algumas de suas propriedades e na Subseção 1.2.2 uma estrutura constituída por estes objetos. Nesta seção trataremos de propriedades das superfícies compactas e orientáveis, e de representações poligonais para estas. Comecemos descrevendo a topologia Quociente.

1.3.1 Topologia Quociente

Seja X um espaço topológico e Y um conjunto não vazio e $q : X \longrightarrow Y$ uma aplicação sobrejetiva. Definimos uma topologia em Y declarando que um conjunto $U \subseteq Y$ é aberto se, e somente se, a sua pré-imagem $q^{-1}(U)$, é aberto em X. Esta topologia é chamada **topologia Quociente** induzida pela aplicação q.

Se X e Y são espaços topológicos, uma aplicação $q : X \longrightarrow Y$ é chamada **aplicação quociente** se é sobrejetiva e a topologia de Y é a topologia quociente induzida pela aplicação q. Fica claro pela definição que a aplicação quociente é contínua uma vez que, para cada aberto $A \subset Y$ a pré-imagem $q^{-1}(A)$ é aberto em X.

Seja X um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Denotemos por $[p]$ a classe de equivalência de p, para cada $p \in X$ e o conjunto das classes de equivalência por $X/\sim$. Notemos que a coleção $X/\sim$ é uma partição de X. Seja,

$$\begin{array}{rccc} \phi: & X & \longrightarrow & \dfrac{X}{\sim} \\ & p & \longmapsto & [p] \end{array}$$

a projeção canônica que associa cada elemento de X a sua classe de equivalência. Então, $X/\sim$ juntamente com a topologia quociente induzida por ϕ é chamado **Espaço Quociente** (ou **Espaço de identificação**) de X pela relação de equivalência $\sim$.

O espaço quociente também pode ser definido explicitando uma dada partição de X.

Exemplo 1.3 (Exemplo 3.49 de [16])**.** *Consideremos $I = [0,1]$ e o quadrado definido por $P = I \times I$. Definamos a relação de equivalência em P dada por, $(x,0) \sim (x,1)$, para todo $x \in I$ e $(0,y) \sim (1,y)$ para todo $y \in I$. O espaço quociente resultante é homeomorfo ao toro $\mathbb{T}^2$.*

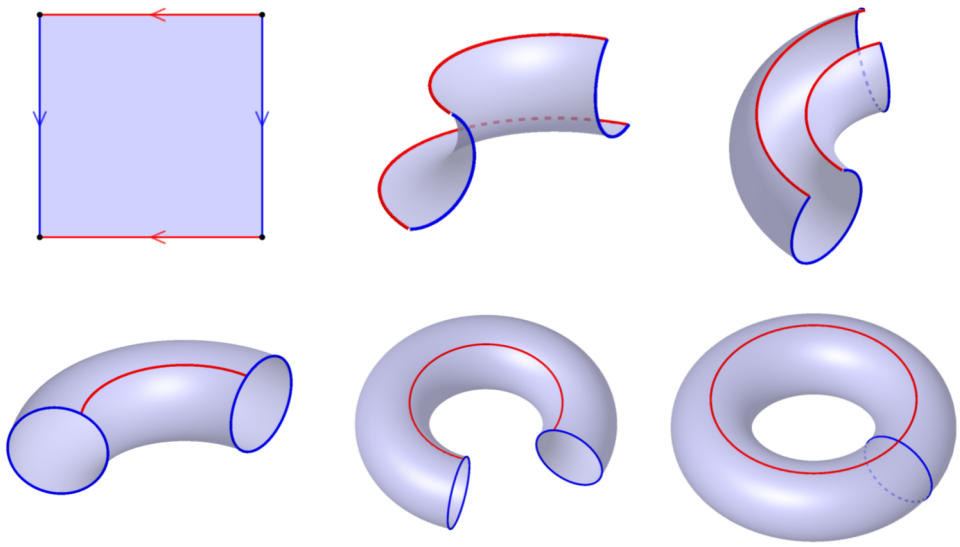

Figura 1.4: Toro obtido pela topologia quociente.

Proposição 1.11. *Suponhamos P um espaço topológico com base enumerável e M é um espaço quociente de P. Se M é localmente Euclidiano, então também tem base enumerável. Assim, se M é localmente Euclidiano e Hausdorff, é portanto uma variedade.*

Teorema 1.12. *Suponha que X e Y são espaços topológicos e $q : X \longrightarrow Y$ é um mapa quociente. Para qualquer espaço topológico Z, um mapa $f : Y \longrightarrow Z$ é contínuo se e somente se a composição $f \circ q$ é contínua:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f \circ q"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Este resultado segue imediatamente do fato de que para qualquer $U \subseteq Z$, $f^{-1}(U)$ é aberto em Y se, e somente se $q^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ g)^{-1}(U)$ é aberto em X.

■

A teoria dos espaços quocientes nos permite construir novos espaços a partir de outros por um processo denominado **adjunção de espaços**. Suponhamos X e Y espaços topológicos, A um subespaço fechado de Y e $f : A \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Seja $\sim$ a relação de equivalência definida por $a \sim f(a)$, para todo $a \in A$, sobre a união disjunta $X \amalg Y$. O **espaço de adjunção** de X com Y é o espaço,

$$X \cup_f Y = \frac{X \amalg Y}{\sim}.$$

A aplicação f é chamada **aplicação de adjunção**.

Exemplo 1.4 (Exemplo 3.78 – b de [16])**.** *Consideremos $A = \mathbb{S}^1 \subseteq \overline{\mathbb{B}^2}$ e $f : A \hookrightarrow \overline{\mathbb{B}^2}$ a aplicação inclusão. Então o espaço de adjunção $\overline{\mathbb{B}^2} \cup_f \overline{\mathbb{B}^2}$ é homeomorfo a esfera $\mathbb{S}^2$.*

1.3.2 Superfícies Compactas

Nesta Subseção buscamos representar as superfícies compactas por polígonos (complexos celulares) através da identificação de lados (topologia quociente). Comecemos com a definição de superfície mencionada anteriormente.

Definição 1.15. *Uma superfície compacta é uma variedade topológica bidimensional S, compacta.*

Como exemplos de superfícies compactas citamos o toro do Exemplo 1.3 e a esfera $\mathbb{S}^2$ do Exemplo 1.4. A adjunção de espaços nos permite construir novas superfícies com a **soma conexa** de superfícies. Dadas duas superfícies compactas M e N, com $B_M \subset M$ e $B_n \subset N$, abertos em M e N, respectivamente, os espaços $M' = M \setminus B_M$ e $N' = N \setminus B_N$ são superfícies com bordo $\partial M'$ e $\partial N'$, respectivamente, homeomorfos a

$\mathbb{S}^1$. Se $f : \partial M' \longrightarrow \partial N'$ é a aplicação de adjunção, o espaço $M' \cup_f N'$, é chamado soma conexa entre duas superfícies compactas M e N e será denotado por $M\#N$.

Agora descreveremos outra forma de representar uma superfície, a representação por regiões poligonais, já empregada anteriormente em exemplos. Um polígono é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ e é a união de 1-simplexos que se intersectam somente em seus extremos. Os 0-simplexos são denominados vértices e os 1-simplexos são chamados arestas. Uma região poligonal (2-célula) é um subconjunto compacto $\mathbb{R}^2$ cujo interior é homeomorfo a um disco aberto e seu bordo é um polígono.

Ressaltamos que a orientação de um segmento de reta no plano é uma ordenação de seus extremos. Dizemos que um segmento $l_1 = [a, b]$ está orientado de a para b, e representamos este fato desenhando uma seta apontando no sentido de b. O ponto a é dito ponto inicial e o ponto b ponto final. De forma paramétrica, $l_1 = \{x = (1-t)\cdot a + t\cdot b \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

Dado um segundo segmento $l_2 = [c, d]$, orientado de c para d, definimos o **mapa linear positivo** $h : l_1 \longrightarrow l_2$ que associa cada $x = (1-t)\cdot a + t\cdot b$ em l_1 ao ponto $h(x) = (1-t)\cdot c + t\cdot d$ em l_2.

Seja P uma região poligonal no plano. Uma **rotulação** de P é uma mapa do conjunto de arestas de P sobre um conjunto S denominado conjunto de rótulos. Dada uma orientação a cada aresta de P e uma rotulação, definimos uma relação de equivalência em P da seguinte forma;

a) cada ponto em *Int P* é equivalente a si próprio;

b) dadas quaisquer duas arestas de P com mesmo rótulo e orientadas, tomemos h o homeomorfismo linear positivo de uma aresta sobre a outra e defina cada ponto x da primeira como equivalente ao ponto $h(x)$ da segunda.

O espaço quociente X obtido dessa relação de equivalência é dito ser obtido **colando** as arestas de P de acordo com a rotulação e a orientação das arestas.

Definição 1.16. *Seja P uma região poligonal com vértices $p_0, \ldots, p_n$ com $p_0 = p_n$. Dando uma orientação e uma rotulação das arestas de P, seja $a_1, \ldots, a_m$ os rótulos distintos que são atribuídos às arestas de P. Para cada k, deixe a_{i_k} ser o rótulo atribuído a aresta $[p_{k-1}, p_k]$, e seja $\epsilon_k = +1$ ou -1 de acordo com a orientação atribuída a esta aresta de p_{k-1} para p_k ou reverso. Então o número de arestas de P, a orientação das arestas e a rotulação são completamente especificadas pelo símbolo (ou palavra),*

$$w = (a_{i_1})^{\epsilon_1}(a_{i_2})^{\epsilon_2}\ldots(a_{i_n})^{\epsilon_n}.$$

Chamamos este símbolo de um **esquema de rotulagem** de comprimento n para as arestas de P e é simplesmente uma sequência de rótulos com expoentes $+1$ ou -1. A

Definição 1.16 nos permite tratar a representação poligonal de um determinado espaço X apenas com seu esquema de rotulagem, dispensando-se a representação geométrica. Note que dado um esquema de rotulagem

$$w = (a_{i_1})^{\epsilon_1}(a_{i_2})^{\epsilon_2}\dots(a_{i_n})^{\epsilon_n}$$

podemos determinar uma região poligonal em $\mathbb{R}^2$ que tenha w como esquema de rotulagem. Esta região é denominada uma realização geométrica de w.

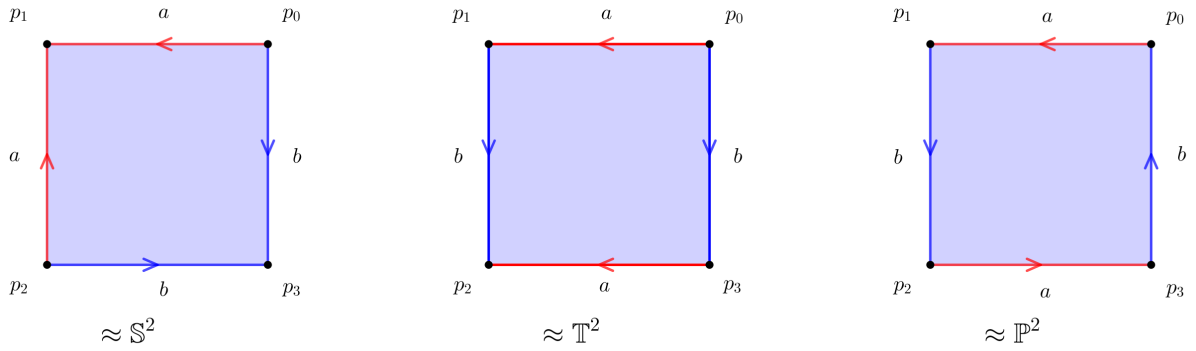

Figura 1.5: Rotulações do quadrado.

Na Figura acima temos três rotulações para um quadrado, bem como uma orientação de suas arestas. No primeiro, temos o esquema de rotulagem $w_1 = aa^{-1}bb^{-1}$ – o espaço quociente resultante é homeomorfo à esfera $\mathbb{S}^2$. No segundo temos o símbolo $w_2 = aba^{-1}b^{-1}$ – o espaço quociente resultante é homeomorfo ao toro $\mathbb{T}^2$. E no terceiro quadrado, temos o símbolo $w_3 = abab$ - o espaço resultante é homeomorfo ao plano projetivo $\mathbb{P}^2$.

Seja P uma região poligonal em $\mathbb{R}^2$, com vértices sucessivos $p_0, p_1, \dots, p_n = p_0$, convencionamos estas disposição no sentido anti-horário. Tome k de modo que que $1 < k < n-1$ e consideremos as regiões P_1, cujos os vértices sucessivos são $p_0, p_1, \dots, p_k, p_0$ e P_2 cujos vértices são $p_0, p_k, \dots, p_n = p_0$. A aresta $[p_0, p_k]$ é comum a essas duas regiões. Notemos que P é a união dessas duas regiões.

Aplicando uma translação apropriada $t : P_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ obtemos uma região P_1' disjunta de P_2, cujos vértices são $t(p_0), t(p_1), \dots, t(p_k), t(p_0)$. Dizemos que P_1' e P_2 são obtidas por **corte** de P ao longo da aresta $[p_0, p_k]$. A região P é homeomorfa ao espaço quociente de P_1' e P_2 obtido colando a aresta orientada de p_0 para p_k de P_2 com a aresta orientada de $t(p_0)$ a $t(p_k)$ de P_1', de acordo com o mapa linear positivo. O processo inverso também pode ser realizado, ou seja, dadas regiões Q_1 e Q_2 disjuntas, podemos obter uma região poligonal homeomorfa ao espaço quociente de Q_1 e Q_2 **colando** uma

aresta orientada $[p_0, p_k]$ de Q_1 a aresta orientada $[q_0, q_k]$ pelo mapa linear positivo.

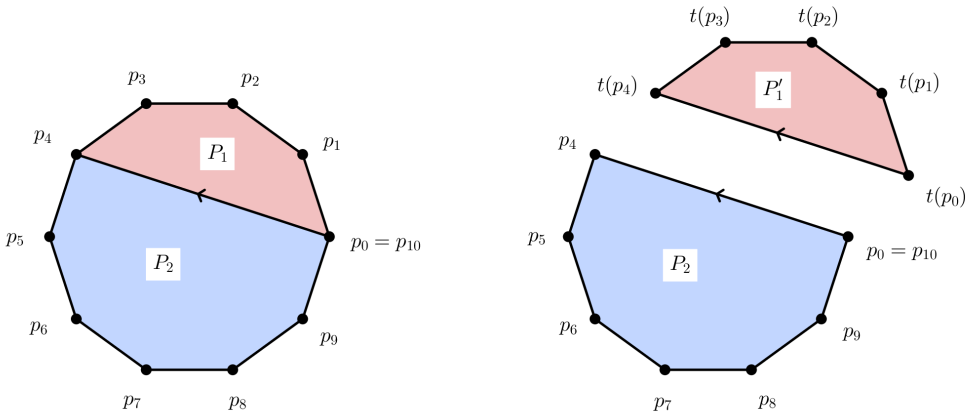

Figura 1.6: Corte de P.

Dado um número finito de regiões poligonais disjuntas, com uma orientação e rotulação das arestas de cada região, podemos obter o espaço quociente da mesma forma a empregada a uma única região.

Suponhamos que se tenha uma coleção finita de regiões poligonais disjuntas $P_1, P_2, \ldots, P_m$ e esquema de rotulagem $w_1, w_2, \ldots, w_n$, onde w_i é o esquema de rotulagem das arestas de P_i e X o espaço quociente obtido desse esquema de rotulagem. Cortando P_1 ao longo da aresta $[p_0, p_k]$, orientada de p_0 para p_k, obtemos $n + 1$ regiões $Q_1, Q_2, P_2, \ldots, P_m$, onde Q_1 corresponde a traslação da região determinada pelas sequência de vértices $p_0, \ldots, p_k, p_0$. Indicamos a colagem de Q_1 com Q_2, atribuindo um rótulo, distinto dos presentes em cada w_i (digamos d) a aresta $[p_0, p_k]$, com expoente $+1$. Atribuímos este mesmo rótulo a aresta $[t(p_0), t(p_k)]$ de Q_1, mas com expoente -1. Dessa forma obtemos um esquema de rotulagem para Q_1 e outro para Q_2. Com efeito, suponhamos $w_1 = y_1 y_2$ onde y_1 é a lista dos k primeiros termos de w_1 e y_2 os demais termos de w_1. Dessa forma constrói-se os esquemas de rotulagem $w_1^1 = y_1 d^{-1}$ de Q_1 e $w_1^2 = d^{+1} y_2$ de Q_2.

Obtemos o espaço X dessas regiões com estes esquemas de rotulagem uma vez que a composição de mapas quocientes é também mapa quociente. Em outras palavras o espaço obtido pelo quociente não depende da escolha de se colar as arestas $[p_0, p_k]$ e $[t(p_0), t(p_k)]$ primeiro para só depois colar as demais ou a escolha de tomar a colagem simultânea das arestas de cada região. Cada região é denominada face da representação poligonal, as arestas e vértices da região são denominadas arestas e vértices da representação poligonal. Diremos que uma determinada representação é de superfície fechada se cada rótulo ocorrer exatamente duas vezes no esquema de rotulagem.

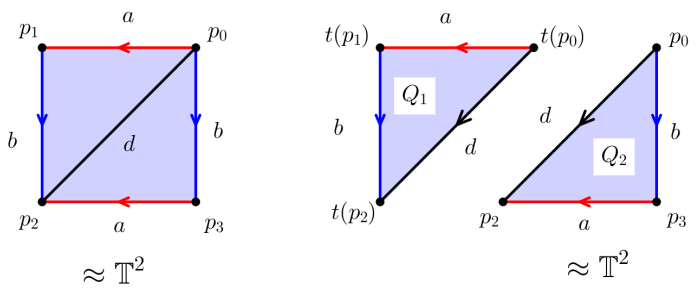

Figura 1.7: Corte do quadrado.

No quadrado a esquerda da Figura 1.7 temos o esquema de rotulação $w_1 = aba^{-1}b^{-1}$ cujo espaço quociente resultante é homeomorfo ao toro $\mathbb{T}^2$. O triângulo Q_1 tem sistema de rotulação $w_1^1 = abd^{-1}$ e o triângulo Q_2 o sistema $w_1^2 = da^{-1}b^{-1}$. Note que cada rótulo aparece duas vezes no esquema de rotulagem.

Agora apresentaremos algumas **Operações elementares sobre esquemas de rotulagem** que deixam o espaço quociente resultante inalterado. As operação, aqui citadas, podem ser consultadas com mais detalhes pelo leitor em [16], no capítulo 6 ou em [20], no capítulo 12.

Definição 1.17 (Operações Elementares)**.** *Seja $w_1, \ldots, w_n$ um esquema de rotulagem e X o espaço quociente resultante. As seguintes operações são chamadas operações elementares.*

(i) - ***Corte*** - *Substituir o esquema $w_i = y_1y_2$ pelos esquemas $w_i^1 = y_1c^{-1}$ e $w_i^2 = cy_2$ desde que y_1 e y_2 tenha comprimento pelo menos 2 e c não apareça em nenhum w_j, $1 \leq j \leq n$;*

(ii) - ***Colagem*** - *Se $w_i = y_0c^{-1}$ e $w_k = cy_2$, substituir w_i e w_k por $w_{ik} = y_1y_2$, desde que c não apareça em nenhum w_j, $1 \leq j \leq n$;*

(iii) - ***Renomear*** - *Substituir todas as ocorrências de um dado rótulo por algum outro que não apareça em outro lugar no esquema. Substituir o expoente de todas as ocorrências de um dado rótulo a, esta operação reverte a orientação da aresta que recebe este rótulo;*

(iv) - ***Permutação*** - *Substituir qualquer dos esquemas w_i por uma permutação cíclica de seus termos. Esta operação resulta na renumeração dos vértices da região poligonal P_i correspondente ao esquema w_i;*

(v) - ***Reflexão*** - *Substituir o esquema $w_i = (a_{i_1})^{\epsilon_1}(a_{i_2})^{\epsilon_2}\ldots(a_{i_n})^{\epsilon_n}$ pelo esquema $(w_i)^{-1} = (a_{i_n})^{-\epsilon_n}\ldots(a_{i_2})^{-\epsilon_2}(a_{i_1})^{-\epsilon_1}$. Esta operação consiste em "virar"a região poligonal correspondente a w_i invertendo a ordem dos vértices e a orientação das arestas;*

(vi) - ***Cancelamento*** - *Se $w_i = y_1cc^{-1}y_2$, substituir w_i pelo esquema y_1y_2 desde que c não apareça em nenhum w_j, $1 \leq j \leq n$ e y_1 e y_2 tenha comprimento pelo menos 2;*

(vii) - ***Desdobrar*** - *Substituir o esquema* $w_i = y_1 y_2$ *pelo esquema* $y_1 c c^{-1} y_2$, *desde que o rótulo* c *não apareça em nenhum* w_j, $1 \leq j \leq n$.

A Figura 1.8 ilustra como cada operação atua sobre o esquema de rotulagem apresentado para o toro $\mathbb{T}^2$.

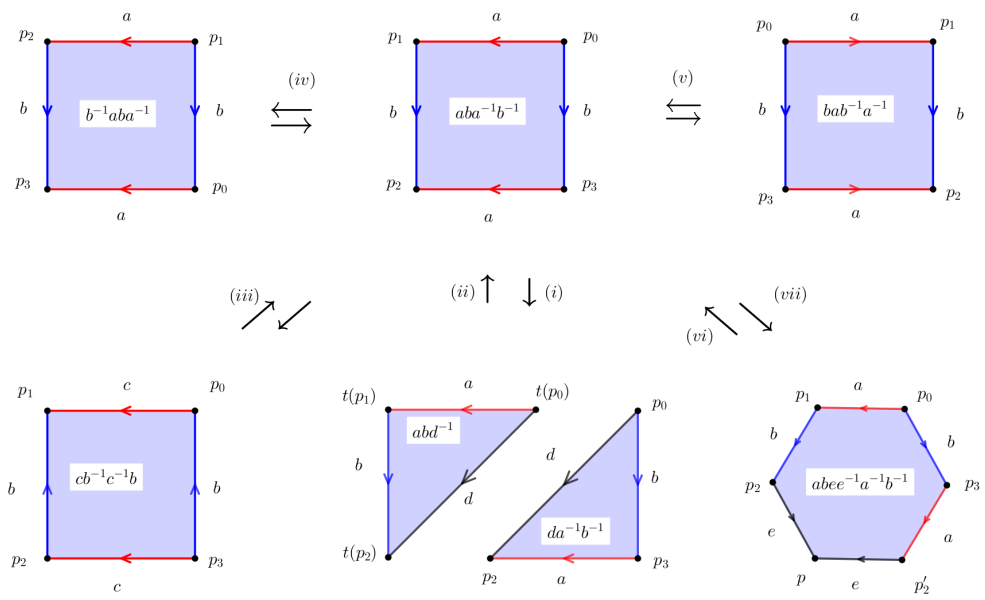

Figura 1.8: Operações elementares sobre o Toro.

Dizemos que dois esquema de rotulagem são equivalentes se um pode ser obtido do outro por uma sequência de operações elementares.

Proposição 1.13. *Cada operação elementar sobre uma representação poligonal produz representações topologicamente equivalentes.*

Teorema 1.14. *Seja* X *o espaço obtido de uma coleção finita de regiões poligonais colando arestas de acordo com algum esquema de rotulação. Então* X *é um espaço de Hausdorff compacto.*

Com as operações elementares apresentadas na Definição 1.17 podemos caracterizar a soma conexa de superfícies compactas através de suas representações poligonais e exibir representação poligonal para a superfície resultante. Apresentemos a seguir esta caracterização para a soma conexa de toros.

Exemplo 1.5. *Consideremos os esquema de rotulagem* $w_1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ *e* $w_2 = a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$, *ambos com espaço quociente associado homeomorfo ao toro* $\mathbb{T}^2$. *Definamos o esquema* $w_3 = (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1})$, *obtido concatenando os esquemas de rotulagem* w_1 *e* w_2. w_3 *tem como realização geométrica uma região poligonal octogonal. O espaço quociente resultante é homeomorfo a soma conexa* $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ *(bi-toro).*

Note que aplicando a operação (vii) sobre w_3 obtemos, o esquema $(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})cc^{-1}(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})$ e pela operação (i), os esquemas $w_3^1 = (a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})c = w_1c$ e $w_3^2 = c^{-1}(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}) = c^{-1}w_2$.

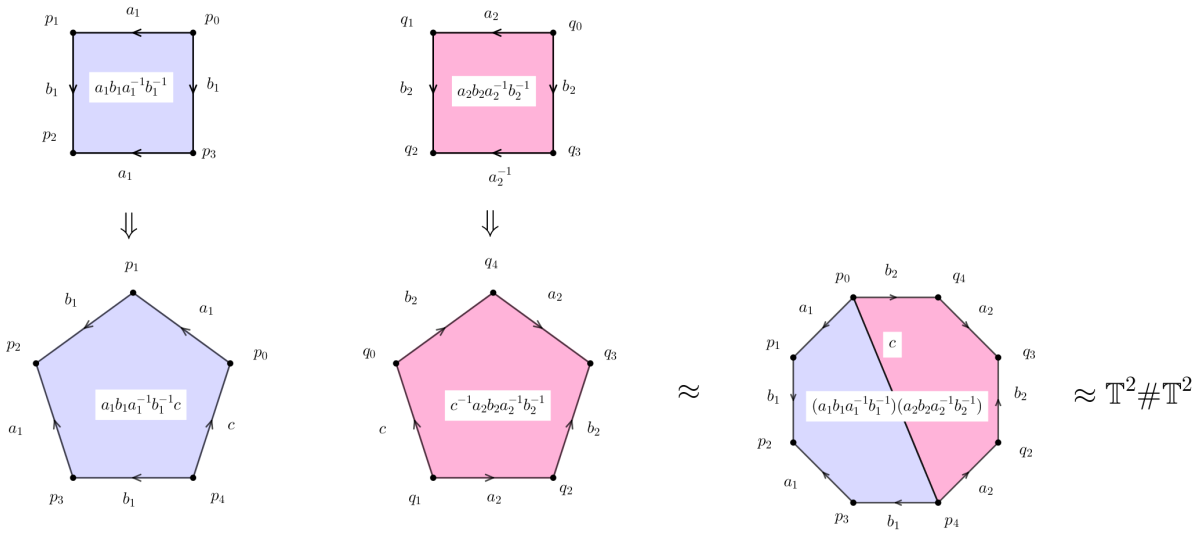

Figura 1.9: Obtenção de uma representação poligonal para o bi-toro.

A seguinte proposição generaliza este procedimento.

Proposição 1.15. *Seja S_1 e S_2 superfícies que admitem representações poligonais (com face única) disjuntas P_1 e P_2 respetivamente. Suponhamos w_1 o esquema de rotulagem associado a P_1 e w_2 o esquema de rotulagem associado a P_2. Então $w_3 = w_1w_2$, obtido concatenando os esquemas w_1 e w_2, é o esquema de rotulagem de uma representação poligonal da soma conexa $S_1\#S_2$.*

Proposição 1.16. *Toda superfície compacta admite uma representação poligonal.*

Inspirados no Exemplo 1.5 e na Proposição 1.15 citamos a seguinte definição.

Definição 1.18. *Uma superfície S que tem esquema de rotulagem de uma de suas representações poligonais da forma,*

$$w = (a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\dots(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1})$$

é dita ***soma conexa de*** *n* ***cópias do toro****. Se S tem esquema de rotulagem associado da forma,*

$$w = (a_1b_1)(a_2b_2)\dots(a_nb_n),$$

S é dita ***soma conexa de*** *n* ***cópias do plano projetivo****.*

Teorema 1.17 (Classificação de Superfícies Compactas)**.** *Cada superfícies compacta conexa é homeomorfa a um dos seguintes espaços:*

a) a esfera $\mathbb{S}^2$*;*

b) a soma conexa de um ou mais cópias do toro $\mathbb{T}^2$*;*

c) a soma conexa de um ou mais cópias do plano projetivo $\mathbb{P}^2$*.*

Aqui estamos assumindo o fato que essas três classes de superfícies são topologicamente distintas.

1.3.3 Característica de Euler

Nesta Subseção apresentaremos a generalização da fórmula de Euler, assunto presente nos currículos da educação básica. Nesse contexto estuda-se que todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F o número de faces do poliedro.

No contexto dessa dissertação, um poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície poliédrica (complexo celular) que é o bordo de um conjunto aberto convexo de $\mathbb{R}^3$. A relação de Euler tem a seguinte generalização para Complexos celulares.

Definição 1.19. *Se X é um complexo celular finito de dimensão n, definimos a* ***Característica de Euler****, a qual denotamos por $\mathcal{X}(X)$, por,*

$$\mathcal{X}(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot n_k,$$

onde n_k é o número de células de dimensão k de X.

Proposição 1.18 (Característica de Euler de superfícies compactas)**.** *A característica de Euler para uma superfície compacta S é,*

(a) 2*, se S é homeomorfa a esfera;*

(b) $2 - 2n$*, se S é homeomorfa a soma conexa de n toros;*

(c) $2 - n$*, se S é homeomorfa a soma conexa de n planos projetivos.*

Cabe mencionarmos que a característica de Euler é um invariante topológico. Para sermos mais precisos, se dois espaços X e Y são homeomorfos, então $\mathcal{X}(X) = \mathcal{X}(Y)$. Não demonstraremos este fato, pois foge do objetivo dessa dissertação. Ressaltamos que a recíproca desse resultado não é verdadeira. A exemplo, segue da Proposição 1.18

que se X é a soma conexa de k toros e Y a soma conexa de $2k$ planos projetivos, então $\mathcal{X}(X) = \mathcal{X}(Y)$ mas pode-se demonstrar que X e Y são topologicamente distintos.

Um fato que distingue essas duas classes de superfícies é a chamada orientabilidade. Na verdade, as superfícies fechadas podem ser classificadas em dois grupos — das superfícies orientáveis e das superfícies não-orientáveis. Não discutiremos nessa dissertação com detalhes os aspectos teóricos referentes a esse assunto mas apresentaremos alguns pontos de interesse e relevância a continuidade deste trabalho.

Definição 1.20. *Seja s_n um simplexo (geométrico ou abstrato) de dimensão $n \leq 0$. Duas ordenações no conjunto de vértices de s_n são ditas equivalentes se diferem uma da outra apenas por uma permutação par. Dessa forma, as ordenações dos vértices de s_n resultam em apenas duas classes de equivalência denominadas orientações do simplexo s_n. O simplexo s_n é dito simplexo orientado se é designada uma das orientações possíveis a este.*

A orientação de um simplexo induz uma orientação para cada uma de suas faces. Notemos ainda que um 0-simplexo possui somente uma orientação.

Exemplo 1.6. *Consideremos o complexo simplicial abstrato*

$$\mathcal{S} = \Big\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\Big\},$$

que tem uma região triangular como realização geométrica. As ordenações dos vértices de S podem ser organizadas em duas classes c_1 e c_2, de acordo com a Definição 1.20. Assim, $c_1 = \Big\{(v_1v_2v_3), (v_2v_3v_1), (v_3v_1v_2)\Big\}$ e $c_2 = \Big\{(v_1v_3v_2), (v_3v_2v_1), (v_2v_1v_3)\Big\}$

Na Figura 1.10 o triângulo da esquerda representa o simplexo $\mathcal{S}$ com a orientação c_1 onde a orientação é representada com uma seta curva no sentido anti-horário. O triângulo da direita $\mathcal{S}$ com a orientação c_2 com seta curva indicando o sentido horário. A orientação induzida em cada aresta é indicada por uma seta.

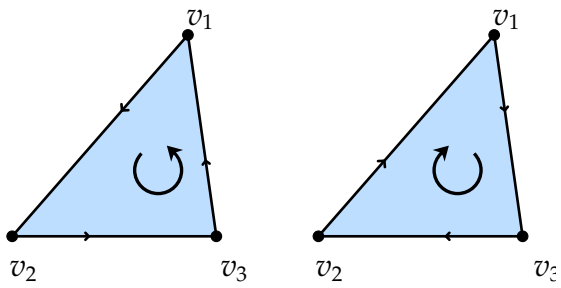

Figura 1.10: Orientações de um 2-simplexo.

Seja K um complexo simplicial, dando a cada simplexo um orientação obtemos um complexo orientado. Dizemos que um complexo tem **orientação coerente** se quaisquer dois simplexos adjacentes induzem orientações opostas a sua face comum.

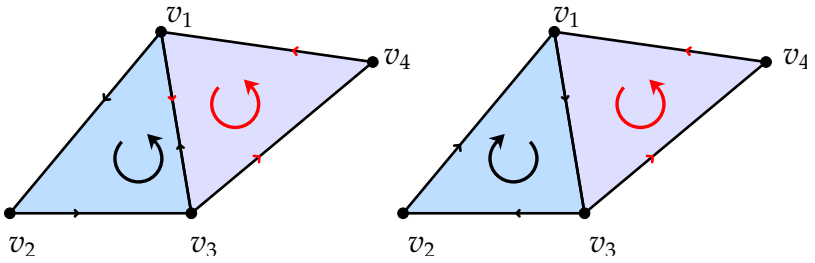

Figura 1.11: Complexos orientados.

Na Figura 1.11 o complexo da esquerda tem orientação coerente enquanto o complexo da direita não. Com a noção de orientação de simplexos citamos a seguinte definição.

Definição 1.21. *Uma superfície fechada S é dita orientável se todas suas triangulações admitem uma orientação coerente. Se S não admite triangulação orientada coerentemente dizemos que S é não orientável.*

Como exemplo de superfícies orientáveis temos a esfera $\mathbb{S}^2$, o toro $\mathbb{T}^2$ e a soma conexa de n toros. Um exemplo clássico de superfície não-orientável é a faixa de Möbius.

Para finalizar essa breve discussão sobre orientabilidade apresentamos a seguinte proposição que nos permite estabelecer mais aspectos das superfícies compactas. A demostração dessa proposição pode ser consultada pelo leitor em [16]. Aqui estamos assumindo que a soma conexa de um ou mais planos projetivos é não-orientável.

Proposição 1.19 (Proposição 6.20 em [16])**.** *Uma superfície compacta S é orientável se, e somente se, é homeomorfa a esfera $\mathbb{S}^2$ ou a soma conexa de um ou mais Toros.*

Decorre da Proposição 1.19 juntamente com a Proposição 1.18 que superfícies compactas orientáveis S_1 e S_2 que possuam mesma característica de Euler são homeomorfas. Munidos dessa classificação de superfícies fechadas em orientáveis e não-orientáveis definimos o **gênero** de uma superfície S.

Definição 1.22 (Gênero de uma superfície fechada)**.** *O gênero de uma superfície fechada S é,*

(a) 0 *, S é homeomorfa a esfera $\mathbb{S}^2$ (orientável);*

(b) *n, se S é homeomorfa a soma conexa de n toros (orientável);*

(c) *n, se S é homeomorfa a soma conexa de n planos projetivos (não-orientável).*

Capítulo 2

Geometria Hiperbólica

Neste capítulo descreveremos tópicos da Geometria Hiperbólica essenciais ao tratamento de superfícies compactas e orientáveis de gênero $g \geq 2$, como espaço orbital pela ação de grupos de isometrias do espaço hiperbólico. Para isso, trataremos dos modelos euclidianos para a Geometria Hiperbólica — o modelo do semi-plano $\mathbb{H}^2$ e o modelo do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$. Cabe observar que a Geometria Hiperbórica pode ser desenvolvida sobre um conjunto de axiomas, assim como a Geometria Euclidiana e que os modelos aqui citados são consistentes com essa construção axiomática.

2.1 Transformações de Möbius

Para descrevermos os modelos para a Geometria Hiperbólica trabalharemos com o plano complexos $\mathbb{C} = \{z = a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ o qual identificamos com o plano Euclidiano $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ através da aplicação,

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z = x_1 + x_2 \cdot i & \longmapsto & x = (x_1, x_2) \end{array} \tag{2.1.1}$$

e o plano complexo estendido $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ também conhecido com esfera de Riemann. O subconjunto $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, eixo real estendido, é um círculo em $\hat{\mathbb{C}}$.

Convém descrevermos sobre $\mathbb{C}$ um conjunto de aplicações que serão de nosso interesse quanto ao estudo das isometrias hiperbólicas.

Definição 2.1. *Uma aplicação da forma*

$$T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

é chamada uma transformação linear fracionária. Se a, b, c e d também satisfazem $ad - bc \neq 0$,

então $T(z)$ é chamada uma transformação de Möbius.

Observemos que se T é uma transformação de Möbius então a transformação de Möbius

$$T^{-1}(z) = \frac{d \cdot z - b}{-c \cdot z + a}$$

satisfaz

$$T(T^{-1}(z)) = T^{-1}(T(z)) = z,$$

ou seja, T^{-1} é a aplicação inversa de T. Além disso, se T e S são transformações de Möbius, então $T \circ S$ também é uma transformação de Möbius. Portanto o conjunto de transformações de Möbius constitui um grupo sob a operação de composição de transformações.

Seja $\delta \in \mathbb{C}$ um número complexo não nulo e T uma transformação de Möbius expressa por

$$T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d},$$

então,

$$T(z) = \frac{\delta \cdot (a \cdot z + b)}{\delta \cdot (c \cdot z + d)} = \frac{(\delta \cdot a) \cdot z + (\delta \cdot b)}{(\delta \cdot c) \cdot z + (\delta \cdot d)},$$

o que evidencia que os coeficientes a, b, c e d não são únicos.

Pode-se considerar cada transformação de Möbius definida continuamente em $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ colocando $T(\infty) = \frac{a}{c}$, $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ se $c \neq 0$ e $T(\infty) = \infty$ caso $c = 0$. Verifica-se que T mapeia $\hat{\mathbb{C}}$ sobre $\hat{\mathbb{C}}$.

Dentre as transformações de Möbius destacamos as aplicações da forma $T(z) = z + b, b \neq 0$ denominadas **translação**, $D(z) = a \cdot z$ chamada **dilatação**, $R(z) = e^{i \cdot \theta} \cdot z$ a **rotação** e as transformaçoes da forma $I(z) = \frac{1}{z}$ denominada a **inversão**.

Um fato relevante ao nosso estudo é que uma dada transformação de Möbius T, diferente da identidade, possui no máximo dois pontos fixos. Com efeito, suponha

$$T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = z,$$

então z é raiz da equação

$$c \cdot z^2 + (d - a) \cdot z - b = 0$$

que possui no máximo duas raízes. Agora suponha z_1, z_2 e z_3 três pontos distintos em $\hat{\mathbb{C}}$ e T uma transformação de Möbius tal que $T(z_1) = w_1$, $T(z_2) = w_2$ e $T(z_3) = w_3$. Suponha S uma outra transformação de Möbius com essa mesma propriedade. Dai,

$$(S^{-1} \circ T)(z_1) = z_1, \quad (S^{-1} \circ T)(z_2) = z_2, \quad (S^{-1} \circ T)(z_3) = z_3,$$

ou seja, z_1, z_2 e z_3 são pontos fixos da transformação $S^{-1} \circ T$. Assim, $S^{-1} \circ T$ deve ser a transformação identidade e daí $T = S$. Portanto uma transformação de Möbius é unicamente determinada por sua ação em quaisquer três pontos distintos em $\hat{\mathbb{C}}$.

Agora consideraremos z_2, z_3 e z_4 pontos distintos em $\hat{\mathbb{C}}$. Definamos $R : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ por,

$$R(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4}, \text{ se } z_2 = \infty;$$

$$R(z) = \frac{z_2 - z_4}{z - z_4}, \text{ se } z_3 = \infty;$$

$$R(z) = \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}, \text{ se } z_4 = \infty;$$

$$R(z) = \frac{\left(\frac{z-z_3}{z-z_4}\right)}{\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)}, \text{ se } z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}.$$

Em todos os casos $R(z_2) = 1$, $R(z_3) = 0$ e $R(z_4) = \infty$ e R é a única transformação com essa propriedade.

Motivados por essa observação, passemos a seguinte definição.

Definição 2.2 (Razão Cruzada). *Seja $z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ então (z_1, z_2, z_3, z_4), a Razão Cruzada de z_1, z_2, z_3 e z_4 , é a imagem de z_1 sob a única transformação de Möbius T que mapeia z_2 sobre 1, z_3 sobre 0 e z_4 sobre ∞.*

Uma das propriedades da razão cruzada é que ela é invariante sob a ação de transformações de Möbius como mostrado na seguinte proposição.

Proposição 2.1. *Se z_2, z_3 e z_4 são pontos distintos em $\hat{\mathbb{C}}$ e T é uma transformação de Möbius qualquer então,*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)),$$

para qualquer ponto z_1.

Suponha $R(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ a única transformação de Möbius que mapeia z_2 sobre 1, z_3 sobre 0 e z_4 sobre ∞. Se $M = R \circ T^{-1}$ então $M(T(z_2)) = 1$, $M(T(z_3)) = 0$ e $M(T(z_4)) = \infty$, portanto,

$$M(z) = R \circ T^{-1}(z) = (z, T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

para todo $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Em particular se $z = T(z_1)$ e assim o resultado segue.

■

Com a Proposição 2.1 temos ferramentas para mostrar a seguinte proposição.

Proposição 2.2. *Se z_2, z_3 e z_4 são pontos distintos em $\hat{\mathbb{C}}$ e w_2, w_3 e w_4 são também pontos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$, então existe uma, e somente uma, transformação de Möbius T tal que $T(z_2) = w_2$, $T(z_3) = w_3$ e $T(z_4) = w_4$.*

Seja $R(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ e $S(z) = (z, w_2, w_3, w_4)$, então tomando $T = S^{-1} \circ R$ é tal que, $T(z_2) = w_2$, $T(z_3) = w_3$ e $T(z_4) = w_4$. Para mostrar a unicidade, suponha K outra transformação tal que, $K(z_2) = w_2$, $K(z_3) = w_3$ e $K(z_4) = w_4$. Dessa forma, $(K^{-1} \circ T)(z_2) = z_2$, $(K^{-1} \circ T)(z_3) = z_3$ e $(K^{-1} \circ T)(z_4) = z_4$, ou seja, $K^{-1} \circ T$ possui três pontos fixos. Daí, $K^{-1} \circ T = I_d$, onde I_d é a transformação identidade. Portanto, $K = T$.

■

Em outros termos, a Proposição 2.2, nos diz que a ação do grupo de transformações de Möbius é transitiva no conjunto de triplas de pontos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$.

Agora enunciamos uma proposição que nos servirá de ferramenta na demostração do Teorema 2.4. Omitiremos sua demostração a qual pode ser consultada pelo leitor em [5].

Proposição 2.3. *Sejam z_1, z_2, z_3 é z_4 quatro pontos distintos em $\hat{\mathbb{C}}$. Então (z_1, z_2, z_3, z_4) é um número real se, e somente se, estes quatro pontos estão sobre um mesmo círculo.*

Com esse resultado em mãos enunciamos e mostramos o Teorema 2.4.

Teorema 2.4. *Toda transformação de Möbius leva círculos em círculos.*

Seja C um círculo em $\hat{\mathbb{C}}$ e T uma transformação de Möbius genérica. Tome z_2, z_3 e z_4 três pontos distintos de C. Sejam $w_2 = T(z_2)$, $w_3 = T(z_3)$ e $w_4 = T(z_4)$. Note que w_2, w_3 e w_4 determinam um um círculo C' em $\hat{\mathbb{C}}$. Afirmamos que $T(C) = C'$. Com efeito, pela Proposição 2.1,

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (T(z), w_2, w_3, w_4).$$

Agora pela Proposição 2.3, ambos os lados da igualdade são números reais. Portanto $T(z) \in C'$ e assim $T(C) = C'$.

■

Destacamos que dados dois círculos C e C' em $\hat{\mathbb{C}}$, existe uma transformação de Möbius T que mapeia C sobre C'. A existência de T não é única uma vez que pode-se tomar quaisquer três potos distintos em C de modo a mapeá-los sobre quaisquer três pontos distintos em C'. No entanto, fixados três pontos distintos, z_2, z_3 e z_4 em C e três pontos

distintos w_2, w_3 e w_4 em C', se especificarmos previamente $T(z_2) = w_2$, $T(z_3) = w_3$, $T(z_4) = w_4$ a transformação T é única em decorrência da Proposição 2.2.

Finalizamos essa Subseção descrevendo condições necessárias e suficientes para que uma dada transformação de Möbius T, seja de tal sorte que $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$.

Proposição 2.5. *Seja T uma transformação de Möbius, então para que $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$ é necessário e suficiente que se possa determinar números reais r_1, r_2 r_3 e r_4 tais que,*

$$T(z) = \frac{r_1 \cdot z + r_2}{r_3 \cdot z + r_4}.$$

Suponha, $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$. Sejam k_2, k_3 e k_4 números reais distintos tais que, $T(k_2) = w_2$, $T(k_3) = w_3$ e $T(k_4) = w_4$ são também números reais distintos. Tomando,

$$R(z) = (z, k_2, k_3, k_4); \quad S(z) = (z, w_2, w_3, w_4).$$

Note que,

$$R(z) = \frac{z - k_3}{z - k_4} \cdot \frac{k_2 - k_4}{k_2 - k_3} = \frac{(k_2 - k_4) \cdot z - k_3 \cdot (k_2 - k_4)}{(k_2 - k_3) \cdot z - k_4 \cdot (k_2 - k_3)}$$

$$S(z) = \frac{z - w_3}{z - w_4} \cdot \frac{w_2 - w_4}{w_2 - w_3} = \frac{(w_2 - w_4) \cdot z - w_3 \cdot (w_2 - w_4)}{(w_2 - w_3) \cdot z - w_4 \cdot (w_2 - w_3)}$$

possuem coeficientes reais assim como suas inversas. Pela Proposição 2.2

$$T(z) = (S^{-1} \circ R)(z)$$

que tem coeficientes reais.

Reciprocamente se $T(z) = \dfrac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$ com a, b, c e d números reais, temos que

$$T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = \frac{(a \cdot z + b)(c \cdot \overline{z} + b)}{|c \cdot z + d|^2} = \frac{a|z|^2 + ad \cdot z + bc \cdot \overline{z} + bd}{|c \cdot z + d|^2}.$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \Im(T(z)) &= \frac{T(z) - \overline{T(z)}}{2 \cdot i} = \frac{(a|z|^2 + ad \cdot z + bc \cdot \overline{z} + bd) - (a|z|^2 + ad \cdot \overline{z} + bc \cdot z + bd)}{2i \cdot |c \cdot z + d|^2} \\ &= \frac{(ad - bc) \cdot (z - \overline{z})}{2i \cdot |c \cdot z + d|^2} = \frac{(ad - bc) \cdot \Im(z)}{|c \cdot z + d|^2}. \end{aligned}$$

Logo, se $z \in \hat{\mathbb{R}}$ então $T(z) \in \hat{\mathbb{R}}$, o que conclui a demonstração.

■

2.2 O Modelo $\mathbb{H}^2$ para a Geometria Hiperbólica

Consideremos o conjunto $\mathbb{H}^2 = \{z = x+y\cdot i \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ e $T_{z_0}\mathbb{H}^2$ o espaço tangente a $\mathbb{H}^2$ no ponto z_0. Para cada ponto $z_0 \in \mathbb{H}^2$ está definido o produto interno,

$$\begin{array}{rccc} g_{\mathbb{H}^2}: & T_{z_0}\mathbb{H}^2 \times T_{z_0}\mathbb{H}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & \langle u,v\rangle_{\mathbb{H}^2} = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\Im^2(z_0)} \end{array}, \ \forall\, u,v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2 \tag{2.2.1}$$

onde, $\langle u,v\rangle$ expressa o produto interno usual do espaço Euclidiano.

Associada a esse produto temos a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^2}$ em $T_{z_0}\mathbb{H}^2$ que, para cada vetor $w = (w_1, w_2) \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$ tem-se,

$$\|w\|_{\mathbb{H}^2} = \sqrt{\langle w,w\rangle_{\mathbb{H}^2}} = \sqrt{\frac{\langle w,w\rangle}{\Im^2(z_0)}} = \frac{\sqrt{w_1^2+w_2^2}}{\Im(z_0)} = \frac{\|w\|}{\Im(z_0)}.$$

Além disso $g_{\mathbb{H}^2}$ define uma métrica Riemanniana em $\mathbb{H}^2$.

Definição 2.3 (Modelo $\mathbb{H}^2$)**.** *O conjunto* $\mathbb{H}^2 = \{z = x + y\cdot i \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$*, o semi-plano superior, equipado com a métrica,*

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} \tag{2.2.2}$$

é chamado espaço hiperbólico, também conhecido como plano de Lobachevski.

A métrica definida em (2.2.2) é denominada métrica hiperbólica. O conjunto

$$\partial_\infty\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\} \cup \{\infty\} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

é denominado bordo assintótico de $\mathbb{H}^2$ e conjunto $\hat{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty\mathbb{H}^2$ é chamado plano complexo fechado.

Seja $\gamma : [t_0,\ t_1] \longrightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva parametrizada, onde, $\gamma(t) = x(t) + i\cdot y(t)$, o comprimento hiperbólico de γ denotado por $\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2}$ é dado por,

$$\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\gamma'(t)|}{y(t)}dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}}{y(t)}dt. \tag{2.2.3}$$

Define-se a distância hiperbólica entre dois pontos p e q em $\mathbb{H}^2$ como,

$$d(p,q) = \inf_{\gamma\in\Omega} \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2}, \tag{2.2.4}$$

onde Ω é o conjunto de todas aos curvas diferenciáveis por partes que ligam p a q. Para expressarmos a distância $d(p,q)$ em função de p e q necessitamos explicitar as geodésicas de $\mathbb{H}^2$, ou seja, as curvas que minimizam distâncias. Para isso precisamos expressar as isometrias de $\mathbb{H}^2$.

Definição 2.4. *Uma transformação $T : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ é uma isometria se ela preserva distância em $\mathbb{H}^2$.*

A composição de isometrias é também uma isometria e pode-se mostrar que o conjunto de isometrias de $\mathbb{H}^2$ munido com a operação de composição é um grupo o qual denotaremos por *Isom* $(\mathbb{H}^2)$.

Proposição 2.6. *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $l = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Re(z) = a\}$ a semi-reta vertical em $\mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$. A transformação $r_l : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ induzida pela reflexão Euclidiana sobre l é uma isometria de $\mathbb{H}^2$.*

Através da identificação dada em (2.1.1) podemos tomar $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} = \mathbb{R}^2_+$, munido com a métrica $g_{\mathbb{H}^2}$. A reflexão sobre l é dada por,

$$\begin{array}{rccc} r_l : & \mathbb{R}^2_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2_+ \\ & (x,y) & \longmapsto & (-x+2a, y) \end{array}.$$

Sua diferencial é,

$$dr_l = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostraremos que $\langle u, v\rangle_{\mathbb{H}^2} = \langle dr_l \cdot u, dr_l \cdot v\rangle_{\mathbb{H}^2}$ para todo $z_0 = (x,y)$ e para todo u e v em $T_{z_0}\mathbb{H}^2$. De fato, suponha $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ em $T_{z_0}\mathbb{H}^2$. Então,

$$\langle dr_l \cdot u, dr_l \cdot v\rangle_{\mathbb{H}^2} = \langle (-u_1, u_2), (-v_1, v_2)\rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{y^2} = \langle u, v\rangle_{\mathbb{H}^2}$$

e portanto, r_l é uma isometria de $\mathbb{H}^2$.

■

Para descrevemos mais isometrias de $\mathbb{H}^2$ descreveremos um grupo de transformações que mantém $\mathbb{H}^2$ invariante e que podem ser estendias continuamente sobre $\hat{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$.

Consideremos o grupo $SL(2,\mathbb{R})$ das matrizes $G_{2\times 2}$, de entradas reais, tais que $\det(G) = 1$. De maneira explicita,

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ \det(G) = a \cdot d - c \cdot b = 1 \right\}.$$

Agora consideremos o conjunto das transformações de Möbius, $T : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ da forma

$$PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}; a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ a \cdot d - c \cdot b = 1 \right\}.$$

Este conjunto é um grupo com a operação de composição de aplicação. A composição de duas transformações corresponde ao produto de suas matrizes correspondentes. Com efeito, sejam

$$T_1(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}, \quad T_2(z) = \frac{k \cdot z + l}{m \cdot z + n},$$

temos que,

$$(T_1 \circ T_2)(z) = \frac{(ak + bm) \cdot z + (al + bn)}{(ck + dm) \cdot z + (cl + dn)}.$$

Agora fazendo a correspondência entre as matrizes obtemos as matrizes G_1 e G_2 correspondente a transformações T_1 é T_2 respectivamente onde,

$$G_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$

Tomando o produto dessas duas matrizes obtemos,

$$G_1 \times G_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ak + bm & al + bn \\ ck + dn & cl + dn \end{bmatrix},$$

que é exatamente a matriz correspondente a transfonação $T_1 \circ T_2$. Note que as matrizes G e $-G$ de $SL(2,\mathbb{R})$ representam uma mesma transformação T. Assim cada transformação T pode ser representada por um par matrizes $\pm G \in SL(2,\mathbb{R})$. Portanto $PSL(2,\mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo quociente,

$$\frac{SL(2,\mathbb{R})}{\{Id, -Id\}}; \quad Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $PSL(2,\mathbb{R})$ contém todas as transformações de Möbius da forma,

$$T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = k > 0,$$

pois dividindo-se o numerador e o denominador de $T(z)$ por $\sqrt{k}$ obtemos uma nova matriz cujo determinante é 1. Em particular $PSL(2,\mathbb{R})$ contém todas as transformações da forma, $T(z) = a \cdot z + b; a > 0$ e a transformação $T(z) = -\frac{1}{z}$.

Teorema 2.7. *$PSL(2,\mathbb{R})$ age em $\mathbb{H}^2$ por homeomorfismos.*

Primeiro vejamos que cada transformação $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ mapeia $\mathbb{H}^2$ sobre si mesmo. Suponha $w = T(z) = \frac{a\cdot z+b}{c\cdot z+d}$, $z = x + y\cdot i$. Mostraremos que $\Im(w) > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} w &= T(z) = \frac{a\cdot z+b}{c\cdot z+d} = \frac{(a\cdot z+b)(c\cdot \bar{z}+b)}{|c\cdot z+d|^2} = \frac{a|z|^2 + ad\cdot z + bc\bar{z} + bd}{|c\cdot z+d|^2} \\ &= \frac{a(x^2+y^2) + ad(x+yi) + bc(x-yi) + bd}{|c\cdot z+d|^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Im(w) = \frac{(ad-bc)y}{|c\cdot z+d|^2} = \frac{y}{|c\cdot z+d|^2} = \frac{\Im z}{|c\cdot z+d|^2}. \tag{2.2.5}$$

Dessa forma, se $\Im(z) > 0$ então, $\Im(w) > 0$. O Teorema segue da continuidade de $T(z)$ e de sua inversa.

■

O Teorema 2.7 nos garante que cada transformação $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ é um homeomorfismo de $\mathbb{H}^2$ sobre si mesmo. Mostraremos que além disso cada uma dessas transformações é uma isometria de $\mathbb{H}^2$.

Teorema 2.8. *$PSL(2,\mathbb{R}) \subset Isom\,(\mathbb{H}^2)$.*

Mostraremos que, se $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{H}^2$ é uma curva diferenciável por partes, então T preserva o comprimento hiperbólico de γ, para toda $T \in PSL(2,\mathbb{R})$. Suponha $\gamma(t) = x(t) + i\cdot y(t)$, e $T(z) = \frac{a\cdot z+b}{c\cdot z+d}$.

Tome $(T\circ\gamma)(t)$. Pela Equação (2.2.5),

$$\Im(T(\gamma(t))) = \frac{\Im(\gamma(t))}{|c\cdot\gamma(t)+d|^2}.$$

Pela regra da cadeia, $(T\circ\gamma)'(t) = T'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$ onde,

$$T'(\gamma(t)) = \frac{a\cdot(c\cdot\gamma(t)+d) - c\cdot(a\cdot\gamma(t)+b)}{(c\cdot\gamma(t)+d)^2} = \frac{ad-cb}{(c\cdot\gamma(t)+d)^2} = \frac{1}{(c\cdot\gamma(t)+d)^2}.$$

Dai, aplicando (2.2.3),

$$\begin{aligned} \|T\circ\gamma\|_{\mathbb{H}^2} &= \int_a^b \frac{|(T\circ\gamma)'(t)|}{\Im(T(\gamma(t)))}dt = \int_a^b \frac{|T'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)|}{\Im(T(\gamma(t)))}dt \\ &= \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|(c\cdot\gamma(t)+d)^2|}\cdot\frac{|c\cdot\gamma(t)+d|^2}{\Im(\gamma(t))}dt = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}dt = \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2}. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Portanto, toda transformação $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ preserva distância em $\mathbb{H}^2$ e além disso preservam a orientação.

■

Teorema 2.9. *As geodésicas de $\mathbb{H}^2$ são semi-círculos e semi-retas ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.*

Seja z_1 e z_2 dois pontos distintos em $\mathbb{H}^2$. Inicialmente suponha $z_1 = ia$ e $z_2 = ib$, com $b > a$. Se $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}^2$ é uma curva diferenciável por partes ligando ia e ib com $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, então,

$$\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|x'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Em particular, o segmento de reta $[ia, ib]$, parametrizado por $\gamma(t) = (1-t)\cdot(ia)+t\cdot ib$ é uma curva diferenciável cujo comprimento hiperbólico é $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Dessa forma $[ia, ib]$ minimiza a distância entre $z_1 = ia$ e $z_2 = ib$. Logo, este segmento está sobre uma geodésica de $\mathbb{H}^2$.

Agora sejam z e w arbitrários em $\mathbb{H}^2$. Considere agora ω como o único círculo ou semi-reta ortogonal a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ ligando estes pontos. É possível encontrar uma transformação de Möbius T que transforma ω no eixo imaginário. Utilizando o argumento acima, conclui-se que ω é a geodésica ligando z e w.

■

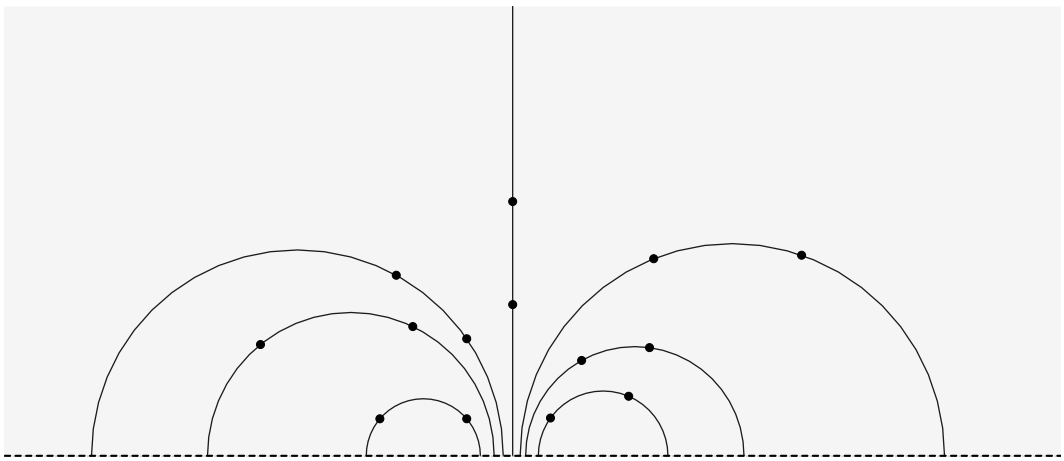

Figura 2.1: Geodésicas no Modelo $\mathbb{H}^2$.

Teorema 2.10. *Cada transformação $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ mapeia geodésicas de $\mathbb{H}^2$ sobre geodésicas de $\mathbb{H}^2$.*

Basta observamos que cada transformação de Möbius $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ mantém $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty = \partial_\infty \mathbb{H}^2$ invariante. Como T mapeia círculos e linhas Euclidianas em círculos ou linhas Euclidianas, então T transforma círculos e linhas ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ em círculos e linhas ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.

■

Consideremos agora, z_0 e w_0 pontos genéricos de $\mathbb{H}^2$ e seja γ a única geodésica ligando z_0 a w_0. Suponha $z^*, w^* \in \partial_\infty \mathbb{H}^2 \cap \gamma$ extremos de γ, de modo que $z_0 \in [z^*, w_0]$ e T a única transformação de Möbius tal que $T(z^*) = 0$, $T(z_0) = i$ e $T(w^*) = \infty$. Usando o raciocínio empregado na demostração da Proposição 2.2 temos que $T = S^{-1} \circ R$, onde

$$R(z) = (z, z_0, z^*, w^*), \quad S(z) = (z, i, 0, \infty) = -i \cdot z.$$

Note que $S^{-1}(z) = i \cdot z$. Dessa forma, $T(z) = S^{-1}(R(z)) = i \cdot (z, z_0, z^*, w^*)$. Pode-se mostrar que $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ e que $1 < (w_0, z_0, z^*, w^*) \in \mathbb{R}$. Temos que $T(w_0) = i \cdot (w_0, z_0, z^*, w^*)$ está sobre o eixo imaginário e que a imagem do segmento geodésico $[z_0, w_0]$ é o segmento de reta geodésico $[T(z_0), T(w_0)] = [i, i \cdot (w_0, z_0, z^*, w^*)]$ que tem comprimento hiperbólico $\ln((w_0, z_0, z^*, w^*))$.

Mas $d(z_0, w_0) = d(T(z), T(w_0)) = \ln((w_0, z_0, z^*, w^*))$. Com isso obtemos,

$$d(z, w) = \ln((w_0, z_0, z^*, w^*)). \tag{2.2.7}$$

A distância em $\mathbb{H}^2$ satisfaz as seguintes relações.

Teorema 2.11. *Para z e w em $\mathbb{H}^2$,*

(i) $d(z, w) = \ln\left(\dfrac{|z - \overline{w}| + |z - w|}{|z - \overline{w}| - |z - w|}\right)$

(ii) $\cosh(d(z, w)) = 1 + \dfrac{|z - w|^2}{2 \cdot Im(z) \cdot Im(w)}$

(iii) $\sinh\left(\dfrac{1}{2} \cdot d(z, w)\right) = \dfrac{|z - w|}{2 \cdot (Im(z) \cdot Im(w))^{\frac{1}{2}}}$

(iv) $\cosh\left(\dfrac{1}{2} \cdot d(z, w)\right) = \dfrac{|z - \overline{w}|}{2 \cdot (Im(z) \cdot Im(w))^{\frac{1}{2}}}$

(v) $\tanh\left(\dfrac{1}{2} \cdot d(z, w)\right) = \dfrac{|z - w|}{|z - \overline{w}|}$

Agora consideremos, $PS^*L(2,\mathbb{R}) = \dfrac{S^*L(2,\mathbb{R})}{\{Id, -Id\}}$ onde,

$$S^*L(2,\mathbb{R}) = \left\{ G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ \det(G) = a \cdot d - c \cdot b = \pm 1 \right\}.$$

o grupo das matrizes reais com determinante ± 1. $PSL(2,\mathbb{R})$ é subgrupo de índice 2 em $PS^*L(2,\mathbb{R})$. Com essas considerações identificamos todas as isometrias de $\mathbb{H}^2$, como explicitado no teorema abaixo.

Teorema 2.12. *O grupo Isom* $(\mathbb{H}^2)$ *é gerado pelas transformações lineares fracionárias de* $PSL(2,\mathbb{R})$ *juntamente com a transformação induzida pela reflexão Euclidiana sobre a reta* $\Re(z) = 0$ *dada por* $r(z) = -\bar{z}$. *Além disso, Isom* $(\mathbb{H}^2)$ *é isomorfo a* $PS^*L(2,\mathbb{R})$ *e* $PSL(2,\mathbb{R})$ *é um subgrupo de Isom* $(\mathbb{H}^2)$ *de índice* 2.

■

Definimos o ângulo hiperbólico entre duas geodésicas que se intersectam em um ponto $z_0 \in \mathbb{H}^2$ como o ângulo hiperbólico entre seus vetores tangentes em $T_{z_0}\mathbb{H}^2$. Supondo γ_1 e γ_2 duas geodésicas que se intersectam em z_0 cujos vetores tangentes são v_1 e v_2 respectivamente, o ângulo β entre v_1 e v_2 é tal qual

$$\cos(\beta) = \frac{\langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{H}^2}}{||v_1||_{\mathbb{H}^2} \cdot ||v_2||_{\mathbb{H}^2}}.$$

Verifica-se que o ângulo hiperbólico entre γ_1 e γ_2 é o mesmo ângulo euclidiano entre essas curvas. De fato,

$$\cos(\beta) = \frac{\langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{H}^2}}{||v_1||_{\mathbb{H}^2} \cdot ||v_2||_{\mathbb{H}^2}} = \frac{\frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\Im^2(z_0)}}{\frac{||v_1||}{\Im(z_0)} \cdot \frac{||v_2||}{\Im(z_0)}} = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{||v_1|| \cdot ||v_2||} \cdot \frac{\Im(z_0) \cdot \Im(z_0)}{\Im^2(z_0)} = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{||v_1|| \cdot ||v_2||}.$$

Definição 2.5. *Uma transformação de* $\mathbb{H}^2$ *é dita conforme se preserva ângulos e anti-conforme se preserva o valor absoluto de ângulos e inverte sinal.*

As transformações $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ são conformes e as transformações

$$S = \frac{a \cdot \bar{z} + b}{c \cdot \bar{z} + d} \in PS^*L(2,\mathbb{R});\ ad - cb = -1$$

são anti-conformes.

2.3 O Modelo $\mathbb{D}^2$ para a Geometria Hiperbólica

Agora apresentaremos o modelo do Disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica.

Seja $\mathcal{P} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a transformação analítica definida por

$$\mathcal{P}(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

$\mathcal{P}$ aplica $\mathbb{H}^2$ bijetivamente sobre $\mathbb{D}^2$ e além disso $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ é também aplicado bijetivamente sobre $\partial\mathbb{D}^2$. Note ainda que $\mathcal{P}$ é uma transformação de Möbius e pela Proposição 2.4 leva círculos sobre círculos. Com cálculos diretos obtemos, $\mathcal{P}(0) = -1$, $\mathcal{P}(i) = 0$ e $\mathcal{P}(\infty) = 1$.

Definição 2.6. *O disco aberto* $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ *munido com a métrica,*

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} \tag{2.3.1}$$

é denominado Modelo do disco de Poincaré para a Geometria Hiperbólica.

O círculo $\partial\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ é chamado fronteira de $\mathbb{D}^2$ ou círculo no infinito e o conjunto $\overline{\mathbb{D}^2} = \mathbb{D}^2 \cup \partial\mathbb{D}^2$ o fecho de euclidiano de $\mathbb{D}^2$. Defini-se a distância $d_{\mathbb{D}^2}(z, w)$ entre $z, w \in \mathbb{D}^2$ como,

$$d_{\mathbb{D}^2}(z, w) = d_{\mathbb{H}^2}\Big(\mathcal{P}^{-1}(z), \mathcal{P}^{-1}(w)\Big). \tag{2.3.2}$$

Mostra-se que $d_{\mathbb{D}^2}$ pode ser identificada com a métrica associada a diferencial (2.3.2).

O modelo $\mathbb{D}^2$ para a Geometria Hiperbólica apresenta uma versão "limitada"para o espaço Hiperbólico, o que contribui para a visualização de elementos geométricos. Um fato que se destaca sobre este modelo é que as geodésicas são segmentos de círculos ortogonais a $\partial\mathbb{D}^2$ e os diâmetros de $\mathbb{D}^2$.

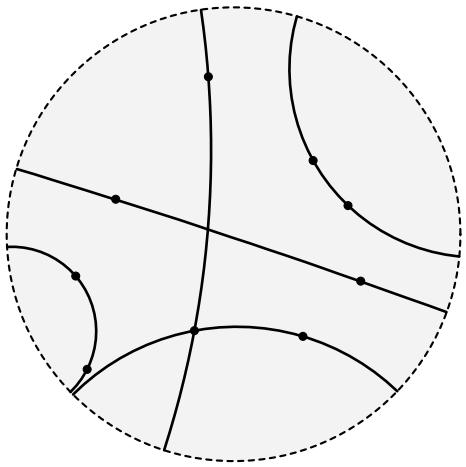

Figura 2.2: Geodésicas no Modelo $\mathbb{D}^2$.

Definição 2.7. *Um Polígono hiperbólico com n lados, denotado por* P_n *é um conjunto fechado em* $\overline{\mathbb{H}^2}$ *limitado por segmentos geodésicos chamados de lados. Um vértice de* P_n *é a interseção de dois de seus lados. Admite-se vértices na fronteira de* $\mathbb{H}^2$*, chamados de vértices ideais.*

A Figura 2.3 ilustra diferentes triângulos em $\mathbb{H}^2$ com nenhum, um, dois ou três vértices ideais respectivamente.

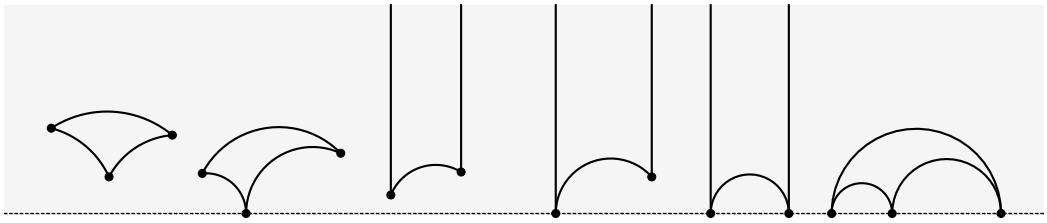

Figura 2.3: Triângulos em $\mathbb{H}^2$.

A Definição 2.7 estende-se naturalmente a $\mathbb{D}^2$.

Definição 2.8. *Um polígono P_n, com n lados, todos de mesmo comprimento e ângulos internos iguais é dito um polígono regular.*

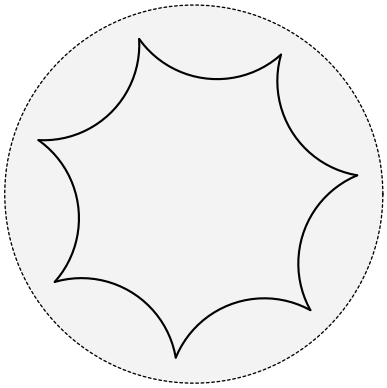

Figura 2.4: Polígono regular em $\mathbb{D}^2$.

Agora apresentamos a definição de área de uma região hiperbólica.

Definição 2.9. *A área de uma região $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ é,*

$$A(\Omega) = \int\int_{\Omega} \frac{1}{y^2} \cdot dxdy \tag{2.3.3}$$

se a integral existir.

Teorema 2.13 (Teorema de Gauss-Bonnet)**.** *Área hiperbólica de um triângulo hiperbólico $\triangle$ com ângulos internos α, β e γ é*

$$A(\triangle) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \tag{2.3.4}$$

Segue da Teorema 2.13 que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que π e que área de um triângulo cujos três vértices são ideais é

exatamente π. Note que a área de um triângulo hiperbólico qualquer depende somente de seus ângulos internos. De modo mais geral, a área de um polígono qualquer depende unicamente de seus ângulos internos como destacado no seguinte teorema.

Teorema 2.14. *Se P_n é um polígono hiperbólico qualquer, com ângulos internos, $\theta_1,\ \theta_2, \ldots, \theta_n$, então a área hiperbólica de P_n é dada por,*

$$A(P_n) = (n-2)\cdot\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n). \tag{2.3.5}$$

Dizemos que um subconjunto H do espaço hiperbólico é convexo se tomados dois pontos quaisquer $z, w \in H$ o segmento geodésico $[z, w]$ estiver inteiramente contido em H. A Teorema 2.15 estabelece condições necessárias e suficientes para que um polígono P_n seja convexo.

Teorema 2.15. *Seja P_n um polígono com com ângulos internos $\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots\ ,\ \theta_n$. Então P_n é convexo se, e somente se, cada θ_i, $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, satisfaz $0 \leq \theta_i \leq \pi$.*

Agora damos as condições para a existência de um determinado polígono hiperbólico.

Teorema 2.16. *Sejam $\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots\ ,\ \theta_n$ tais que cada θ_i, $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, satisfaz $0 \leq \theta_i \leq \pi$. Então existe um polígono hiperbólico P_n que tem cada θ_i como ângulo interno se, e somente se,*

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n < (n-2)\cdot\pi \tag{2.3.6}$$

2.4 Grupos Fuchsianos

Iniciamos essa Seção dando uma classificação às isometrias do Espaço Hiperbólico. Lembremos que uma dada transformação de Möbius possui no máximo dois pontos fixos.

Definição 2.10. *Seja $T \in Isom\ (\mathbb{H}^2)$, uma isometria que preserva a orientação. Dizemos que:*

- *T é elíptica se possui um ponto fixo em $\mathbb{H}^2$;*
- *T é parabólica se possui um único ponto fixo na fronteira de $\mathbb{H}^2$;*
- *T é hiperbólica se possui dois pontos fixos, ambos pertencentes a fronteira de $\mathbb{H}^2$.*

Uma outra caracterização às isometrias pode ser dada através do traço da isometria definido como segue. Seja $T(z) = \dfrac{a\cdot z + b}{c\cdot z + d} \in PSL(2,\mathbb{R})$, definimos o traço de T

por $tr\,(T) = |tr\,(A)| = |a + d|$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Dessas observações obtemos a seguinte proposição cuja prova será omitida.

Proposição 2.17. *Seja $T \in Isom\,(\mathbb{H}^2)$, uma isometria que preserva a orientação.*

- *T é elíptica se, e somente se, $tr\,(T) > 2$;*
- *T é parabólica se, e somente se, $tr\,(T) = 2$;*
- *T é hiperbólica se, e somente se, $tr\,(T) < 2$.*

Agora voltaremos nossa atenção a subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$. Apresentaremos algumas definições cruciais ao desenvolvimento do estudo desses grupos e admitiremos sem mais detalhes que $Isom\,(\mathbb{H}^2)$ é um grupo topológico como descrito em [14] e [2].

Definição 2.11. *Um subgrupo Γ de $Isom\,(\mathbb{H}^2)$ é dito **discreto** se a topologia induzida em Γ é a topologia discreta. Em outros termos, Γ é um subconjunto discreto do grupo topológico $Isom\,(\mathbb{H}^2)$.*

A seguinte definição delimita os subgrupos discretos de nosso interesse.

Definição 2.12. *Um subgrupo discreto de $Isom\,(\mathbb{H}^2)$ é chamado um **grupo Fuchsiano** se cada um de seus termos preservar orientação, ou seja, um grupo Fuchsiano é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Agora damos uma caracterização à ação de grupos discretos sobre $\mathbb{H}^2$ (ou em $\mathbb{D}^2$). Para isso façamos as seguintes considerações, de modo mais geral sobre um espaço métrico X arbitrário. Seja X um espaço métrico. Uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X é dita **localmente finita** se para todo subconjunto compacto $K \subset X$, $A_\lambda \cap K \neq \emptyset$ somente para uma quantidade finita de índices $\lambda \in L$.

Agora consideremos G é um grupo de homeomorfismos de X. Para cada $x \in X$, a família $G_x = \{g(x) \mid g \in G\}$ é denominada a G-órbita de x.

Definição 2.13. *Um grupo G age de maneira **propriamente descontínua** em um espaço métrico X se a G-órbita de cada ponto $x \in X$ é localmente finita.*

Note que segue da Definição 2.13 que a ação um grupo G em X é propriamente descontínua se, e somente se, cada órbita é discreta e a ordem do estabilizador de cada

ponto $x \in X$ é finita. Ou seja, cada G-órbita é discreta e para cada ponto $x \in X$, o subgrupo de G dado por $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ possui ordem finita.

O seguinte teorema estabelece uma caracterização para ação de grupos propriamente descontínua.

Teorema 2.18. *Um grupo G tem ação propriamente descontínua em X se, e somente se, cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que*

$$T(V) \cap V \neq \emptyset$$

somente para uma quantidade finita de transformações $T \in G$, ou seja, o conjunto

$$\{T \in G \mid T(V) \cap V \neq \emptyset\}$$

é finito.

Com este resultado podemos seguir a uma caracterização para grupos Fuchsianos.

Teorema 2.19. *Seja Γ um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$. Γ é um grupo Fuchsiano se, e somente se, Γ age de maneira propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$.*

Corolário 2.20. *Seja Γ um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$. Então Γ age de maneira propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$ se, e somente se, para todo $z \in \mathbb{H}^2$, Γ_z, a Γ-órbita de z, for um subconjunto discreto de $\mathbb{H}^2$.*

Agora definiremos o conceito de região fundamental para um determinado grupo Fuchsiano. Para isso enunciamos a seguinte definição em um contexto mais geral de espaços métricos, que se aplica obviamente ao espaço hiperbólico.

Definição 2.14. *Seja X um espaço métrico e $F \subset X$ uma região fechada não vazia. F é dita uma região fundamental para um grupo G de homeomorfismos de X se*

(i) $Int\,(F) \neq \emptyset$;

(ii) $\bigcup_{T \in G} T(F) = X$;

(iii) $Int\,(F) \cap T(Int\,(F)) = \emptyset$.

O conjunto $\partial\,(F) = F \setminus Int\,(F)$ é denominado a fronteira de F. A coleção $\{T(F) \mid T \in G\}$ é dita uma **tesselação** de X.

Definição 2.15. *Seja Γ um grupo Fuchsiano arbitrário e $p \in \mathbb{H}^2$ um ponto que não é fixado por nenhum elemento $I_d \neq T \in \Gamma$. Uma região de Dirichlet para Γ, centrada em p é o conjunto,*

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z,p) \leq d(z,T(p)) \ \forall \ T \in \Gamma\}.$$

Ponderamos que tal ponto p existe uma vez que o conjunto dos pontos fixos de cada elemento $T \in \Gamma - \{I_d\}$ é um conjunto discreto. Verifica-se que uma região de Dirichlet é uma região fundamental para Γ. Para sermos mais precisos, enunciamos o seguinte teorema cuja prova encontra-se em [14].

Teorema 2.21 (Katok, 1992, p.54)**.** *Se p é ponto não-fixado por qualquer elemento $T \in \Gamma - \{I_d\}$, então $D_p(\Gamma)$ é uma região fundamental conexa para Γ.*

Diz-se que uma região fundamental é localmente finita se a tesselação

$$\{T(F) \mid T \in \Gamma\}$$

é localmente finita. Uma das propriedades de uma região de Dirichlet é que esta é localmente finita.

O bordo de um região de Dirichlet é constituído por segmentos geodésicos em $\mathbb{H}^2$ e possivelmente por segmentos do bordo assintótico $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Estes segmentos são chamados arestas da região de Dirichlet. Quando dois segmentos geodésicos se intersectam em um ponto $v \in \mathbb{H}^2$ dizemos que v é um vértice de $D_p(\Gamma)$. Uma região de Dirichlet é também conhecida por **Polígono de Dirichlet** (ou Polígono Fundamental), essa denominação se torna mais coerente com a construção à qual nos propomos no Capítulo 4.

Teorema 2.22. *Seja Γ um grupo Fuchsiano e $D_p(\Gamma)$ um Polígono de Dirichlet para Γ.*

(a) Se α é uma aresta de $D_p(\Gamma)$, então existe $T \in \Gamma - \{I_d\}$ tal que $\alpha \subseteq D_p(\Gamma) \cap T(D_p(\Gamma))$;

(b) Se v é um ponto em $D_p(\Gamma)$, então v é um vértice se, e somente se, exitem T_1 e T_2 distintos em $\Gamma - \{I_d\}$ tais que,

$$v = D_p(\Gamma) \cap T_1(D_p(\Gamma)) \cap T_2(D_p(\Gamma)).$$

Destacamos que a ação de Γ em $\mathbb{H}^2$ determina uma relação de equivalência (partição) em $\mathbb{H}^2$. Dois ponto z_1 e z_2 em $\mathbb{H}^2$ são congruentes se z_1 e z_2 pertencem a uma mesma Γ-órbita. Segue que se z_1 e z_2 pertencem a uma região de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ e z_1 é congruente a z_2 então, z_1 e z_2 pertencem à fronteira de $D_p(\Gamma)$, em decorrência da definição de região fundamental. Note ainda que a congruência é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos vértices de $D_p(\Gamma)$. Diz-se que cada classe de equivalência de um vértice é um **ciclo de vértices**.

Teorema 2.23. *Seja $D_p(\Gamma)$ um Polígono de Dirichlet para Γ. Seja $C = \{v_1, \ldots, v_r\}$ um ciclo vértice e $\theta_1, \ldots, \theta_r$ os ângulos internos dos respectivos vértices do ciclo C. Considere m a ordem do estabilizador de um desses vértices em Γ. Então,*

$$\theta_1 + \ldots + \theta_r = \frac{2\pi}{m}.$$

Note que como $D_p(\Gamma)$ é localmente finita e cada ciclo possui uma quantidade finita de vértices congruentes. Além disso, o estabilizador de dois vértices congruentes são subgrupos conjugados em Γ e possuem mesma ordem. Se um determinado vértice não é fixado por nenhum elemento de $\Gamma - \{I_d\}$ então seu estabilizador é $\langle I_d \rangle$ tem ondem 1 e $\theta_1 + \ldots + \theta_r = 2\pi$.

Agora, dada uma aresta α de um Polígono de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ para um grupo Γ, existe uma elemento $T \in \Gamma - \{I_d\}$ tal que $\beta = T(\alpha)$ é também uma aresta de $D_p(\Gamma)$. Além disso, cada classe de equivalência de uma aresta contém exatamente dois elementos ou seja, T é único elemento de Γ que mapeia α sobre β. Dessa forma, se a fronteira de $D_p(\Gamma)$ possui um número finito este necessariamente é um número par. Dizemos que as arestas de uma determinada classe são **emparelhadas** pelo elemento T.

Com essas observações enunciamos um teorema crucial ao desenvolvimento do nosso trabalho.

Teorema 2.24. *Seja $\Phi = \{T_i\}$ o subconjunto dos elementos de um grupo Fuchsiano Γ, que emparelham arestas de algum Polígono de Dirichlet para Γ. Então Φ é um conjunto gerador para Γ.*

Associamos cada grupo Fuchsiano Γ a um Polígono de Dirichlet convexo P_Γ que ladrilha $\mathbb{H}^2$. O Teorema 2.23 estabelece a condição geométrica necessária para que P_Γ tessele $\mathbb{H}^2$ — que a soma dos ângulos internos de cada ciclo seja da forma $\frac{2\pi}{m}$, onde m é a ordem do estabilizador de um dos vértices do ciclo.

Agora estabeleceremos condições para uma recíproca parcial do Teorema 2.24, no sentido de determinar um grupo Fuchsiano a partir de uma dado Polígono e que este seja um Polígono fundamental para um grupo Fuchsiano Γ. Nos restringimos a tratar no Capítulo 4 dos caso em que a região é um polígono hiperbólico regular.

Seja P um polígono hiperbólico convexo em $\mathbb{H}^2$. Digamos que $\mathcal{A}$ seja o conjunto de arestas de P. Com essas considerações tomemos a seguinte definição.

Definição 2.16. *Um Emparelhamento de arestas para P é um conjunto de isometrias $\Phi = \{T_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ que satisfaz as seguintes condições:*

(a) existe aresta $\alpha' \in \mathcal{A}$ com $T_\alpha(\alpha) = \alpha'$;

(b) as isometrias T_α e $T_{\alpha'}$ satisfazem a relação $T_{\alpha'} = T_\alpha^{-1}$;

(c) Se α for aresta de P então α' é aresta de P', então $P \cap T_\alpha(P) = \alpha$.

Diremos nesse caso que as arestas α e α' são emparelhadas por T_α (ou por T_α^{-1}).

Em outros termos, a Definição 2.16 nos diz que um Emparelhamento de arestas de P é uma partição do conjunto de aresta $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \bigcup \{\alpha, \alpha'\} \tag{2.4.1}$$

e que Φ é o subconjunto de isometrias

$$\Phi = \{T \in Isom\,(\mathbb{H}^2) \mid \alpha = P \cap T(P), \alpha \in \mathcal{A}\}. \tag{2.4.2}$$

Neste caso, Φ admite partição

$$\Phi = \bigcup_{T_\alpha \neq I_d} \{T_\alpha, T_\alpha^{-1}\} \tag{2.4.3}$$

com $\alpha = P \cap T_\alpha(P)$ e $\alpha' = P \cap T_\alpha^{-1}(P)$ e dizemos que Φ é subordinado a partição (2.4.1). Dito isso, enunciamos o principal resultado dessa Seção.

Teorema 2.25 (Teorema de Poincaré)**.** *Seja P um polígono hiperbólico convexo com número par de arestas. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de arestas de P e $\mathcal{A} = \cup\{\alpha, \alpha'\}$ uma partição de $\mathcal{A}$ em pares de arestas. Suponha que:*

(a) $\Phi = \{T \in Isom\,(\mathbb{H}^2) \mid \alpha = P \cap T(P), \alpha \in \mathbb{A}\}$ é um conjunto de isometrias subordinado à partição $\mathcal{A} = \cup\{\alpha, \alpha'\}$;

(b) para todo ciclo de vértices C, a soma dos ângulos internos do ciclo é da forma $s_\theta = \frac{2\pi}{m}$.

Então, o grupo $\Gamma = \langle\Phi\rangle$, grupo gerado por Φ, é um grupo Fuchsiano e P é um polígono fundamental para Γ.

Capítulo 3

Teoria de Grafos

Neste capítulo apresentaremos conceitos inerentes a Teoria de Grafos. Trataremos de aspectos combinatórios e topológicos desta teoria, que serão ferramentas de interesse ao desenvolvimento deste trabalho. Nos baseamos principalmente em [4] para a abordagem combinatória e em [7], [11], [12] e [22] para um tratamento topológico da Teoria de Grafos.

3.1 Grafos

Definição 3.1 (Grafo)**.** *Um grafo G é um par ordenado $(V(G), A(G))$, constituído de um conjunto $V(G)$ de vértices e um conjunto $A(G)$ de arestas, disjunto de $V(G)$ e uma função de incidência ψ_G que associa cada aresta de G a um par não-ordenado de vértices de G (não necessariamente distintos).*

Se e é uma aresta de G e u e v são vértices de G tais que $\psi_G(e) = \{u, v\}$ então dizemos que e liga u e v e que u e v são extremidades de e. Denotaremos por $|V|$ e $|A|$ a cardinalidade do conjunto de vértices e arestas de G respectivamente. O par $\{u, v\}$ é denotado de maneira abreviada por uv e a estrutura de incidência estabelecida pela função ψ por $\psi_G(A)$.

Exemplo 3.1. *Consideremos o grafo $G = (V(G), A(G))$, onde $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$, $A(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e ψ_G definida por: $\psi_G(a) = uv$, $\psi_G(b) = vw$, $\psi_G(c) = wx$, $\psi_G(d) = xu$, $\psi_G(e) = wx$, $\psi_G(f) = xy$ e $\psi_G(g) = xx$.*

Uma forma conveniente de descrever um grafo é através de uma **representação gráfica** no plano. Nesse esquema de representação cada vértice corresponde a um ponto e cada aresta a uma curva ligando seus extremos. A seguir explicitamos uma das possíveis representações gráficas do grafo G.

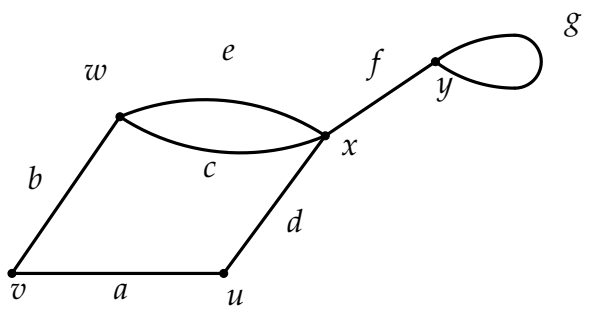

Figura 3.1: Representação gráfica de G.

Os extremos de uma aresta são ditos incidentes a esta e vice e versa. Dizemos que dois vértices são adjacentes quando são incidentes a uma mesma aresta e que duas arestas são adjacentes se são incidentes a um mesmo vértice. Uma aresta com extremos idênticos é denominada **laço** (ou ***loop***). A aresta g do Exemplo 3.1 é um laço. Duas arestas distintas com mesmo par de extremos são ditas **arestas paralelas** ou **múltiplas**. As arestas c e e do Exemplo 3.1 são paralelas.

Dizemos que um determinado grafo é **simples** quando este não possui laços ou arestas paralelas. Notemos que para todo grafo simples a função de incidência ψ_G fica determinada de maneira única pelo conjunto de arestas, uma vez que cada aresta fica unicamente determinada por seu par de vértices extremais. Note que um grafo simples é um complexo simplicial abstrato.

3.1.1 Classes Especiais de Grafos

Definição 3.2 (Grafo Completo)**.** *Um Grafo G é dito completo se G é simples e quaisquer dois vértices são adjacentes. Denotaremos o Grafo completo com n vértices por K_n.*

No que segue, a partir desse ponto, não faremos distinção e entre um grafo e sua representação geométrica. Desse forma, nos referimos à representação geométrica de um determinado grafo como "o grafo".

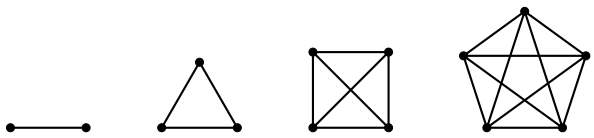

Figura 3.2: Grafos completos K_2, K_3, K_4 e K_5.

Definição 3.3 (Grafo Bipartido)**.** *Um grafo G é **bipartido** se seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois conjuntos não vazios X e Y, de modo que cada arestas tenha uma extremidade em X e outra em Y. Tal partição é chamada uma bipartição do grafo.*

Se um grafo G é bipartido simples e cada vértice de X é adjacente a cada vértice de Y então dizemos que G é um **grafo completo bipartido**. Dizemos que G é um **grafo estrela** ou **estrelado** se G é bipartido com $|X| = 1$ ou $|Y| = 1$.

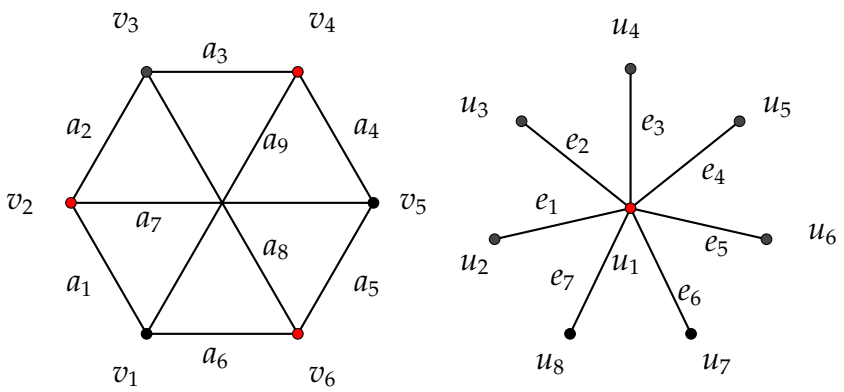

Figura 3.3: Grafos bipartidos.

Na figura 3.3 o grafo da direita é bipartido completo, pois seu conjunto de vértices pode ser particionado em $A = \{v_1, v_3, v_5\}$ e $B = \{v_2, v_4, v_6\}$ e cada vértice de A é adjacente a cada vértice de B. O grafo da direita é um grafo estrelado.

Um **passeio** W em um grafo G é uma lista alternada de vértices e arestas,

$$W := v_0\, a_1\, v_1\, a_2\, v_2\, a_3\, \ldots\, a_n\, v_n$$

tal que para $j = \{1, \ldots, n\}$ os vértices v_{j-1} e v_j são os extremos da aresta a_j. O vértice v_0 é dito início do passeio e o vértice v_n o final do passeio. Define-se o comprimento de um passeio W como sendo o número de arestas que este tem, contando-se também as repetições de arestas. Dizemos que um passeio é aberto se $v_0 \neq v_n$ e que o passeio é fechado se $v_0 = v_n$.

Um passeio que não apresenta arestas repetidas é denominado **trilha**. Uma trilha em que os vértices intermediários não se repetem é denominado **caminho**. Um **ciclo** é um caminho fechado de comprimento pelo menos 1. Com essas definições podemos caracterizar uma classe de grafos de nosso interesse.

Definição 3.4 (Grafo Conexo)**.** *Um grafo G é dito conexo se para todo par de vértices u e v existir um caminho de u para v, do contrário G é desconexo.*

Em outros termos, um grafo G é desconexo se seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois conjuntos X e Y de modo que nenhuma aresta tenha uma extremidades em X e outra em Y. O grafo do Exemplo 3.1 e das Figuras 3.2 e 3.3 são exemplos de grafos conexos. Um exemplo de grafo desconexo é dado no Exemplo 3.2.

Exemplo 3.2. *Seja* $G = (V(G), A(G))$, *onde,* $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *e* $A(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ *com função de incidência* ψ_G *definida por:* $\psi_G(a_1) = v_1v_1$, $\psi_G(a_2) = v_1v_2$, $\psi_G(a_3) = v_2v_3$, $\psi_G(a_4) = v_2v_3$, $\psi_G(a_5) = v_4v_6$, $\psi_G(a_6) = v_6v_5$, $\psi_G(a_7) = v_5v_5$ *e* $\psi_G(a_8) = v_4v_5$. $V(G)$ *pode ser particionado em* $X = \{v_1, v_2, v_3\}$ *e* $Y = \{v_4, v_5, v_6\}$ *e nenhuma aresta de G tem um extremos em X e outro em Y.*

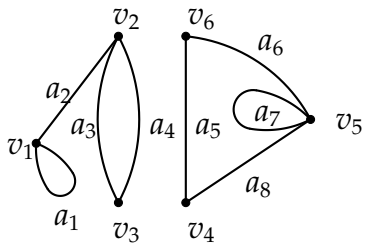

Figura 3.4: Grafo do Exemplo 3.2.

Definição 3.5 (Árvore)**.** *Um grafo árvore é um grafo conexo que não contém ciclos.*

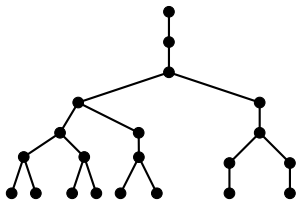

Figura 3.5: Grafo Árvore.

Definição 3.6 (Buquê)**.** *Um grafo Buquê em n laços é um grafo conexo que contém um único vértice e n laços incidindo a este. O Grafo buquê com n laços será denotado por* B_n.

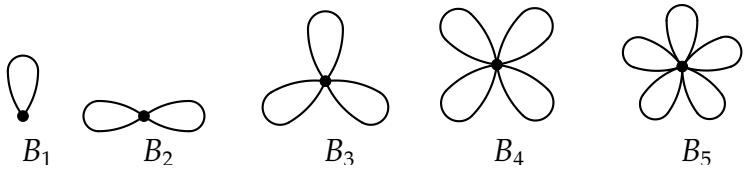

Figura 3.6: Buquês.

Se $G = (V(G), A(G))$ e $H = (V(H), A(H))$ são dois grafos, então dizemos que H é um **subgrafo** de G se, e somente se, $V(H) \subset V(G)$, $A(H) \subset A(G)$ e ψ_H for a restrição de ψ_G ao subconjunto $A(H)$. Se além disso, $V(G) = V(H)$ dizemos que H é **grafo de abrangência** de G. Em especial, se H é uma árvore ele é dito **árvore de abrangência** de G. Uma **componente** de um grafo é um subgrafo conexo maximal. Notemos que um grafo é conexo, se e somente se possui uma única componente.

Dado um grafo $G = (V(G), A(G))$, podemos obter novos grafos das seguintes operações: **deleção de arestas** e **deleção de vértices**. Se a é uma aresta de G denotaremos o subgrafo obtido de G deletando a aresta a por $G \setminus a$. Este grafo mantém $V(G)$ como conjunto de vértices e $A(G) \setminus \{a\}$ como conjunto de arestas e $\psi_G(A(G)) \setminus \psi_G(a)$ como estrutura de incidência. O subgrafo obtido de G deletando um determinado vértice v é denotado por $G \setminus v$. Este grafo tem o conjunto $V(G) \setminus \{v\}$ como conjunto de vértices e seu conjunto de arestas é obtido de $A(G)$ excluindo-se as arestas incidentes a v.

O **grafo induzido** por um subconjunto V' de $V(G)$ é o subgrafo de G que tem V' como seu conjunto de vértices e seu conjunto de arestas A' é constituído das arestas de G que tem extremos em V'. Este grafo pode ser obtido por deleção dos vértices de $V(G) \setminus V'$.

Outras formas de manipularmos grafos, com o intuito de obtermos novos grafos, é através da **identificação de vértices** não-adjacentes ou da **contração de arestas**. A identificação de dois vértices v_1 e v_2, não-adjacentes em um grafo G, consiste em substituí-los por um único vértice v que incidirá com todas as arestas incidentes a v_1 e v_2. O grafo resultante será denotado por $G_{v_1v_2}$.

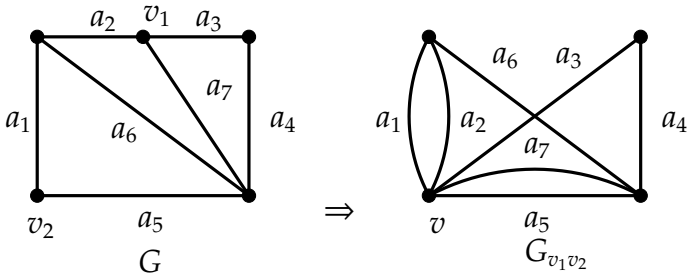

Figura 3.7: Grafo G e identificação dos vértices v_1 e v_2.

A contração de uma determinada aresta a de um grafo G, consiste em deletá-la e identificarmos seus extremos. Denotaremos este grafo por G_a.

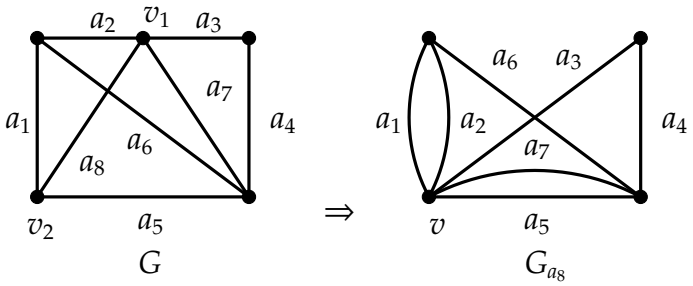

Figura 3.8: Grafo G e G_{a_8}.

Podemos pensar de maneira a se obter o resultado inverso ao obtido com a operação de contração de uma arestas. Na verdade, definiremos a operação de divisão

de um determinado vértice. Seja v um vértice de um determinada grafo G, a **divisão** de v consiste em substituir este vértice por dois vértices adjacentes v_1 e v_2 e substituir cada aresta incidente com v por uma aresta incidente com v_1 ou v_2, mas não a ambos a menos que a aresta em questão seja um laço. O outro extremo de cada aresta incidente com v continua inalterado.

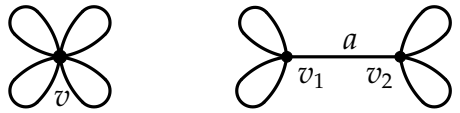

Figura 3.9: Divisão de v em B_4.

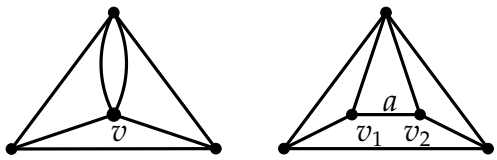

Figura 3.10: Divisão de v.

Existem outras formas de se obter novos grafos a partir de um dado grafo. Para mais informações o leitor pode consultar [4] e [12].

3.1.2 Representações Matriciais

Vejamos agora formas de representarmos um determinado grafo de maneira algébrica. Essas representações consistem em expressar as relações de adjacência e incidência através de matrizes.

Consideremos um grafo genérico G com conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e de arestas $A(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Construiremos a matriz $A_G = [b_{ij}]_{n\times n}$, onde b_{ij} é o número de vezes em que v_i é adjacente a v_j. Esta matriz é denominada **Matriz de Adjacência** de G.

Agora, determinaremos uma outra representação matricial para G: a **Matriz de Incidência**. Consideremos a matriz $I_G = [c_{ij}]_{n\times m}$, onde c_{ij} é o número de vezes em que v_i e a_j são incidentes. Convenciona-se que um laço incide duas vezes com seu vértice base e considerando essa observação temos que c_{ij} assume o valor 0 para não-incidência, 1 para incidência simples e 2 para laços. Para exemplificar determinaremos as matrizes A_G e I_G para o grafo do Exemplo 3.1.

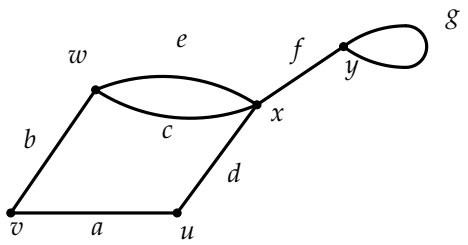

Figura 3.11: Grafo do Exemplo 3.1.

A_G	u	v	w	x	y
u	0	1	0	1	0
v	1	0	1	0	0
w	0	1	0	2	0
x	1	0	2	0	1
y	0	0	0	1	2

Tabela 3.1: Matriz A_G.

I_G	a	b	c	d	e	f	g
u	1	0	0	1	0	0	0
v	1	1	0	0	0	0	0
w	0	1	1	0	1	0	0
x	0	0	1	1	1	1	0
y	0	0	0	0	0	1	2

Tabela 3.2: Matriz I_G.

Notemos que a matriz de adjacência de qualquer grafo é sempre simétrica em relação a sua diagonal principal. A matriz de incidência tem a propriedade que a soma das entradas de cada coluna ser sempre 2, uma vez que cada aresta possui somente dois extremos. A soma das entradas de cada linha indica o número de arestas que incidem ao seu vértice correspondente, observando que laços são computados duas vezes. Essa última observação motiva a seguinte definição.

Definição 3.7 (Grau de um vértice)**.** *O grau de um vértice v de um grafo G, denotado por $g(v)$, é o número de arestas incidentes a v, com cada laço sendo computado duas vezes. O grau de um vértice v corresponde à soma das entradas da linha da matriz de incidência de G, correspondente ao vértice v.*

O grau de um vértice é também chamado de valência e pode também ser obtido pela soma das entradas da linha ou coluna da matriz de adjacências de G correspondentes a este vértice.

Teorema 3.1. *Para qualquer grafo $G(V(G), A(G))$,*

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2 \cdot |A(G)|,$$

onde $g(v)$ denota o grau do vértice v.

Com efeito, seja s a soma das entradas da matriz de incidência I_G de G. Podemos expressar s em parcelas, computando a soma das entradas de cada linha. Assim,

$$s = \sum_{v \in V} g(v).$$

Por outro lado, podemos também expressar s por parcelas correspondentes a soma das entradas de cada coluna. Como cada coluna de I_G tem soma 2 e temos $|A(G)|$ colunas,

obtemos,

$$s = 2 \cdot |A(G)|$$

e o resultado segue.

■

Um Grafo é dito **n-regular** se todos seus vértices tem mesmo grau. Decorre do Teorema 3.1 que, se G é n-regular, então $n \cdot |V(G)| = 2 \cdot |A(G)|$. Todo grafo n-completo é também $(n-1)$-regular.

3.1.3 Isomorfismos e Automorfismos de Grafos

Definição 3.8. *Dizemos que dois grafos $G(V(G), A(G))$ e $H(V(H), A(H))$ são isomorfos e denotamos por $G \cong H$, se existir bijeções $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ e $\tau : A(G) \longrightarrow A(H)$ de modo que $\psi_G(e) = uv$ se, e somente se, $\psi_H(\tau(e)) = \phi(u)\phi(v)$, onde ψ_G e ψ_H são as funções de incidência de G e H respectivamente. Expressaremos tal isomorfismo pelo par $f = (\phi, \tau)$.*

Um isomorfismo de um grafo G em si mesmo é também denominado um **automorfismo** de G. A composição de automorfismos de um grafo G é também um automorfismo. Com isso, o conjunto de todos os automorfismos de G munido da operação de composição de automorfismos é um grupo que denotaremos por $Aut(G)$.

Dados dois grafos G e G' e $f : H \longrightarrow H'$ um isomorfismo entre o subgrafo H de G e o subgrafo H' de G', definimos a **fusão** de G com G', denotada por $G *_f G'$, como sendo a união de G com G' respeitando o isomorfismo.

Exemplo 3.3. *Seja H e H' subgrafos de G e G' respectivamente, (ver Figura 3.12), onde $A(H) = \{e_1\}$, $V(H) = \{u_3, u_4\}$, $A(H') = \{a_1\}$, $V(H') = \{v_1, v_2\}$ e isomorfismo $f : H \longrightarrow H'$ de modo que, $f(e_1) = a_1$, $f(u_3) = v_2$ e $f(u_4) = v_1$. A fusão $G *_f G'$ é obtida identificando as arestas e_1 e a_1 bem como seus extremos, observando o isomorfismo f.*

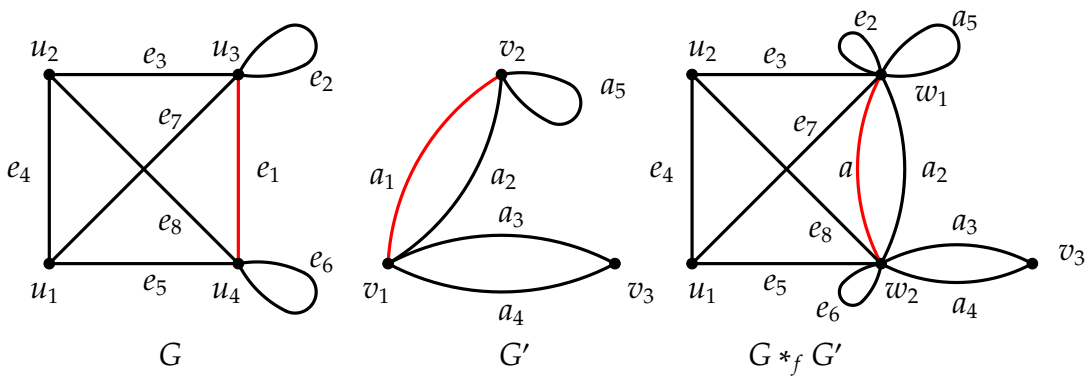

Figura 3.12: Fusão.

3.1.4 Representação Topológica de Grafos

Como visto na Seção 3.1, podemos atribuir a cada grafo G uma representação geométrica no plano. Veremos agora que essa noção pode ser estendida de maneira mais geral, possibilitando representar um determinado grafo em uma superfície qualquer.

Um determinado grafo G pode ser representado como um Espaço Topológico de modo que cada vértice de G é representado por um ponto distinto e cada aresta representada por um arco distinto, homeomorfo ao intervalo fechado $I = [0, 1]$. Os extremos de cada arco correspondem aos extremos da aresta correspondente. Os interiores de cada arco são dois a dois disjuntos sem pontos representantes de vértices. Esta representação é denominada representação topológica do grafo G.

Dado um grafo G, definimos a subdivisão de uma aresta $a = v_1v_2$ como sendo a remoção da aresta a acrescentando um novo vértice u, com grau dois e duas novas arestas $a_1 = v_1u$ e $a_2 = v_2u$ incidentes com u. A **subdivisão de uma aresta** de G dá origem a um novo grafo G' onde $V(G') = V(G) \cup \{u\}$ e $A(G') = A(G) \setminus \{a\} \cup \{a_1, a_2\}$ e estrutura de incidência $\psi_{G'}(A(G')) = \{\psi_G(A(G)) \setminus \psi_G(a)\} \cup \{\psi_{G'}(a_1)\} \cup \{\psi_{G'}(a_2)\}$, de modo que, $\psi_{G'}(a_1) = v_1u$ e $\psi_{G'}(a_2) = v_2u$. A **subdivisão de um grafo** G é definida por uma sucessão finita de subdivisões de arestas de G. Uma subdivisão de um grafo é uma operação que não muda o tipo de homeomorfismo de uma representação topológica.

Através da operação de subdivisão pode-se transformar qualquer grafo não-simples em um grafo simples. Se o grafo possui laços, subdivide-se cada um deles. Tal subdivisão da origem a arestas paralelas. Prossegue-se o processo, subdividindo cada aresta paralela.

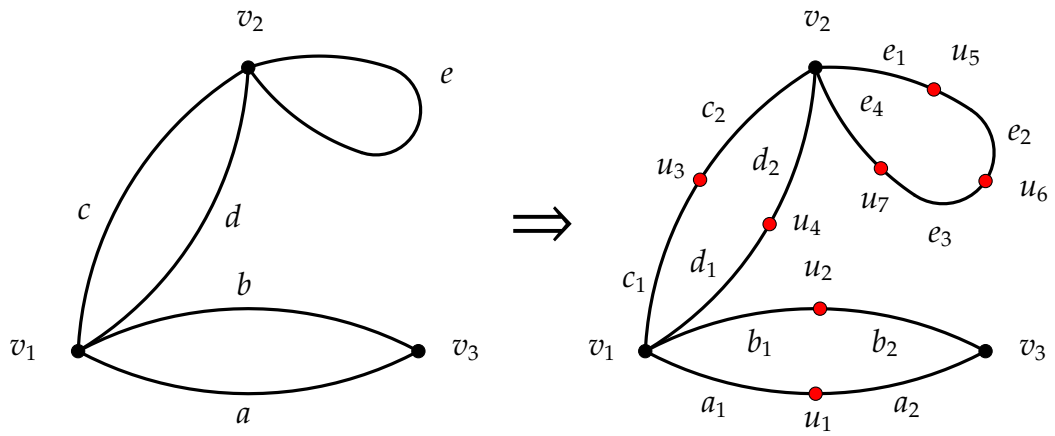

Figura 3.13: Grafo e sua subdivisão.

Dois grafos G e H são ditos homeomorfos se existem subdivisões G' e H' tais que $G' \cong H'$. Note que dois grafos são homeomorfos se, e só se, suas representações

topológicas são homeomorfas como Espaços Topológicos. Os dois grafos da Figura 3.13 são homeomorfos.

3.2 Grafos em Superfícies

Nesta Seção trataremos do mergulho de grafos em superfícies. O mergulho de grafos em superfícies compactas será nossa principal ferramenta na determinação de emparelhamentos de arestas de polígonos. Os conceitos explanados aqui podem ser consultados pelo leitor de forma mais abrangente em [4], [7], [11], [12] e [22]. Trataremos nesta Seção do mergulho de grafos conexos em superfícies, assim como algumas de suas propriedades como orientação e característica de Euler. Descreveremos sistemas de rotação de grafos e o mergulho que estes sistemas determinam.

3.2.1 Mergulho de grafos em Superfícies

Iniciemos definindo mergulho de grafos em superfícies. Convencionamos que que ao tratarmos de mergulho de um determinado grafo G estaremos tratando de sua representação topológica a qual nos referimos como o grafo G. A partir daqui, assumiremos as superfícies S compactas, salvo em casos previamente explicitado.

Definição 3.9 (Mergulho)**.** *Um mergulho de um grafo G em uma superfície S é uma aplicação injetiva $i : G \longrightarrow S$.*

O grafo G é de certa forma visto como um subconjunto de S, e a aplicação i o mapa inclusão. A grosso modo a imagem $I(G)$ é um "desenho"de G sobre S e por isso não faremos distinção entre G e $i(G)$. Denotaremos o mergulho de um grafo G, da mesma forma que [12], por $G \longrightarrow S$. Notemos que segue da Definição 3.9 que a imagem de duas arestas de G se intersectam somente em seus extremos, caso sejam adjacentes.

Consideremos $G \longrightarrow S$ um mergulho e $S \setminus G$ o complemento de G em S. Dizemos que cada componente conexa de $S \setminus G$ é uma **região**. Se cada região do mergulho é homeomorfa a um disco aberto diremos que $G \longrightarrow S$ é um **mergulho celular** (ou 2-célula) e cada região é uma **face do mergulho**. Destacamos que o mergulho celular de um dado grafo G em uma superfície S induz uma decomposição celular de S e podemos tomar S como um complexo celular.

Consideremos $G \longrightarrow S$ um mergulho celular e F uma face genérica do mergulho. A coleção de todos os vértices e arestas que estão na fronteira de F podem ser dispostas em um passeio fechado sobre o grafo G atravessando a curva fechada que constitui a fronteira de F. Este passeio é denominado **passeio de fronteira da face F** e é único a menos de escolha de seu vértice inicial e uma direção. Tomando-se todas as faces

do mergulho, cada aresta de G é atravessada exatamente duas vezes, uma em cada sentido, estando no passeio de fronteira de no máximo duas faces. A ocorrência de uma aresta do grafo neste passeio é denominada **lado** da face e o comprimento do passeio de fronteira é o **comprimento da face**. Geralmente a face F é determinada por seu passeio de fronteira e nos referimos a uma determinada face explicitando seu passeio de fronteira.

Cada face de um mergulho $G \longrightarrow S$ tem exatamente duas direções para seu passeio de fronteira. A atribuição de uma dessas orientações ao passeio de fronteira de uma face induz uma **orientação** nesta face de modo análogo ao descrito na Definição 1.20. Uma orientação para o mergulho é a atribuição (se possível) de uma orientação para cada face de modo que faces adjacentes induzam orientações opostas a arestas comuns, (orientação coerente). Notemos que o 1-esqueleto de uma triangulação de uma superfície S é um grafo T e que S é orientável se $T \longrightarrow S$ é orientável.

Vimos na Subseção 1.3.2 que toda Superfície compacta admite uma representação poligonal (Proposição 1.16). Aqui cabe mencionar que um dado mergulho $G \longrightarrow S$ pode ser representado (geometricamente) em uma representação poligonal de S. Quando uma aresta atinge um lado do polígono da representação ela continua em outro lado que recebe o mesmo rótulo, caso este exista.

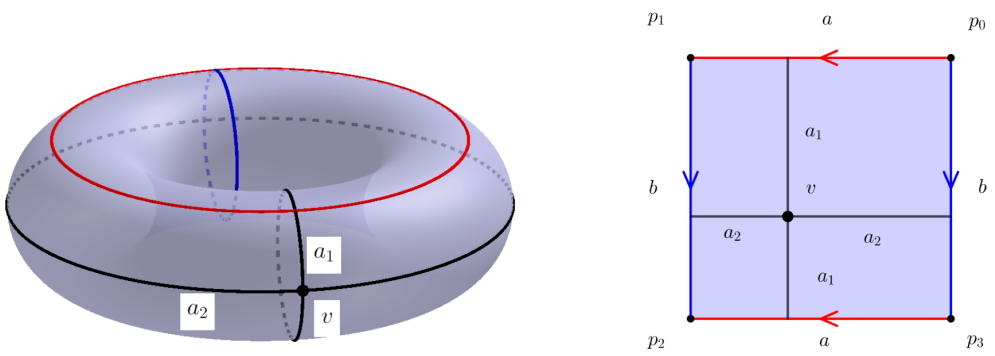

Figura 3.14: Mergulho de B_2 no Toro.

Notemos que toda representação poligonal induz um grafo mergulhado na superfície representada onde cada aresta do grafo mergulhado corresponde a uma classe de equivalência dos lados identificados da representação poligonal. Os vértices do grafo correspondem a identificação dos vértices equivalentes da representação.

Um mesmo grafo pode ser mergulhado em superfícies distintas ou mesmo ter dois ou mais mergulhos em uma mesma superfície. Esses mergulhos podem ser comparados. A seguinte definição estabelece condições para que dois mergulhos sejam equivalentes.

Definição 3.10 (Equivalência de Mergulhos). *Dois mergulhos de um dado grafo G $i : G \longrightarrow S_1$ e $s : G \longrightarrow S_2$ são ditos equivalentes se existir um homeomorfismo $h : S_1 \longrightarrow S_2$ tal que preserva orientação e além disso $h \circ i = s$.*

3.2.2 Decomposição em faixas e Sistemas de rotação

Apontamos na Subseção 3.2.1 que uma determinada representação poligonal de uma superfície S induz um grafo mergulhado em S como por exemplo a representação poligonal do Toro induz neste um mergulho do grafo buquê B_2. Agora descreveremos uma maneira de se obter uma dada superfície S tendo como ponto de partida o mergulho $G \longrightarrow S$. Descreveremos uma maneira de se obter uma representação poligonal para S partindo do mergulho $G \longrightarrow S$.

Consideremos $G \longrightarrow S$ um mergulho celular de um grafo G em uma superfície S compacta e orientável. Podemos tomar em S, para cada vértice de G, uma vizinhança homeomorfa ao disco unitário e para cada aresta uma faixa homeomorfa a uma região retangular compondo assim uma vizinhança para G (com mesmo aspecto). O complemento dessa vizinhança é uma família de regiões homeomorfas a discos abertos, uma em cada região do mergulho.

Para sermos mais precisos, definimos cada um desses conjuntos. Defina uma **1-faixa** como um espaço topológico $\mathcal{F}_1$ juntamente com um homeomorfismo $h : I \times I \longrightarrow \mathcal{F}_1$ onde I denota o intervalo unitário $[0, 1]$. As curvas $h(I \times \{j\})$, para $j = 0, 1$ são chamadas de extremos da faixa $\mathcal{F}_1$, e as curvas $h(\{j\} \times I)$, para $j = 0, 1$, são chamadas de lados da faixa $\mathcal{F}_1$. Uma **0-faixa** é um espaço topológico $\mathcal{F}_0$ homeomorfo ao disco unitário. Uma **2-faixa** é um espaço $\mathcal{F}_2$ também homeomorfo ao disco unitário.

Uma vez estabelecida a definição de cada tipo de faixa damos a seguinte definição.

Definição 3.11 (Decomposição em Faixas). *Uma decomposição em faixas de uma superfície S é uma coleção C de 0-faixas, 1-faixas e 2-faixas satisfazendo as seguintes condições:*

(a) Faixas distintas se intersectam apenas ao longo de seus bordos;

(b) A união de todas as faixas é S;

(c) Cada extremidade de cada 1-faixa está contida no bordo de uma 0-faixa;

(d) Cada lado de cada 1-faixas está contido no bordo de uma 2-faixa;

(e) As 0-faixas são duas a duas disjuntas, assim como as 2-faixas.

No que se refere a decomposição em faixas de uma superfície S relativa a um mergulho $G \longrightarrow S$, omitiremos as 2-faixas uma vez que estas ficam determinadas pelas faces de mergulho. Nomearemos as 0-faixas com a mesma designação dada a seus vértices correspondentes assim como as 1-faixas receberão a mesma nomeação de suas arestas correspondentes. As 2-faixas receberão a mesma nomeação que as faces do mergulho correspondentes a elas.

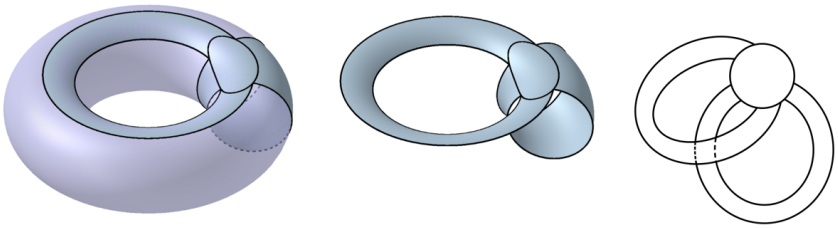

Figura 3.15: Decomposição em faixas do Toro associada a B_2.

Diremos que uma decomposição em faixar é **localmente orientada** se é atribuído a cada 0-faixa uma da duas orientações possíveis. A orientação de uma 0-faixa induz uma orientação aos extremos das 1-faixas que incida com ela. Uma 1-faixa também pode ser orientada de duas maneiras. Diremos que uma 1-faixa preserva orientação se a direção induzida em seus extremos pelas 0-faixas coincide com o induzido por uma de suas orientações possíveis. Do contrário, a 1-faixa é dita que reverte a orientação.

Uma aresta a de um grafo mergulhado em uma superfície S, associado a uma decomposição em faixas localmente orientada é dita ter orientação do **tipo 0** se a 1-faixa correspondente preserva orientação e do **tipo 1** caso contrário. Um passeio nesse grafo é dito do tipo 1 se tem um número ímpar de arestas do tipo 1 e é do tipo 0 caso contrário. Uma superfície S compacta é não-orientável se, e somente se, possui um ciclo do tipo 1. Para mais detalhes sobre a decomposição em faixas de superfícies o leitor pode consultar [7] e [12].

Agora apresentaremos uma forma de descrever um mergulho $G \longrightarrow S$ ou sua decomposição em faixas associada. Para descrever uma decomposição em faixas, com a omissão das 2-faixas, basta descrevermos como as 1-faixas são atadas às 0-faixas e a orientação de cada 0-faixa e 1-faixa. Para uma 0-faixa $\mathcal{F}_0$, genérica, as 1-faixas são atadas em uma disposição cíclica ordenada sobre seu bordo. Como $\mathcal{F}_0$ corresponde a um único vértice v, assim como cada 1-faixa a uma única aresta (do tipo 0 ou 1), uma forma de descrever de maneira combinatória esta construção é através de uma lista ordenada das arestas (com especificação do seu tipo) de G que incidem com v. Assim obtemos a chamada **rotação de um vértice** definida abaixo.

Definição 3.12 (Rotação de um vértice)**.** *A rotação de um vértice v de um grafo G é uma lista ordenada das aresta de G que incidem a v, única sob uma permutação cíclica.*

Notemos que um laço incide duas vezes com seu vértice base e naturalmente é mencionado duas vezes em uma rotação.

Definição 3.13 (Sistema Rotações)**.** *Um Sistema de Rotações para um grafo G é a designação de uma rotação para cada um de seus vértice. Um Sistema de Rotações é dito Sistema Rotações Puras se cada aresta do grafo é do tipo* 0.

No contexto desta dissertação trataremos apenas de rotações puras. Concluímos das Definições 3.12 e 3.13 e aplicando o princípio multiplicativo, que para um grafo simples G, $(n+1)$-regular com r vértices, admite $(n!)^r$ sistemas de rotações puras.

Considere o grafo do da Figura 3.16. O vértice v_1 possui uma única rotação. Os vértices v_2, v_3, v_4 e v_5 possuem duas rotações cada e v_6 possui seis rotações. Denotaremos cada rotação de um determinado vértice por uma lista ordenada das arestas incidentes com estes, única sob permutações cíclicas. $(a_1\ a_5)$ é a única rotação de v_1. $(a_1\ a_7\ a_2) = (a_2\ a_1\ a_7) = (a_7\ a_2\ a_1)$ é uma rotação de v_2. Expressamos um vértice v_i com uma de suas rotações r_{v_i} pelo par ordenado por (v_i, r_{v_i}) e um sistema de rotações para um determinado grafo G, com vértices $v_1, \ldots, v_n$ por $R = [(v_1, r_{v_1}), \ldots, (v_n, r_{v_n})]$. $R = [(v_1, r_{v_1}), \ldots, (v_6, r_{v_6})]$ é uma sistema de rotações para o grafo da Figura 3.16 onde, $r_{v_1} = (a_1\ a_5)$, $r_{v_2} = (a_1\ a_7\ a_2)$, $r_{v_3} = (a_2\ a_8\ a_3)$, $r_{v_4} = (a_3\ a_9\ a_4)$, $r_{v_5} = (a_4\ a_6\ a_5)$ e $r_{v_6} = (a_6\ a_9\ a_8\ a_7)$.

Cada sistema de rotações de um grafo G determina uma forma de passear sobre o grafo, de modo que cada aresta é atravessada duas vezes, uma em cada sentido. O sistema de rotações $R = [(v_1, r_{v_1}), \ldots, (v_6, r_{v_6})]$, do grafo da Figura 3.16, determina cinco passeios fechados distintos sobre este grafo, os quais indicamos sobre a figura por setas de mesma cor.

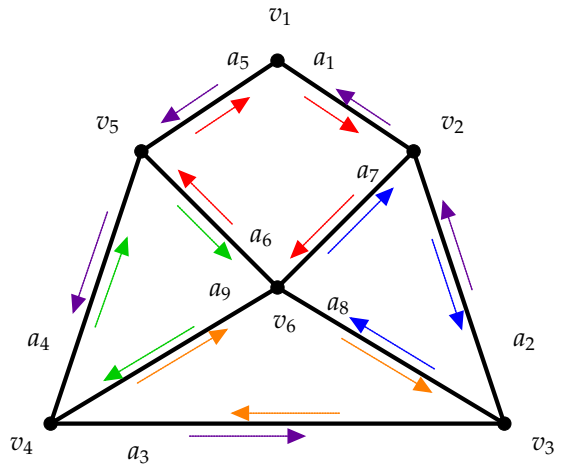

Figura 3.16: Grafo com Sistema de Rotações.

Na situação ilustrada na Figura 3.16 os passeios determinados pelo sistema de rotações R correspondem aos passeios de fronteira do mergulho do grafo na esfera (ou no plano). Esta correspondência é mais geral, no sentido de que todo sistema de rotações de um determinado grafo está associado a um único mergulho deste em uma superfície fechada. Os seguintes teoremas estabelecem a correspondência entre sistemas de rotações de um grafo G e mergulhos deste grafo em superfície S fechada.

Teorema 3.2. *Todo Sistema de Rotações de um grafo G define (até equivalência de mergulhos) um único mergulho $G \longrightarrow S$ localmente orientado. Reciprocamente, todo mergulho $G \longrightarrow S$ localmente orientado define um Sistema de Rotações para G.*

Este teorema teve sua primeira prova formal publicada por Stahl (1978).

Teorema 3.3. *Cada Sistema de Rotações pura para um gráfico G induz (até equivalência do mergulho com orientação preservada) uma mergulho único de G em uma superfície orientada. Reciprocamente, cada mergulho de um grafo G em uma superfície orientada induz um único Sistema de Rotações pura para G.*

De acordo com [12] e [22] os créditos por esse teorema são atribuídos a Heffter (1891) e a Edmonds (1960). Este teorema desempenha papel relevante no contexto dessa dissertação, uma vez que trataremos apenas de mergulhos celulares em superfícies orientáveis compactas.

Uma propriedade importante a respeito do mergulho em superfícies compactas orientáveis é a característica de Euler relativa ao mergulho $G \longrightarrow S$, denotada por $\mathcal{X}(G \longrightarrow S)$, onde $\mathcal{X}(G \longrightarrow S) = \#V - \#A + \#F$. Vimos na Seção 1.18 que a Característica de Euler para uma superfície compacta orientável S, de gênero g é:

$$\mathcal{X}(S) = 2 - 2 \cdot g = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot n_k = \#V - \#A + \#F = \mathcal{X}(K^1 \longrightarrow S),$$

K^1 é o 1-esqueleto de uma triangulação de S, ou de um complexo celular. Agora veremos que este é um fato mais geral.

Teorema 3.4 (Invariância da Característica de Euler)**.** *Suponha $G \longrightarrow S_g$ um mergulho celular de G em uma superfície compacta e orientável S_g de gênero g. Então,*

$$\mathcal{X}(G \longrightarrow S) = 2 - 2 \cdot g = \mathcal{X}(S).$$

Note que o grafo da Figura 3.16 possui 6 vértices e 9 arestas. Além disso, o mergulho ilustrado possui 5 faces. Dessa forma,

$$\#V - \#A + \#F = 6 - 9 + 5 = 2 = 2 - 2g$$

ou seja, o gênero da superfície de mergulho é $g = 0$.

Finalizamos este capítulo com algumas ponderações sobre o conjunto das superfícies compactas e orientáveis S que admitem mergulhos de um determinado grafo G. Seja G um grafo conexo e

$$\mathcal{S}_G = \left\{ g \in \mathbb{Z}, \text{ tais que } G \text{ admite mergulho celular em } S_g \right\}.$$

$\mathcal{S}_G$ é finito. Denotamos por $\gamma_{min.}(G)$ o menor elemento de $\mathcal{S}_G$ e por $\gamma_{max.}(G)$ o maior elemento de $\mathcal{S}_G$. $\gamma_{min.}(G)$ é o **gênero mínimo** de G e $\gamma_{max.}(G)$ é dito o **gênero máximo** de G. Pela característica de Euler, quanto menor é o número de faces, maior é o gênero da superfície de mergulho. Daí, tomando $|F| = 1$ obtemos,

$$0 \leq \gamma_{min}(G) \leq \gamma_{max}(G) \leq \frac{|V| - |A| - 2}{-2} - \frac{|F|}{2}. \tag{3.2.1}$$

Um fato que se destaca nesse estudo é a **distribuição dos mergulhos** de um grafo G fixado, a qual pode se sumarizada com o seguinte Teorema.

Teorema 3.5. *Seja G um grafo conexo. Então,*

$$\mathcal{S}_G = \left\{ g \in \mathbb{Z} \mid \gamma_{min.}(G) \leq g \leq \gamma_{max}(G) \right\}.$$

Em outras palavras, o Teorema 3.5 garante que G admite mergulho celular em cada superfície compacta e orientável de gênero intermediário, entre $\gamma_{min}(G)$ e $\gamma_{max}(G)$. Não exibiremos a prova aqui. O leitor interessado pode consultá-la em [12], assim como das definições preliminares requeridas na demonstração.

Capítulo 4

Emparelhamento de aresta de polígonos hiperbólicos associados a grafos

Neste Capítulo descreveremos emparelhamentos generalizados para polígonos hiperbólicos associados a grafos regulares. Utilizaremos o método de mergulho celular, com uma única face, de grafos em superfícies compactas orientáveis para determinar tais emparelhamentos.

Em 1982 Jorgensen e Näätänen [13] mostraram que existem essencialmente 8 maneiras de se emparelhar arestas de um polígono regular P_{18}, de 18 arestas, de modo que a superfície S correspondente é compacta e orientável de gênero $g = 2$ e o grafo mergulhado, induzido pelo bordo de P_{18} tenha 9 arestas e 6 vértices sendo ainda 3-regular. Nakamura, em 2004 com auxílio de computador [21], exibiu os 927 padrões de emparelhamento possíveis de um polígono P_{30}, regular com 30 lados, de modo que o grafo mergulhado induzido seja 3-regular com 10 vértices e 15 arestas. Silva em 2011 [24], por meio de extensões de grafos 3-regulares apresentados por Nakamura em [21], construiu emparelhamentos para polígonos P_{12g-6}, $g \geq 2$. Em [8] é apresentado alguns padrões de emparelhamentos associados a grafos regulares para superfícies de gênero $g \leq 3$.

Construiremos neste capítulo todos os emparelhamentos para polígonos P_{12}, P_{10} e P_8, com 12, 10 e 8 arestas respectivamente tais que a superfície resultante seja compacta e orientável de gênero 2 e emparelhamentos generalizados para polígonos P_{8g-4} com $8g - 4$ arestas.

4.1 Emparelhamentos para P_{12}, P_{10} e P_8

Os emparelhamentos desenvolvidos em [13], [21] e [24] provém de mergulhos de grafos na superfície S, compacta e orientável, considerada. Nesta seção exibire-

mos emparelhamentos de arestas para polígonos $P_{2|A|}$, associados a grafos k-regulares mergulhados em superfície S compacta e orientável de gênero $g = 2$, onde $|A|$ é a cardinalidade do conjunto de arestas do grafo.

Sabe-se do Teorema 3.4, que para todo Grafo $G(V, A)$, todo mergulho celular de G em uma superfície compacta e orientável S_g satisfaz a equação de Euler, $|V| - |A| + |F| = 2 - 2g$, onde $|V|$ denota o número de vértices de G, $|A|$ o número de arestas e $|F|$ o número de faces do mergulho. Assim, estamos interessados nos casos em que $|F| = 1$ e neste caso o passeio de fronteira de F tem comprimento $2|A|$. Pelo Teorema 3.1, para G k-regular temos, $k \cdot |V| = 2 \cdot |A|$. Daí, segundo a equação de Euler $|V| = |A| + 1 - 2g$. Segue que,

$$k = \frac{4g - 2}{|V|} + 2. \tag{4.1.1}$$

Ao fixarmos $g = 2$ determinamos a proposição a seguir:

Proposição 4.1. *Os grafos da Figura 4.6 são os únicos grafos k-regulares conexos que atendem à equação*

$$k = \frac{6}{|V|} + 2. \tag{4.1.2}$$

Façamos a análise segundo $|V|$. Para $|V| = 1$, temos $k = 8$ e um único grafo não rotulado 8-regular, o Buquê B_4.

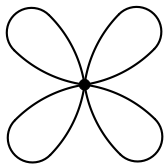

Figura 4.1: Buquê B_4.

Se $|V| = 2$, temos $k = 5$. Pela conexidade temos que existe pelo menos uma aresta que liga estes dois únicos vértices. Assim temos as seguintes possibilidades;

(a) uma única aresta liga estes vértices;

(b) duas, e somente duas, arestas ligam estes vértice;

(c) três, e somente três, arestas ligam estes vértice;

(d) quatro, e somente quatro, arestas ligam estes vértice;

(e) cinco arestas ligam estes vértice.

Os itens (b) e (d) violam a regularidade, pois têm-se somente dois vértices de grau 5 cada. Neste caso, o número de arestas ligando estes vértices deve ser ímpar, uma vez que as arestas que não incidam com ambos os vértices devem ser necessariamente um laço e é computada duas vezes na valência do seu vértice base.

Avaliando o item (a) e a regularidade requerida temos que cada vértice deve ser base de exatamente dois laços. Por este mesmo argumento, no item (c) cada vértice deve ser base de um único laço. Por fim, o item (e) nos fornece um único grafo (sem laços) em que todas as suas 5 arestas incidem com ambos os vértices.

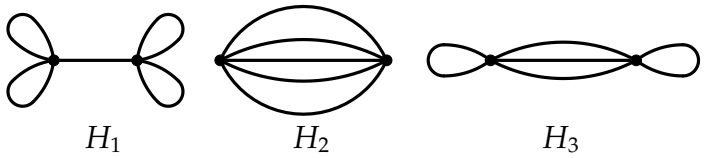

Figura 4.2: Possíveis grafos 5-regulares com 2 vértices e 5 arestas.

Caso $|V| = 3$, temos $k = 4$. Tomando-se um vértice qualquer v_1 em $V(G)$ temos as seguintes possibilidades:

(a) v_1 é adjacente a dois vértices distintos de si;

(b) v_1 é adjacente a um único vértice distinto de si.

Para o caso (a) temos as seguintes possibilidades de adjacência para v_1:

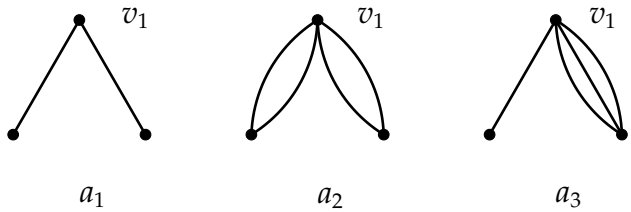

Figura 4.3: Caso (a).

Para o caso (b), as seguintes possibilidades:

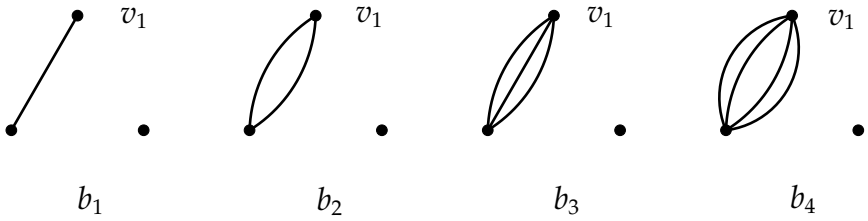

Figura 4.4: Caso (b).

Pela conexidade requerida e pela regularidade, descartamos as possibilidades b_1, b_3 e b_4. Aplicando o mesmo processo para um segundo vértice e para o terceiro, observando o passo anterior e analisando a conexidade e regularidade, obtemos os seguintes grafos não rotulados.

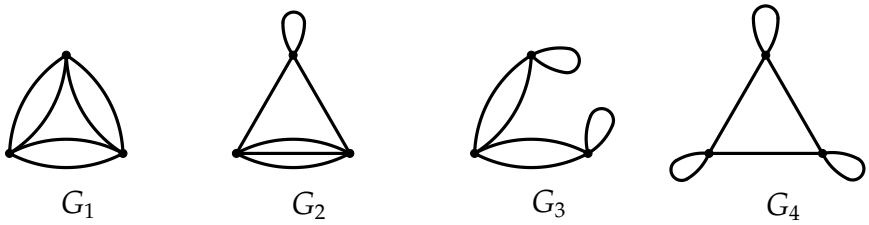

Figura 4.5: Possíveis grafos 4-regulares com 3 vértices e 6 arestas.

Por fim, se $|V| = 6$, temos $k = 3$ e os cinco grafos não rotulados 3-regulares apesentados por Jorgensen e Näätänen em [13].

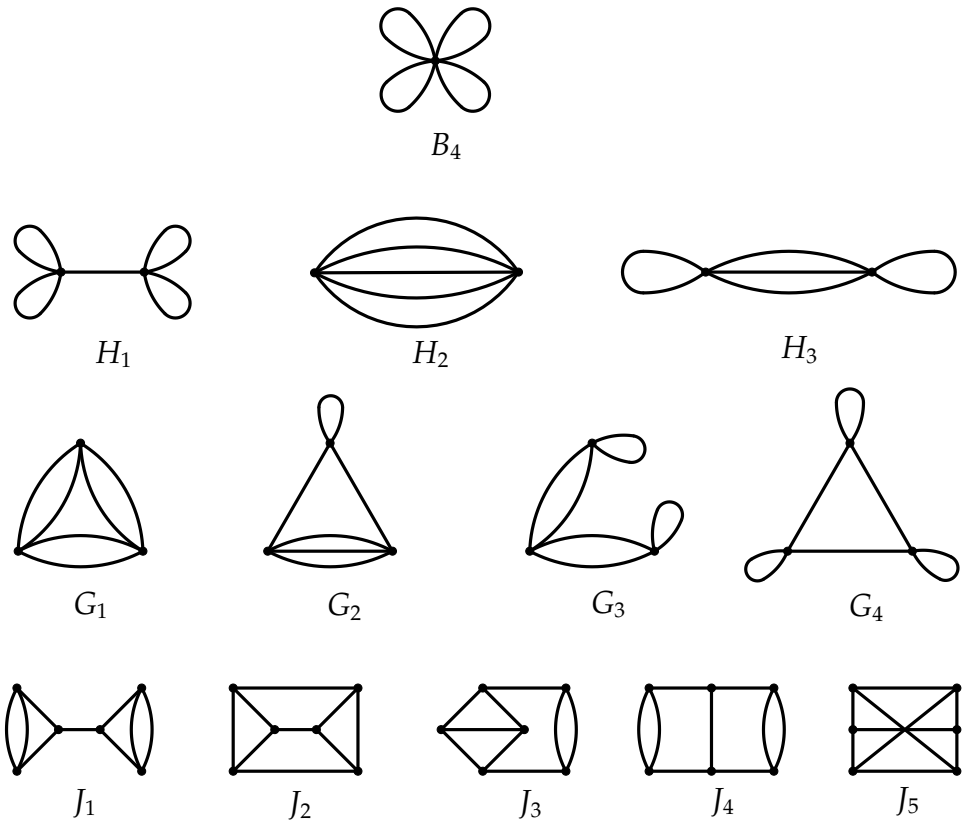

Figura 4.6: Grafos k-regulares que atendem a Equação (4.1.2).

■

Cabe observar que alguns destes grafos podem não admitir um mergulho em uma tal superfície compacta orientável de gênero 2. Descreveremos os emparelha-

mentos obtidos do mergulho celular desses grafos, quando possível, explicitando os sistemas de rotação para cada grafo.

Começaremos pelos grafos 4-regulares com 3 vértices e 6 arestas que nos fornecem emparelhamentos de arestas para um polígono regular com 12 lados que denotaremos por P_{12}. Realçamos que conhecendo os sistemas de rotação para cada grafo, determina-se todos os mergulhos celulares para cada grafo, assim como a superfícies S de mergulho, através da decomposição em faixas.

Os resultados abaixo servirão de ferramentas para determinar os padrões de emparelhamentos associados a determinado grafo G.

Dado um grafo $G = (V, A)$ com $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Suponha que $v_i \in V$ é um vértice de G com rotação $r_{v_i} = (\ldots a_j\, a_k \ldots)$ então, $r^-_{v_i} = (\ldots a_k\, a_j \ldots)$, obtida refletindo a disposição das arestas em r_{v_i} é uma rotação de v_i. Agora suponhamos que G possua sistema de rotações $R = [(v_1, r_{v_1}), \ldots, (v_n, r_{v_n})]$. Se refletirmos a rotação de cada vértice de G desse sistema obtemos o sistema de rotações $R^- = [(v_1, r^-_{v_1}), \ldots, (v_n, r^-_{v_n})]$.

Proposição 4.2. *Se G possui sistema de rotações $R = [(v_1, r_{v_1}), \ldots, (v_n, r_{v_n})]$, então a representação poligonal associada ao mergulho induzido por R é equivalente a representação poligonal associada ao mergulho induzido pelo sistema de rotações $R^- = [(v_1, r^-_{v_1}), \ldots, (v_n, r^-_{v_n})]$ obtido de R refletindo a rotação de cada vértice de G.*

Basta observar que ambos os sistemas estão associados a mesma decomposição em faixas. R^- inverte a orientação de cada 0-faixa da decomposição em faixas associada ao sistema de rotações R. Dessa forma o mergulho induzido por R^- possui as mesmas faces que o mergulho induzido por R.

■

Proposição 4.3. *Dado $G = (V, A)$ um grafo com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e $Aut\,(G)$ o grupo de automorfismos de G. Suponha $v_i \in V$ um vértice de G com rotação $r_{v_i} = (\ldots a_j \ldots)$. Então, para todo $g = (g_V, g_A) \in Aut\,(G)$, $g_A(r_{v_i}) = (\ldots g_A(a_j) \ldots)$ é uma rotação de $g_V(v_i)$.*

Com efeito, suponha v_i incidente com as arestas $a_1, \ldots, a_k$ e ψ_G a função de incidências de G. Pela Definição 3.8,

$$\psi_G\Big(g_A(a_j)\Big) = g_V(v_i) g_V(u_j),\ \forall\ j \in \{1, \ldots, k\}, \tag{4.1.3}$$

onde u_j é o segundo extremo da aresta a_j.

Portanto, $g_V(v_i)$ incide com $g_A(a_j)$, $j \in \{1, \ldots, k\}$. Pela Definição 3.12, $g_A(a_j)$ aparece em cada rotação de $g_V(v_i)$ e $g_A(r_{v_i})$ é uma rotação de $g_V(v_i)$ uma vez que é uma permutação cíclica das arestas incidentes com $g_V(v_i)$.

■

Proposição 4.4. *Seja $G = (V, A)$ um grafo com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e $Aut\,(G)$ o grupo de automorfismos de G. Suponha $R = [(v_1, r_{v_1}), \ldots, (v_n, r_{v_n})]$ um sistema de rotações para G, então, para cada $g = (g_V, g_A) \in Aut\,(G)$, $R_g = [(g_V(v_1), g_A(r_{v_1})), \ldots, (g_V(v_n), g_A(r_{v_n}))]$ é um sistema de rotações para G, chamado de sistema de rotações induzido por g.*

Lembremos que pela Definição 3.13, um sistema de rotações para G consiste em designar uma rotação para cada um de seus vértices. R_g está bem definido, uma vez que $g_V : V \longrightarrow V$ é uma bijeção e pela Proposição 4.3, para cada vértice v_i com rotação r_{v_i}, $g_A(r_{v_i})$ é uma rotação para $g_V(v_i)$. Logo, R_g é um sistema de rotações para G.

■

Agora, consideremos,

$$H = \Big\{x = (v_i, r_{v_i}) \mid v_i \in V; r_{v_i} \in \mathcal{R}_{v_i}, i \in \{1, \ldots, n\}\Big\},$$

onde V é o conjunto de vértices de G e $\mathcal{R}_{v_i}$ é o conjunto das rotações de v_i.

Definamos a aplicação, $\alpha : Aut\,(G) \times H \longrightarrow H$ dada por:

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & Aut\,(G) \times H & \longrightarrow & H \\ & (g, x) & \longmapsto & x_g \end{array}, \tag{4.1.4}$$

de modo que, $x_g = (g_V(v_i), g_A(r_{v_i}))$.

Notemos que, α é uma ação à esquerda de $Aut\,(G)$ em H, pois

(a) $\alpha(Id, x) = x,\ \forall\, x = (v_i, r_{v_i}) \in H$. De fato,

$$\alpha(Id, x) = x_{Id} = \Big(Id_V(v_i), Id_A(r_{v_i})\Big) = (v_i, r_{v_i}) = x,\ \forall\, x = (v_i, r_{v_i}) \in H;$$

(b) $\alpha\Big(g, \alpha(h, x)\Big) = \alpha(g \circ h, x),\ \forall\, x = (v_i, r_{v_i}) \in H$ e $\forall g, h \in Aut\,(G)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \alpha\Big(g, \alpha(h, x)\Big) &= \alpha(g, x_h) = \alpha\Big(g, \Big(h_V(v_i), h_A(r_{v_i})\Big)\Big) \\ &= \Big(g_V\Big(h_V(v_i)\Big), g_A\Big(h_A(r_{v_i})\Big)\Big) = \Big(g_V \circ h_V(v_i), g_A \circ h_A(r_{v_i})\Big) \\ &= \alpha(g \circ h, x),\ \forall\, x = (v_i, r_{v_i}) \in H \text{ e } \forall g, h \in Aut\,(G). \end{aligned}$$

A aplicação α induz para cada $g \in Aut\,(G)$ a aplicação,

$$\begin{array}{rccc} \alpha_g : & H & \longrightarrow & H \\ & x & \longmapsto & x_g = \alpha(g, x) \end{array}. \tag{4.1.5}$$

Para cada $g \in Aut\,(G)$ a aplicação α_g é injetiva, pois do contrário existiriam $x = (v_i, r_{v_i})$ e $y = (v_j, r_{v_j})$ com $x \neq y$, tais que:

$$\alpha_g(x) = \alpha_g(y) \Longleftrightarrow \alpha(g,x) = \alpha(g,y) \Longrightarrow \alpha(g^{-1}, \alpha(g,x)) = \alpha(g^{-1}, \alpha(g,y)) \Longleftrightarrow \alpha(g^{-1} \circ g, x) = \\ = \alpha(g^{-1} \circ g, y) \Longleftrightarrow \alpha(Id, x) = \alpha(Id, y) \Longrightarrow x = y.$$

Agora definiremos a ação à esquerda de $Aut\,(G)$ sobre o conjunto das rotações de G, que servirá como ferramenta na determinação dos padrões de emparelhamento associados a cada cada grafo.

Considere $G = (V, A)$, com n vértices e

$$\mathcal{R} = \Big\{R = [(v_1, r_{v_1}), \ldots, (v_n, r_{v_n})] \;\mid\; r_{v_i} \in \mathcal{R}_{v_i}, i \in \{1, \ldots, n\}\Big\}$$

o conjunto dos sistemas de rotações de G.

Seja $\beta : Aut\,(G) \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \beta: & Aut\,(G) \times \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ & (g, R) & \longmapsto & R_g \end{array}, \tag{4.1.6}$$

onde $R_g = [(g_V(v_1), g_A(r_{v_1})), \ldots, (g_V(v_n), g_A(r_{v_n}))]$. β é uma ação à esquerda de $Aut\,(G)$ em $\mathcal{R}$. De fato,

(a) $\beta(Id, R) = R,\ \forall\, R \in \mathcal{R}$, pois:

$$\begin{aligned} \beta(Id, R) &= R_{Id} = \Big[\Big(Id_V(v_1), Id_A(r_{v_n})\Big), \ldots, \Big(Id_V(v_n), Id_A(r_{v_n})\Big)\Big] \\ &= [(v_1, r_{v_1}), \ldots, (v_n, r_{v_n})] = R, \forall\, R \in \mathcal{R}; \end{aligned}$$

(b) $\beta\Big(g, \beta(h, R)\Big) = \beta(g \circ h, R),\ \forall\, R \in \mathcal{R}$ e $\forall\, g, h \in Aut\,(G)$, pois:

$$\begin{aligned} \beta\Big(g, \beta(h, R)\Big) &= \beta(g, R_h) = (R_h)_g \\ &= \Big[\Big(g_V\Big(h_V(v_1)\Big), g_A\Big(h_A(r_{v_1})\Big)\Big),\ \ldots\ , \Big(g_V\Big(h_V(v_n)\Big), g_A\Big(h_A(r_{v_n})\Big)\Big)\Big] \\ &= \Big[\Big(g_V \circ h_V(v_1), g_A \circ h_A(r_{v_1})\Big),\ \ldots\ , \Big(g_V \circ h_V(v_n), g_A \circ h_A(r_{v_n})\Big)\Big] \\ &= \beta(g \circ h, R),\ \forall\, R \in \mathcal{R} \text{ e } \forall\, g, h \in Aut\,(G). \end{aligned}$$

Com a ação $\beta : Aut\,(G) \times \mathcal{R}$ definimos a órbita de um sistema de rotações $R \in \mathcal{R}$ como o conjunto $\mathcal{O}_R$ expresso por:

$$\mathcal{O}_R = \left\{R_g \in \mathcal{R} \mid g \in Aut\,(G)\right\}. \tag{4.1.7}$$

Com estes elementos, enunciamos o seguinte Teorema.

Teorema 4.5. *Seja G um grafo com um Sistema de Rotaçõesrotação R e $g : G \longrightarrow G$ um automorfismo. Se R_g é o Sistema de Rotações de G induzido por g então, o mergulho de G induzido por R_g está associado a representação poligonal equivalente à induzida por R a menos de rotulagem das arestas.*

Suponha G, com sistema de rotações $R = [(v_1, r_{v_1}), \ldots, (v_n, r_{v_n})]$ e mergulho induzido $G \longrightarrow S$, com faces $F_1, \ldots, F_k$. Sejam $w_1, \ldots, w_k$ os passeios de fronteira das faces do mergulho. Os passeios de fronteira determinam um esquema de rotulagem para uma representação poligonal de S de modo que cada passeio de fronteira w_j corresponde ao esquema de rotulagem de uma região poligonal.

Para cada w_j, defina $(w_j)_g$ como o esquema de rotulagem obtido de w_j substituindo cada aresta a de G por $g_A(a)$ e cada vértice v_i por $g_V(v_i)$. Este processo corresponde a aplicar a Operação Renomear da Definição 1.17, sobre as arestas e vértices de w_j e assim, pela Proposição 1.13 cada w_j é equivalente a $(w_j)_g$. Daí, $(w_i)_g, \ldots, (w_k)_g$ constituem esquema de rotulagem para uma representação poligonal de S, que induz um mergulho de $g(G) = G$.

Por outro lado, cada $(w_j)_g$ é passeio de fronteira de uma face do mergulho $g(G) \longrightarrow S$, que pelo Teorema 3.3 induz um único sistema de rotações para $g(G)$. Esse sistema de rotações é exatamente $R_g = [(g_V(v_1), g_A(r_{v_1})), \ldots, (g_V(v_n), g_A(r_{v_n}))]$, o sistema de rotações induzido por g e fica unicamente determinado pelos passeios de fronteira $(w_j)_g$ e o resultado segue.

■

Segue do Teorema 4.5 que sistemas de rotação de uma mesma órbita R_g estão associados a representações poligonais equivalentes.

4.1.1 Emparelhamentos para P_{12}

Nesta subseção explicitaremos todos os emparelhamentos de P_{12} provenientes de mergulhos dos grafos 4-regulares G_1, G_2, G_3 e G_4, a menos de rotações e reflexões dos padrões de emparelhamento. Iniciamos com o grafo G_1, com a rotulação apresentada na Figura 4.7. Descrevamos todas as possíveis rotações para os vértices v_1, v_2 e v_3.

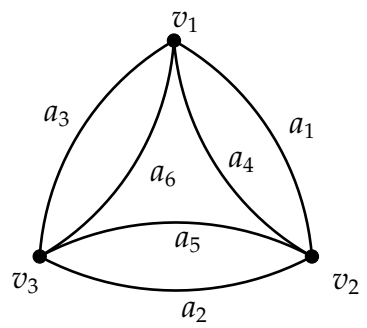

Figura 4.7: Rotulação de G_1.

O vértice v_1 é incidente às arestas a_1, a_3, a_4 e a_6, logo o conjunto das rotações de v_1, denotado por $\mathcal{R}_{v_1}$ é $\mathcal{R}_{v_1} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5 \text{ e } \theta_6\}$, onde $\theta_1 = (a_1a_3a_4a_6)$, $\theta_2 = (a_1a_3a_6a_4)$, $\theta_3 = (a_1a_4a_3a_6)$, $\theta_4 = (a_1a_4a_6a_3)$, $\theta_5 = (a_1a_6a_3a_4)$ e $\theta_6 = (a_1a_6a_4a_3)$.

O vértice v_2 é incidente às arestas a_1, a_2, a_4 e a_5, logo o conjunto das rotações de v_2, denotado por $\mathcal{R}_{v_2}$ é $\mathcal{R}_{v_2} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \text{ e } \lambda_6\}$, onde $\lambda_1 = (a_1a_2a_4a_5)$, $\lambda_2 = (a_1a_2a_5a_4)$, $\lambda_3 = (a_1a_4a_2a_5)$, $\lambda_4 = (a_1a_4a_5a_2)$, $\lambda_5 = (a_1a_5a_2a_4)$ e $\lambda_6 = (a_1a_5a_4a_2)$

Por fim, o vértice v_3 é incidente às arestas a_2, a_3, a_5 e a_6, logo o conjunto das rotações de v_3, denotado por $\mathcal{R}_{v_3}$ é $\mathcal{R}_{v_3} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \text{ e } \sigma_6\}$, onde $\sigma_1 = (a_2a_3a_5a_6)$, $\sigma_2 = (a_2a_3a_6a_6)$, $\sigma_3 = (a_2a_5a_3a_6)$, $\sigma_4 = (a_2a_5a_6a_3)$, $\sigma_5 = (a_2a_6a_3a_5)$ e $\sigma_6 = (a_2a_6a_5a_3)$.

Um emparelhamento de arestas de um polígono P_{12} com ciclos de vértices com comprimento quatro corresponde a um mergulho celular, com uma única face, cujos lados podem ser identificados com as arestas de P_{12}, através do passeio de fronteira da face em questão. Em outras palavras, a superfície S pode ser representada pelo polígono P_{12} e é uma superfície compacta e orientável homeomorfa ao 2-toro.

Exibiremos dois padrões de emparelhamento associados ao grafo G_1 tomando dois de seus sistemas de rotação. Pela descrição apresentada acima para as rotações dos vértices de G_1 podemos tomar $((4-1)!)^3 = 216$ sistemas de rotação para este grafo. No entanto, veremos que sistemas de rotação distintos podem descrever representações poligonais equivalentes.

Consideremos o Sistema de Rotações de G_1 dado por $R_1 = [\theta_5, \lambda_1, \sigma_1]$, onde $\theta_5 = (a_1a_6a_3a_4)$, $\lambda_1 = (a_1a_2a_4a_5)$, $\sigma_1 = (a_2a_3a_5a_6)$. Denotaremos o grafo G_1 com este Sistema de Rotações por $(G_1)_{R_1}$. Determinaremos o passeio de fronteira de cada face do mergulho induzido por este Sistema de Rotações. Para isso, fixamos a rotulação de G_1 dada na Figura 4.7, escolhemos o vértice v_1 como vértice inicial e a aresta a_1 como direção. Representaremos o passeio de fronteira sobre a representação geométrica do grafo, indicando a direção do percusso, (com pontas de setas) e a contagem das arestas atravessadas.

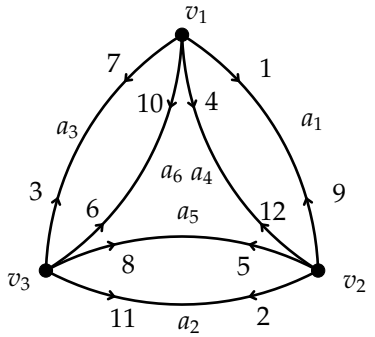

Figura 4.8: Passeio referente a $(G_1)_{R_1}$.

v_1.	a_1	a_6	a_3	a_4
v_2.	a_1	a_2	a_4	a_5
v_3.	a_2	a_3	a_5	a_6

Tabela 4.1: Tabela de rotação de G_1.

O Sistema de Rotações R_1 induz um único passeio fechado sobre G_1, que denotaremos por W_1, onde

$$W_1 := v_1\, a_1\, v_2\, a_2\, v_3\, a_3\, v_1\, a_4\, v_2\, a_5\, v_3\, a_6\, v_1\, a_3\, v_3\, a_5\, v_2\, a_1\, v_1\, a_6\, v_3\, a_2\, v_2\, a_4\ .$$

Do passeio W_1 extraímos a subsequência das arestas do passeio

$$A_1 := a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_3\, a_5\, a_1\, a_6\, a_2\, a_4.$$

Usamos essa sequência para compor o esquema rotulagem

$$w_1 := a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_3^{-1}\, a_5^{-1}\, a_1^{-1}\, a_6^{-1}\, a_2^{-1}\, a_4^{-1},$$

que tem uma região poligonal regular em $\mathbb{R}^2$, exibida a esquerda da Figura 4.9 como realização geométrica. Como cada aresta do grafo é atravessada duas vezes, cada rótulo aparece exatamente duas vezes nesse esquema de rotulagem, com expoentes distintos. Convencionamos que a disposição dos vértices dessa região será tomada no sentido anti-horário, assim como a orientação positiva dos seus lados.

Uma representação alternativa é o diagrama de emparelhamento mais a direita na Figura 4.9. Adotaremos este diagrama para mergulhos unicelulares. Nesta representação considera-se a região poligonal regular hiperbólica com vértices também dispostos no sentido anti-horário. Dois lados desse polígono são equivalentes se seus índices correspondem às posições de aparição de uma mesma aresta do grafo G_1 no passeio de fronteira de uma face. Essas posições são também representadas sobre o grafo da Figura 4.8. A relação de equivalência que identifica dois lados desse polígono é representada por um segmento (geodésico), ligando-os. Lados equivalentes possuem orientações opostas, por isso omitimos a orientação dos lados.

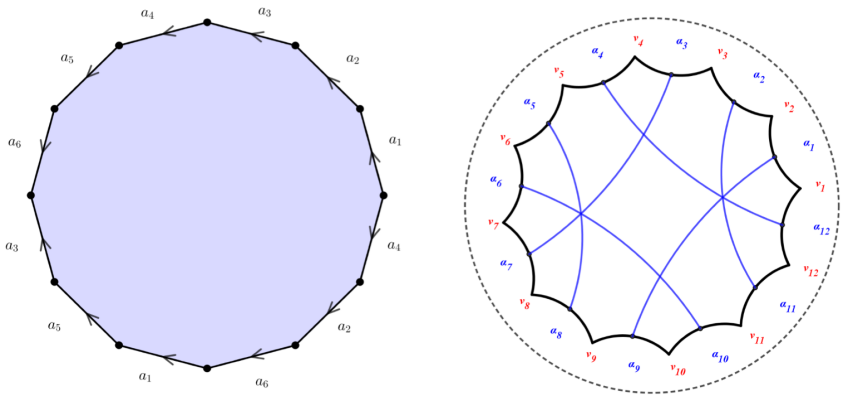

Figura 4.9: Representação poligonal e diagrama de emparelhamento associado a $(G_1)_{R_1}$.

Agora analisaremos a subsequência dos vértices de G_1, extraída do passeio W_1. Denotaremos essa sequência por V_1, onde

$$V_1 := v_1\, v_2\, v_3\, v_1\, v_2\, v_3\, v_1\, v_3\, v_2\, v_1\, v_3\, v_2.$$

Cada vértice aparece exatamente quatro vezes nessa sequência, uma vez que G_1 é 4-regular e cada aresta é atravessada exatamente duas vezes, uma em cada sentido. Cada ocorrência indica um **canto** da face, portanto representa uma classe de equivalência dos vértices da representação poligonal. Analisando a relação de equivalência representada no diagrama de emparelhamento da Figura 4.9 obtemos as equivalências:

$$v_1 \sim v_4 \sim v_7 \sim v_{10} \tag{4.1.8}$$

$$v_2 \sim v_5 \sim v_9 \sim v_{12} \tag{4.1.9}$$

$$v_3 \sim v_6 \sim v_8 \sim v_{11} \tag{4.1.10}$$

Denotaremos a equivalência de (4.1.8) pelo ciclo de vértices $C_1 = \{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}$, a equivalência (4.1.9) por $C_2 = \{v_2, v_5, v_9, v_{12}\}$ e a equivalência (4.1.10) pelo ciclo $C_3 = \{v_3, v_6, v_8, v_{11}\}$. Os índices dos vértices que compõem o ciclo C_1 correspondem às posições de ocorrência do vértice v_1 do grafo na subsequência V_1. Os índices dos vértices que compõem o ciclo C_2 correspondem às posições de ocorrência do vértice v_2 do grafo na subsequência V_1. Os índices dos vértices que compõem o ciclo C_3 correspondem às posições de ocorrência do vértice v_3 do grafo na subsequência V_1. De modo mais geral, dois vértices do diagrama de emparelhamento são equivalentes se seus índices correspondem a posições de aparição de um mesmo vértice do grafo G_1 na subsequência dos vértices V_1.

Fixando o grafo G_1 com o sistema de rotações $R_2 = [\theta_6, \lambda_3, \sigma_3]$ e iniciando o

passeio pelo vértice v_1 sobre a aresta a_1, obtemos o passeio W_2, onde

$$W_2 := v_1\, a_1\, v_2\, a_4\, v_1\, a_3\, v_3\, a_6\, v_1\, a_4\, v_2\, a_2\, v_3\, a_5\, v_2\, a_1\, v_1\, a_6\, v_3\, a_2\, v_2\, a_5\, v_3\, a_3$$

indicado sobre o grafo da Figura 4.10.

A subsequências dos vértices é:

$$V_2 := v_1\, v_2\, v_1\, v_3\, v_1\, v_2\, v_3\, v_2\, v_1\, v_3\, v_2\, v_3,$$

e assim obtemos as ciclos de vértices do emparelhamento dados por $C_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_9\}$, $C_2 = \{v_2, v_6, v_8, v_{11}\}$ e $C_3 = \{v_4, v_7, v_{10}, v_{12}\}$.

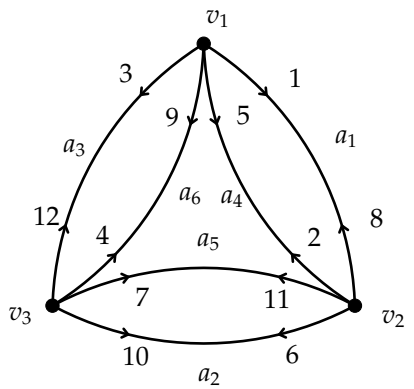

Figura 4.10: Passeio referente a $(G_1)_{R_2}$.

v_1.	a_1	a_6	a_4	a_3
v_2.	a_1	a_4	a_2	a_5
v_3.	a_2	a_5	a_3	a_6

Tabela 4.2: Tabela de Rotação de G_1.

Na Figura 4.11, exibimos o diagrama de emparelhamento associado a W_2.

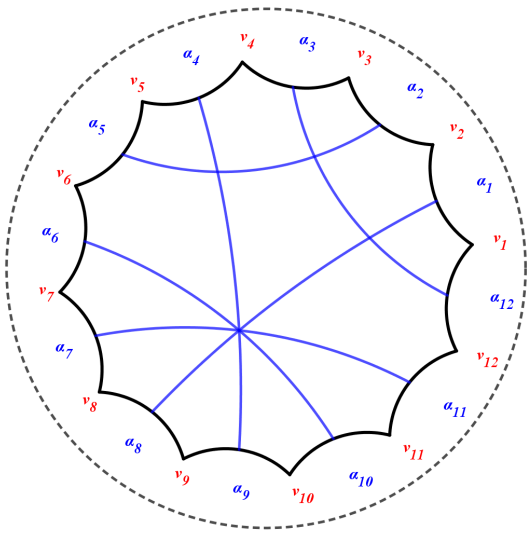

Figura 4.11: Emparelhamento de P_{12} associado a $(G_1)_{R_2}$.

As rotações R_1 e R_2 de G_1 fornecem dois padrões distintos de emparelhamento, um cada, para o polígono P_{12}. Veremos que a menos de rotações e reflexões deste padrão eles são os únicos.

Proposição 4.6. *G_1 está associado a dois, e somente dois, padrões de emparelhamento de P_{12} a menos de imagem espelho (representações equivalentes).*

Primeiramente note que cada vértice de G_1 possui 6 rotações. Da definição 3.13 e pelo princípio multiplicativo, G_1 possui $6^3 = 216$ sistemas de rotações. Distribuiremos estas rotações em oito conjuntos. Para isso, particionaremos o conjunto das rotações de cada vértice de G_1.

Consideremos para cada vértice v_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ de G_1, a bipartição de seu conjunto de rotações, $\mathcal{P} = \{P_1(v_i), P_2(v_i)\}$ de modo que o conjunto $P_1(v_i)$ é o constituído das rotações de v_i que mantêm dois pares de arestas paralelas próximas e $P_2(v_i)$ o conjunto das rotações de v_i que não mantêm arestas paralelas próximas.

Como cada v_i incide exatamente com dois pares de arestas paralelas, $\#P_1(v_i) = 4$ e $\#P_2(v_i) = 2$. Assim, podemos distribuir os sistemas de rotações de G_1 em oito conjuntos disjuntos, observando para designação da rotação de cada vértice v_i o conjunto da partição a qual a rotação de v_i pertence. Representamos cada possibilidade na Tabela 4.3 em que cada E_j, $j \in \{1, \ldots, 8\}$ representa um conjunto de sistemas de rotações de G_1. Além disso os conjuntos E_j são não vazios e dois a dois disjuntos.

	v_1	v_2	v_3	Cardinalidade
E_1	$P_1(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_1(v_3)$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
E_2	$P_1(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_2(v_3)$	$4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
E_3	$P_1(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_1(v_3)$	$4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$
E_4	$P_2(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_1(v_3)$	$2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$
E_5	$P_1(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_2(v_3)$	$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
E_6	$P_2(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_2(v_3)$	$2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$
E_7	$P_2(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_1(v_3)$	$2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$
E_8	$P_2(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_2(v_3)$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Tabela 4.3: Distribuição dos sistemas de rotações de G_1.

Afirmamos que os sistemas de rotações de G_1, provenientes de E_1 não induzem mergulhos com uma única face em uma superfície compacta e orientável de gênero 2. De fato, os sistemas de rotações de E_1 podem ser distribuídos em dois conjunto disjuntos A e B onde A é o conjunto dos sistemas de rotações da forma $[(b_1\ b_2\ c_1\ c_2), (b_1\ b_2\ d_1\ d_2), (c_1\ c_2\ d_1\ d_2)]$, b_1 é aresta paralela a b_2, c_1 a c_2 e d_1 a d_2. Os

sistemas de rotações de A mantêm a mesma disposição dos pares de arestas paralelas na rotação de cada vértice. Note que A tem cardinalidade 8 uma vez que para a escolha da rotação de um vértice temos 4 possibilidades, para a escolha da rotação do segundo temos apenas 2 e a rotação do terceiro vértice fica unicamente determinada. Cada um de seus sistemas estão associados a uma mesma representação poligonal, com mais de uma face.

O conjunto B é o complementar de A em E_1, logo com cardinalidade 56 e cada sistema rotações tem a propriedade de que pelo menos dois vértices tenha rotações que inverta a ordenação das arestas paralelas que incide com estes. Em outros termos, tem-se um vértice com rotação da forma $(\ldots b_1\, b_2 \ldots)$ e um segundo com rotação da forma $(\ldots b_2\, b_1 \ldots)$. Desse fato decorre que os sistemas rotações de B induzem mergulhos com pelo menos uma face com passeio de fronteira de comprimento 2.

Com efeito, seja v_i e v_k dois vértices de G_1, incidentes com as arestas paralelas b_1 e b_2. Suponha $\alpha = (\ldots b_1 b_2 \ldots)$ uma rotação de v_i e $\delta = (\ldots b_2 b_1 \ldots)$ uma rotação de v_k, com esta disposição cíclica. Partindo-se do vértice v_i pela aresta b_2, obtemos ao passeio de fronteira, $W := v_i, b_2, v_k, b_1$ de uma face. Logo, o mergulho induzido por um tal sistema possui uma face cujo passeio de fronteira tem comprimento dois. Como cada aresta de G_1 pertence a pelo menos uma face do mergulho, deve existir pelo menos duas faces desse mergulho. Portanto, nenhum sistema de rotações de E_1 induz mergulho com face única.

Os sistemas de rotações de E_8 induzem mergulhos com pelo menos uma face cujo passeio de fronteira tenha comprimento 3 e portanto não induzem mergulho com uma única face.

Agora analisaremos os conjuntos E_2, E_3 e E_4. Como a representação geométrica de G_1 é invariante por rotações obtemos um automorfismo de G_1 induzido por essa rotação. A saber, temos o automorfismo f, de ordem 3, dado por:

$$f = (f_V, f_A); \qquad f_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_3 & v_1 \end{pmatrix} \qquad f_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Para cada sistema de rotações R em E_2 obtemos um único sistema de rotações R_f em E_4, o sistema de rotações induzido por f. Além disso, $f \circ f$ faz corresponder cada sistema de rotações R em E_2 a um único sistema de rotações $R_{f \circ f}$ em E_3. Assim, segue do Teorema 4.5 que existe uma correspondência entre as representações poligonais obtidas por sistemas desses três conjuntos e podemos nos restringir apenas ao estudo dos sistemas de E_2.

Agrupamos os elementos de E_2 em dois subconjuntos disjuntos, C e seu complemento D. Definimos C como o conjunto dos sistemas de rotações R tais que,

$$C = \left\{R = [\theta,\ \lambda,\ \sigma_i]; i = 1,\ 6\right\},$$

onde $\theta = (\ldots a_1\, a_4 \ldots)$ e $\lambda = (\ldots a_4\, a_1 \ldots)$ são rotações de v_1 e v_2, respectivamente ou $\theta = (\ldots a_4\, a_1 \ldots)$ e $\lambda = (\ldots a_1\, a_4 \ldots)$. Dessa forma, C possui 16 sistemas de rotações, os quais induzem mergulhos com pelo menos uma face, cujo passeio de fronteira tenha comprimento dois.

Assim, nos resta os 16 sistemas de D. Esses sistemas estão associados a uma mesma representação poligonal que dá origem a um padrão de emparelhamento de P_{12} equivalente ao padrão da Figura 4.11 a menos de rotação e reflexão.

Quanto aos conjuntos E_5, E_6 e E_7, podemos nos restringir a apenas um deles, pelo mesmo argumento aplicado acima. Fixemos E_5. Os sistemas desse conjunto estão associados a um mesmo padrão de emparelhamento de P_{12}, o apresentado na Figura 4.9. Note que $R_1 = [\theta_5,\ \lambda_1,\ \sigma_1]$ é um elemento de E_5.

Segue que dois padrões de emparelhamento de P_{12} provenientes do mergulho de G_1 são únicos a menos de reflexões e rotações. Além disso G_1 possui 48 sistemas de rotações que dão origem ao padrão ilustrado na Figura 4.9, e 48 sistemas que dão origem ao padrão ilustrado na Figura 4.11.

■

Agora explicitemos as rotações para os vértices do grafo G_2 considerando a rotulação apresentada na Figura 4.12.

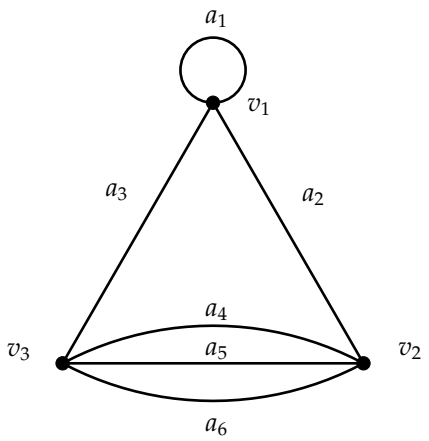

Figura 4.12: Rotulação de G_2.

O vértice v_1 é incidente às arestas a_1, a_2 e a_3, observando que a aresta a_1 é um laço. O vértice v_2 é incidente às arestas a_2, a_4, a_5 e a_6. Por último, o vértice v_3 incide às arestas a_3, a_4, a_5 e a_6. O conjunto das rotações de v_1 é, $\mathcal{R}_{v_1} = \{\theta_1, \theta_2 \text{ e } \theta_3\}$, onde $\theta_1 = (a_1 a_1 a_2 a_3)$, $\theta_2 = (a_1 a_1 a_3 a_2)$ e $\theta_3 = (a_1 a_2 a_1 a_3)$

Destacamos que um laço a_1 pode ser atravessado de duas formas diferentes e por isso é mencionado duas vezes em cada rotação de seu vértice base.

O conjunto de rotações de v_2 é, $\mathcal{R}_{v_2} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ e $\lambda_6\}$, onde $\lambda_1 = (a_2a_4a_5a_6)$, $\lambda_2 = (a_2a_4a_6a_5)$, $\lambda_3 = (a_2a_5a_4a_6)$, $\lambda_4 = (a_2a_5a_6a_4)$, $\lambda_5 = (a_2a_6a_4a_5)$ e $\lambda_6 = (a_2a_6a_5a_4)$.

Por último, o conjunto de rotações de v_3 é, $\mathcal{R}_{v_3} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ e $\sigma_6\}$, onde $\sigma_1 = (a_3a_4a_5a_6)$, $\sigma_2 = (a_3a_4a_6a_5)$, $\sigma_3 = (a_3a_5a_4a_6)$, $\sigma_4 = (a_3a_5a_6a_4)$, $\sigma_5 = (a_3a_6a_4a_5)$ e $\sigma_6 = (a_3a_6a_5a_4)$.

Note que segue do princípio multiplicativo e da Definição 3.13 que G_2 possui 108 sistemas de rotações distintos. Mostraremos que desses sistemas obtemos dois, e somente dois, padrões de emparelhamento distintos para P_{12}.

Proposição 4.7. *G_2 está associado a dois, e somente dois, padrões de emparelhamento de P_{12} a menos de imagem espelho (representações equivalentes).*

Comecemos particionando o conjunto de rotações de v_1 de modo que, $P_1(v_1)$ é o conjunto das rotações de v_1 que mantém as repetições do laço a_1 próximas e $P_2(v_1)$ o seu complementar. De maneira explícita,

$$P_1(v_1) = \{\theta_1, \theta_2\}; \qquad P_2(v_1) = \{\theta_3\}.$$

Sistemas de rotação de G_2 que tomam rotações de v_1 em $P_1(v_1)$ não induzem mergulhos de G_2 com uma única face. Com efeito, um tal sistema de rotações induz um mergulho com uma face cujo passeio de fronteira é $W := v_1a_1$. Logo, as demais arestas de G_2 pertencem ao passeio de fronteira de outra face. Desse fato, segue que o mergulho induzido por estes sistemas possui mais de uma face.

Nos resta analisar os sistemas de rotação de G_2 da forma, $[\theta_3, \lambda_i, \sigma_j]$, com $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$. Pelo princípio multiplicativo, temos 36 sistemas de rotação de G_2 com essa propriedade.

Consideremos a ação de $Aut\,(G_2)$ sobre o conjunto $\mathcal{G}_2$ dos sistemas de rotação de G_2. Através das simetrias de G_2, obtemos

$$Aut\,(G_2) = \left\langle f, h, k \right\rangle$$

o grupo gerado por $\{f, h, k\}$, com a operação de composição, onde

$$f = (f_V, f_A); \qquad f_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad f_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_6 & a_5 \end{pmatrix},$$

$$h = (h_V, h_A); \qquad h_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad h_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_5 & a_6 & a_4 \end{pmatrix},$$

$$k = (k_V, k_A); \qquad k_V = \begin{pmatrix} v_1 \; v_2 \; v_3 \\ v_1 \; v_3 \; v_2 \end{pmatrix} \qquad k_A = \begin{pmatrix} a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5 \; a_6 \\ a_1 \; a_3 \; a_2 \; a_4 \; a_5 \; a_6 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$Aut\,(G_2) = \{Id,\ f,\ h,\ h \circ h,\ f \circ h,\ h \circ f,\ k,\ f \circ k,\ h \circ k,\ h \circ h \circ k,\ f \circ h \circ k,\ h \circ f \circ k\}.$$

Tomando a ação a esquerda de $Aut\,(G_2)$ sobre o conjunto $\mathcal{G}_2$ dos Sistemas de rotação de G_2 determinamos o conjunto das órbitas dos 36 sistemas de rotações da forma $[\theta_3, \lambda_i, \sigma_j]$. As Tabelas 4.4 e 4.5 explicitam para cada $g \in Aut\,(G_2)$ a ação de α_g, definida em (4.1.5), restrita às rotações λ_i e σ_j, $i, j \in \{1, \ldots 6\}$. Note que $\alpha_g(\theta_3) = \theta_3$, para todo $g \in Aut\,(G)$.

Como α_g determina cada entrada de R_g, onde

$$R_g = [(g_V(v_1), g_A(r_{v_1})), g_V(v_2), g_A(r_{v_2})), (g_V(v_3), g_A(r_{v_3}))],$$

obtemos as órbitas com respeito a ação

$$\begin{array}{rccc} \beta: & Aut\,(G_2) \times \mathcal{G}_2 & \longrightarrow & \mathcal{G}_2 \\ & (g, R) & \longmapsto & R_g \end{array}. \tag{4.1.11}$$

α_g	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$
Id	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$
f (a_5a_6)	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$
h $(a_4a_5a_6)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$
$h.h$ $(a_4a_6a_5)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$
$f.h$ (a_4a_6)	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$
$h.f$ (a_4a_5)	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$
k (a_2a_3)	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$
$f.k$ $(a_5a_6)(a_2a_3)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$
$h.k$ $(a_4a_5a_6)(a_2a_3)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$
$(h.h).k$ $(a_4a_6a_5)(a_2a_3)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$
$(f.h).k$ $(a_4a_6)(a_2a_3)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$
$(h.f).k$ $(a_4a_5)(a_2a_3)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$

Tabela 4.4: Aplicação α_g sobre λ_i.

α_g	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$
Id	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$
f (a_5a_6)	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$
h $(a_4a_5a_6)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$
$h.h$ $(a_4a_6a_5)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$
$f.h$ (a_4a_6)	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$
$h.f$ (a_4a_5)	σ_3 $(a_3a_5a_4a_6)$	σ_4 $(a_3a_5a_6a_4)$	σ_1 $(a_3a_4a_5a_6)$	σ_2 $(a_3a_4a_6a_5)$	σ_6 $(a_3a_6a_5a_4)$	σ_5 $(a_3a_6a_4a_5)$
k (a_2a_3)	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$
$f.k$ $(a_5a_6)(a_2a_3)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$
$h.k$ $(a_4a_5a_6)(a_2a_3)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$
$(h.h).k$ $(a_4a_6a_5)(a_2a_3)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$
$(f.h).k$ $(a_4a_6)(a_2a_3)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$
$(h.f).k$ $(a_4a_5)(a_2a_3)$	λ_3 $(a_2a_5a_4a_6)$	λ_4 $(a_2a_5a_6a_4)$	λ_1 $(a_2a_4a_5a_6)$	λ_2 $(a_2a_4a_6a_5)$	λ_6 $(a_2a_6a_5a_4)$	λ_5 $(a_2a_6a_4a_5)$

Tabela 4.5: Aplicação α_g sobre σ_j.

De maneira explícita, temos as órbitas

$$\mathcal{O}_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_1]} = \Big\{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_1],\ [\theta_3,\lambda_2,\sigma_2],\ [\theta_3,\lambda_3,\sigma_3],\ [\theta_3,\lambda_4,\sigma_4],\ [\theta_3,\lambda_5,\sigma_5],\ [\theta_3,\lambda_6,\sigma_6]\Big\};$$

$$\mathcal{O}_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_2]} = \Big\{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_2],\ [\theta_3,\lambda_2,\sigma_1],\ [\theta_3,\lambda_3,\sigma_4],\ [\theta_3,\lambda_4,\sigma_3],\ [\theta_3,\lambda_5,\sigma_6],\ [\theta_3,\lambda_6,\sigma_5]\Big\};$$

$$\mathcal{O}_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_3]} = \Big\{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_3],\ [\theta_3,\lambda_2,\sigma_5],\ [\theta_3,\lambda_3,\sigma_1],\ [\theta_3,\lambda_4,\sigma_6],\ [\theta_3,\lambda_5,\sigma_2],\ [\theta_3,\lambda_6,\sigma_4]\Big\};$$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_4]} = \Big\{&[\theta_3,\lambda_1,\sigma_4],\ [\theta_3,\lambda_2,\sigma_6],\ [\theta_3,\lambda_3,\sigma_2],\ [\theta_3,\lambda_4,\sigma_5],\ [\theta_3,\lambda_5,\sigma_1],\ [\theta_3,\lambda_6,\sigma_3],\\ &[\theta_3,\lambda_1,\sigma_5],\ [\theta_3,\lambda_2,\sigma_3],\ [\theta_3,\lambda_3,\sigma_6],\ [\theta_3,\lambda_4,\sigma_1],\ [\theta_3,\lambda_5,\sigma_4],\ [\theta_3,\lambda_6,\sigma_2];\Big\};\end{aligned}$$

$$\mathcal{O}_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_6]} = \Big\{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_6],\ [\theta_3,\lambda_2,\sigma_4],\ [\theta_3,\lambda_3,\sigma_5],\ [\theta_3,\lambda_4,\sigma_2],\ [\theta_3,\lambda_5,\sigma_3],\ [\theta_3,\lambda_6,\sigma_1]\Big\}.$$

Os elementos da órbita $\mathcal{O}_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_1]}$ induzem mergulhos de G_2 com uma única face que dão origem a padrões de emparelhamento de P_{12} equivalentes ao padrão ilustrado na Figura 4.14.

Já os elementos das órbitas $\mathcal{O}_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_2]}$, $\mathcal{O}_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_3]}$ estão associados a representações poligonais equivalentes uma vez que $[\theta_3^-,\lambda_1^-,\sigma_2^-] = [\theta_3,\lambda_6,\sigma_4]$ induzem representações

poligonais equivalentes, pela Proposição 4.2. Portanto, os elementos dessas duas órbitas estão associados a mesma representação poligonal. Tomando um desses sistemas obtêm-se três passeios de fonteira, de três faces, logo um mergulho no Toro.

Quanto aos membros da órbita $O_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_2]}$, temos que ambos estão associados a mergulhos com uma única face dando origem a padrões de emparelhamento equivalentes aos padrões apresentado na Figura 4.16.

Por fim, temos os elementos da órbita $O_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_6]}$ que não estão associados a mergulhos com uma única face, o que conclui a demonstração.

■

Agora designaremos um sistema de rotações da órbita $O_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_1]}$. Considere $(G_2)_{R_1}$, onde $R_1 = [\theta_3, \lambda_1, \sigma_1]$, $\theta_3 = (a_1a_2a_1a_3)$, $\lambda_1 = (a_2a_4a_5a_6)$ e $\sigma_1 = (a_3a_4a_5a_6)$. O grafo G_2 com esse sistema de rotações nos fornece o passeio W_3, com vértice inicial v_1 pela aresta a_1. W_3 é dado por:

$$W_3 := v_1\ a_1\ v_1\ a_2\ v_2\ a_4\ v_3\ a_5\ v_2\ a_6\ v_3\ a_4\ v_1\ a_1\ v_1\ a_3\ v_3\ a_4\ v_2\ a_5\ v_3\ a_6\ v_2\ a_2.$$

Exibimos a representação desse passeio sobre G_2 na Figura 4.13.

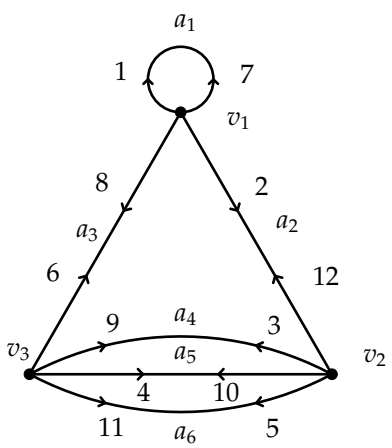

Figura 4.13: Passeio referente a $(G_2)_{R_1}$.

v_1.	a_1	a_2	a_1	a_3
v_2.	a_2	a_4	a_5	a_6
v_3.	a_3	a_4	a_5	a_6

Tabela 4.6: Tabela de Rotação de G_2.

Assim, obtemos as identificações das arestas de P_{12}, $\{\alpha_1, \alpha_7\}$, $\{\alpha_2, \alpha_{12}\}$, $\{\alpha_3, \alpha_9\}$, $\{\alpha_4, \alpha_{10}\}$, $\{\alpha_{11}, \alpha_5\}$ e $\{\alpha_6, \alpha_8\}$ ilustradas na Figura 4.14. Este é o terceiro padrão de emparelhamento de P_{12},, com ciclo de vértices $C_1 = \{v_1, v_8, v_7, v_2\}$, $C_2 = \{v_3, v_{12}, v_5, v_{10}\}$ e $C_3 = \{v_4, v_{11}, v_6, v_9\}$.

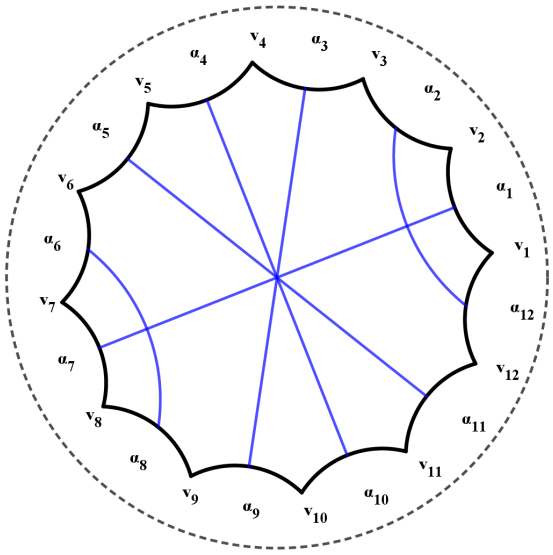

Figura 4.14: Emparelhamento de P_{12} associado a $(G_2)_{R_1}$.

Agora tomando $(G_2)_{R_2}$, com $R_2 = [\theta_3, \lambda_1, \sigma_4]$, da órbita $\mathcal{O}_{[\theta_3,\lambda_1,\sigma_4]}$, onde $\theta_3 = (a_1a_2a_1a_3)$, $\lambda_1 = (a_2a_4a_5a_6)$ e $\sigma_4 = (a_3a_5a_6a_4)$ e iniciando o passeio pelo vértice v_1 sobre a aresta a_1 obtemos W_4 dado por;

$$W_4 := v_1\ a_1\ v_1\ a_3\ v_3\ a_5\ v_2\ a_6\ v_3\ a_4\ v_2\ a_5\ v_3\ a_6\ v_2\ a_2\ v_1\ a_1\ v_1\ a_2\ v_2\ a_4\ v_3\ a_3$$

representado sobre G_2 na Figura 4.15.

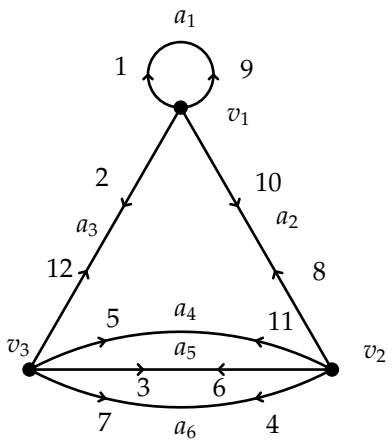

Figura 4.15: Passeio referente a $(G_2)_{R_2}$.

$v_1.$	a_1	a_2	a_1	a_3
$v_2.$	a_2	a_4	a_5	a_6
$v_3.$	a_3	a_5	a_6	a_4

Tabela 4.7: Tabela de Rotação de G_2.

Desse passeio obtemos o quarto padrão de emparelhamento de P_{12}, ilustrado na Figura 4.16, com os pares de arestas de P_{12}, $\{\alpha_1, \alpha_9\}$, $\{\alpha_2, \alpha_{12}\}$, $\{\alpha_3, \alpha_6\}$, $\{\alpha_4, \alpha_7\}$, $\{\alpha_5, \alpha_{11}\}$, e $\{\alpha_{10}, \alpha_8\}$. Os ciclos de vértice correspondentes a este emparelhamento são: $C_1 = \{v_1, v_2, v_9, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_4, v_6, v_8, v_{11}\}$ e $C_3 = \{v_3, v_5, v_7, v_{12}\}$.

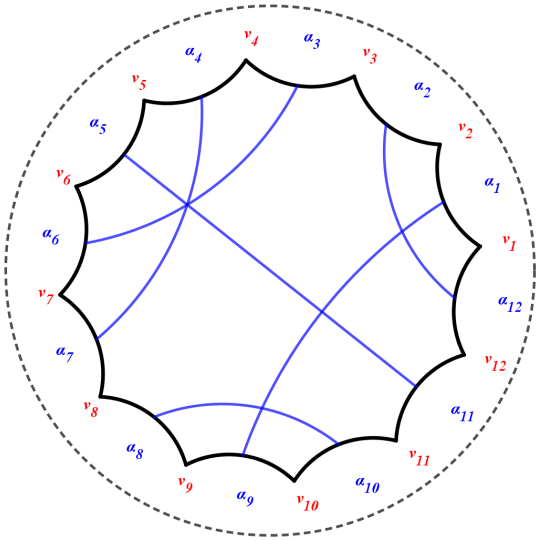

Figura 4.16: Emparelhamento de P_{12} associado a $(G_2)_{R_2}$.

Consideremos agora o grafo G_3, com a rotulação exibida na Figura 4.17.

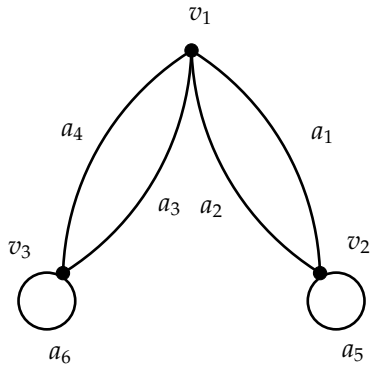

Figura 4.17: Rotulação de G_3.

O conjunto das rotações de v_1 é, $\mathcal{R}_{v_1} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5 \text{ e } \theta_6\}$, onde $\theta_1 = (a_1a_2a_3a_4)$, $\theta_2 = (a_1a_2a_4a_3)$, $\theta_3 = (a_1a_3a_2a_4)$, $\theta_4 = (a_1a_3a_4a_2)$, $\theta_5 = (a_1a_4a_2a_3)$ e $\theta_6 = (a_1a_4a_3a_2)$.

O conjunto de rotações de v_2 é, $\mathcal{R}_{v_2} = \{\lambda_1, \lambda_2 \text{ e } \lambda_3\}$, onde $\lambda_1 = (a_1a_2a_5a_5)$, $\lambda_2 = (a_1a_5a_2a_5)$ e $\lambda_3 = (a_1a_5a_5a_2)$.

Por último, o conjunto de rotações de v_3 é, $\mathcal{R}_{v_3} = \{\sigma_1, \sigma_2 \text{ e } \sigma_3\}$, onde $\sigma_1 = (a_3a_4a_6a_6)$, $\sigma_2 = (a_3a_6a_4a_6)$ e $\sigma_3 = (a_3a_6a_6a_4)$.

Proposição 4.8. *G_3 está associado a dois, e somente dois, padrões de emparelhamento de P_{12}, a menos de imagem espelho (representações equivalentes).*

Iniciemos observando que pelo princípio multiplicativo, G_3 possui $6 \times 3 \times 3 = 54$ sistemas de rotações. Determinaremos quais desses sistemas de rotação induzem mergulhos com uma única face.

Defina a partição $\mathcal{P}_1 = \{P_1(v_1), P_2(v_2)\}$, do conjunto de rotações do vértice v_1, onde $P_1(v_1) = \{\theta_1, \theta_2, \theta_4, \theta_6\}$ é o conjunto das rotações de v_1 que mantêm arestas paralelas próximas e $P_2(v_1)$ o conjunto das rotações v_1 que não mantêm arestas paralelas próximas. Para $i \in \{2, 3\}$, defina $\mathcal{P}_i = \{P_1(v_i), P_2(v_i)\}$, onde $P_1(v_i)$ é o conjunto das rotações v_i que mantêm repetições de laços próximas e $P_2(v_i)$ é o conjunto das rotações v_i que não mantêm repetições de laços próximas. Assim, $P_1(v_2) = \{\lambda_1, \lambda_3\}$, $P_2(v_2) = \{\lambda_2\}$, $P_1(v_3) = \{\sigma_1, \sigma_3\}$ e $P_2(v_3) = \{\sigma_2\}$. Os sistemas de rotação de G_3 podem ser distribuídos de acordo com as partições dos conjuntos de rotações de cada vértice. A Tabela 4.8 descreve esta distribuição.

Os sistemas de rotação provenientes de E_1, E_2, E_3, E_4, E_6 e E_7 induzem mergulhos de G_3 com mais de uma face, pois pelo menos um vértice base de um dos laços (v_2 ou v_3), possui rotação que mantém a repetição de laço próxima. O mergulho induzido por qualquer desses sistemas tem pelo menos duas faces, sendo uma delas determinada pelo laço.

	v_1	v_2	v_3	Número de Rotações
E_1	$P_1(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_1(v_3)$	$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
E_2	$P_1(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_2(v_3)$	$4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$
E_3	$P_1(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_1(v_3)$	$4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$
E_4	$P_2(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_1(v_3)$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
E_5	$P_1(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_2(v_3)$	$4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$
E_6	$P_2(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_2(v_3)$	$2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$
E_7	$P_2(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_1(v_3)$	$2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$
E_8	$P_2(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_2(v_3)$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Tabela 4.8: Distribuição das rotações de G_3.

Logo, nos resta analisar os sistemas de rotação provenientes de E_5 e E_8. De maneira explícita,

$$E_5 = \{[\theta_1, \lambda_2, \sigma_2], [\theta_2, \lambda_2, \sigma_2], [\theta_4, \lambda_2, \sigma_2], [\theta_6, \lambda_2, \sigma_2]\}; \quad E_8 = \{[\theta_3, \lambda_2, \sigma_2], [\theta_5, \lambda_2, \sigma_2]\}.$$

Afirmamos que os sistemas de rotação provenientes de E_5 induzem representações poligonais equivalentes. Mostraremos que eles pertencem a uma mesma órbita, considerando a ação β dada por,

$$\begin{array}{rccc} \beta: & Aut\,(G_3) \times \mathcal{G}_3 & \longrightarrow & \mathcal{G}_3 \\ & (g, R) & \longmapsto & R_g \end{array}. \tag{4.1.12}$$

Suponha G_3 com o sistema $R_1 = [\theta_1, \lambda_2, \sigma_2]$. Afirmamos que os demais sistemas de rotação de E_5 são obtidos de R_1 por automorfismos de G_3. Com efeito, consideremos o automorfismo $f = (f_V, f_A)$, onde:

$$f_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_3 & v_2 \end{pmatrix} \qquad f_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_6 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\alpha_f(\theta_1)_{=}(f_A(a_1)f_A(a_2)f_A(a_3)f_A(a_4)) = (a_4a_3a_2a_1) = \theta_6$$

é uma rotação de $f_V(v_1) = v_1$.

$$\alpha_f(\lambda_2) = (f_A(a_1)f_A(a_5)f_A(a_2)f_A(a_5)) = (a_4a_6a_3a_6) = \sigma_2$$

é uma rotação de $f_V(v_2) = v_3$.

$$\alpha_f(\sigma_2) = (f_A(a_3)f_A(a_6)f_A(a_4)f_A(a_6)) = (a_2a_5a_1a_5) = \lambda_2$$

é rotação de $f_V(v_3) = v_2$ e assim obtemos o Sistema de Rotações $R_2 = [\theta_6, \lambda_2, \sigma_2]$.

Agora consideremos o automorfismo $g = (g_V, g_A)$, onde:

$$g_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad g_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_1 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}.$$

Desse automorfismo obtemos $\alpha_g(\theta_1) = \theta_4$, $\alpha_g(\lambda_2) = \lambda_2$, $\alpha_g(\sigma_2) = \sigma_2$ e o Sistema de Rotações $R_3 = [\theta_4, \lambda_2, \sigma_2]$.

Com o automorfismo $h = (h_V, h_A)$, onde:

$$h_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad h_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix},$$

obtemos $\alpha_h(\theta_1) = \theta_2$, $\alpha_h(\lambda_2) = \lambda_2$, $\alpha_h(\sigma_2) = \sigma_2$ e o Sistema de Rotações $R_4 = [\theta_2, \lambda_2, \sigma_2]$. Assim as rotações de E_5 são obtidas de R_1, ou seja, pertencem a mesma órbita. Usando este mesmo raciocínio, sobre o E_8, com o automorfismo f, vemos que o sistema de rotações $R_5 = [\theta_3, \lambda_2, \sigma_2]$ é levado por f em $R_6 = [\theta_5, \lambda_2, \sigma_2]$. Os sistemas de rotação de E_5 induzem mergulhos de G_3 com face única que dão origem a padrões de emparelhamento P_{12} equivalentes ao apresentado na Figura 4.19. De modo análogo, os dois sistemas de rotações de E_8 estão associados a um mesmo padrão de emparelhamento, o apresentado na Figura 4.21.

■

Designamos a G_3 o Sistema de Rotações $R_4 = [\theta_2\lambda_2\sigma_2] \in E_5$ e partindo-se do

vértice v_1 pela aresta a_1, obtemos o passeio W_5, representado sobre G_3 na Figura 4.18.

$$W_5 := v_1\, a_1\, v_2\, a_5\, v_2\, a_1\, v_1\, a_2\, v_1\, a_5\, v_2\, a_2\, v_1\, a_4\, v_3\, a_6\, v_3\, a_4\, v_1\, a_3\, v_3\, a_6\, v_3\, a_3.$$

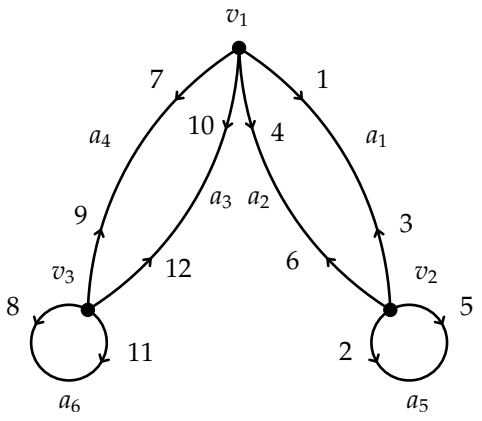

Figura 4.18: Passeio de fronteira referente a $(G_3)_{R_4}$.

$v_1.$	a_1	a_2	a_4	a_3
$v_2.$	a_1	a_5	a_2	a_5
$v_3.$	a_3	a_6	a_4	a_6

Tabela 4.9: Tabela de Rotação de G_3.

O passeio W_5 sobre G_3 nos fornece os pares de arestas emparelhadas de P_{12}: $\{\alpha_1, \alpha_3\}$, $\{\alpha_2, \alpha_5\}$, $\{\alpha_4, \alpha_6\}$, $\{\alpha_7, \alpha_9\}$, $\{\alpha_8, \alpha_{11}\}$ e $\{\alpha_{10}, \alpha_{12}\}$. Exibimos o diagrama deste emparelhamento na Figura 4.19. Observemos que os ciclos de vértices são: $C_1 = \{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$ e $C_3 = \{v_8, v_9, v_{11}, v_{12}\}$.

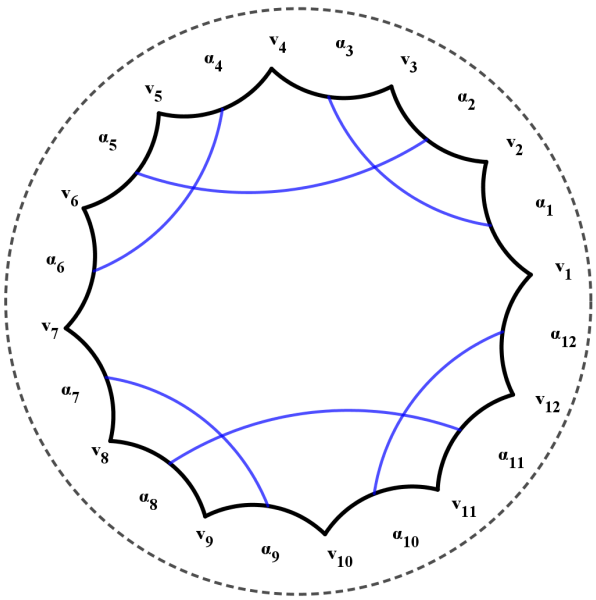

Figura 4.19: Emparelhamento de P_{12} associado a $(G_3)_{R_4}$.

Designemos agora o Sistema de Rotações $R_6 = [\theta_5, \lambda_2, \sigma_2]$, em que $\theta_5 = (a_1 a_4 a_2 a_3)$,

$\lambda_2 = (a_1a_5a_2a_5)$ e $\sigma_2 = (a_3a_6a_4a_6)$. Obtemos passeio W_6 sobre G_3 dado por:

$$W_6 := v_1\ a_1\ v_2\ a_5\ v_2\ a_1\ v_1\ a_4\ v_3\ a_6\ v_3\ a_4\ v_1\ a_2\ v_2\ a_5\ v_2\ a_2\ v_1\ a_3\ v_3\ a_6\ v_3\ a_3.$$

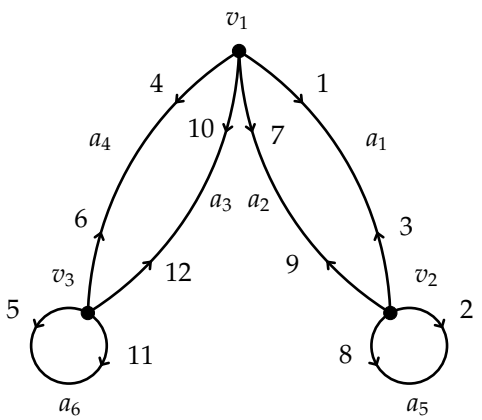

Figura 4.20: Passeio de referente a $(G_3)_{R_6}$.

$v_1.$	a_1	a_4	a_2	a_3
$v_2.$	a_1	a_5	a_2	a_5
$v_3.$	a_3	a_6	a_4	a_6

Tabela 4.10: Tabela de Rotação de G_3.

Desse passeio obtemos os pares de arestas de P_{12}: $\{\alpha_1, \alpha_3\}$, $\{\alpha_2, \alpha_8\}$, $\{\alpha_4, \alpha_6\}$, $\{\alpha_7, \alpha_9\}$, $\{\alpha_5, \alpha_{11}\}$ e $\{\alpha_{10}, \alpha_{12}\}$ e ciclos de vértices $C_1 = \{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_2, v_3, v_8, v_9\}$ e $C_3 = \{v_5, v_6, v_{11}, v_{12}\}$. Na Figura 4.21 exibimos o diagrama deste emparelhamento.

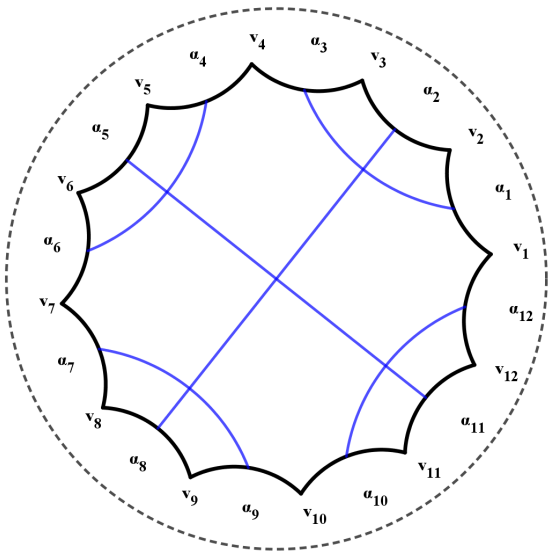

Figura 4.21: Emparelhamento de P_{12} associado a $(G_3)_{R_6}$.

Agora mostraremos que o grafo G_4 não admite nenhum mergulho celular com uma única face, ou seja, G_4 não está associado a nenhum emparelhamento de P_{12}.

Atribuímos uma rotulação para o grafo G_4, mostrada na Figura 4.22 e as rotações para cada um de seus vértices.

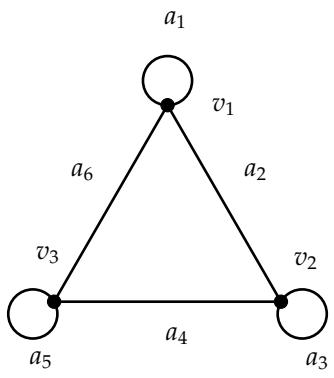

Figura 4.22: Rotulação de G_4.

O conjunto das rotações de v_1 é, $\mathcal{R}_{v_1} = \{\theta_1, \theta_2 \text{ e } \theta_3\}$, onde $\theta_1 = (a_1a_1a_2a_6)$, $\theta_2 = (a_1a_1a_6a_2)$ e $\theta_3 = (a_1a_2a_1a_6)$.

O conjunto de rotações de v_2 é, $\mathcal{R}_{v_2} = \{\lambda_1, \lambda_2 \text{ e } \lambda_3\}$, onde $\lambda_1 = (a_3a_3a_2a_4)$, $\lambda_2 = (a_3a_3a_4a_2)$ e $\lambda_3 = (a_3a_2a_3a_4)$.

Por último, o conjunto de rotações de v_3 é, $\mathcal{R}_{v_3} = \{\sigma_1, \sigma_2 \text{ e } \sigma_3\}$, onde $\sigma_1 = (a_5a_5a_4a_6)$, $\sigma_2 = (a_5a_5a_6a_4)$ e $\sigma_3 = (a_5a_4a_5a_6)$.

Proposição 4.9. *G_4 não admite mergulho celular com face única.*

Mostraremos que cada Sistema de Rotações para G_4 induz um mergulho com pelo menos duas faces. Com efeito, consideremos para cada vértice v_i a bipartição do conjunto de rotação de v_i, $\mathcal{P} = \{P_1(v_i), P_2(v_i)\}$, de modo que $P_1(v_i)$ é o conjunto das rotações que mantém as repetições de laços próximas e P_2 o conjunto das rotações que não mantém as repetições de laços próximas.

Assim, $P_1(v_1) = \{\theta_1 \text{ e } \theta_2\}$, $P_2(v_1) = \{\theta_3\}$, onde $\theta_1 = (a_1a_1a_2a_6)$, $\theta_2 = (a_1a_1a_6a_2)$ e $\theta_3 = (a_1a_2a_1a_6)$. $P_1(v_2) = \{\lambda_1 \text{ e } \lambda_2\}$, $P_2(v_2) = \{\lambda_3\}$, onde $\lambda_1 = (a_3a_3a_2a_4)$, $\lambda_2 = (a_3a_3a_4a_2)$ e $\lambda_3 = (a_3a_2a_3a_4)$. $P_1(v_3) = \{\sigma_1 \text{ e } \sigma_2\}$, $P_2(v_3) = \{\sigma_3\}$, onde $\sigma_1 = (a_5a_5a_4a_6)$, $\sigma_2 = (a_5a_5a_6a_4)$ e $\sigma_3 = (a_5a_4a_5a_6)$.

Como uma rotação de G_4 consiste em designar uma rotação para cada vértice, podemos distribuir as 27 rotações possíveis de G_4 de acordo com as partições dos conjuntos de vértices. A Tabela 4.11 descreve as possibilidades de se designar uma rotação para G_4, observando para a escolha da rotação de cada vértice o conjunto da partição das rotações.

	v_1	v_2	v_3	Número de Rotações
E_1	$P_1(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_1(v_3)$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
E_2	$P_1(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_2(v_3)$	$2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$
E_3	$P_1(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_1(v_3)$	$2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$
E_4	$P_2(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_1(v_3)$	$1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$
E_5	$P_1(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_2(v_3)$	$2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$
E_6	$P_2(v_1)$	$P_1(v_2)$	$P_2(v_3)$	$1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$
E_7	$P_2(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_1(v_3)$	$1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$
E_8	$P_2(v_1)$	$P_2(v_2)$	$P_2(v_3)$	$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Tabela 4.11: Distribuição das rotações de G_4.

Assim, o conjunto E_1 é constituído das rotações de G_4 em que a rotação de cada vértice mantém arestas repetidas próximas (laços). Este conjunto tem cardinalidade 8. O mesmo raciocínio é aplicado aos demais conjuntos.

Uma rotação de G_4 que possui pelo menos uma rotação de vértice tomada em $P_1(v_i)$, para algum vértice v_i, induz um mergulho de G_4 em uma superfície S com pelo menos duas faces. Logo, todo mergulho de G_4 com um tal sistema de rotações possui mais de uma face, uma vez que se tem uma face com passeio de fronteira de comprimento um. As demais arestas de G_4 devem aparecer em algum outro passeio de fronteira. Desse fato decorre que todas os Sistemas de rotações de G_4 provenientes de E_i, com $i \in \{1, \ldots, 7\}$, induzem mergulhos com pelo menos duas faces.

Agora analisemos o sistema rotações que compõe o conjunto E_8, ou seja, $(G_4)_{R_1}$ com, $R_1 = [\theta_3, \lambda_3, \sigma_3]$, onde $\theta_3 = (a_1 a_2 a_1 a_6)$, $\lambda_3 = (a_3 a_2 a_3 a_4)$ e $\sigma_3 = (a_5 a_4 a_5 a_6)$. Determinemos os passeios de fronteira para cada face do mergulho induzido.

Iniciando do vértice v_1 pela aresta a_2, temos o passeio $W_1 := v_1\, a_2\, v_2,\ a_3\, v_2\, a_2\, v_1\, a_1$ correspondente ao passeio de fronteira de uma das faces, F_1. Agora, partindo-se do vértice v_1 pela aresta a_6 obtemos o passeio $W_2 := v_1\, a_6\, v_3\, a_5\, v_3\, a_6\, v_1\, a_1$ correspondente ao passeio de fronteira da segunda face, F_2. Por fim, tomando o vértice v_3 e a aresta a_4 temos o passeio referente a terceira face F_3, dado por $W_3 := v_3\, a_4\, v_2\, a_3\, v_2\, a_4\, v_3\, a_5$. Observemos que com os três passeios cada aresta de G_4 é atravessada exatamente duas vezes, uma em cada sentido. Com isso, a Proposição 4.9 segue.

■

Abaixo representamos cada passeio sobre o grafo G_4. Identificamos o passeio W_1 com a cor verde, W_2 com a cor vermelha e W_3 com a cor azul. Cabe observar que atribuímos duas rotulações para cada laço, para identificar o sentido em que este é atravessado.

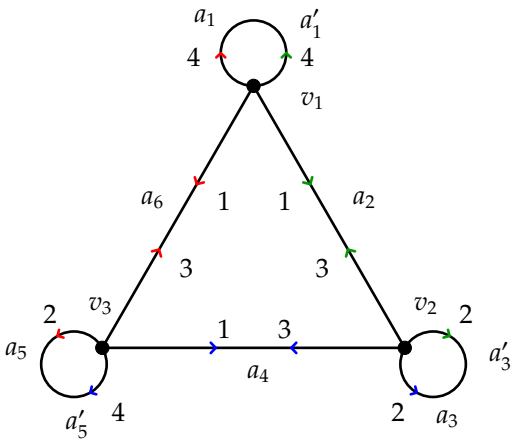

Figura 4.23: Passeio referente a $(G_4)_{R_1}$.

v_1.	a_1	a_2	a'_1	a_6
v_2.	a_3	a_2	a'_3	a_4
v_3.	a_5	a_5	a'_5	a_6

Tabela 4.12: Tabela de Rotação de G_4.

Desa forma, o conjunto das faces do mergulho $F(G)$ tem 3 elementos, portanto G_4 não é grafo de emparelhamento para P_{12}. Sendo g o gênero da superfície S do mergulho temos pela fórmula de Euler,

$$|V(G_4)| - |E(G_4)| + |F(G_4)| = 2 - 2g$$

$$g = \frac{3 - 6 + 3 - 2}{-2} = 1.$$

Portanto S é homeomorfa ao Toro. A seguir exibimos a identificação das três faces assim como o mergulho de G_4 sobre S.

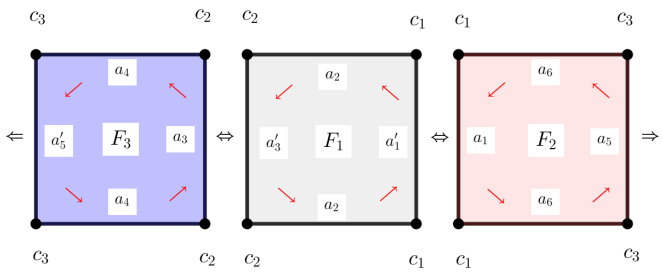

Figura 4.24: Faces do Mergulho.

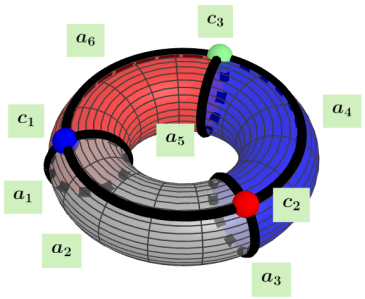

Figura 4.25: Faces identificadas.

Diante do exposto nessa subseção, obtemos que existem 6 padrões de emparelhamento para P_{12} associados a grafos 4-regulares, distintos a menos rotações e reflexões.

4.1.2 Emparelhamentos para P_{10}

Agora explicitaremos emparelhamentos de P_{10} associados a mergulhos dos grafos H_1, H_2 e H_3. Comecemos com o grafo H_1 o qual atribuímos a seguinte rotulação.

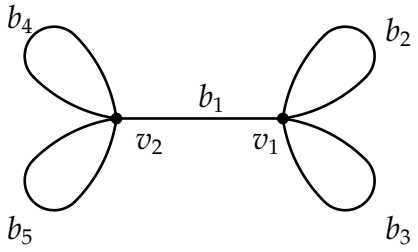

Figura 4.26: Rotulação de H_1.

O vértice v_1 possui seis rotações distintas e denotamos o conjunto de rotações de v_1 por $R_{v_1} = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6\}$, onde $\delta_1 = (b_1b_2b_2b_3b_3)$, $\delta_2 = (b_1b_2b_3b_2b_3)$, $\delta_3 = (b_1b_2b_3b_3b_2)$, $\delta_4 = (b_1b_3b_2b_2b_3)$, $\delta_5 = (b_1b_3b_2b_3b_2)$ e $\delta_6 = (b_1b_3b_2b_2b_3)$.

O vértice v_2 também possui seis rotações e seu conjunto de rotações é dado por $R_{v_2} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, g_5, g_6\}$, onde $\gamma_1 = (b_1b_4b_4b_5b_5)$, $\gamma_2 = (b_1b_4b_5b_4b_5)$, $\gamma_3 = (b_1b_4b_5b_5b_4)$, $\gamma_4 = (b_1b_5b_4b_4b_5)$, $\gamma_5 = (b_1b_5b_4b_5b_4)$ e $\gamma_6 = (b_1b_5b_4b_4b_5)$.

Logo, pelo princípio multiplicativo, H_1 possui trinta e seis sistemas de rotações. Analisando esses sistemas obtemos a seguinte proposição.

Proposição 4.10. *H_1 está associado a um, e somente um, padrão de emparelhamento de P_{10}, a menos de imagem espelho (representações equivalentes).*

Buscamos identificar sistemas de rotações que induzam mergulhos com uma única face, com passeio de fronteira com comprimento dez. Dessa forma excluímos sistemas de rotações que induzem mergulhos com pelo menos uma face cujo passeio de fronteira tenha comprimento um, ou seja, faces delimitadas por laços. Tais sistemas de rotações tem a propriedade de manterem repetições de laços próximas na rotação do vértice base do laço.

Assim, nos restringimos para cada vértice, a rotações que não mantém repetições de laços próximas e obtemos os sistemas de rotações $R_1 = [\delta_2, \gamma_2]$, $R_2 = [\delta_2, \gamma_5]$, $R_3 = [\delta_5, \gamma_2]$ e $R_4 = [\delta_5, \gamma_5]$.

Afirmamos que esses sistemas de rotações estão associados a representações poligonais equivalentes. De fato, considere os automorfismos,

$$f = (f_V, f_A); \qquad f_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \qquad f_A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b_1 & b_3 & b_2 & b_4 & b_5 \end{pmatrix},$$

$$g = (g_V, g_A); \qquad g_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \qquad g_A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_5 & b_4 \end{pmatrix},$$

Considerando a aplicação β definida em (4.1.6), para H_1, obtemos,

$$(R_1)_f = [(f_V(v_1), f_A(r_{v_1})), (f_V(v_2), f_A(r_{v_2}))] = [\delta_5, \gamma_2] = R_3;$$

$$(R_2)_f = [(f_V(v_1), f_A(r_{v_1})), (f_V(v_2), f_A(r_{v_2}))] = [\delta_5, \gamma_5] = R_4;$$

$$(R_1)_g = [(g_V(v_1), g_A(r_{v_1})), (g_V(v_2), g_A(r_{v_2}))] = [\delta_2, \gamma_5] = R_2;$$

$$(R_3)_g = [(g_V(v_1), g_A(r_{v_1})), (g_V(v_2), g_A(r_{v_2}))] = [\delta_5, \gamma_5] = R_4.$$

Daí, esses sistemas pertencem a uma mesma órbita e pelo Teorema 4.5, induzem representações poligonais equivalentes. Esses sistemas de rotação estão associados a um padrão de emparelhamento de P_{10} apresentado na Figura 4.28.

■

Designado o sistema de rotações R_1 para H_1 obtemos o passeio de fronteira sobre o grafo ilustrado na Figura 4.27.

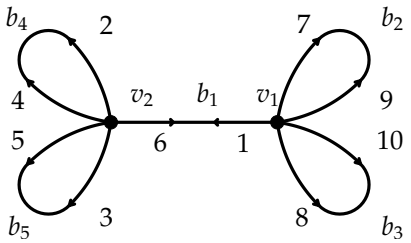

Figura 4.27: Passeio referente a $(H_1)_{R_1}$.

v_1.	b_1	b_2	b_3	b_2	b_3
v_2.	b_1	b_4	b_5	b_4	b_5

Tabela 4.13: Tabela de Rotação de H_1.

Exibimos na Figura 4.28, o diagrama de emparelhamento de P_{10}.

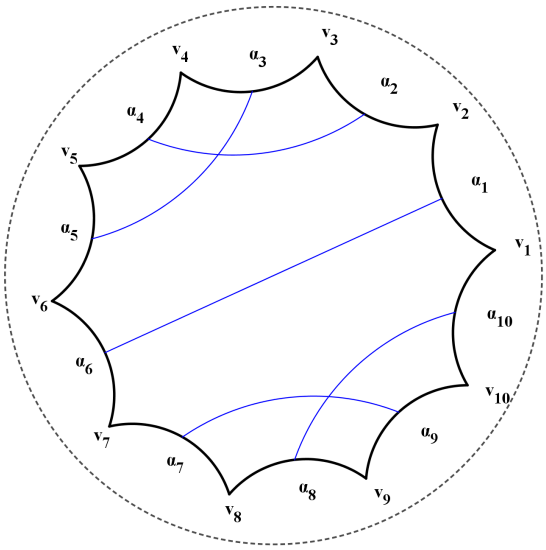

Figura 4.28: Emparelhamento de P_{10} associado a $(H_1)_{R_1}$.

Consideremos agora o Grafo H_2 com a rotulação apresentada na Figura 4.29. H_2 é 5-regular e suas arestas são paralelas. Seus vértices possuem 24 rotações cada e portanto este grafo admite 576 sistemas de rotações.

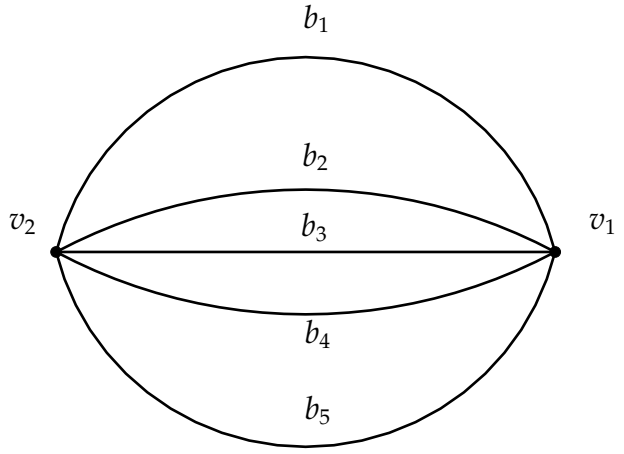

Figura 4.29: Rotulação de H_2.

Mostraremos que H_2 está associado a três padrões de emparelhamento de P_{10}.

Proposição 4.11. *H_2 está associado a três, e somente três, padrões de emparelhamento de P_{10}, a menos de imagem espelho (representações equivalentes).*

Buscamos sistemas de rotações que induzam mergulhos com uma única face e assim determinamos emparelhamentos de arestas de P_{10}. Dessa formas, descartaremos sistemas de rotações que induzem mergulhos com mais de uma face. Como H_2 não possui laços, nenhum de seus mergulhos admite faces cujo passeio de fronteira tenha comprimento um, por outro lado, H_2 possui arestas paralelas e daí possui mergulhos que admitem faces cujo passeio de fronteira tenha comprimento dois.

Suponha F, face de algum mergulho de H_2, cujo passeio de fronteira W_F tenha comprimento dois. A menos de escolha do vértice inicial e aresta inicial W_F é da forma, $W_F := v_1 b_i v_2 b_j$, onde b_i e b_j são aresta paralelas de H_2. Assim, as rotações de v_1 e v_2 são da forma $(\ldots b_j b_i \ldots)$ e $(\ldots b_i b_j \ldots)$ respectivamente. Em outros termos, se b_j é movido para b_i na rotação de v_1, b_i é movido para b_j na rotação de v_2.

Por outro lado, um dado sistema de rotações $R = [(v_1, r_{v_1}), (v_2, r_{v_2})]$, onde $r_{v_1} = (\ldots b_i b_j \ldots)$ e $r_{v_2} = (\ldots b_j b_i \ldots)$ induz um mergulho com uma face cujo passeio de fronteira é $W = v_1 b_j v_2 b_i$, de comprimento dois. Assim, dado um sistema de rotações de v_1 determina-se todas as rotações de v_2 que compõem um sistema de rotações para H_2 de modo que se tenha pelo menos uma face de comprimento dois.

Com efeito, seja $\omega = (b_i\ b_j\ b_k\ b_l\ b_m)$ uma rotação genérica de v_1. A fim de se compor um sistema de rotações para H_2, de modo que se tenha mergulho com face de comprimento dois, a rotação de v_2 deve atender pelo menos uma das seguintes condições:

- mover b_j para b_i;

- mover b_k para b_j;
- mover b_l para b_k;
- mover b_m para b_l;
- mover b_i para b_m.

Desse fato, obtemos que para cada rotação de v_1 há 16 rotações para v_2 de modo que o sistema de rotações composto induz mergulho com pelo menos uma face de comprimento dois. Como v_1 possui 24 rotações H_2 admite $24 \times 16 = 384$ sistemas de rotações que induzem mergulho com pelo menos uma face de comprimento dois e portanto estes sistemas não estão associados a emparelhamentos de arestas de P_{10}.

Agora nos resta analisar, para cada rotação de v_1, oito rotações de v_2 que compõem os 192 sistemas de rotações restantes de H_2. Considerando a rotação genérica ω, de v_1, cada uma das oito rotações de v_2 deve atender todas as seguintes condições:

- não mover b_j para b_i;
- não mover b_k para b_j;
- não mover b_l para b_k;
- não mover b_m para b_l;
- não mover b_i para b_m.

Daí obtemos as rotações de v_2: $\rho_1 = (b_i b_j b_k b_l b_m)$, $\rho_2 = (b_i b_j b_l b_m b_k)$, $\rho_3 = (b_i b_j b_m b_k b_l)$, $\rho_4 = (b_i b_k b_l b_j b_m)$, $\rho_5 = (b_i b_l b_m b_j b_k)$, $\rho_6 = (b_i b_l b_j b_k b_m)$, $\rho_7 = (b_i b_k b_m b_j b_l)$ e $\rho_8 = (b_i b_l b_j b_m b_k)$. Assim compomos os sistemas de rotações genéricos, $R_1 = [\omega, \rho_1]$, $R_2 = [\omega, \rho_2]$, $R_3 = [\omega, \rho_3]$, $R_4 = [\omega, \rho_4]$, $R_5 = [\omega, \rho_5]$, $R_6 = [\omega, \rho_6]$, $R_7 = [\omega, \rho_7]$ e $R_8 = [\omega, \rho_8]$.

Os sistemas de rotações do tipo R_1 estão associado a um mesmo padrão de emparelhamento de P_{10}, pois o mergulho induzido tem uma única face cujo passeio de fronteira tem comprimento dez. De fato, considerando H_2 com o sistema de rotações genérico R_1, determinamos o passeio de fronteira associado, a menos de escolha do vértice e aresta inicial. Se fixarmos v_1 e b_i como vértice e aresta inicial respectivamente, obtemos o passeio:

$$W_1 := v_1\, b_i\, v_2\, b_j\, v_1\, b_k\, v_2\, b_l\, v_1\, b_m\, v_2\, b_i\, v_1\, b_j\, v_2\, b_k\, v_1\, b_l\, v_2\, b_m.$$

Desse passeio obtemos o diagrama de emparelhamento apresentado na Figura 4.30. Dois lados desse polígono são equivalentes se seus índices correspondem às posições de aparição de uma mesma aresta do grafo H_2 no passeio de fronteira W_1.

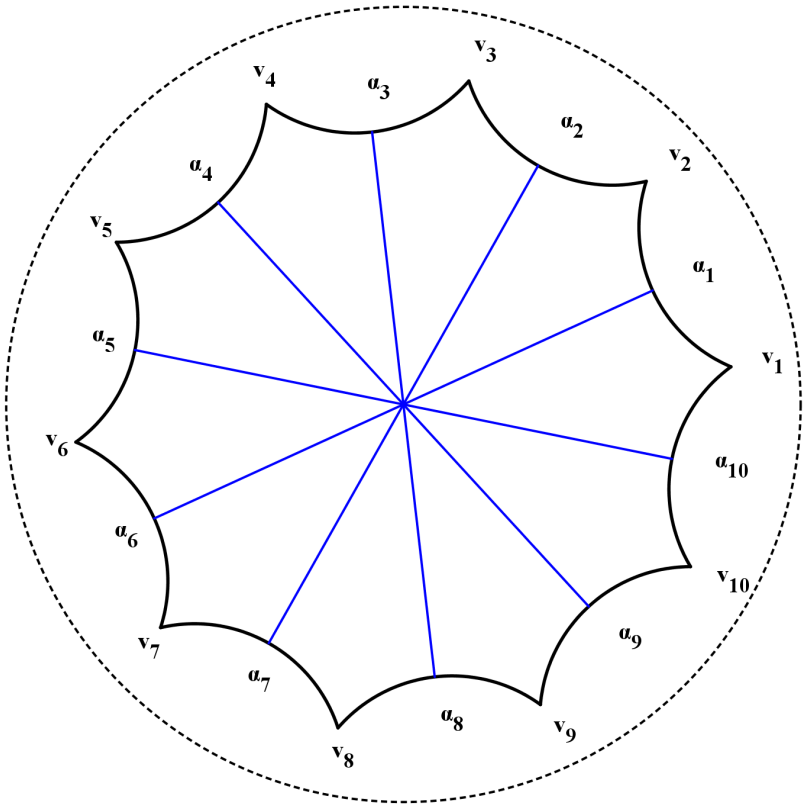

Figura 4.30: Emparelhamento de P_{10} associado a $(H_2)_{R_1}$.

Os sistemas de rotações da forma R_2, R_3, R_4, R_5 e R_6 estão associados a um mesmo padrão de emparelhamento de P_{10} apresentado na Figura 4.31. Com efeito, considere o automorfismo (genérico) $h : H_2 \longrightarrow H_2$, dado por,

$$h = (h_V, h_A); \qquad h_V = \begin{pmatrix} v_1 \; v_2 \\ v_1 \; v_2 \end{pmatrix} \qquad h_A = \begin{pmatrix} b_i \; b_j \; b_k \; b_l \; b_m \\ b_l \; b_m \; b_i \; b_j \; b_k \end{pmatrix}.$$

Temos que, os sistemas R_2, R_3, R_4, R_5 e R_6 pertencem a uma mesma órbita, pois $(R_2)_h = R_5$, $(R_2)_{h \circ h} = R_6$, $(R_2)_{h \circ h \circ h} = R_4$, $(R_2)_{h \circ h \circ h \circ h} = R_3$ e pelo Teorema 4.5, induzem representações poligonais equivalentes.

Fixando H_2 com o sistema de rotações genérico $R_2 = [\omega, \rho_2]$ e tomando v_1 e b_i como vértice e aresta inicial respectivamente, obtemos o passeio de fronteira,

$$W_2 := v_1 \, b_i \, v_2 \, b_j \, v_1 \, b_k \, v_2 \, b_i \, v_1 \, b_j \, v_2 \, b_l \, v_1 \, b_m \, v_2 \, b_k \, v_1 \, b_l \, v_2 \, b_m.$$

Desse passeio obtemos o diagrama de emparelhamento ilustrado na Figura 4.31.

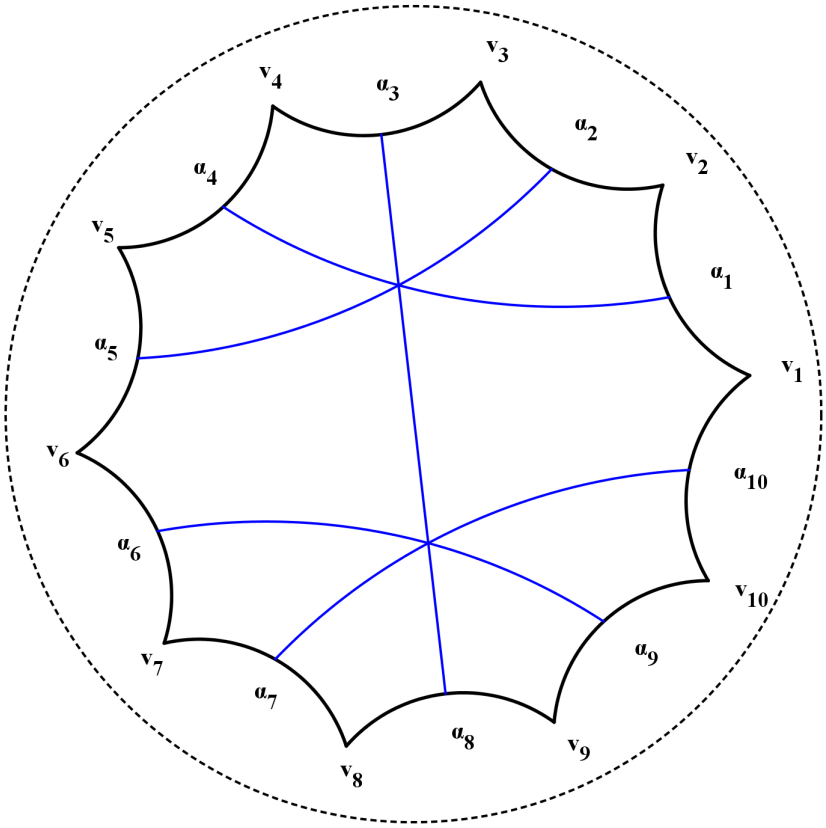

Figura 4.31: Emparelhamento de P_{10} associado a $(H_2)_{R_2}$.

Por fim, os sistemas de rotações da forma R_7 e R_8 estão associados a um mesmo padrão de emparelhamento de P_{10}, apresentado na Figura 4.32. Note que $R_8 = (R_7)_g$, o sistema de rotações induzido pelo automorfismo,

$$g = (g_V, g_A); \qquad g_V = \begin{pmatrix} v_1 \; v_2 \\ v_2 \; v_1 \end{pmatrix} \qquad g_A = \begin{pmatrix} b_i \; b_j \; b_k \; b_l \; b_m \\ b_l \; b_j \; b_m \; b_k \; b_i \end{pmatrix}.$$

e pelo Teorema 4.5, R_7 e R_8 estão associados a uma mesma representação poligonal.

Fixando H_2 com sistema de rotações R_7 obtemos o passeio W_3 dado por:

$$W_3 := v_1 \, b_i \, v_2 \, b_k \, v_1 \, b_l \, v_2 \, b_i \, v_1 \, b_j \, v_2 \, b_l \, v_1 \, b_m \, v_2 \, b_j \, v_1 \, b_k \, v_2 \, b_m,$$

do qual obtemos o diagrama de emparelhamento da Figura 4.32.

Logo, os 192 sistemas de rotações de H_2 estão associados a três padrões de emparelhamento de P_{10} e o resultado segue.

■

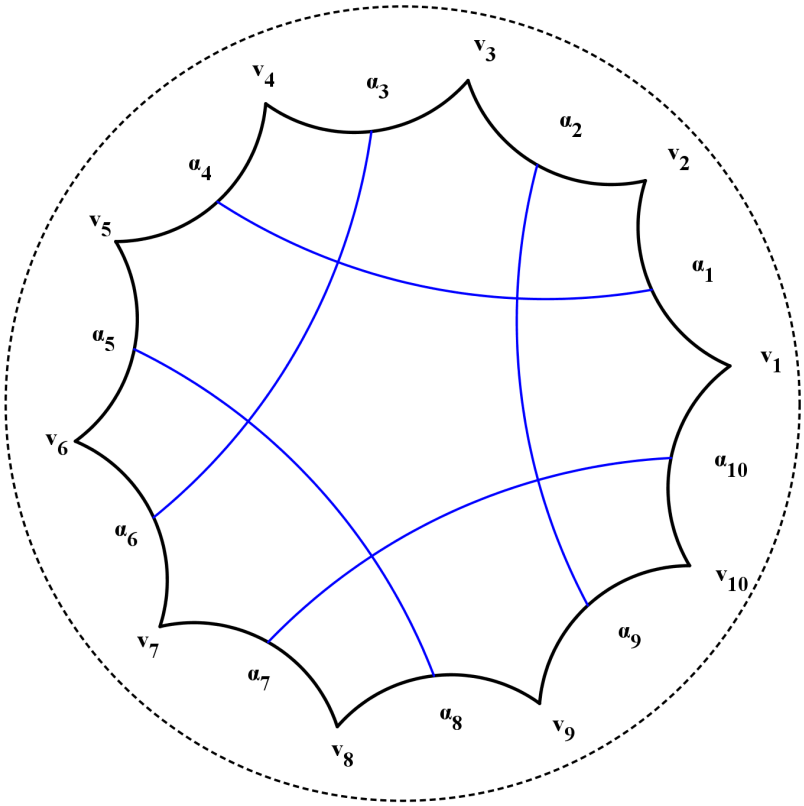

Figura 4.32: Emparelhamento de P_{10} associado a $(H_2)_{R_7}$.

Tomamos agora o grafo H_3 o qual designamos a rotulagem apresentada na Figura 4.33.

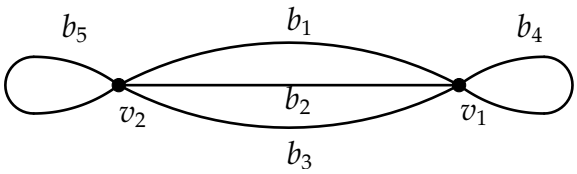

Figura 4.33: Rotulação de H_3.

O vértice v_1 possui 12 rotações distintas, assim como o vértice v_2. Dessa forma, H_3 possui $12 \times 12 = 144$ sistemas de rotações. Mostraremos que desses sistemas obtemos dois, e somente dois, padrões de emparelhamento para P_{10}.

Proposição 4.12. *H_3 está associado a dois, e somente dois, padrões de emparelhamento de P_{10}, a menos de imagem espelho (representações equivalentes).*

Assim como na demonstração da Proposição 4.10 buscamos mergulhos de H_3 com uma única face. Por isso descartaremos os sistemas de rotações que induzem mergulhos com mais de uma face.

Inicialmente descartamos sistemas de rotações que induzem mergulhos com pelo menos uma face cujo passeio de fronteira tenha comprimento um. Tais sistemas mantém repetições de laços próximas uma vez que o passeio de fronteira é constituído por uma única aresta. Como v_1 é base de um único laço, 6 de suas rotações, mantém as repetições desse laço próximas. O mesmo ocorre com o vértice v_2.

Nos resta então analisar 6 rotações para cada vértice, que pelo princípio multiplicativo dão origem a 36 sistemas de rotações para H_3. De maneira explícita temos o conjunto das 6 rotações de v_1 dado por:

$$\mathcal{R}_{v_1} = \{\delta_1, \ldots, \delta_6\},$$

onde $\delta_1 = (b_1b_2b_4b_3b_4)$, $\delta_2 = (b_1b_3b_4b_2b_4)$, $\delta_3 = (b_1b_4b_2b_3b_4)$, $\delta_4 = (b_1b_4b_2b_4b_3)$, $\delta_5 = (b_1b_4b_3b_2b_4)$ e $\delta_6 = (b_1b_4b_3b_4b_2)$. E o conjunto das 6 rotações de v_2 dado por:

$$\mathcal{R}_{v_2} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_6\},$$

onde $\gamma_1 = (b_1b_2b_5b_3b_5)$, $\gamma_2 = (b_1b_3b_5b_2b_5)$, $\gamma_3 = (b_1b_5b_2b_3b_5)$, $\gamma_4 = (b_1b_5b_2b_5b_3)$, $\gamma_5 = (b_1b_5b_3b_2b_5)$ e $\gamma_6 = (b_1b_5b_3b_5b_2)$.

Determinaremos o conjunto das órbitas desses elementos com respeito a aplicação,

$$\begin{array}{rccc} \beta: & Aut\,(H_3) \times \mathcal{H}_3 & \longrightarrow & \mathcal{H}_3 \\ & (g, R) & \longmapsto & R_g \end{array}, \tag{4.1.13}$$

onde $\mathcal{H}_3$ é o conjunto dos sistemas de rotação de H_3 e R_g o sistema de rotações induzido por g.

Explorando as simetrias de H_3 obtemos,

$$Aut\,(H_3) = \langle f, g, h \rangle,$$

com

$$f = (f_V, f_A); \qquad f_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \qquad f_A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b_1 & b_3 & b_2 & b_4 & b_5 \end{pmatrix};$$

$$g = (g_V, g_A); \qquad g_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \qquad g_A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b_2 & b_3 & b_1 & b_4 & b_5 \end{pmatrix};$$

$$h = (h_V, h_A); \qquad h_V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} \qquad h_A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_5 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Consideremos a ação da aplicação α_g, definida em (4.1.5), sobre o conjunto das rotações de cada vértice.

α_g	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_5 $(b_1b_4b_3b_2b_4)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$
Id	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_5 $(b_1b_4b_3b_2b_4)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$
f (b_2b_3)	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_5 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$
h $(b_1b_2b_3)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_5 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$
$h\circ h$ $(b_1b_3b_2)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_5 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$
$f\circ h$ (b_1b_3)	δ_5 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$
$h\circ f$ (b_1b_2)	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_5 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$
k (b_4b_5)	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_5 $(b_1b_5b_3b_2b_5)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$
$k\circ f$ $(b_4b_5)(b_2b_3)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_5 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$
$k\circ h$ $(b_4b_5)(b_1b_2b_3)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_5 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$
$k\circ(h\circ h)$ $(b_4b_5)(b_1b_3b_2)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_5 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$
$k\circ(f\circ h)$ $(b_4b_5)(b_1b_3)$	γ_5 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$
$k\circ(h\circ f)$ $(b_4b_5)(b_1b_2)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_5 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$

Tabela 4.14: Aplicação α_g sobre δ_i.

α_g	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_5 $(b_1b_5b_3b_2b_5)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$
Id	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_5 $(b_1b_5b_3b_2b_5)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$
f (b_2b_3)	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_5 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$
h $(b_1b_2b_3)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_5 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$
$h\circ h$ $(b_1b_3b_2)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_5 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$
$f\circ h$ (b_1b_3)	γ_5 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$
$h\circ f$ (b_1b_2)	γ_6 $(b_1b_5b_3b_5b_2)$	γ_3 $(b_1b_5b_2b_3b_5)$	γ_2 $(b_1b_3b_5b_2b_5)$	γ_5 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$	γ_4 $(b_1b_5b_2b_5b_3)$	γ_1 $(b_1b_2b_5b_3b_5)$
k (b_4b_5)	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_5 $(b_1b_4b_3b_2b_4)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$
$k\circ f$ $(b_4b_5)(b_2b_3)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_5 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$
$k\circ h$ $(b_4b_5)(b_1b_2b_3)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_5 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$
$k\circ(h\circ h)$ $(b_4b_5)(b_1b_3b_2)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_5 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$
$k\circ(f\circ h)$ $(b_4b_5)(b_1b_3)$	δ_5 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$
$k\circ(h\circ f)$ $(b_4b_5)(b_1b_2)$	δ_6 $(b_1b_4b_3b_4b_2)$	δ_3 $(b_1b_4b_2b_3b_4)$	δ_2 $(b_1b_3b_4b_2b_4)$	δ_5 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$	δ_4 $(b_1b_4b_2b_4b_3)$	δ_1 $(b_1b_2b_4b_3b_4)$

Tabela 4.15: Aplicação α_g sobre γ_i.

Daí obtemos as órbitas para cada um dos 36 sistemas de rotações dadas por:

$$O_{[\delta_1,\gamma_1]} = \Big\{[\delta_1,\gamma_1],\ [\delta_2,\gamma_2],\ [\delta_3,\gamma_3],\ [\delta_4,\gamma_4],\ [\delta_5,\gamma_5],\ [\delta_6,\gamma_6]\Big\};$$

$$O_{[\delta_1,\gamma_2]} = \Big\{[\delta_1,\gamma_2],\ [\delta_2,\gamma_1],\ [\delta_3,\gamma_6],\ [\delta_4,\gamma_5],\ [\delta_5,\gamma_4],\ [\delta_6,\gamma_3]\Big\};$$

$$\begin{aligned} O_{[\delta_1,\gamma_3]} = \Big\{&[\delta_1,\gamma_3],\ [\delta_2,\gamma_5],\ [\delta_3,\gamma_4],\ [\delta_4,\gamma_1],\ [\delta_5,\gamma_6],\ [\delta_6,\gamma_2],\\ &[\delta_3,\gamma_1],\ [\delta_5,\gamma_2],\ [\delta_4,\gamma_3],\ [\delta_1,\gamma_4],\ [\delta_6,\gamma_5],\ [\delta_2,\gamma_6]\Big\}; \end{aligned}$$

$$O_{[\delta_1,\gamma_5]} = \Big\{[\delta_1,\gamma_5],\ [\delta_2,\gamma_3],\ [\delta_3,\gamma_2],\ [\delta_4,\gamma_6],\ [\delta_5,\gamma_1],\ [\delta_6,\gamma_4]\Big\};$$

$$O_{[\delta_1,\gamma_6]} = \Big\{[\delta_1,\gamma_6],\ [\delta_2,\gamma_4],\ [\delta_3,\gamma_5],\ [\delta_4,\gamma_2],\ [\delta_5,\gamma_3],\ [\delta_6,\gamma_1]\Big\}.$$

Os sistemas de rotações da órbita $O_{[\delta_1,\gamma_1]}$ não induzem mergulhos com uma única face, assim como os sistemas de rotações da órbita $O_{[\delta_1,\gamma_6]}$. Os sistemas de rotações das órbitas $O_{[\delta_1,\gamma_2]}$ e $O_{[\delta_1,\gamma_5]}$ estão associados a representações poligonais equivalentes, uma vez que $[\delta_1,\gamma_5]$ corresponde ao sistema de rotações obtido de $[\delta_6,\gamma_3] \in O_{[\delta_1,\gamma_2]}$ refletindo a rotação de cada vértice. Esta representação poligonal induz um padrão de emparelhamento para P_{10} apresentado na Figura 4.35. Por fim, os elementos da órbita $O_{[\delta_1,\gamma_3]}$ induzem mergulho com uma única face e estão associados ao padrão de emparelhamento apresentado na Figura 4.37. Dessa forma H_3 está associado a dois, e somente dois, padrões de emparelhamento de P_{10}.

■

Designando o sistema de rotações $R_1 = [\delta_1,\gamma_2]$, onde $\delta_1 = (b_1b_2b_4b_3b_4)$ e $\gamma_2 = (b_1b_3b_5b_2b_5)$ obtemos o passeio de fronteira ilustrado sobre H_3 na Figura 4.34.

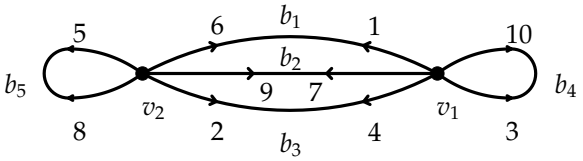

Figura 4.34: Passeio referente a $(H_3)_{R_1}$.

v_1.	b_1	b_2	b_4	b_3	b_4
v_2.	b_1	b_3	b_5	b_2	b_5

Tabela 4.16: Tabela de Rotação de H_3.

Desse passeio obtemos o quinto padrão de emparelhamento de P_{10} representado na Figura 4.35.

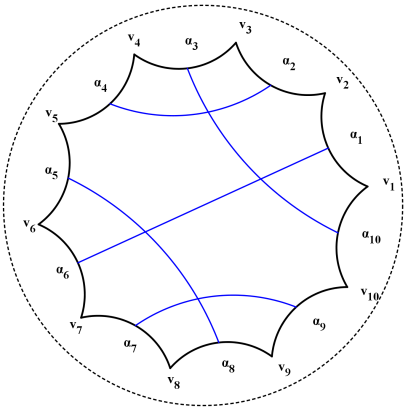

Figura 4.35: Emparelhamento de P_{10} associado a $(H_3)_{R_1}$.

Agora designando o sistema de rotações $R_2 = [\delta_1, \gamma_3]$ obtêm-se o passeio de fronteira descrito sobre o grafo H_3 na Figura 4.36.

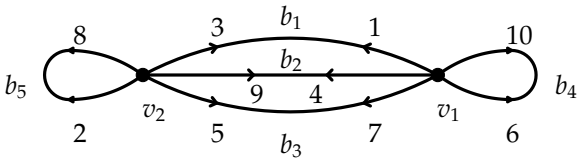

Figura 4.36: Passeio referente a $(H_3)_{R_2}$.

v_1.	b_1	b_2	b_4	b_3	b_4
v_2.	b_1	b_3	b_5	b_2	b_5

Tabela 4.17: Tabela de Rotação de H_3.

Deste passeio obtemos a identificação do sexto padrão de emparelhamento de P_{10} apresentado na Figura 4.37.

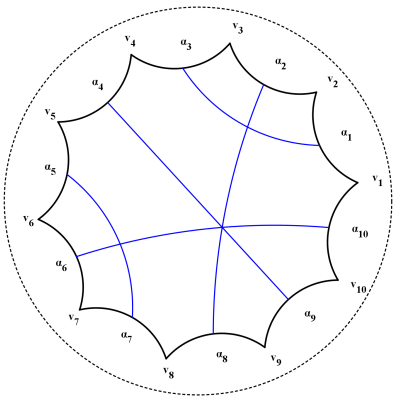

Figura 4.37: Emparelhamento de P_{10} associado a $(H_3)_{R_2}$.

As proposições dessa subseção nos possibilita afirmar que existem 6 padrões de emparelhamento de P_8 associados a grafos 5-regulares.

4.1.3 Emparelhamentos para P_8

Consideremos o grafo B_4 e vejamos que ele está associado a quatro padrões de emparelhamento de P_8.

Proposição 4.13. *B_4 está associado a quatro, e somente quatro, padrões de emparelhamento de P_8, a menos de imagem espelho (representações equivalentes).*

Como B_4 possui um único vértice v e todas suas arestas são laços, o passeio de fronteira de toda face de mergulho de B_4 tem v como canto. Em particular, se o mergulho tem uma única face F, a subsequência dos vértice extraída do passeio de fronteira de F é constituída por repetições de v. Dessa forma, nos limitamos a expressar a subsequência das arestas do passeio de fronteira de F. As ordens de aparição de uma aresta a_i na sequência de arestas satisfazem as seguintes condições:

(a) repetições de uma aresta não aparecem de forma consecutiva;

(b) se um laço a_i aparece na n-ésima e na m-ésimas posições (supondo $n < m + 1$), denotamos este fato por $\{n, m\}_{a_i}$, então nenhum outro laço aparece nas posições $\{n + 1, m - 1\}$ e $\{n - 1, m + 1\}$.

A condição (a) exclui a possibilidade de se ter uma face com passeio de fronteira de comprimento um. Já a condição (b) exclui passeios sobre o grafo que não provêm de algum sistema de rotações de B_4. Feitas essas considerações temos as seguintes possibilidades de posicionamento da primeira aresta de B_4 (digamos a_i), a menos de rotulação: $\{1, 3\}_{a_i}$; $\{1, 4\}_{a_i}$; $\{1, 5\}_{a_i}$; $\{1, 6\}_{a_i}$; $\{1, 7\}_{a_i}$. Agora, obedecendo as condições (a) e (b) e observando a distribuição da primeira aresta, temos as possibilidades para a segundo laço (digamos a_j).

1. $\{1, 3\}_{a_i}$ e $\{2, 4\}_{a_j}$; $\{1, 3\}_{a_i}$ e $\{2, 5\}_{a_j}$; $\{1, 3\}_{a_i}$ e $\{2, 6\}_{a_j}$; $\{1, 3\}_{a_i}$ e $\{2, 7\}_{a_j}$; $\{1, 3\}_{a_i}$ e $\{2, 8\}_{a_j}$.

2. $\{1, 4\}_{a_i}$ e $\{2, 5\}_{a_j}$; $\{1, 4\}_{a_i}$ e $\{2, 6\}_{a_j}$; $\{1, 4\}_{a_i}$ e $\{2, 7\}_{a_j}$; $\{1, 4\}_{a_i}$ e $\{2, 8\}_{a_j}$;

3. $\{1, 5\}_{a_i}$ e $\{2, 6\}_{a_j}$; $\{1, 5\}_{a_i}$ e $\{2, 7\}_{a_j}$; $\{1, 5\}_{a_i}$ e $\{2, 8\}_{a_j}$;

4. $\{1, 6\}_{a_i}$ e $\{2, 4\}_{a_j}$; $\{1, 6\}_{a_i}$ e $\{2, 7\}_{a_j}$; $\{1, 6\}_{a_i}$ e $\{2, 8\}_{a_j}$;

5. $\{1, 7\}_{a_i}$ e $\{2, 4\}_{a_j}$; $\{1, 7\}_{a_i}$ e $\{2, 5\}_{a_j}$; $\{1, 7\}_{a_i}$ e $\{2, 8\}_{a_j}$.

Procedendo de forma análoga determinamos as ordens de aparição da terceira aresta (digamos a_k) e consequentemente as da quarta aresta (a_l). Assim obtém-se 21 maneiras de se compor a subsequência das arestas. Dessas identificações obtemos

quatro passeios distintos sobre o grafo B_4 a menos de escolha da aresta inicial, os quais explicitamos na Figura 4.1.3.

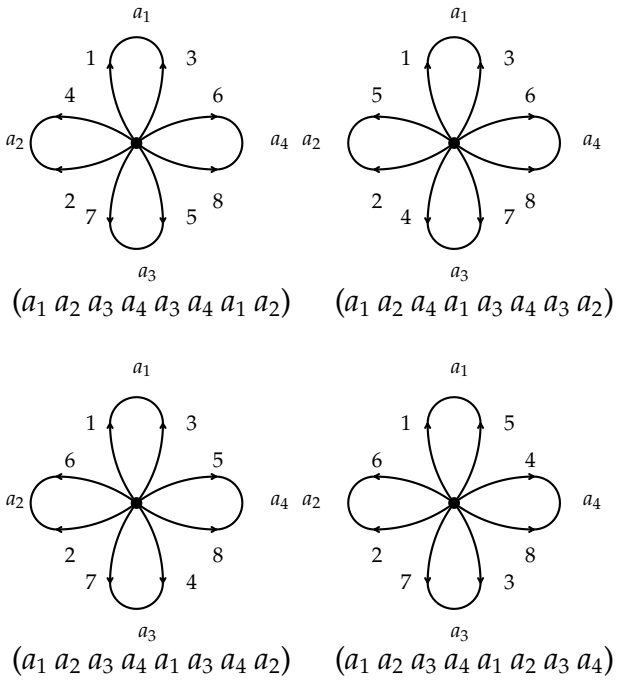

Figura 4.38: Passeios sobre B_4.

Assim obtemos os seguintes padrões de emparelhamento para P_8, expressos na Figura 4.39.

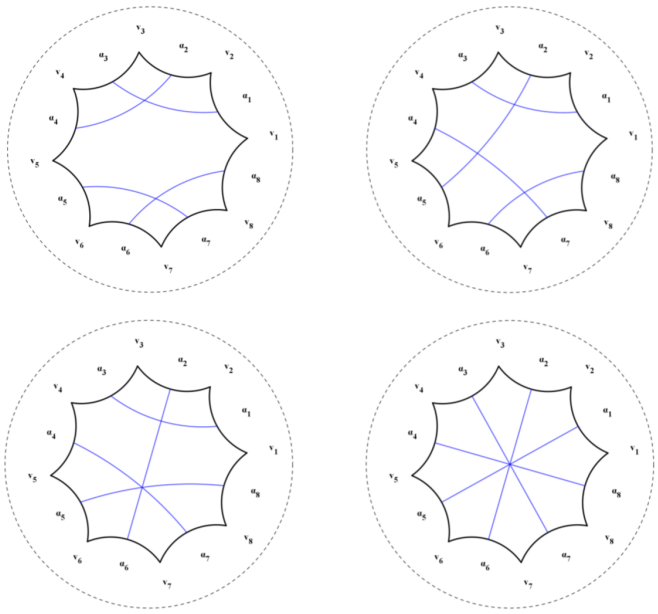

Figura 4.39: Emparelhamentos de P_8.

■

Dessa forma, existem essencialmente 4 padrões de emparelhamento distintos para P_8, provenientes de mergulhos de B_4 em uma superfície compacta e orientável de gênero 2.

Encerramos essa seção enunciando o resultado provado em [13] sobre os emparelhamentos associados a grafos 3-regulares cuja prova pode ser consultada em [13] ou em [24].

Teorema 4.14. *Existem, a menos de imagem espelho,* 8 *maneira se emparelhar arestas de um polígono P_{18}, com* 18 *lados, de forma que a superfície correspondente S é compacta orientável de gênero* 2*, e o grafo induzido, formado pelo bordo de P_{18} é* 3*-regular com* 9 *arestas e* 6 *vértices.*

Nos valendo desse resultado e dos emparelhamentos construídos na Subseção 4.1.1 para P_{12}, na Subseção 4.1.2 para P_{10} e na Subseção 4.1.3 para P_8, estabelecemos o seguinte teorema.

Teorema 4.15. *Existem, a menos de reflexões e rotações,* 24 *padrões de emparelhamentos distintos de polígonos regulares de forma que a superfície resultante e compacta e orientável de gênero* 2 *e o grafo induzido pelo bordo de cada polígono é um grafo regular.*

■

Cabe destacarmos que em [8] são apresentados 18 desses emparelhamentos.

4.2 Emparelhamentos Generalizados para P_{8g-4}

Nesta seção construiremos emparelhamentos de arestas para polígonos P_{8g-4}, da tesselação hiperbólica $\{8g-4, 4\}$, utilizando o processo de extensão dos grafos 4-regulares G_1, G_2, G_3 e G_4, explicitados na Figura 4.5. Os emparelhamentos de arestas que construiremos determinam os geradores de um grupo Fuchsiano Γ tal que o espaço orbital $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ seja uma uma superfície compacta e orientável de gênero g.

Note que P_{12} é um polígono da tesselação $\{8g-4, 4\}$, com $g = 2$. Podemos descrever os emparelhamentos de arestas para P_{20}, $(g = 3)$, de modo análogo ao descrito para P_{12}, explicitando os grafos 4-regulares e sistemas de rotações para cada grafo. No entanto, esse caminho foge do nosso objetivo de determinar emparelhamentos generalizados visto que para valores elevados de g esta tarefa é inviável até mesmo para o emprego de computador.

Desenvolveremos a noção de **generalização de grafos** e de sistemas de rotações para estes, de modo a obter mergulhos destes grafos em uma superfície compacta e orientável de gênero g com uma única face e com isso obtemos emparelhamentos de P_{8g-4}.

Observemos que para um polígono fundamental P_{8g-4}, cujo bordo é identificado com o passeio de fronteira da única face do mergulho unicelular de um grafo G, temos do Teorema 3.1 e da Equação 4.1.1 que o grafo G, 4-regular, tem $4g-2$ arestas e $2g-1$ vértices. Assim, para um polígono com $P_{8(g+k)-4}$ temos grafos 4-regulares com $4(g+k)-2$ arestas e $2(g+k)-1$ vértices, com $k \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, podemos obter grafos generalizados associados a polígonos da tesselação $\{8g-4, 4\}$ a partir dos grafos dos G_1, G_2, G_3 e G_4, acrescentando $4k$ arestas e $2k$ vértices, mantendo a 4-regularidade. Em outras palavras, determinaremos uma família de grafos 4-regulares $\{G_g\}_{g\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$ tal que G_g é grafo de emparelhamento de P_{8g-4}. Realizamos esta tarefa através de operações sobre os grafos, como a **subdivisão de arestas** e **deleção de arestas**, em seguida aplicando a **fusão** do grafo resultante com as seguintes estruturas.

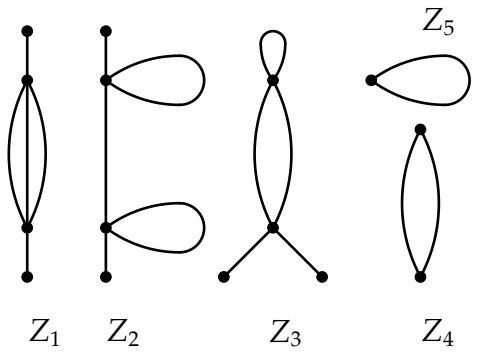

Figura 4.40: Estruturas de Extensão.

Para estendermos qualquer dos grafos G_1, G_2, G_3 ou G_4 manipulando uma única aresta, deleta-se uma de suas arestas e fundi-se o grafo resultante com uma das estrutura, Z_1, Z_2 ou Z_3 definindo-se um isomorfismo entre o subgrafo constituindo pelos extremos da aresta deletada e os extremos de cada estrutura, com a ressalva que, se a aresta deletada é um laço, toma-se duas fusões simultâneas.

Para estendermos qualquer dos grafos manipulando duas arestas distintas, tomamos o grafo obtido por uma subdivisão de cada uma das duas arestas consideradas e definimos a fusão deste grafo com a estruturar Z_4, definindo o isomorfismo entre o subgrafo constituído pelos vértices criados com as subdivisões e os extremos da estrutura Z_4. De modo análogo, procede-se à estrutura Z_5.

Na figura abaixo damos alguns grafos obtidos de G_1 por extensão para $k = 1$. Estes grafos são 4-regulares com 5 vértices e 10 arestas. Buscamos sistemas de rotações para estes grafos de modo que forneçam mergulhos em superfície compacta e orientável cujo complemento é uma única componente conexa. Daí obtemos emparelhamentos de arestas de um polígono com 20 arestas denotado por P_{20}. O processo de extensão

pode ser iterado, dando origem a novos grafos 4-regulares e novos emparelhamentos.

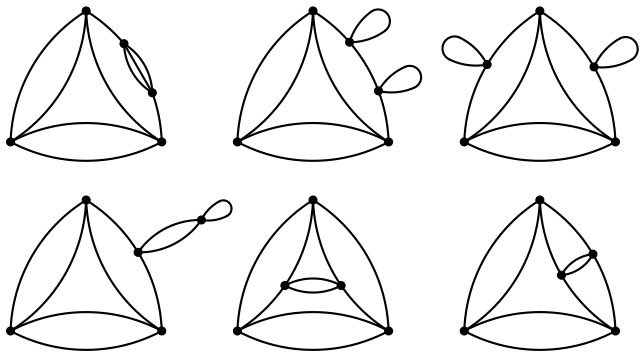

Figura 4.41: Extensões de G_1.

Cabe observar que por este processo de extensão obtêm-se 27 dos 28 grafos existentes, 4-regulares com 5 vértices e 10 arestas. O grafo completo K_5 não pode ser obtido dos grafos G_1, G_2, G_3 e G_4 por estes processos de extensão.

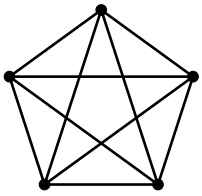

Figura 4.42: Grafo K_5.

Com o intuito de exibirmos emparelhamentos generalizados descreveremos grafos generalizados e sistemas de rotação generalizados para estes grafos. Apresentaremos a ideia de generalização de grafos por fusão de cada um dos grafos G_1, G_2, G_3 ou G_4 com estruturas de "**correntes**", constituídas por n cópias de cada estrutura básica apresentadas na Figura 4.40.

Iniciaremos exibindo a primeira estrutura indutiva de generalização por extensões usando a estrutura Z_1, a qual denominamos Corrente 1, denotada por C_1, ilustrada na Figura 4.43.

Figura 4.43: Corrente 1.

Da estrutura Z_2 obtemos a Corrente 2, denotada por C_2, apresentada na Figura 4.44.

Figura 4.44: Corrente 2.

Procedendo de modo análogo para a estrutura Z_3 determinamos a Corrente 3, simbolicamente denotada por C_3, descrita abaixo.

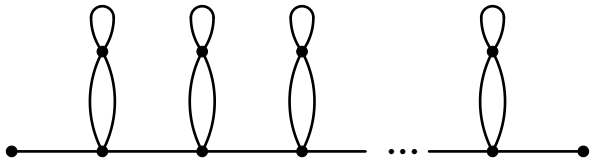

Figura 4.45: Corrente 3.

Com a estrutura Z_4 obtemos a Corrente 4 representada por C_4.

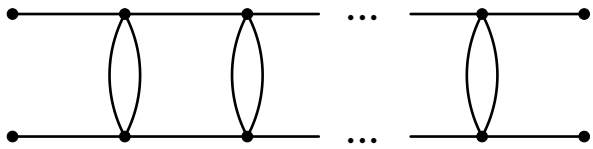

Figura 4.46: Corrente 4.

Por fim, da estrutura Z_5 temos C_5, a Corrente 5 apresentada na Figura 4.47.

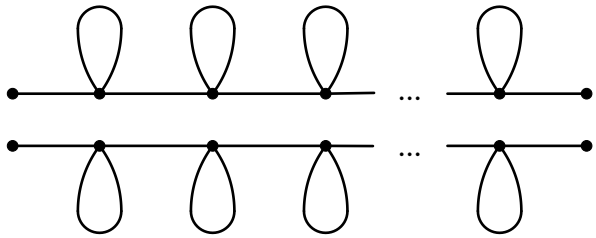

Figura 4.47: Corrente 5.

Destacamos que C_5 difere de C_2 uma vez que C_2 é constituída por k cópias da Estrutura Z_2 e a C_5 por duas componentes, cada uma das quais com k cópias da Estrutura Z_5. Além disso, extensões provenientes de C_2 manipulam uma única aresta do grafo original (deletando) enquanto as obtidas por C_5, manipulam duas arestas distintas por meio de subdivisões.

Estendendo os grafos G_1, G_2, G_3 e G_4 com as estruturas de grafos de corrente apresentadas acima, obtemos grafos 4-regulares com $4g-2$ arestas e $2g-1$ vértices, para

$g \geq 3$. Para isso basta observar que o número de estruturas básicas de cada corrente é dado por $n = g - 2$.

Considere o grafo G_1 apresentado acima. O estendemos para $g = 3$, $g = 4$, $g = 5$ e $g = 6$.

Utilizando C_1 temos os grafos abaixo.

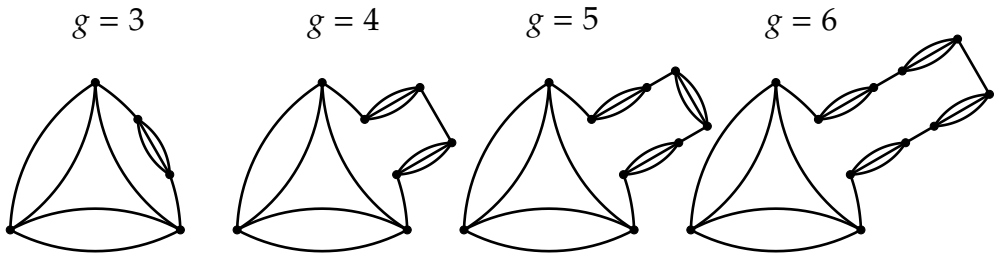

Figura 4.48: 4 primeiras extensões de G_1 utilizando C_1.

Procedendo de forma análoga obtemos as 4 primeiras extensões de G_1 utilizando C_2.

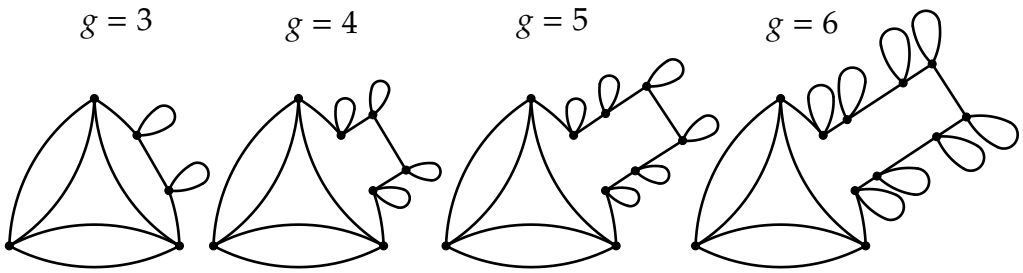

Figura 4.49: 4 primeiras extensões de G_1 utilizando C_2.

Tomando C_3 obtemos os grafos da Figura 4.50.

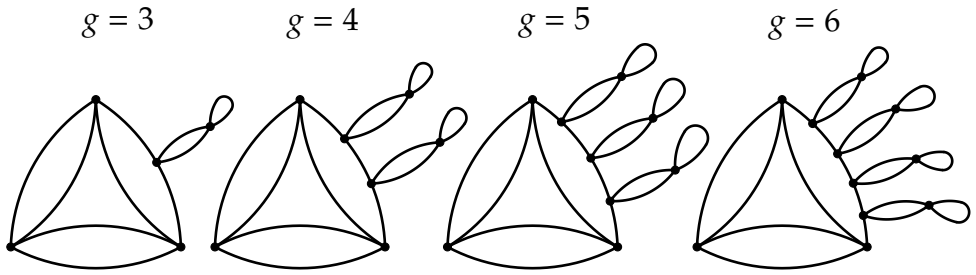

Figura 4.50: 4 primeiras extensões de G_1 utilizando C_3.

Agora, as 4 primeiras extensões de G_1 utilizando C_4 subdividindo arestas paralelas.

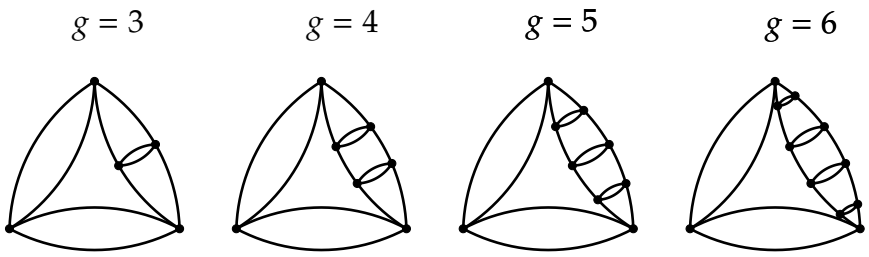

Figura 4.51: 4 primeiras extensões de G_1 por C_4.

De modo análogo, estendemos G_1 utilizando C_4, subdividindo duas arestas não paralelas.

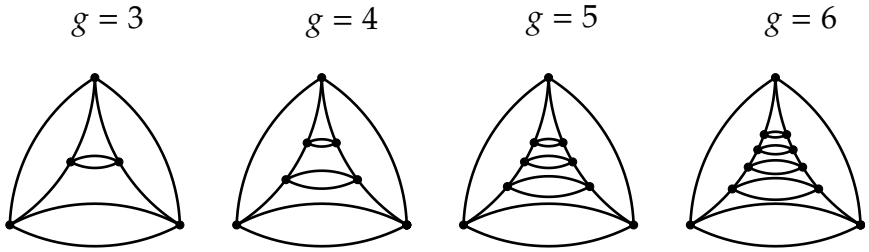

Figura 4.52: 4 primeiras extensões de G_1 por C_4 subdividindo arestas não paralelas.

Por fim, exibiremos as 4 primeiras extensões de G_1 com C_5 subdividindo duas arestas não paralelas.

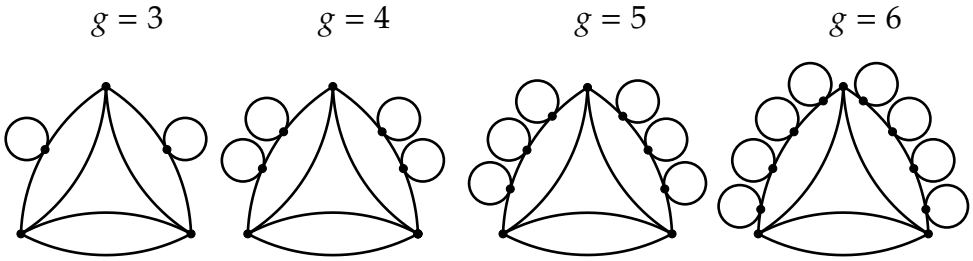

Figura 4.53: 4 primeiras extensões de G_1 utilizando C_5 por arestas não paralelas.

De modo análogo, toma-se extensões de G_1 por C_5 subdivididinho arestas paralelas. Os grafos de G_2, G_3 e G_4 podem ser estendidos da mesma forma.

Passemos a generalização de sistemas de rotação para os grafos estendidos por fusão com as correntes C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5. Para isso descreveremos sistemas de rotação para cada grafo corrente.

Iniciemos por C_1, atribuindo uma rotulação para as arestas e vértices da estrutura básica Z_1.

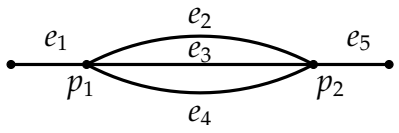

Figura 4.54: Rotulação de Z_1.

Explicitando uma rotação para os vértices p_1 e p_2 da estrutura básica Z_1 obtemos um Sistema de Rotações para a Estrutura Z_1. Esse sistema pode ser levado à Corrente 1. Tal sistema deve permitir que todas as arestas da corrente sejam atravessadas e pertençam a um mesmo passeio. Dessa forma, a menos de rotulagem das arestas paralelas, temos duas possibilidades de rotação para cada estrutura Z_1 da Corrente 1.

A saber, temos o sistema $L_1 = [\theta_1, \sigma_1]$, onde $\theta_1 = (e_1e_4e_3e_2)$ é rotação de p_1 e $\sigma_1 = (e_5e_2e_4e_3)$ é rotação de p_2. Um outro sistema possível é $L_2 = [\theta_2, \sigma_2]$, onde $\theta_2 = (e_1e_2e_3e_4)$ e $\sigma_2 = (e_2e_3e_4e_5)$ são rotações de p_1 e p_2, respectivamente.

Procedendo do mesmo modo em cada estrutura da corrente, designando uma rotação para cada vértice, obtemos um Sistema de Rotações para a corrente C_1. Assim, construímos um sistema de rotações para o cada grafo generalizado, convencionando que cada um dos grafos originais, G_1, G_2, G_3 tenha um dos sistemas rotações que geram mergulho com uma única face tal como os apresentados na seção 4.1. O sistema de rotações para o grafo generalizado preserva a rotação dos vértices dos grafos originais e designa-se um dos sistemas L_1 ou L_2, descritos no parágrafo anterior, para cada estrutura Z_1 de C_1.

Quanto ao grafo G_4, salientamos que ele pode ser estendido como os demais, dando origem a novos grafos 4-regulares. Porém, como G_4 não admite mergulho celular em uma superfície compacta e orientável de gênero dois, deve-se estabelecer sistemas de rotações apropriados para que as extensões de G_4 admita mergulho celular com face única, o que nem sempre é possível. Uma alternativa consiste em tomar extensões de G_4 para $g = 3$ que admitam mergulho celular com face única em superfície compacta e orientável de gênero 3. Daí determina-se o sistema de rotações associado e retoma-se as extensões de cada um grafos por fusão com uma das correntes descritas.

Cabe mencionar que essa construção pode ser aplicada aos grafos G_1, G_2 e G_3 e suas extensões. Por exemplo, podemos tomar as seis primeiras extensões de G_1 pela Corrente 1 e a partir desse ponto tomar extensões utilizando uma corrente distinta.

A seguir explicitamos o passeio associado ao Sistema de Rotações L_1 sobre a Corrente 1. Os parâmetros i e j referem-se ao comprimento do passeio sobre o grafo estendido, antes dos extremos da corrente. O parâmetro n refere-se ao número de estruturas básicas da corrente.

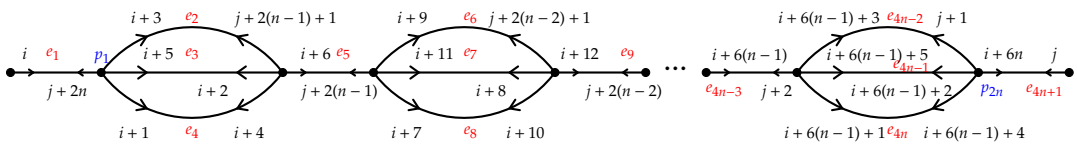

Figura 4.55: Passeio sobre a Corrente 1.

De modo análogo explicitamos o passeio associado ao sistema L_2 sobre C_1.

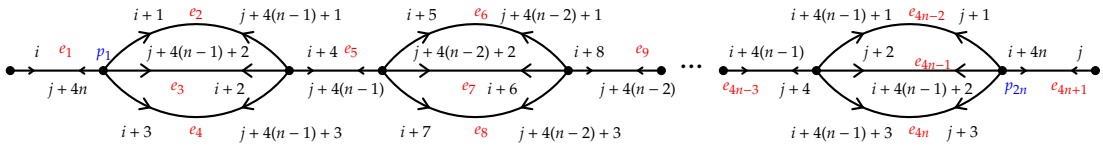

Figura 4.56: Segundo passeio sobre a Corrente 1.

Uma vez estabelecido o sistema de rotações de C_1, nos resta estender os grafos G_1, G_2, G_3 e o grafo G_4 com as devidas ressalvas. A seguir exibiremos as relações de emparelhamento bem como seus diagramas. Comecemos generalizando o grafo G_1 com sistema de rotações $R_1 = [\theta_5, \lambda_1, \sigma_1]$, onde $\theta_5 = (a_1a_6a_3a_4)$, $\lambda_1 = (a_1a_2a_4a_5)$, $\sigma_1 = (a_2a_3a_5a_6)$, apresentado na Figura 4.8. Estendemos G_1 deletando a aresta a_1 e fundindo o grafo resultante $G_1 - a_1$ com a Corrente 1 de modo que e_1 incida com v_1 e e_{4n+1} incida com v_2. Em outras palavras, tomamos o isomorfismo $f : (\{v_1, v_2\}, \emptyset) \longrightarrow (\{v_1, v_2\}, \emptyset)$ entre o subgrafo vazio $(\{v_1, v_2\}, \emptyset)$ de $G_1 - a_1$ e o subgrafo vazio $(\{p_0, p_{2n+1}\}, \emptyset)$ de C_1, tal que $f(v_1) = p_0$ e $f(v_2) = p_{2n+1}$ e a fusão $(G_1 - a_1) *_f C_1$ com respeito a f.

Quanto ao sistema de rotações, a_1 é substituída por e_1 na rotação de v_1 e substituída por e_{4n+1} na rotação de v_2. Prosseguindo o passeio sobre cada extremidade da corrente, observando as rotações de v_1, v_2 e v_3, temos a identificação apresentada no grafo da Figura 4.57.

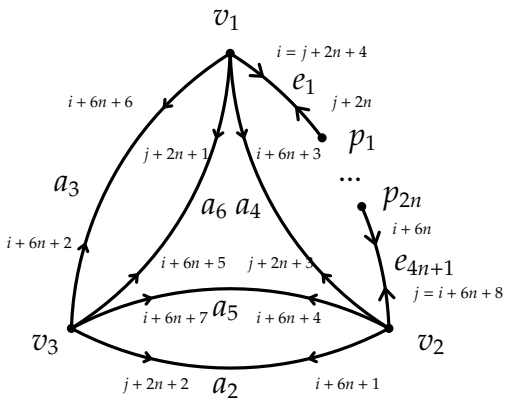

Figura 4.57: Passeio generalizado sobre $(G_1 - a_1) *_f C_1$ da extensão de $(G_1)_{R_1}$.

Destacamos que pode-se começar o passeio em qualquer vértice e qualquer aresta incidente a este. Para obter as identificações basta tomar a congruência módulo $8n+12$, onde $8n+12$ é o comprimento do passeio sobre o grafo generalizado. Com efeito, continuando o passeio pela extremidade e_{4n+1} encontramos a igualdade $j = i + 6n + 8$. Por outro lado, se continuamos o passeio pela extremidade e_1, obtemos $i = j + 2n + 4$, ou seja, $j = i - 2n - 4$. É de imediata verificação que $i + 6n + 8 \equiv i - 2n - 4 \pmod{8n + 12}$.

Com as identificações do passeio sobre o grafo estabelecidas, obtemos as relações de emparelhamento do polígono P_{8g-4} descritas abaixo, onde $g = n + 2$.

$$\alpha_{i+6n+1} \longrightarrow \alpha_{j+2n+2} \tag{4.2.1}$$

$$\alpha_{i+6n+2} \longrightarrow \alpha_{i+6n+6} \tag{4.2.2}$$

$$\alpha_{i+6n+3} \longrightarrow \alpha_{j+2n+3} \tag{4.2.3}$$

$$\alpha_{i+6n+4} \longrightarrow \alpha_{i+6n+7} \tag{4.2.4}$$

$$\alpha_{i+6n+5} \longrightarrow \alpha_{j+2n+1} \tag{4.2.5}$$

$$\alpha_{i+6k} \longrightarrow \alpha_{j+2(n-k)}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.6}$$

$$\alpha_{i+6k+1} \longrightarrow \alpha_{i+6k+4}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.7}$$

$$\alpha_{i+6k+2} \longrightarrow \alpha_{i+6k+5}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.8}$$

$$\alpha_{i+6k+3} \longrightarrow \alpha_{j+2(n-k)-1}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.9}$$

Agora, designando um vértice e uma aresta, podemos determinar os parâmetros i e j. De fato, podemos começar o passeio sobre o grafo estendido no vértice v_1 pela aresta e_1, remanescente da aresta a_1, ou seja, $i = 1$ e atravessar toda a corrente até chegar sobre a aresta e_{4n+1}, segunda remanescente da aresta a_1. Nessa etapa teremos um passeio de comprimento $1 + 6n$. Prosseguindo o passeio determinamos $j = 1 + 6n + 8$.

Determinaremos os cinco primeiros padrões de emparelhamento associados a estas extensões de G_1. Fixando $n = 0$ segue das relações (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4), (4.2.5) e (4.2.6) os seguintes pares de arestas respectivamente: $\{\alpha_2, \alpha_{11}\}$, $\{\alpha_3, \alpha_7\}$, $\{\alpha_4, \alpha_{12}\}$, $\{\alpha_5, \alpha_8\}$, $\{\alpha_6, \alpha_{10}\}$ e $\{\alpha_1, \alpha_9\}$ do polígono P_{12} que corresponde ao emparelhamento obtido de $(G1)_{R_1}$ apresentado na Figura 4.9.

Tomando $n = 1$, temos $g = 3$ e um polígono P_{20} com 20 lados. Obtemos pelas relações (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) e (4.2.5) os pares de arestas emparelhadas: $\{\alpha_8, \alpha_{19}\}$, $\{\alpha_9, \alpha_{13}\}$, $\{\alpha_{10}, \alpha_{20}\}$, $\{\alpha_{11}, \alpha_{14}\}$ e $\{\alpha_{12}, \alpha_{18}\}$ respectivamente. Pela relação (4.2.6), as identificações: $\{\alpha_1, \alpha_{17}\}$ e $\{\alpha_7, \alpha_{15}\}$. As relações (4.2.7), (4.2.8) e (4.2.9), nos fornecem respectivamente os pares: $\{\alpha_2, \alpha_5\}$, $\{\alpha_3, \alpha_6\}$ e $\{\alpha_4, \alpha_{16}\}$. Daí segue o diagrama de emparelhamento de um polígono P_{20} exibido na Figura 4.58. Pode-se verificar a existência de cinco ciclos de vértices, ambos de comprimento quatro.

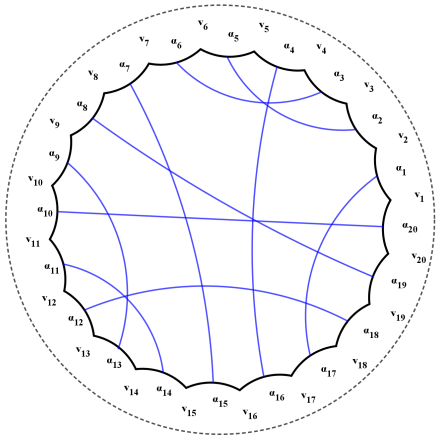

Figura 4.58: Caso $n = 1$.

Fixando $n = 2$, segue que $g = 4$ e o polígono associado com 28 lados, P_{28}. Avaliando as relações (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) e (4.2.5), obtemos os pares de arestas: $\{\alpha_{14}, \alpha_{27}\}$, $\{\alpha_{15}, \alpha_{19}\}$, $\{\alpha_{16}, \alpha_{28}\}$, $\{\alpha_{17}, \alpha_{20}\}$ e $\{\alpha_{18}, \alpha_{26}\}$. Com a expressão (4.2.6), os pares: $\{\alpha_1, \alpha_{25}\}$, $\{\alpha_7, \alpha_{23}\}$ e $\{\alpha_{13}, \alpha_{21}\}$. Com (4.2.7), os pares: $\{\alpha_2, \alpha_5\}$ e $\{\alpha_8, \alpha_{11}\}$. (4.2.8) nos fornece os pares: $\{\alpha_3, \alpha_6\}$ e $\{\alpha_9, \alpha_{12}\}$. Por último, (4.2.9), os pares: $\{\alpha_4, \alpha_{24}\}$ e $\{\alpha_{10}, \alpha_{22}\}$. Assim, obtemos o diagrama de emparelhamento de P_{28} apresentado na Figura 4.59.

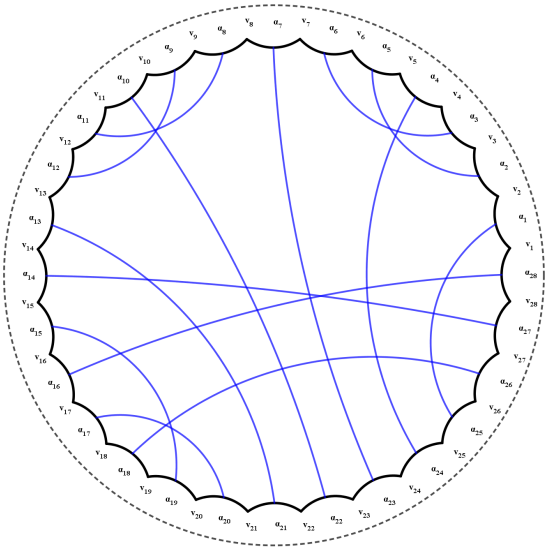

Figura 4.59: Caso $n = 2$.

Para $n = 3$, segue que $g = 5$ e o polígono considerado tem 36 lados, P_{36}. Obtemos pelas funções (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) e (4.2.5) os pares: $\{\alpha_{20}, \alpha_{35}\}$, $\{\alpha_{21}, \alpha_{25}\}$, $\{\alpha_{22}, \alpha_{36}\}$, $\{\alpha_{23}, \alpha_{26}\}$ e $\{\alpha_{24}, \alpha_{34}\}$. Com a função (4.2.6): $\{\alpha_1, \alpha_{33}\}$, $\{\alpha_7, \alpha_{31}\}$, $\{\alpha_{13}, \alpha_{29}\}$ e $\{\alpha_{19}, \alpha_{27}\}$. Com a função (4.2.7) temos os pares: $\{\alpha_2, \alpha_5\}$, $\{\alpha_8, \alpha_{11}\}$ e $\{\alpha_{14}, \alpha_{17}\}$. Pela função (4.2.8): $\{\alpha_3, \alpha_6\}$, $\{\alpha_9, \alpha_{12}\}$ e $\{\alpha_{15}, \alpha_{18}\}$. Por fim, avaliando (4.2.9), os pares: $\{\alpha_4, \alpha_{32}\}$, $\{\alpha_{10}, \alpha_{30}\}$ e $\{\alpha_{16}, \alpha_{28}\}$.

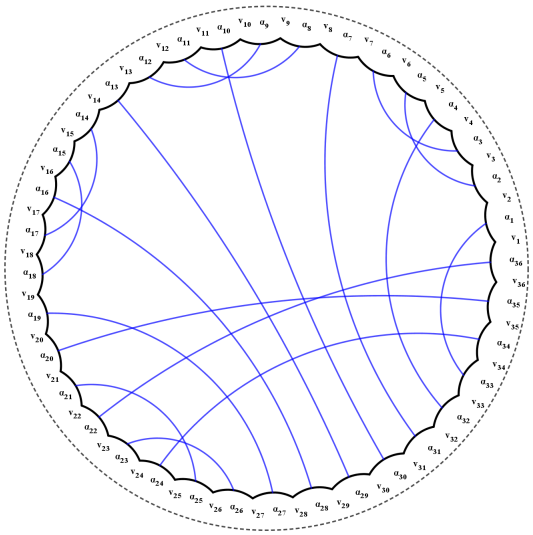

Figura 4.60: Caso $n = 3$.

Fixando $n = 4$, obtemos das expressões (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) e (4.2.5) os pares de aresta emparelhadas de P_{44}: $\{\alpha_{26}, \alpha_{43}\}$, $\{\alpha_{27}, \alpha_{31}\}$, $\{\alpha_{28}, \alpha_{44}\}$, $\{\alpha_{23}, \alpha_{26}\}$, $\{\alpha_{29}, \alpha_{32}\}$ e $\{\alpha_{30}, \alpha_{42}\}$. Com a função (4.2.6) os pares: $\{\alpha_1, \alpha_{41}\}$, $\{\alpha_7, \alpha_{39}\}$, $\{\alpha_{13}, \alpha_{37}\}$, $\{\alpha_{19}, \alpha_{35}\}$ e $\{\alpha_{25}, \alpha_{33}\}$. De (4.2.7) temos os pares: $\{\alpha_2, \alpha_5\}$, $\{\alpha_8, \alpha_{11}\}$, $\{\alpha_{14}, \alpha_{17}\}$ e $\{\alpha_{20}, \alpha_{32}\}$. Segue de (4.2.8): $\{\alpha_3, \alpha_6\}$, $\{\alpha_9, \alpha_{12}\}$, $\{\alpha_{15}, \alpha_{18}\}$ e $\{\alpha_{21}, \alpha_{24}\}$. Por fim, pela função (4.2.9), os pares: $\{\alpha_4, \alpha_{40}\}$, $\{\alpha_{10}, \alpha_{38}\}$, $\{\alpha_{16}, \alpha_{36}\}$ e $\{\alpha_{22}, \alpha_{34}\}$. Assim construímos o diagrama de emparelhamento de P_{36}.

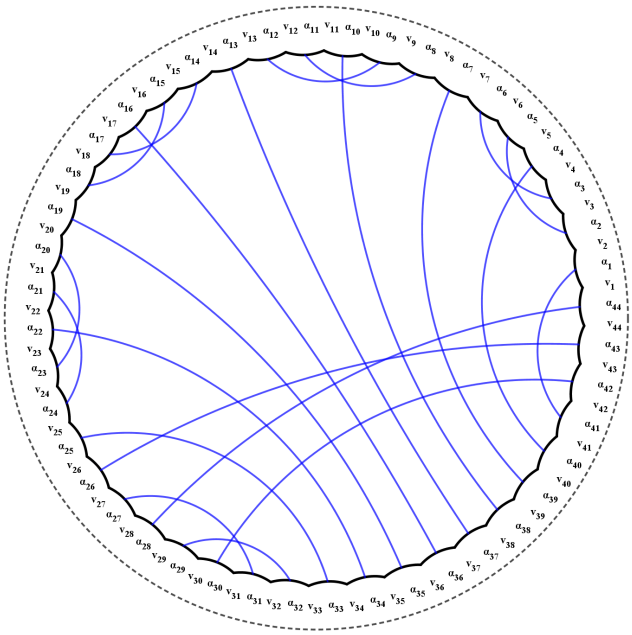

Figura 4.61: Caso $n = 4$.

Novos emparelhamentos generalizados podem ser obtidos utilizando a Corrente 1 com esse mesmo sistema de rotações generalizado e considerando G_1 com sistema de

rotações R_1. Para isso basta escolher uma aresta diferente de a_1 e realizar o processo de extensão descrito. O mesmo se aplica ao tomarmos G_1 com sistema de rotações $R_2 = [\theta_6, \lambda_3, \sigma_3]$.

Pode-se também inverter a incidência das extremidades da corrente de modo que e_1 incida com v_2 e e_{4n+1} incida com v_1 segundo. Com essas adaptações determina-se novas relações entre os parâmetros i e j assim como as funções de emparelhamento. De fato, invertendo as extremidades da Corrente 1 e mantendo as rotações de cada vértice da Corrente 1, obtemos as relações $j = i+6n+4$ e $j = i-2n-8$, onde $i+6n+4 \equiv i-2n-8 \pmod{8n+12}$ e as seguintes relações de emparelhamento das arestas de P_{8n+12}.

$$\alpha_{i+6n+1} \longrightarrow \alpha_{j+2n+5} \tag{4.2.10}$$

$$\alpha_{i+6n+2} \longrightarrow \alpha_{j+2n+1} \tag{4.2.11}$$

$$\alpha_{i+6n+3} \longrightarrow \alpha_{j+2n+3} \tag{4.2.12}$$

$$\alpha_{j+2n+2} \longrightarrow \alpha_{j+2n+6} \tag{4.2.13}$$

$$\alpha_{j+2n+4} \longrightarrow \alpha_{j+2n+7} \tag{4.2.14}$$

$$\alpha_{i+6k} \longrightarrow \alpha_{j+2(n-k)}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.15}$$

$$\alpha_{i+6k+1} \longrightarrow \alpha_{i+6k+4}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.16}$$

$$\alpha_{i+6k+2} \longrightarrow \alpha_{i+6k+5}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.17}$$

$$\alpha_{i+6k+3} \longrightarrow \alpha_{j+2(n-k)-1}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.18}$$

Estendendo o grafo G_1 pela aresta a_2 com a Corrente 1, mantendo as rotações de cada vértice, obtemos dois emparelhamentos generalizados. No primeiro a aresta e_1 incide com v_2 e a aresta e_{4n+1} incide com v_3, expresso pelas funções abaixo, valendo as relações $j = i + 6n + 9$ e $j = i - 2n - 3$, onde $i + 6n + 9 \equiv i - 2n - 3 \pmod{8n + 12}$.

$$\alpha_{i+6n+1} \longrightarrow \alpha_{i+6n+5} \tag{4.2.19}$$

$$\alpha_{i+6n+2} \longrightarrow \alpha_{j+2n+1} \tag{4.2.20}$$

$$\alpha_{i+6n+3} \longrightarrow \alpha_{i+6n+6} \tag{4.2.21}$$

$$\alpha_{i+6n+4} \longrightarrow \alpha_{i+6n+8} \tag{4.2.22}$$

$$\alpha_{i+6n+7} \longrightarrow \alpha_{j+2n+2} \tag{4.2.23}$$

$$\alpha_{i+6k} \longrightarrow \alpha_{j+2(n-k)}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.24}$$

$$\alpha_{i+6k+1} \longrightarrow \alpha_{i+6k+4}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.25}$$

$$\alpha_{i+6k+2} \longrightarrow \alpha_{i+6k+5}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.26}$$

$$\alpha_{i+6k+3} \longrightarrow \alpha_{j+2(n-k)-1}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.27}$$

O segundo é obtido invertendo as extremidades de C_1 de modo que a aresta e_1 incide com v_3 e a aresta e_{4n+1} incide com v_2. Obtém-se as relações, $j = i + 6n + 3$ e $j = i - 2n - 9$, onde $i + 6n + 3 \equiv i - 2n - 9 \pmod{8n + 12}$.

$$\alpha_{j+2n+1} \longrightarrow \alpha_{j+2n+5} \tag{4.2.28}$$

$$\alpha_{j+2n+2} \longrightarrow \alpha_{i+6n+1} \tag{4.2.29}$$

$$\alpha_{j+2n+3} \longrightarrow \alpha_{j+2n+6} \tag{4.2.30}$$

$$\alpha_{j+2n+4} \longrightarrow \alpha_{j+2n+8} \tag{4.2.31}$$

$$\alpha_{2+2n+7} \longrightarrow \alpha_{i+6n+2} \tag{4.2.32}$$

$$\alpha_{i+6k} \longrightarrow \alpha_{j+2(n-k)}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.33}$$

$$\alpha_{i+6k+1} \longrightarrow \alpha_{i+6k+4}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.34}$$

$$\alpha_{i+6k+2} \longrightarrow \alpha_{i+6k+5}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.35}$$

$$\alpha_{i+6k+3} \longrightarrow \alpha_{j+2(n-k)-1}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.36}$$

O mesmo processo pode ser repetido para às demais arestas de G_1, dando origem a novos emparelhamentos generalizados.

O processo também pode ser aplicado aos grafos G_2, G_3. As extensões do grafo G_4 devem ser estudadas a parte, bem como a existência de sistemas de rotações que geram mergulhos com uma única face uma vez que G_4 não é grafo de emparelhamentos para P_{12} conforme a Proposição 4.9.

Agora explicitaremos emparelhamentos generalizados, obtidos de extensões de $(G_1)_{R_1}$ deletando a aresta a_1 e pela fusão com a Corrente 1 com o sistema de rotações generalizado L_2. Tomamos inicialmente a aresta e_1 incidindo com o vértice v_1 e a aresta e_{4n+1} incidente a v_2.

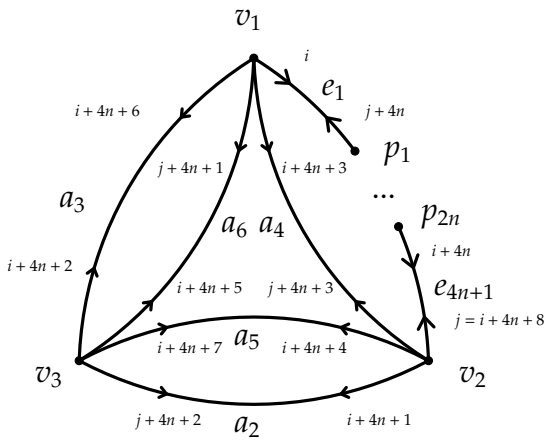

Figura 4.62: Generalização de $(G_1)_{R_1}$ pela Corrente 1 com rotações L_2.

Daí, obtemos as relações $j = i + 4n + 8$ e $j = i - 4n - 4$, onde $i + 4n + 8 \equiv i - 4n - 4 \pmod{8n + 12}$ e as seguintes funções de emparelhamento.

$$\alpha_{i+4n+1} \longrightarrow \alpha_{j+4n+2} \tag{4.2.37}$$

$$\alpha_{i+4n+2} \longrightarrow \alpha_{i+4n+6} \tag{4.2.38}$$

$$\alpha_{i+4n+3} \longrightarrow \alpha_{j+4n+3} \tag{4.2.39}$$

$$\alpha_{i+4n+4} \longrightarrow \alpha_{i+4n+7} \tag{4.2.40}$$

$$\alpha_{i+4n+5} \longrightarrow \alpha_{j+4n+1} \tag{4.2.41}$$

$$\alpha_{i+4k} \longrightarrow \alpha_{j+4(n-k)}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.42}$$

$$\alpha_{i+4k+1} \longrightarrow \alpha_{j+4(n-(k+1))+1}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.43}$$

$$\alpha_{i+4k+2} \longrightarrow \alpha_{j+4(n-(k+1))+2}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.44}$$

$$\alpha_{i+4k+3} \longrightarrow \alpha_{j+4(n-(k+1))+3}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.45}$$

Note que se invertemos as extremidades da corrente, na fusão, obteremos os mesmos padrões de emparelhamento para cada n. Procedendo de modo análogo com os demais grafos determinamos novos emparelhamentos generalizados.

Grafos generalizados por fusão com a Corrente 2 não admitem mergulho unicelular em uma superfície compacta e orientável de gênero $g = n + 2$, $n > 1$. Com efeito, o grafo Corrente 2 com n cópias da estrutura Z_2 possui exatamente $2n$ ciclos disjuntos (laços). Assim, para $n > 1$, $2n \geq n + 2$ valendo a igualdade se, e somente se, $n = 2$. Verifica-se que o grafo generalizado possui pelo menos $2n + 1$ ciclos disjuntos. Dessa forma, qualquer mergulho desse grafo induz pelo menos $2n+1$ curvas fechadas simples disjuntas sobre tal superfície de gênero $n + 2$. Sabe-se nesse caso que o complementar dessas curvas possui mais de uma componente conexa, ou seja, mais de uma face. O mesmo argumento se aplica à Corrente 5.

Dessa forma passemos à Corrente 3. Para compor um sistema de rotações para cada vértice da Corrente 3 analisaremos as possibilidades de rotações para cada a estrutura básica Z_3, com a seguinte rotulação genérica.

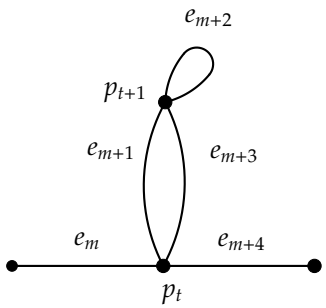

Figura 4.63: Rotulação de Z_3.

O conjunto das rotações possíveis de p_t é, $\mathcal{R}_{p_t} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5 \text{ e } \theta_6\}$, onde $\theta_1 = (e_m e_{m+1} e_{m+3} e_{m+4})$, $\theta_2 = (e_m e_{m+1} e_{m+4} e_{m+3})$, $\theta_3 = (e_m e_{m+3} e_{m+1} e_{m+4})$, $\theta_4 = (e_m e_{m+3} e_{m+4} e_{m+1})$, $\theta_5 = (e_m\ e_{m+4}\ e_{m+1}\ e_{m+3})$ e $\theta_6 = (e_m\ e_{m+4}\ e_{m+3}\ e_{m+1})$. O conjunto das rotações possíveis de p_{t+1} é, $\mathcal{R}_{p_{t+1}} = \{\sigma_1, \sigma_2 \text{ e } \sigma_3\}$, onde $\sigma_1 = (e_{m+1}\ e_{m+2}\ e_{m+2}\ e_{m+3})$, $\sigma_2 = (e_{m+1}\ e_{m+2}\ e_{m+3}\ e_{m+2})$ e $\sigma_3 = (e_{m+1}\ e_{m+3}\ e_{m+2}\ e_{m+2})$.

Comecemos analisando as rotações de p_{t+1}. Afim de que o grafo generalizado pela fusão de um dos grafos G_1, G_2 G_3 ou G_4 com a Corrente 3 admita mergulho com uma única face, nenhum de seus vértices que seja base de algum laço e_j pode possuir rotação da forma $(\ldots\ e_j\, e_j\ \ldots)$. Neste caso, a única rotação para o vértice p_{t+1} que atende esta condição é $\sigma_2 = (e_{m+1}\ e_{m+2}\ e_{m+3}\ e_{m+2})$. Dessa forma, tomamos p_{t+1} com rotação σ_2.

Quanto ao vértice p_t, este possui seis rotações distintas. Designando uma dessas rotações para p_t juntamente com a rotação σ_2 para p_{t+1} compomos seis sistemas de rotações para Z_3 dados por $P_1 = [\theta_1, \sigma_2]$, $P_2 = [\theta_2, \sigma_2]$, $P_3 = [\theta_3, \sigma_2]$, $P_4 = [\theta_4, \sigma_2]$, $P_5 = [\theta_5, \sigma_2]$ e $P_6 = [\theta_6, \sigma_2]$.

Os sistemas P_1, P_3, P_5 e P_6 induzem mesmas identificações sobre a estrutura Z_3, pois a rotação θ_3 é obtida de θ_1 permutando uma as arestas paralelas e_{m+1} e e_{m+3}, um automorfismo de Z_3 que mantém σ_2 invariante. θ_6 é obtida da reflexão de θ_1 e θ_5 é obtida refletindo θ_3 e além disso, σ_2 é invariante por reflexão assim, segue da Proposição 4.2 que as identificações induzidas por esses sistemas de rotações sobre Z_5 são as mesmas a menos de rotulagem de arestas paralelas e reflexão. Usando esse mesmo argumento obtemos que P_2 e P_4 induzem mesmas identificações sobre Z_3.

A seguir exibimos o passeio sobre a Corrente 3, onde cada estrutura Z_3 possui Sistema de Rotações P_1.

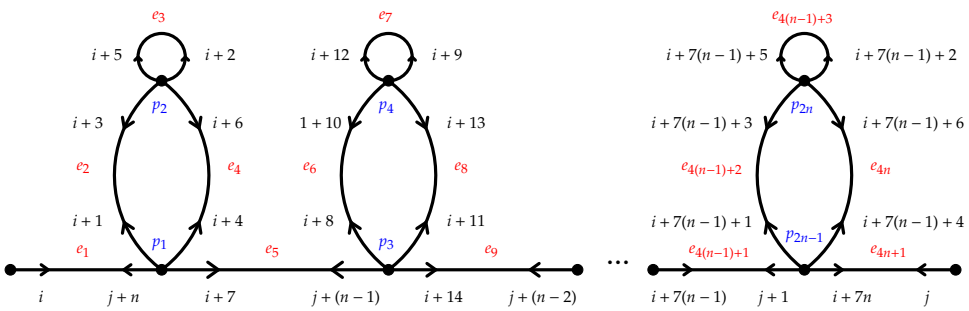

Figura 4.64: Passeio sobre Corrente 3 com sistema P_1.

Procedendo de modo análogo ao descrito para a Corrente 1, tomamos a extensão G_1, pela fusão de $(G_1)_{R_1} - a_1$ com C_3 com Sistema de Rotações P_1 de modo que a aresta e_1 da corrente incida ao vértice v_1 e a aresta e_{4n+1} incida com v_2 . Explicitamos o passeio sobre o grafo generalizado e determinemos os parâmetros i e j bem como as funções de emparelhamento.

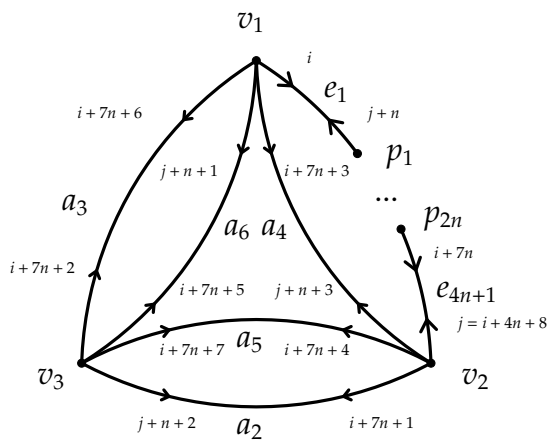

Figura 4.65: Generalização de $(G_1)_{R_1}$ pela Corrente 3 com Sistema de Rotações P_1.

Daí obtemos as relações $j = 1 + 7n + 8$ e $j = i - n - 4$, onde $i + 7n + 8 \equiv i - n - 4 \pmod{8n + 12}$ e as funções de emparelhamento descritas abaixo.

$$\alpha_{i+7n+1} \longrightarrow \alpha_{j+n+2} \tag{4.2.46}$$

$$\alpha_{i+7n+2} \longrightarrow \alpha_{i+7n+6} \tag{4.2.47}$$

$$\alpha_{i+7n+3} \longrightarrow \alpha_{j+n+3} \tag{4.2.48}$$

$$\alpha_{i+7n+4} \longrightarrow \alpha_{i+7n+7} \tag{4.2.49}$$

$$\alpha_{i+7n+5} \longrightarrow \alpha_{j+n+1} \tag{4.2.50}$$

$$\alpha_{i+7k} \longrightarrow \alpha_{j+(n-k)}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.51}$$

$$\alpha_{i+4k+1} \longrightarrow \alpha_{i+7k+3}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.52}$$

$$\alpha_{i+7k+2} \longrightarrow \alpha_{i+7k+5}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.53}$$

$$\alpha_{i+7k+4} \longrightarrow \alpha_{i+7k+6}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.54}$$

Explicitamos o padrão de emparelhamento de P_{8n+12} para o caso $n = 3$ exibido na Figura 4.66.

Agora exibiremos o passeio induzido pelo sistema P_2 sobre a Corrente 3.

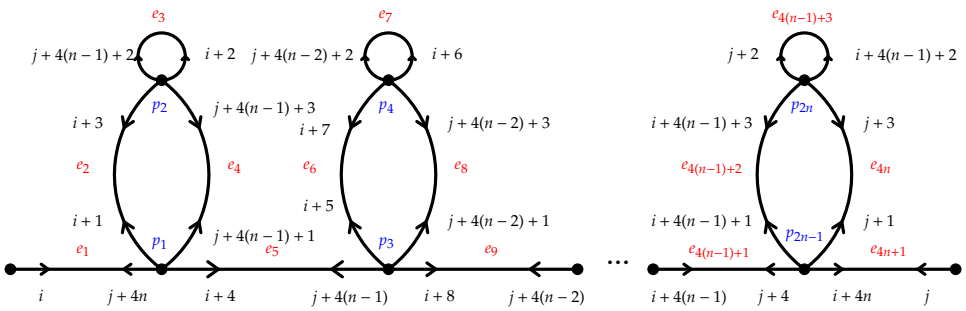

Figura 4.67: Passeio sobre Corrente 3 com sistema P_2.

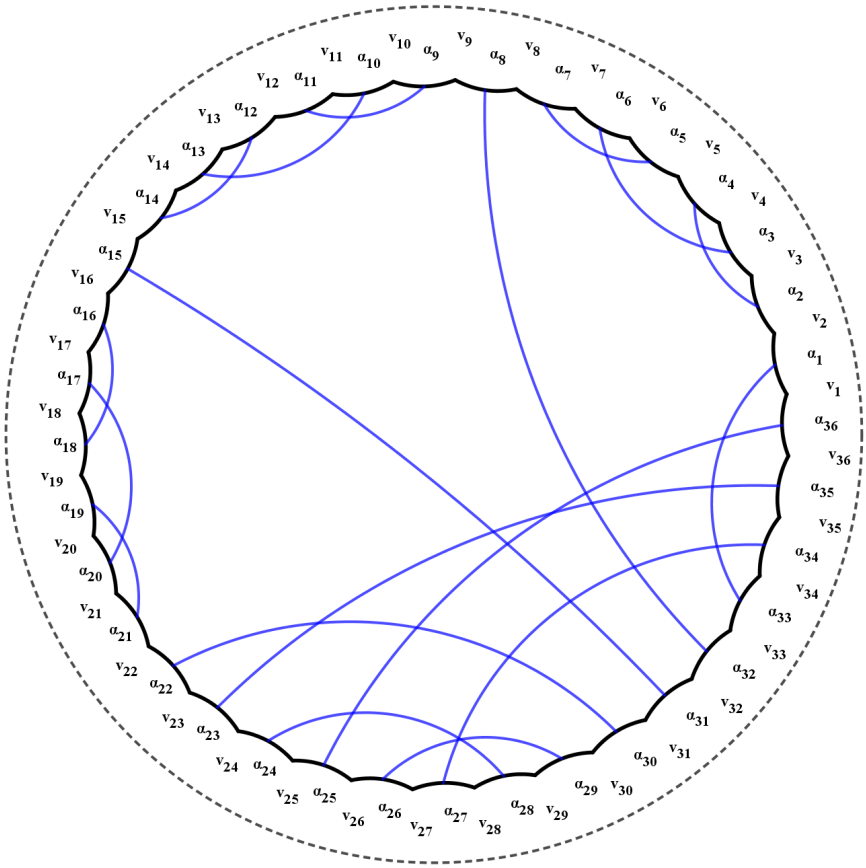

Figura 4.66: Caso $n = 3$.

Estendendo $(G_1)_{R_1}$ deletando a aresta a_1 pela fusão com a Corrente 3 munida do Sistema de Rotações P_2, de forma que e_1 incida com v_1 e e_{4n+1} incida com v_2 obtemos a identificação sobre o grafo apresentada abaixo.

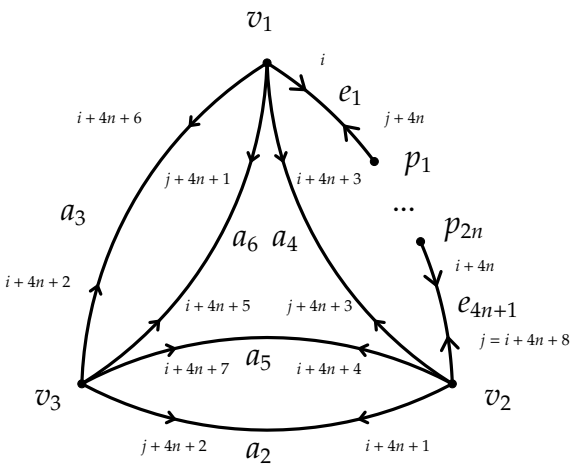

Figura 4.68: Generalização de G_1 e com Sistema de Rotações P_2.

Dessa forma extraímos as relações $j = i + 4n + 8$ e $j = i - 4n - 4$, onde $i + 4n + 8 \equiv i - 4n - 4 \pmod{8n + 12}$ e as funções de emparelhamento do polígono P_{8n+12}.

$$\alpha_{i+4n+1} \longrightarrow \alpha_{j+4n+2} \tag{4.2.55}$$

$$\alpha_{i+4n+2} \longrightarrow \alpha_{i+4n+6} \tag{4.2.56}$$

$$\alpha_{i+4n+3} \longrightarrow \alpha_{j+4n+3} \tag{4.2.57}$$

$$\alpha_{i+4n+4} \longrightarrow \alpha_{i+4n+7} \tag{4.2.58}$$

$$\alpha_{i+4n+5} \longrightarrow \alpha_{j+4n+1} \tag{4.2.59}$$

$$\alpha_{i+4k} \longrightarrow \alpha_{j+4(n-k)}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.60}$$

$$\alpha_{i+4k+1} \longrightarrow \alpha_{j+4(n-(k+1))+1}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.61}$$

$$\alpha_{i+4k+2} \longrightarrow \alpha_{j+4(n-(k+1))+2}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.62}$$

$$\alpha_{i+4k+3} \longrightarrow \alpha_{j+4(n-(k+1))+3}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.63}$$

Avaliando essas relações para $n = 3$ obtém-se o padrão de emparelhamento de P_{36} apresentado Figura 4.69.

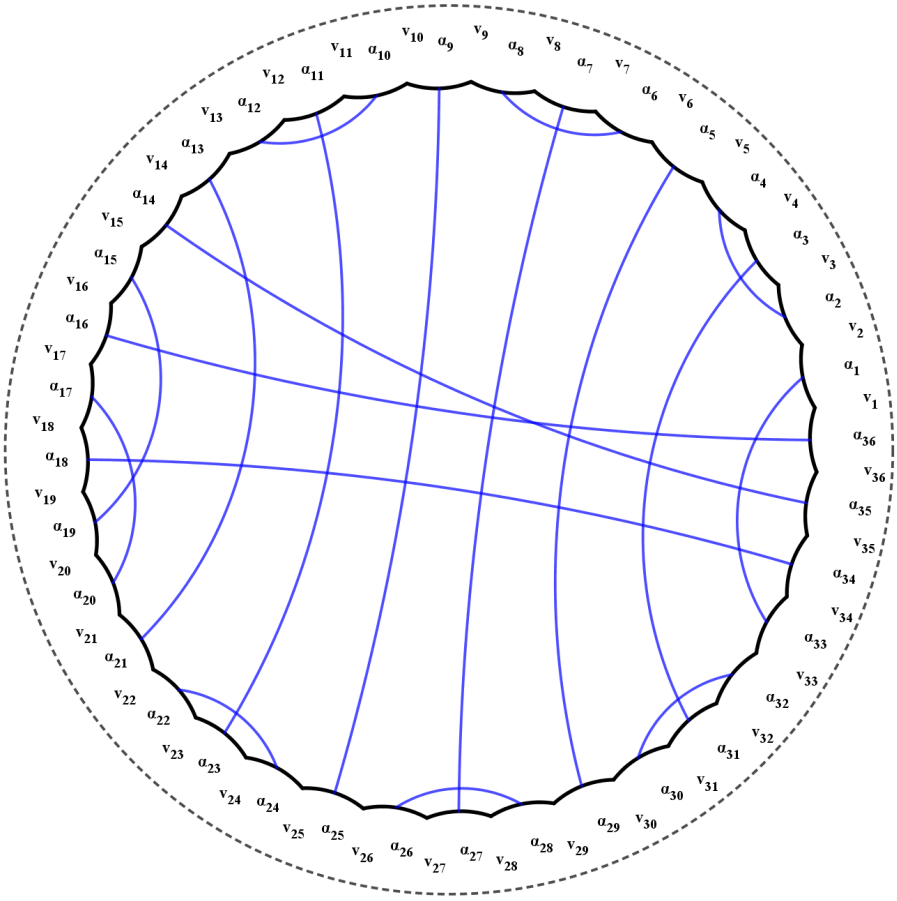

Figura 4.69: Caso $n = 3$.

Conhecendo-se sistemas de rotação para as Correntes podemos determinar os emparelhamentos generalizados. Desa forma, passemos agora à descrição de sistemas de rotação generalizados para a Corrente 4. Para isso, designamos rotações para cada vértice das estrutura básica Z_4. Assumiremos a seguinte rotulação genérica para essa estrutura.

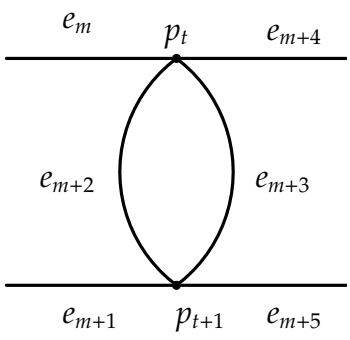

Figura 4.70: Rotulação de Z_4.

Temos trinta e seis formas de se escolher um sistema de rotações para Z_4, designado uma rotação para p_t e uma rotação para p_{t+1}, dentre as seis rotações possíveis para cada vértice. Explicitaremos dois destes sistemas os quais vão compor sistemas de rotações para a Corrente 4 de forma que os grafos G_1, G_2, G_3 quando estendidos por essa corrente geram emparelhamentos.

O primeiro sistema designado é $S_1 = [\mu_1, \eta_1]$, onde $\mu_1 = (e_m\ e_{m+2}\ e_{m+3}\ e_{m+4})$ é rotação de p_t e $\eta_1 = (e_{m+2}\ e_{m+3}\ e_{m+5}\ e_{m+1})$ é rotação de p_{t+1}. Atribuindo este sistema a cada uma das n cópias de Z_4 na Corrente 4, obtemos as identificações genéricas sobre a Corrente 4 em função dos parâmetros i, j, k e l.

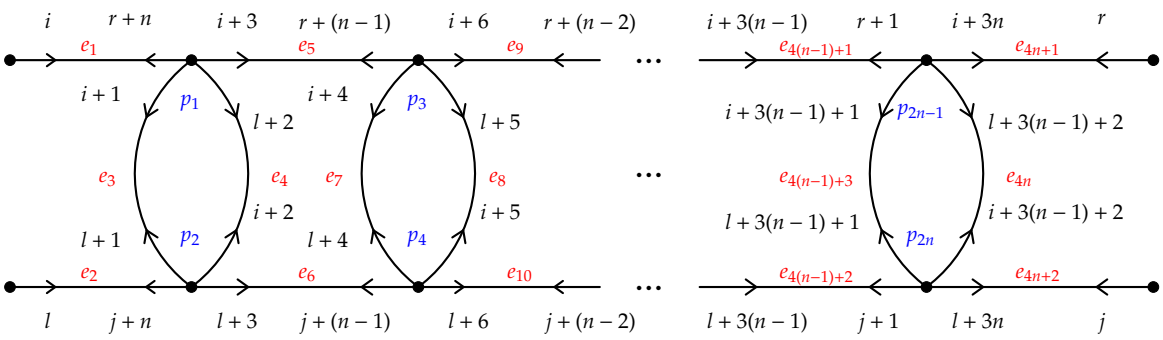

Figura 4.71: Corrente 4 com sistema S_1.

O segundo sistema designado é $S_2 = [\mu_2, \eta_1]$, onde $\mu_2 = (e_m\ e_{m+4}\ e_{m+2}\ e_{m+3})$ é rotação de p_t e $\eta_1 = (e_{m+2}\ e_{m+3}\ e_{m+5}\ e_{m+1})$ é rotação de p_{t+1}. Dele obtemos as identificações genéricas sobre a Corrente 4 dadas em função dos parâmetros i, j, k e l.

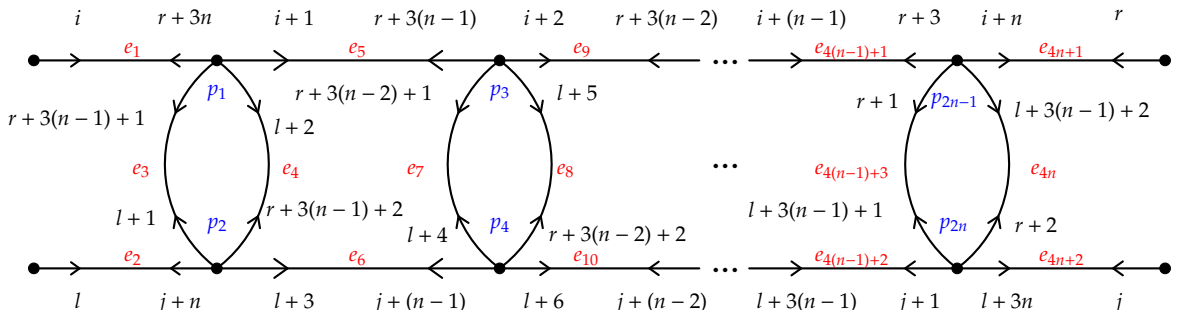

Figura 4.72: Corrente 4 com sistema S_2.

Explicitamos a seguir, duas generalizações de emparelhamentos obtidas do grafo G_1. Na primeira generalização tomamos $(G_1)_{R_1}$ e o estendemos com a Corrente 4 com sistema de rotações S_1 subdividindo as arestas a_1 e a_4, de modo que e_1 e e_4 incidam com v_1 e e_{4n+1} e e_{4n+2} incidam com v_2. Prosseguindo o passeio sobre a extremidade e_{4n+1} da corrente obtemos a relação $l = i + 3n + 3$. Seguindo pela extremidade e_{4n+2} temos $r = l + 3n + 5$. Seguido da extremidade e_1 obtemos a igualdade $j = r + n + 3$. Agora continuando da extremidade e_2 segue que $i = j + n + 1$.

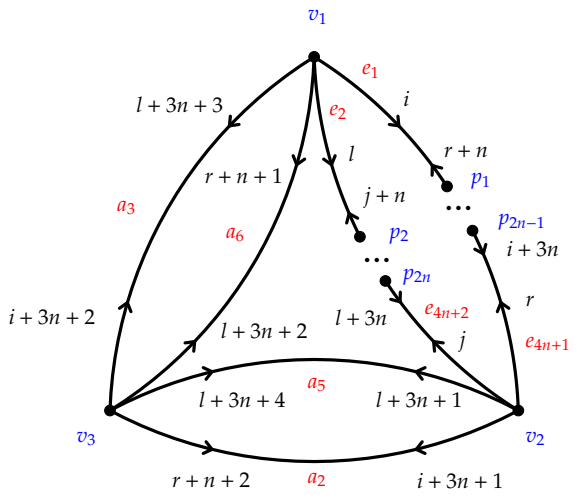

Figura 4.73: Passeio sobre a generalização de G_1 pela Corrente 4 com sistema S_1.

Assim podemos expressar três dos parâmetros em função do quarto. Com efeito, tomemos l, r e j em função do parâmetro i. Daí segue as relações observando a congruência módulo $8n + 12$: $l = i + 3n + 3$ e $l = i - 5n - 9$; $r = i + 6n + 8$ e $r = i - 2n - 4$; $j = i + 7n + 11$ e $j = i - n - 1$. Dessa forma temos as seguintes regras que expressam o emparelhamento de arestas de P_{8n+12}.

$$\alpha_{i+3n+1} \longrightarrow \alpha_{i+7n+10} \tag{4.2.64}$$

$$\alpha_{i+3n+2} \longrightarrow \alpha_{i+6n+6} \tag{4.2.65}$$

$$\alpha_{i+6n+5} \longrightarrow \alpha_{i+7n+9} \tag{4.2.66}$$

$$\alpha_{i+6n+7} \longrightarrow \alpha_{i+6n+4} \tag{4.2.67}$$

$$\alpha_{i+3k} \longrightarrow \alpha_{i+7n+8-k}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.68}$$

$$\alpha_{i+3n+3+3k} \longrightarrow \alpha_{i+8n+11-k}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.69}$$

$$\alpha_{i+3k+1} \longrightarrow \alpha_{i+3n+4+3k}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.70}$$

$$\alpha_{i+3k+2} \longrightarrow \alpha_{i+3n+5+3k}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.71}$$

Fixando $n = 3$ e o parâmetro $i = 1$ obtemos o diagrama de emparelhamento ilustrado na Figura 4.74.

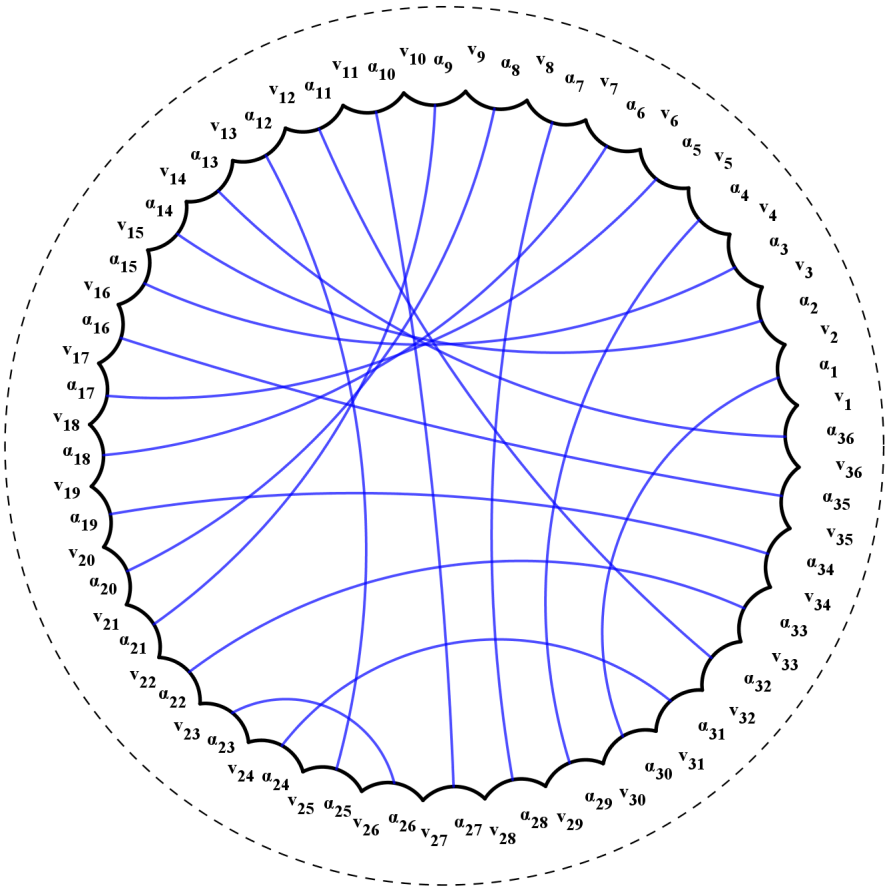

Figura 4.74: Caso $n = 3$.

Na a segunda generalização tomamos $(G_1)_{R_1}$ e o estendemos com a Corrente 4, obtida por subdivisões das aresta a_4 e a_6. Assumimos a Corrente 4 com sistema de

rotações S_1, de modo que e_1 e e_4 incidam com v_1, e_{4n+1} incida com v_2 e e_{4n+2} incida com v_3.

Seguido da extremidade e_1 obtemos a igualdade $i = r+n+4$. Agora continuando da extremidade e_2 segue que $l = j+n+4$. Prosseguindo o passeio sobre a extremidade e_{4n+1} da corrente obtemos a relação $j = i+3n+2$. Seguindo pela extremidade e_{4n+2} temos $r = l+3n+2$.

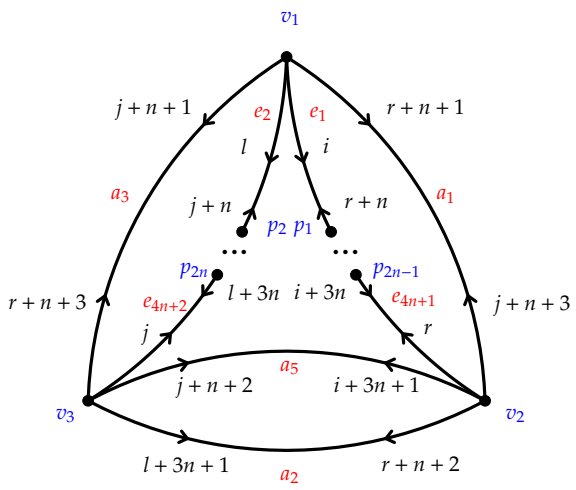

Figura 4.75: Passeio sobre a Generalização de G_1 pela Corrente 4 com sistema S_1.

Tomando os parâmetros j, r e l em função do parâmetro i obtemos: $j = i+3n+2$ e $j = i-5n+2$; $r = i+7n+8$ e $r = i-n-4$; $l = i+4n+6$ e $l = i-4n-6$. Verifica-se que $i+3n+2 \equiv i-5n+2 \mod (8n+12)$, $i+7n+8 \equiv i-n-4 \mod (8n+12)$ e $i+4n+6 \equiv i-4n-6 \mod (8n+12)$.

Assim, explicitamos as relações que descrevem os emparelhamento de arestas de P_{8n+12}.

$$\alpha_{i+8n+9} \longrightarrow \alpha_{i+4n+5} \tag{4.2.72}$$

$$\alpha_{i+8n+10} \longrightarrow \alpha_{i+7n+7} \tag{4.2.73}$$

$$\alpha_{i+8n+11} \longrightarrow \alpha_{i+4n+3} \tag{4.2.74}$$

$$\alpha_{i+4n+4} \longrightarrow \alpha_{i+3n+1} \tag{4.2.75}$$

$$\alpha_{i+3k} \longrightarrow \alpha_{i+8n+8-k}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.76}$$

$$\alpha_{i+4n+6+3k} \longrightarrow \alpha_{i+4n+2-k}; 0 \leq k \leq n \tag{4.2.77}$$

$$\alpha_{i+3k+1} \longrightarrow \alpha_{i+4n+7+3k}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.78}$$

$$\alpha_{i+3k+2} \longrightarrow \alpha_{i+4n+8+3k}; 0 \leq k \leq n-1 \tag{4.2.79}$$

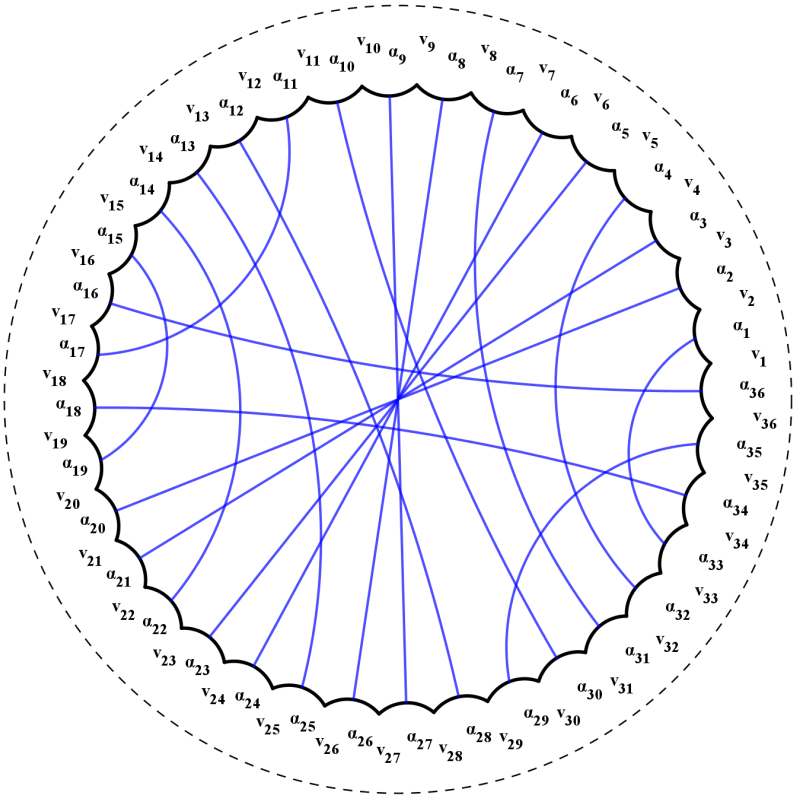

Figura 4.76: Caso $n = 3$.

Encerramos esta seção salientando que outros emparelhamentos generalizados podem ser obtidos dessas mesmas estruturas de correntes. Outros sistemas de rotação podem ser atribuídos dando origem a novos emparelhamentos. Uma segunda alternativa para construir novos emparelhamentos consiste em tomar correntes mistas compostas por diferentes estruturas.

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho nós desenvolvemos emparelhamentos de arestas para polígonos hiperbólicos associados a grafos regulares. Determinamos os possíveis grafos que admitem mergulho celular em uma superfície compacta e orientável de gênero $g = 2$. Fizemos um estudo detalhado dos sistemas de rotações para cada um destes grafos. Nossa contribuição foi apresentada ao longo da Seção 4.1 em forma de proposições e teoremas com os novos resultados obtidos. Nesse contexto demonstramos o Teorema 4.15.

A partir dos resultados da Seção 4.1 construímos emparelhamentos generalizados para polígonos da tesselação hiperbólica $\{8\gamma - 4, 4\}$ os quais determinam o conjunto de geradores de um grupo Fuchsiano Γ. Mencionamos que obtemos extensões dos H_1, H_2 e H_3 das quais obtemos emparelhamentos generalizados para a polígonos da tesselação hiperbólica $\{20\eta - 10, 5\}$ associados a grafos 5-regulares mergulhados em superfícies de gênero $3\eta - 1$.

Nesse contexto, fica como um possível desdobramento futuro a tarefa de explicitar as isometrias hiperbólicas para cada emparelhamento exibido para P_8, P_{10} e P_{12} e realizar o estudo da estrutura hiperbólica do espaço orbital de $\mathbb{H}^2$ pela ação do grupo Fuchsiano, que é uma superfície de Riemann.

No sentido da Teoria de Grafos, um possível desdobramento consiste em desenvolver métodos computacionais para determinar a família dos grafos de emparelhamento para uma determinada superfície compacta e orientável de gênero g. Ainda no sentido da Teoria topológica de grafos pode-se desenvolver estudo análogo para superfícies compactas e não orientáveis, determinando os grafos que admitem mergulho celular em determinada superfície e as representações poligonais para associadas.

Referências Bibliográficas

[1] ANDERSON, J.W.. ***Hyperbolic Geometry***- Second Edition, Springer-Verlag, 2005.

[2] BEARDON, Alan F.. ***The Geometry of Discrete Groups***. Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] BEINEKE, L.W., Wilson.. ***Topics in Topological Graph Theory*** - Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, New York, 2009.

[4] BONDY, A. J., MURTY, U. S. R.. ***Graph Theory***. Graduate Texts in Mathematics, vol 244. Springer, New York,2008.

[5] CONWAY, John. ***Functions of One Complex Variable***. New York : Springer-Verlag, Second edition - 1978.

[6] DORIA, Celso Melchiades. ***Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica***, Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2019.

[7] ELLIS-MONAGHAN, Joanna A., MOFFATT, Iain. ***Graphs on Surfaces: Dualities, Polynomials, and Knots*** - SpringerBriefs in Mathematics. Springer, 2013.

[8] MENDES DE JESUS, C. ; ROMERO, PANTALEÓN D. . ***Graphs and Closed Surfaces Associated with a Pairing of Edges for Regular Polygons***. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, v. 1, p. 1, 2019

[9] FARIA, M.B.. ***Empacotamento de Esferas em Espaços Hiperbólicos.*** Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP, 2011.

[10] FIRER, Marcelo. ***Grupos Fuchsianos***. UNICAMP, Notas de Aulas, 1999.

[11] GIBLIN, P.. ***Graphs, Surfaces and Homology***. Cambridge University Press - Third Edition, 2010.

[12] GROSS, Jonathan L., TURCKER, Thomas W.. ***Topological Graph Theory***. Wiley, New York (1987).

[13] JORGENSEN, T.,NAATANEN, M.: ***Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons***. Q. J. Math. Oxf. Ser. 33(132), 451?461 (1982). https://doi.org/10.1093/qmath/33.4.451.

[14] KATOCK, Svetlana. ***Fuchsian Groups*** - lectures in Mathematics Seires. University of Chicago Press. 1 ed. August, 1992.

[15] KINSEY, L.Christine. ***Topology of Surfaces*** - Undergraduate texts in mathematics-Springer-Verlag, 1993.

[16] LEE, John M.. ***Introduction to Topological Manifolds*** - Graduate Texts in Mathematics 202 - Springer-Verlag, New York, 2011.

[17] LINS NETO, Alcides. ***Funções de uma Variável Complexa***. Rio de Janeiro : IMPA - 1993.

[18] MASSEY, William S.. ***Algebraic topology, an introduction*** - Graduate texts in mathematics 56. Springer-Verlag, 1977.

[19] MUNKRES, James R.. ***Elements of algebraic topology***, Westview Press, 1984.

[20] MUNKRES, James R..***Topology***, Prentic Hall 2ed, Pearson, 2000.

[21] NAKAMURA, G.. ***Generic fundamental polygons for surfaces of genus three***, Kodai Math. J. Volume 27, Number 1 (2004), 88-104.

[22] RINGEL, Gerhard. ***Map Color Theorem***. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1974.

[23] RODRIGUES, Anderson Armando de Souza. ***Emparelhamentos de arestas do polígono hiperbólico associado à tesselação*** $\{8g-4,4\}$. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa. 2017.

[24] SILVA, G.F. da. ***Emparelhamento de Arestas de Polígonos Gerados por Grafos***. Dissertação de mestrado, DMA-UFV, 2011.