

RAY SANTOS GOBBI

FLUXOS ANOSOV EM 3-VARIEDADES E GRUPO  
FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Bulmer Mejía García

VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2020

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

G574f  
2020

Gobbi, Ray Santos, 1992-  
Fluxos Anosov em 3-variedades e grupo fundamental / Ray  
Santos Gobbi. – Viçosa, MG, 2020.  
86f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Bulmer Mejia Garcia.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f.85-86.

1. Fluxos de Anosov. 2. Grupos fundamentais  
(Matemática). 3. Variedades (Matemática). I. Universidade  
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de  
Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 516

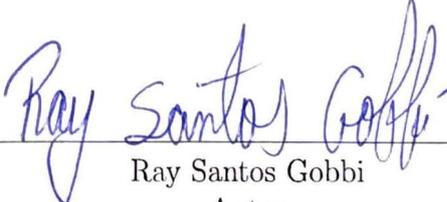
RAY SANTOS GOBBI

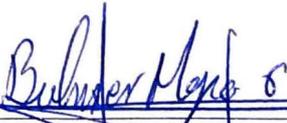
**FLUXOS ANOSOV EM 3-VARIEDADES E GRUPO  
FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de fevereiro de 2020.

Assentimento:

  
Ray Santos Gobbi  
Autor

  
Bulmer Mejía García  
Orientador

*Dedico este trabalho aos meus pais  
Pedrina e Darcy.*

O Sucesso é a soma de pequenos  
esforços repetidos dia após dia.

---

Robert Collier

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida, pelo cuidado e pela oportunidade de ter chegado até aqui.

Agradeço a minha estimada família, em especial a minha mãe e ao meu saudoso pai, por todo amor e principalmente pelo apoio incondicional e sacrifício ao longo destes anos.

Sou muitíssimo grato ao meu orientador Bulmer pela sabedoria, compreensão, incentivo e atenção dedicadas a mim sempre com carinho e muita paciência.

Agradeço aos amigos que fiz em Viçosa, em especial ao Nivaldo, Brasilino, João, Marco e Maiara. Obrigado pela amizade, pelos momentos de estudos e descontração.

Não poderia deixar de agradecer aos meus amigos de longa data, Attawan e Edinael, por todo apoio, incentivo, paciência e por todas as histórias vivenciadas.

Agradeço a minha querida namorada Gabriela pelo carinho, incentivo, paciência e por ter sido meu apoio nos momentos que mais precisei.

Agradeço a todos os professores e funcionários do DMA-UFV que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# Resumo

GOBBI, Ray S., M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2020.  
**Fluxos Anosov em 3-Variedades e Grupo Fundamental.** Orientador:  
Bulmer Mejía García.

No presente trabalho, apresentamos o seguinte teorema: Se  $\varphi_t$  fluxo Anosov definida sobre uma variedade tridimensional  $M$ , então o grupo fundamental de  $M$  é um grupo de crescimento exponencial. Este resultado foi provado por Margulis, G.A., referência [18].

Palavras-chave: Fluxos de Anosov. Grupos Fundamentais. Variedades.

# Abstract

GOBBI, Ray S., M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2020 **Anosov Flows in 3-Manifold and Fundamental Group**. Adviser: Bulmer Mejía García.

We will prove the following theorem: If  $\varphi_t$  Anosov flows define on a three-dimensional manifold  $M$ , then fundamental group of  $M$  is a group of exponential growth. This result was first proved by Margulis, G.A., reference [18].

Keywords: Anosov Flows. Fundamental Groups. Manifolds.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Conceitos Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Noções sobre Variedade Diferenciáveis . . . . .	12
1.1.1 Métricas Riemannianas . . . . .	16
1.1.2 Variedades com Bordo . . . . .	17
<b>2 Noções sobre Folheações</b>	<b>19</b>
2.1 Folheações . . . . .	19
2.2 A Topologia das Folhas . . . . .	24
2.2.1 Espaço de folhas . . . . .	25
2.3 Holonomia de uma Folha . . . . .	26
<b>3 Fluxo Anosov - Grupo Fundamental</b>	<b>29</b>
3.1 Fluxos Anosov . . . . .	29
3.1.1 Campo de Vetores . . . . .	29
3.1.2 Equivalência e conjugação de campos vetoriais . . . . .	30
3.1.3 O Teorema do Fluxo Tubular . . . . .	32
3.1.4 Os conjuntos de $\omega$ -limite e $\alpha$ -limite . . . . .	34
3.1.5 O Teorema de Grobman-Hartman . . . . .	35
3.1.6 O Teorema da Variedade Estável . . . . .	39

3.1.7	Difeomorfismo de Anosov . . . . .	42
3.2	Grupo Fundamental . . . . .	45
3.2.1	Homotopia . . . . .	45
3.2.2	O Grupo Fundamental . . . . .	47
3.3	Crescimento Exponencial . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Teorema Principal</b>	<b>69</b>
4.1	Resultados Auxiliares . . . . .	69
4.2	Prova do Teorema Principal . . . . .	81
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>85</b>

# Introdução

A teoria de Sistemas Dinâmicos é uma área da matemática importante interligada de forma muito próxima com a maioria das áreas principais da matemática. O seu núcleo matemático fundamental consiste do estudo da estrutura orbital global de transformações e fluxos com ênfase nas propriedades invariantes por mudanças de coordenadas, ou seja, as alterações dos estados do sistema com o decorrer do tempo, o qual pode ser considerado discreto ou contínuo. Sabemos que a evolução dos estados podem mostrar desde um comportamento muito simples e portanto previsível, até um comportamento bastante complicado e complexo, onde é impossível fazer algum tipo de previsão da evolução das órbitas de um ponto ou um conjunto a longo prazo.

Os estudos sobre Sistemas Dinâmicos surgiram a partir de questionamentos que as teorias existentes não explicavam de maneira satisfatória. Indagações sobre como se originavam novas formas de comportamentos, envolvendo a continuidade, a descontinuidade, e a variabilidade desses, levaram pesquisadores a buscar novos conceitos e princípios que a partir da década de 60 começaram a preencher uma série de lacunas deixadas pelas teorias anteriores, trazendo assim uma nova luz para o estudo.

Inicialmente vamos compreender a noção de **Sistemas Dinâmicos**, em especial os definidos por fluxos, os quais envolvem os conceitos de órbitas, conjuntos limites, ponto singular ou regular, conjugação. A seguir, abordamos as principais características dos **Espaços de recobrimento** resgatando os exemplos relevantes. Para adentrar no objetivo principal, procuramos entender as **Folheações e Crescimento do grupo Fundamental**.

Nesse trabalho, estamos interessados em fluxos Anosov sobre variedade Riemanniana compacta tridimensional de classe  $C^2$ .  $\varphi_t : M \rightarrow M$  para o qual existe uma decomposição contínua do fibrado tangente  $TM$  em subfibrados  $E_M^s, E_M^X$  e  $E_M^u$  invariantes com respeito a derivada do fluxo, onde  $E_M^X$  é o espaço gerado pelo campo  $X$  do fluxo,  $E_M^s$  e  $E_M^u$  são os espaços estável e instável, respectivamente. A

partir do estudo destes preliminares, temos como objetivo principal, entender as condições necessárias para com o artigo *Y-flows on three-dimensional manifolds* de G.A. Margulis, publicado D.V. Anosov and Ya.G. Sinai, no ano de 1967 cujo objetivo é provar o seguinte teorema:

**Teorema Principal.** Se um fluxo Anosov está definido sobre uma variedade Riemanniana compacta tridimensional  $M$ , então o grupo fundamental de  $M$  é um grupo de crescimento exponencial.

Esta produção está organizada em capítulos, os quais descreveremos:

No capítulo 1 serão introduzidos os conceitos e resultados sobre variedades diferenciáveis, para compreender os restantes capítulos.

No capítulo 2 será tratado a Noções sobre Folheações, não de forma exaustiva, vamos expor uma noção de uma folheação e as propriedades mais elementares que serão utilizadas no restante do trabalho, bem como alguns exemplos importantes

No capítulo 3 trataremos sobre Fluxos de Anosov - Grupo Fundamental. Definiremos alguns conceitos e apresentaremos alguns resultados básicos sobre sistemas dinâmicos, veremos as definições de grupo fundamental, espaços de recobrimento, definiremos o crescimento exponencial para grupos finitamente gerados e veremos que o crescimento do grupo fundamental pode ter sentido geométrico dentro da variedade.

No quarto capítulo apresentaremos a prova do teorema que motivou este estudo. Para isto, utilizaremos os resultados e conceitos apresentados nos capítulos anteriores, bem como os resultados apresentados na primeira seção deste capítulo, baseado em [18].

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

Neste capítulo serão introduzidos os conceitos e resultados necessários para o entendimento dos capítulos seguintes. Além disso, fixaremos a notação que será utilizada ao longo do trabalho. Tem-se como principal objetivo ajudar o leitor a se familiarizar com conceitos e resultados básicos que são fundamentais para o trabalho.

### 1.1 Noções sobre Variedade Diferenciáveis

Nesta seção vamos definir alguns conceitos e apresentar alguns resultados básicos sobre variedades Diferenciáveis, os quais podem ser encontrados em [5] e [20].

**Definição 1.1.** *Uma **variedade topológica** de dimensão  $m$  é um espaço topológico  $M$  com as seguintes propriedades:*

1.  *$M$  é Hausdorff: dados dois pontos distintos  $p$  e  $q$  em  $M$ , então existem abertos disjuntos  $U, V$  tais que  $p \in U$  e  $q \in V$ ;*
2.  *$M$  tem base enumerável de abertos: existe uma coleção enumerável de abertos de  $M$  tal que todo aberto é a união de abertos dessas coleção;*
3.  *$M$  é localmente Euclidiano: para qualquer  $p \in M$ , existem abertos  $U \subset M$  contendo  $p$ ,  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$  e um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ .*

**Definição 1.2.** Um **atlas** em  $M$  é uma coleção  $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i\}_{i \in I}$  de homeomorfismos, chamados **cartas locais** de  $M$ , onde  $U_i \subset M$  é aberto,  $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^m$  aberto e  $\cup_{i \in I} U_i = M$ . Os homeomorfismos

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_i \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_j$$

são chamados **mudanças de coordenadas**. Um atlas é de classe  $C^r$ ,  $0 \leq r \leq \infty$ , se todas as mudanças de coordenadas do atlas são de classe  $C^r$ .

**Definição 1.3.** Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^s$ ,  $s \geq 1$ , é uma **imersão** se a derivada  $Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  é injetiva para todo  $x \in M$ . Dizemos que  $f$  é uma **submersão** se  $Df(x)$  é sobrejetiva para todo  $x$ . Dizemos que  $f$  é um **mergulho** se é uma imersão injetiva e um homeomorfismo sobre sua imagem.

**Definição 1.4.** Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $m$  de classe  $C^r$  e  $S$  um subconjunto de  $M$ . Dizemos que  $S$  é uma **subvariedade** de classe  $C^s$ ,  $s \leq r$ , de dimensão  $k$  se para todo ponto  $x \in S$ , existe uma vizinhança  $W \subset M$  de  $x$  e um difeomorfismo  $C^s$ ,  $\varphi : W \rightarrow U \times V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$  com  $U \subset \mathbb{R}^k, 0 \in V \subset \mathbb{R}^{m-k}$  abertos e  $\varphi(S \cap W) = U \times \{0\}$ . A restrição de  $\varphi$  a  $W \cap S$  é um homeomorfismo sobre o aberto  $U$  e a coleção desses homeomorfismos é um atlas  $C^s$  para  $S$ , de modo que a aplicação de inclusão de  $S$  em  $M$  é um mergulho de classe  $C^s$ .

**Definição 1.5.** Uma **variedade diferenciável** de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações homeomórficas  $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  tais que:

- (1)  $\bigcup_{\alpha} \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$ .
- (2) Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\varphi_\alpha^{-1}(W)$  e  $\varphi_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$  são diferenciáveis, veja a figura (1.1).
- (3) A família  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  é máxima relativamente às condições (1) e (2).

O par  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  (ou a aplicação  $\varphi_\alpha$ ) com  $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$  é chamado uma **parametrização** (ou **sistema de coordenadas**) de  $M$  em  $p$ ;  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  é então chamada uma **vizinhança coordenada** em  $p$ . Uma família  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  satisfazendo (1) e (2) é chamada uma **estrutura diferenciável** em  $M$ .

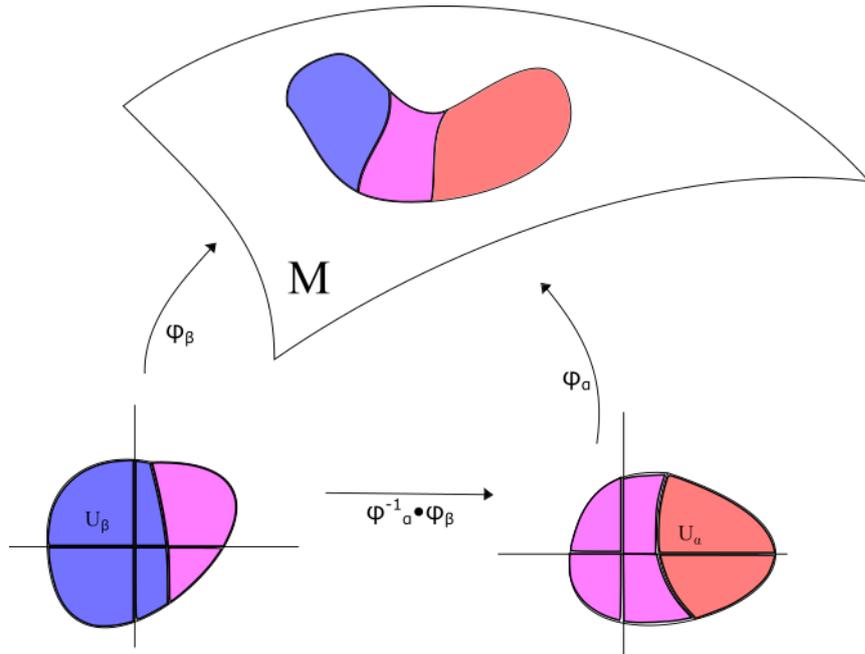


Figura 1.1: Variedade Diferenciável

**Exemplo 1.6.** O *espaço projetivo real*  $P^n(\mathbb{R})$ . Indicaremos por  $P^n(\mathbb{R})$  o conjunto das retas de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que passam pela origem  $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ; isto é,  $P^n(\mathbb{R})$  é conjunto das “direções” de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Exemplo 1.7.** Sejam  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha$  um número real arbitrário e  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$  o complementar da semi-reta  $r = \{(t \cos \alpha, t \sin \alpha), t \geq 0\}$ . Note que como a semi-reta é fechada  $U_\alpha$  sendo o complementar de um fechado acaba sendo um aberto.

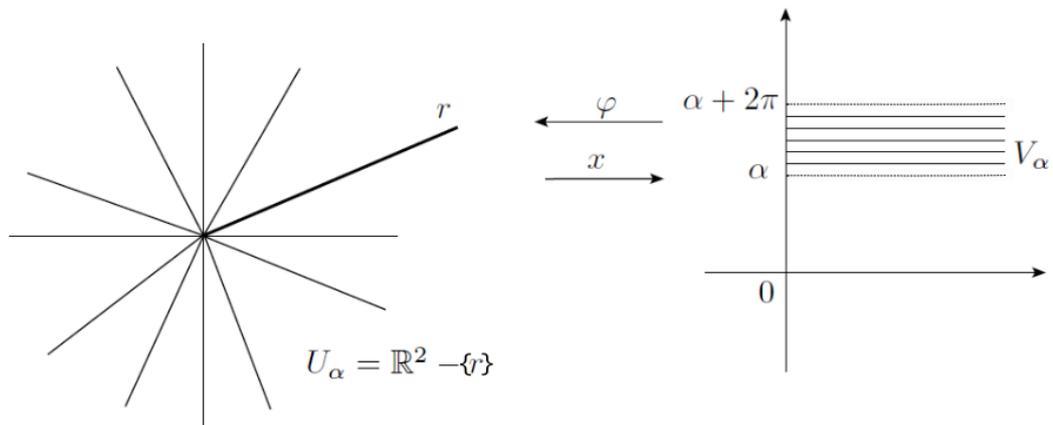


Figura 1.2: Coordenadas Polares

Construímos um sistema de coordenadas locais  $x : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$  como se segue: Consideramos a faixa  $V_\alpha = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2; \rho > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}$ , veja figura 1.2,

observe que  $V_\alpha$  é aberto pois é o cartesiano de abertos, e definimos  $\varphi : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$  por  $\varphi(\rho, \theta) = \rho e^{i\theta} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ . Podemos ver que  $\varphi$  é uma bijeção contínua.

De fato, é contínua pois cada coordenada é contínua, e é bijeção pois sejam  $\rho, \bar{\rho} > 0$  e  $\theta, \bar{\theta} \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \theta) = \varphi(\bar{\rho}, \bar{\theta}) &\Rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (\bar{\rho} \cos \bar{\theta}, \bar{\rho} \sin \bar{\theta}) \Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \theta = \bar{\rho} \cos \bar{\theta} \\ \rho \sin \theta = \bar{\rho} \sin \bar{\theta} \end{cases} \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \bar{\theta} \Rightarrow \theta = \bar{\theta} \Rightarrow \rho = \bar{\rho} \Rightarrow (\rho, \theta) = (\bar{\rho}, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

Assim temos a injetividade, nós resta verificar a sobrejetividade. Ou seja, precisamos mostrar que  $\forall (x, y) \in U_\alpha, \exists (\rho, \theta) \in V_\alpha / \varphi(\rho, \theta) = (x, y)$ , dada as circunstâncias, tome  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \theta) &= (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \\ &= (\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\operatorname{arctg}(y/x)), \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\operatorname{arctg}(y/x))) \\ &= (\sqrt{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) = (x, y) \end{aligned}$$

Estão bem definidos pois  $(x, y) \neq (0, 0)$ , assim  $\rho > 0$ .

Aplicando o teorema da função inversa vê-se que  $\varphi$  é um difeomorfismo, seja  $x : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^2$  o difeomorfismo inverso de  $\varphi$ .

As coordenadas introduzidas em  $U_\alpha$  chamam-se “coordenada polares”.

Agora note que satisfaz todas as condições da definição anterior.

1.  $\bigcup_{\alpha} \varphi_\alpha(V_\alpha) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha = \mathbb{R}^2$ .

2. Para todo par  $\alpha, \beta$ , temos que  $\varphi_\alpha(V_\alpha) \cap \varphi_\beta(V_\beta) = U_\alpha \cap U_\beta = W \neq \emptyset$ , e os conjuntos  $\varphi_\alpha^{-1}(W)$  e  $\varphi_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^2$  pois a aplicação  $\varphi_\alpha$  e  $\varphi_\beta$  são contínuas e  $W$  é aberto, então a imagem inversa é aberta, e as aplicações  $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$  são diferenciáveis, pois é uma função rotação apenas.

**Definição 1.8.** Sejam  $N$  e  $M$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi : N \rightarrow M$  é um difeomorfismo se ela é diferenciável, bijetora e sua inversa  $\varphi^{-1}$  é diferenciável.  $\varphi$  é um **difeomorfismo local** em  $p \in N$  se existem vizinhanças  $U$  de  $p$  e  $V$  de  $\varphi(p)$  tais que  $\varphi : U \rightarrow V$  é um difeomorfismo.

**Definição 1.9.** Uma aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , diz-se diferenciável no ponto  $a \in U$  quando cada uma das suas funções coordenadas  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável nesse ponto.

**Exemplo 1.10.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é constante então  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in U$ . Reciprocamente, se o aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  é conexo e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  possui derivada nula em todos os pontos  $x \in U$  então  $f$  é constante.

Sejam  $\psi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$  e  $\phi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  difeomorfismos de classe  $C^r$  entre abertos euclidianos. Uma aplicação  $f : U \rightarrow V$  é diferenciável em um ponto  $x_0$  se, e somente se,  $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$  é diferenciável em  $\psi(x_0)$  e, se  $s \geq r$ ,  $f$  é de classe  $C^s$  se, e somente se,  $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$  é de classe  $C^s$ . Como essas duas noções são invariantes por mudanças de coordenadas, elas se estendem naturalmente para variedades.

**Definição 1.11.** Sejam  $M$  uma variedade de dimensão  $m$  e classe  $C^r$  e  $N$  uma variedade de dimensão  $n$  e classe  $C^r$ . Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é de classe  $C^s$ ,  $s \geq r$ , se para todo  $p \in M$  existem cartas locais  $\varphi : U \subset M \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$  e  $\psi : V \subset N \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  tais que

1.  $p \in U$ ,  $f(p) \in V$ ;
2.  $f(U) \subset V$ ;
3.  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^s$ .

Ao definir a derivada de uma aplicação diferenciável associamos a cada ponto  $p \in M$  um espaço vetorial  $T_pM$ , chamado o **espaço tangente** a  $M$  no ponto  $p$ .

**Definição 1.12 (O fibrado tangente).** Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável e seja  $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$ . Vamos munir o conjunto  $TM$  de uma estrutura diferenciável, com tal estrutura  $TM$  será chamado **fibrado tangente** de  $M$ .

### 1.1.1 Métricas Riemannianas

**Definição 1.13.** Uma **métrica Riemanniana** (ou **estrutura Riemanniana**) em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_pM$ .

Seja  $d$  uma métrica Riemanniana, denotaremos por  $d(p; u, v)$  ou  $\langle u, v \rangle_p$  o produto interno dos vetores  $u, v \in T_pM$ .

**Definição 1.14.** O comprimento ou norma de um vetor  $v \in T_p M$  pode ser definido como:

$$|v|_p = \sqrt{\langle v, v \rangle_p}.$$

Esta norma recebe o nome de **norma Riemanniana**.

Uma variedade diferenciável onde está definida uma métrica Riemanniana é denominada **variedade Riemanniana**. Formalmente dizemos, que é um par  $(M, d)$ , onde  $d$  é uma métrica Riemanniana na variedade  $M$ .

**Exemplo 1.15.**  $M = \mathbb{R}^n$  com  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  identificado com  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . A métrica é dada por  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ .  $\mathbb{R}^n$  é chamado espaço euclidiano de dimensão  $n$  e a geometria Riemanniana deste espaço é a geometria métrica euclidiana.

**Definição 1.16.** Duas variedades  $V$  e  $W$  são **transversais** em  $M$  se para qualquer ponto  $q \in V \cap W$  temos que os espaços tangentes  $T_q V$  e  $T_q W$  são complementares e as respectivas bases geram  $T_q M$ . Notação:  $V \pitchfork W$ .

**Exemplo 1.17.** O exemplo não-trivial mais simples de transversalidade é de arcos em uma superfície. Um ponto de interseção entre dois arcos é transversal se, e somente se, não for uma tangência, ou seja, suas linhas tangentes dentro do plano tangente à superfície são distintas.

**Definição 1.18.** Um espaço topológico  $M$  é dito ser um espaço de Hausdorff se, e somente se, para cada par de pontos distintos  $x, y \in M$  é possível obter abertos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que  $x \in U$  e  $y \in V$ .

**Exemplo 1.19.** 1) Qualquer espaço topológico discreto é um espaço de Hausdorff.

2) O espaço  $X = \{a, b, c\}$  com a topologia  $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}; X\}$  não é Hausdorff: os pontos  $a$  e  $c$  podem ser separados um do outro mas não do ponto  $b$ .

## 1.1.2 Variedades com Bordo

Seja  $\mathbb{H}^m = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m); x_m \geq 0\}$  o semi-espaço superior. Uma aplicação  $f : U \subset \mathbb{H}^m \rightarrow V \subset \mathbb{H}^n$  é diferenciável em  $x_0 \in U$  se existe vizinhança  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$  de  $x_0$  e uma aplicação  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável em  $x_0$  tal que  $\tilde{f}(x) = f(x)$  para todo  $x \in \tilde{U} \cap U$ . Mesmo que  $x_0 \in \partial \mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m; x_m = 0\}$ , duas extensões de  $f$  a vizinhanças de  $x_0$  em  $\mathbb{R}^m$  tem a mesma derivada no ponto  $x_0$ . Portanto podemos definir a derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  como sendo a derivada em  $x_0$  de alguma dessas extensões de  $f$ .

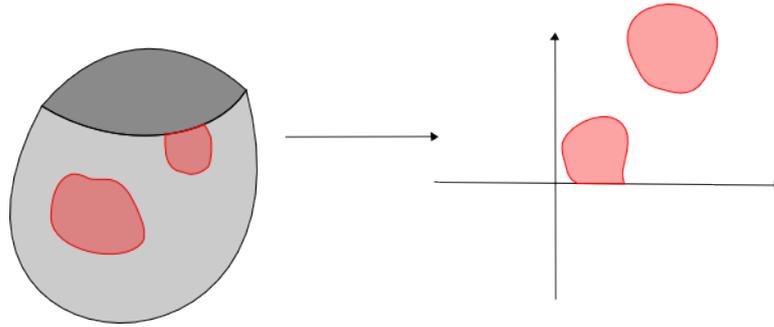


Figura 1.3: Variedade com Bordo

**Definição 1.20.** *Uma variedade com bordo, de classe  $C^k$ , é um espaço topológico  $M$ , Hausdorff, com base enumerável de abertos, munido de um atlas  $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i \subset \mathbb{H}^m\}$  cujas mudanças de coordenadas são de classe  $C^k$ .*

O **bordo** de  $M$ , denotado por  $\partial M$ , é o conjunto dos pontos  $x \in M$  tais que existe uma carta  $\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$  no atlas tal que  $\varphi_i(x) \in \partial\mathbb{H}^m$ . Observemos que se  $\varphi_j : U_j \rightarrow \tilde{U}_j$  é uma outra carta, então  $\varphi_j(x)$  também pertence a  $\partial\mathbb{H}^m$ . Assim,  $\partial M$  está bem definido e é uma variedade (sem bordo) de dimensão  $m - 1$ .

Lembrando que um vetor tangente  $v$  a  $M$  no ponto  $x$  é uma aplicação que a cada carta local  $\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i \subset \mathbb{H}^m$  associa um vetor  $v(\varphi_i, x) \in \mathbb{R}^m$  e tem a propriedade de que se  $\varphi_j : U_j \rightarrow \tilde{U}_j$  é outra carta com  $x \in U_j$ , então  $v(\varphi_j, x) = D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))v(\varphi_i, x)$ .

Pela observação anterior sobre a derivada de mudanças de cartas, temos que a definição faz sentido mesmo quando  $x \in \partial M$ . O espaço tangente a  $M$  no ponto  $x$  é o conjunto de tais vetores tangentes, que é um espaço vetorial, e cada carta local  $\varphi_i$  define um isomorfismo  $D\varphi_i : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ , que associa a cada vetor tangente  $v$  o vetor  $v(\varphi_i, x)$ . Em um ponto  $x \in \partial M$  o espaço tangente ao bordo é um subespaço de codimensão 1 do espaço tangente a  $M$ .

# Capítulo 2

## Noções sobre Folheações

Vamos introduzir a noção de folheações e as propriedades mais elementares que serão utilizadas no restante do trabalho, bem como alguns exemplos. A principal referência desta seção foi [2].

### 2.1 Folheações

A decomposição de uma variedade  $M$  em subvariedades imersas, todas de mesma dimensão, dá origem a uma folheação da variedade  $M$ . Uma folheação de dimensão  $n$  de uma variedade  $M^m$ , é a grosso modo, uma decomposição de  $M$  numa união de subvariedades conexas, disjuntas e de mesma dimensão chamadas folhas, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro.

O exemplo mais simples de uma folheação de dimensão  $n$  é a folheação de  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  onde as folhas são  $n$ -planos da forma  $\mathbb{R}^n \times \{c\}$  com  $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ .

O difeomorfismo  $h : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  que preservam localmente as folhas dessa folheação, têm a seguinte forma

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \quad (2.1)$$

A figura 2.1 ilustra bem o que está acontecendo nessa equação (2.1).

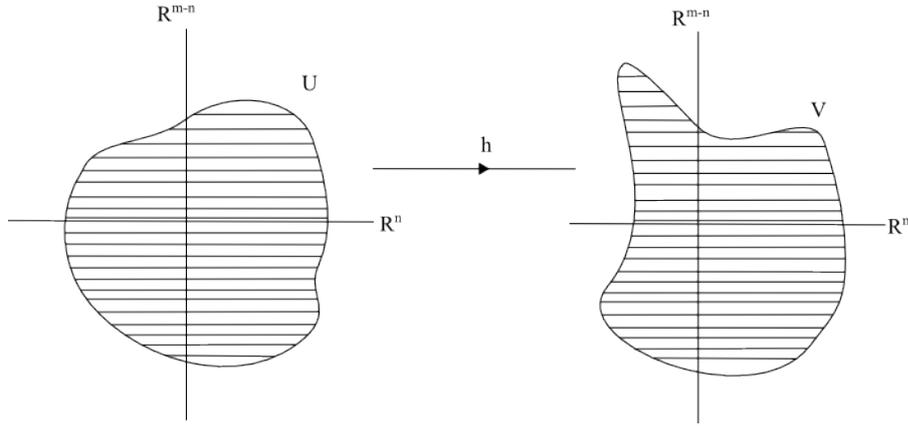


Figura 2.1: Difeomorfismo preservador

**Definição 2.1 (Folheação).** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^\infty$ . Uma folheação de classe  $C^r$  e dimensão  $n$  de  $M$ , é um atlas maximal  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$  em  $M$ , satisfazendo:*

- i) Se  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$  então  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ , onde  $U_1$  e  $U_2$  são discos abertos em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{m-n}$ , respectivamente.*
- ii) Se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi) \in \mathcal{F}$  são tais que  $U \cap V \neq \emptyset$  então a aplicação mudança de coordenada  $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  é da forma  $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$ .*

Dizemos que  $M$  é **folheada** por  $\mathcal{F}$ , ou ainda que  $\mathcal{F}$  é uma estrutura folheada de dimensão  $n$  de classe  $C^r$  sobre  $M$ .

A figura 2.2, ilustra o aspecto local de uma 2-variedade folheada por uma folheação 1-dimensional.

Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação  $C^r$  de dimensão  $n$ ,  $0 < n < m$ , de uma variedade  $M^m$ . Considere uma carta local  $(U, \varphi)$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ . Os conjuntos da forma  $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ , onde  $c \in U_2$  são chamadas de **placas** de  $U$ , ou de placas de  $\mathcal{F}$ . Fixado  $c \in U_2$ , a aplicação  $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$  é uma imersão de classe  $C^r$ , isto é,  $df$  é injetiva, então as placas são  $n$ -subvariedades conexas de  $M$ . Além disso, se  $\alpha$  e  $\beta$  são placas de  $U$  então  $\alpha \cap \beta = \emptyset$  ou  $\alpha = \beta$ .

Um **caminho de placas** de  $\mathcal{F}$  é uma sequência  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de placas de  $\mathcal{F}$  tal que  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ . Como  $M$  é coberta por placas de  $\mathcal{F}$ , podemos definir sobre  $M$  a seguinte relação de equivalência:

$$pRq \leftrightarrow pRq \text{ se existe um caminho de placas } \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ com } p \in \alpha_1, q \in \alpha_k. \quad (2.2)$$

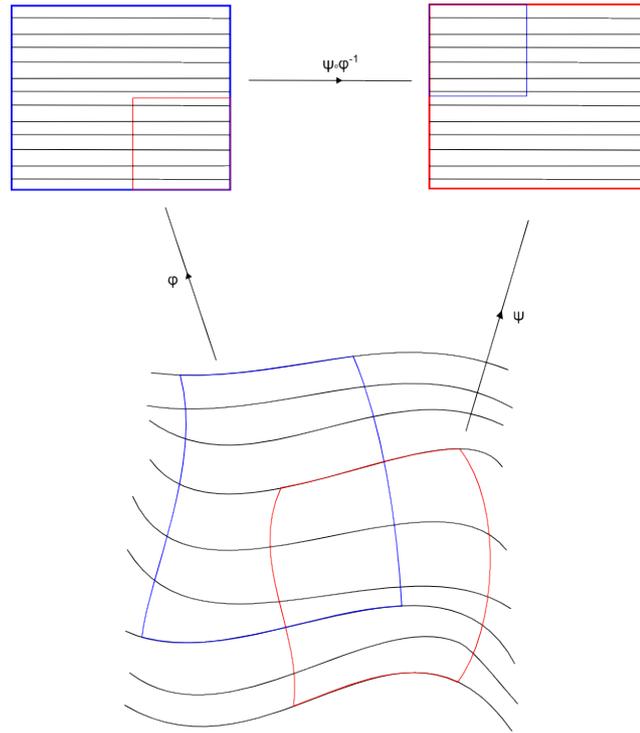


Figura 2.2: Variedade Folheada

As classes de equivalência da relação  $R$  são chamadas de **folhas** de  $\mathcal{F}$ .

Da própria definição segue que uma folha de  $\mathcal{F}$  é um subconjunto de  $M$  conexos por caminhos. De fato, se  $F$  é uma folha de  $\mathcal{F}$  e  $p, q \in F$ , então existe um caminho de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tal que  $p \in \alpha_1$  e  $q \in \alpha_k$ . Como as placas  $\alpha_j$  são conexas por caminhos e  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ , é imediato que  $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k \subset F$  é conexa por caminhos, então existe um caminho contínuo em  $F$  conectando  $p$  e  $q$ .

Outro fato importante é que toda folha  $F$  de  $\mathcal{F}$  tem a estrutura de uma variedade  $C^r$  de dimensão  $n$  induzida naturalmente por cartas de  $\mathcal{F}$ . Veremos alguns exemplos de folheações.

Lembramos que uma submersão é uma aplicação  $f : M^m \rightarrow N^n$  de classe  $C^r$  tal que  $df$  é sobrejetiva. Da forma local das submersões, temos que dado  $p \in M$  e  $q = f(p) \in N$  existe uma carta local  $(U, \varphi)$  sobre  $M$ ,  $(V, \psi)$  sobre  $N$  tal que  $p \in U$ ,  $q \in V$ ,  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$  e  $\psi(V) = V_2 \supset U_2$  e  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$  coincide com a projeção  $(x, y) \rightarrow y$ .

**Exemplo 2.2.** *Folheações definidas por submersões.*

Consideramos  $(\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n)$  dada pela forma local das submersões. A projeção da mudança de coordenadas é

$$\pi \circ \varphi_{ij}(x, y) = \pi \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = \psi \circ f \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = \psi \circ f \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = y$$

Logo,  $(\varphi_i)_i$  é um atlas folheado de dimensão  $n$  em  $M$ .

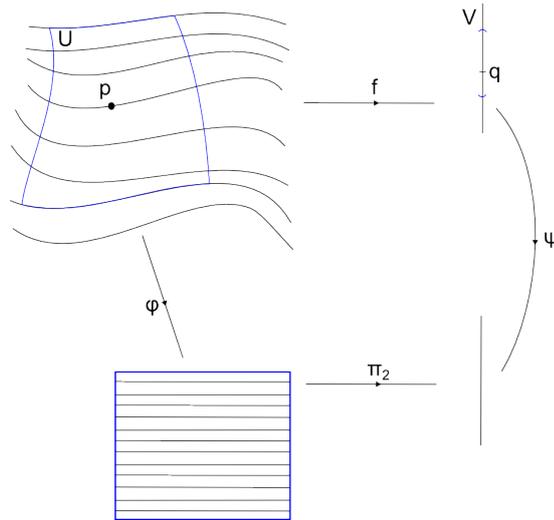


Figura 2.3: Aplicação Projecção

Portanto, é claro que as cartas locais  $(U, \varphi)$  define uma estrutura de variedade de folhada de classe  $C^r$  em que as folhas são as componentes conexas dos conjuntos de nível  $f^{-1}(c), c \in N$ .

**Exemplo 2.3.** Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma submersão definida por  $f(x, y, z) = \alpha(r^2)e^z$ , onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$  tal que  $\alpha(1) = 0$ ,  $\alpha(0) = 1$  e se  $t > 0$  então  $\alpha'(t) < 0$ . Seja  $\mathcal{F}$  a folheação de  $\mathbb{R}^3$  cujas folhas são as componentes conexas das subvariedades  $f^{-1}(c), c \in \mathbb{R}$ .

As folhas de  $\mathcal{F}$  no interior do cilindro sólido  $C : \{(x, y, z)/x^2 + y^2 \leq 1\}$  são todas homeomórficas a  $\mathbb{R}^2$  e podemos parametrizar por  $(x, y) \in D^2 \mapsto (x, y, \log(c/\alpha(r^2)))$ , onde  $c > 0$ . A fronteira de  $C$ ,  $\partial C = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 = 1\}$  é também uma folha. Fora de  $C$  as folhas são todas homeomórficas a cilindros, (Ver Figura 2.4).

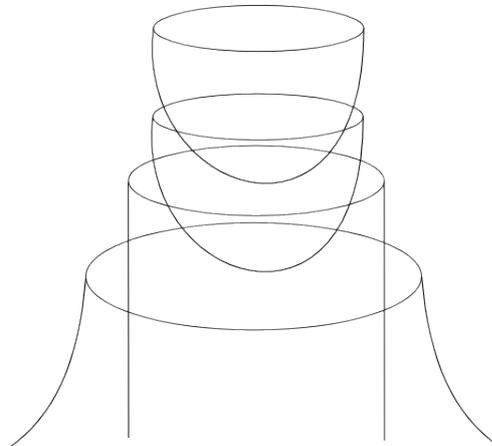


Figura 2.4: Exemplo de Folheação

**Exemplo 2.4** (Fibrações). *Um espaço fibrado  $(E, \pi, B, F)$  consiste de variedades diferenciáveis  $E, B, F$  e uma submersão  $\pi : E \rightarrow B$  tal que para qualquer  $b \in B$  existe uma vizinhança aberta  $U_b$  de  $b$  e um difeomorfismo  $\varphi_b : \pi^{-1}(U_b) \rightarrow U_b \times F$  que faz com que o diagrama a seguir comute:*

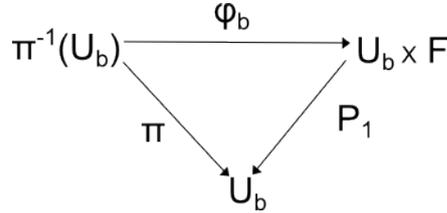


Figura 2.5: Diagrama

*Assim, as fibras de um espaço fibrado  $(E, \pi, B, F)$  define uma folheação sobre  $E$  cujas folhas são difeomorfas as componentes conexas de  $F$ .*

*No diagrama 2.5,  $P_1$  é a projeção na primeira entrada. As fibras das fibrações  $\pi^{-1}(b)$ ,  $b \in B$  são subvariedades.*

Uma noção importante é a de vizinhança tubular, a qual é dada no seguinte teorema, cuja demonstração pode ser olhada em [2, pag. 25].

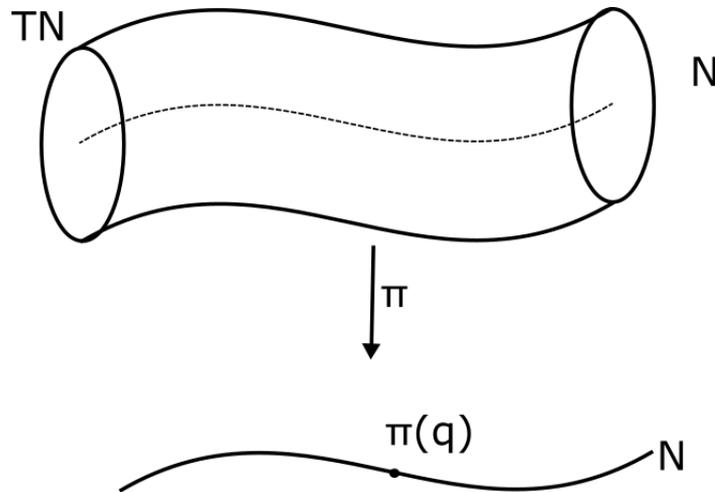


Figura 2.6: Vizinhança Tubular

**Teorema 2.5** (sobre a Vizinhança Tubular). *Seja  $N \subset M$  uma subvariedade de classe  $C^r$  com  $r \geq 1$ . Existe uma vizinhança aberta  $T(N) \supset N$  e uma submersão  $C^r$ ,  $\pi : T(N) \rightarrow N$ , tal que  $\pi(q) = q$  para todo  $q \in N$ . Se a codimensão de  $N$  é  $k$ , então  $T(N)$  pode ser obtido de tal maneira que  $(T(N), \pi, N, \mathbb{R}^k)$  é um espaço fibrado.*

**Lema 2.6** (Aplicações Distinguidas). *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de uma variedade*

$M$ . Existe uma cobertura  $C = \{U_i/i \in I\}$  de  $M$  por domínios de cartas locais de  $\mathcal{F}$  tal que se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  está contido no domínio de uma carta local de  $\mathcal{F}$ .

## 2.2 A Topologia das Folhas

Cada folha  $F$  de classe  $C^r$  de uma folheação  $\mathcal{F}$  tem um estrutura diferenciável induzida pelas cartas de  $\mathcal{F}$ . Essa estrutura, é chamada de **estrutura intrínseca** de  $F$ , é construída da seguinte maneira. Dado  $p \in F$ , seja  $(U, \varphi)$  uma carta de  $\mathcal{F}$  tal que  $p \in U$  e  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{n+s}$ , onde  $U_1$  e  $U_2$  são bolas abertas em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^s$ , respectivamente. Seja  $\alpha$  a placa de  $U$  que contém  $p$ . Seja  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , onde  $\varphi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ , defina  $\bar{\varphi} : \alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ , por  $\bar{\varphi} = \varphi_1|_\alpha$ . É claro que  $\bar{\varphi} : \alpha \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n$  é um homeomorfismo visto que  $\varphi(\alpha) = U_1 \times \{a\}$  para algum  $a \in U_2$ .

**Afirmção:** O conjunto

$$\mathcal{B} = \{(\alpha, \bar{\varphi}) | \alpha \subset F \text{ é placa de } U \text{ com } (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$$

é um atlas  $C^r$  de dimensão  $n$  para  $F$ .

De fato, é suficiente mostrar que se  $(\alpha, \bar{\varphi}), (\beta, \bar{\psi})$  estão em  $\mathcal{B}$  e  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ , então  $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$  e  $(\alpha \cap \beta)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e  $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1} : \bar{\psi}(\alpha \cap \beta) \rightarrow \bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$  é um difeomorfismo  $C^r$ . Primeiro passo, mostremos que  $\alpha \cap \beta$  é aberto em  $\alpha$  e em  $\beta$ . Seja  $(U, \varphi), (V, \psi)$  em  $\mathcal{F}$  tal que  $\bar{\varphi} = \varphi_1|_\alpha$  e  $\bar{\psi} = \psi_1|_\beta$ . Pela condição (2.1),  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  é dado por  $\varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$  com  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ .

Em particular como  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ , temos

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x, b) = (h_1(x, b), h_2(b)) = (h_1(x, b), a). \quad (2.3)$$

Como  $\psi(\beta \cap U) = \psi(U \cap V \cap \beta) = \psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\})$  e  $\varphi(\alpha \cap V) = \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{a\})$ , de (2.3), temos

$$\begin{aligned} \varphi(\beta \cap U) &= \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(\beta \cap U)) = \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\})) \\ &\subset \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{a\}) = \varphi(\alpha \cap V) \end{aligned}$$

isto é,  $\beta \cap U \subset \alpha \cap V$ .

Analogamente,  $\alpha \cap V \subset \beta \cap U$ , assim,  $\alpha \cap \beta = \alpha \cap V = \beta \cap U$ . E isso prova a

afirmação.

### 2.2.1 Espaço de folhas

Seja  $M^m$  uma variedade folheada com uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $n < m$ . Um *espaço de folhas de  $\mathcal{F}$* ,  $M/\mathcal{F}$  é um espaço quociente de  $M$  sob a relação de equivalência  $R$ , que identifica dois pontos de  $M$  se estiverem na mesma folha de  $\mathcal{F}$ . A partir da definição de folha, fica claro que essa relação coincide com a relação  $R$  definida em (2.2). Sobre  $M/\mathcal{F}$ , tomamos a topologia quociente, onde o quociente de um espaço topológico  $X$  por uma relação de equivalência  $\sim$  é o conjunto  $X/\sim$  das classes de equivalência munido da topologia cujos abertos são os conjuntos de classes cuja reunião é um aberto de  $X$ . A topologia de  $M/\mathcal{F}$  é geralmente muito complicada, possivelmente não-hausdorff, como no caso da folheação Reeb de  $S^3$ , ou na folheação de  $\mathbb{R}^2$ , como na figura 2.7, isto foge aos propósitos deste trabalho. O leitor interessado pode ver maiores detalhes em literatura especializada sobre folheações.

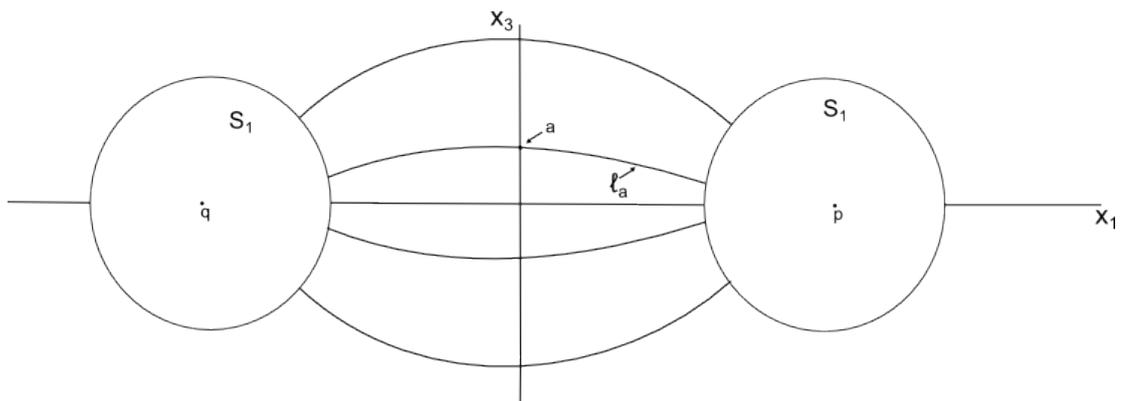


Figura 2.7: Folheação de  $\mathbb{R}^2$

Seja  $A \subset M$ . A *saturação de  $A$  em  $\mathcal{F}$*  é definido pelo conjunto  $\mathcal{F}(A) = \{x \in M | xRy \text{ para algum } y \in A\}$ . Se  $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$  é a projeção para o quociente, temos  $\mathcal{F}(A) = \pi^{-1}(\pi(A)) = \cup_{x \in A} F_x$ , onde por  $F_x$  denotamos a folha de  $\mathcal{F}$  contendo  $x$ .

**Teorema 2.7.** *A projeção  $\pi$  é uma aplicação aberta, ou a saturação  $\mathcal{F}(A)$  de um subconjunto aberto  $A$  de  $M$  é aberto.*

**Demonstração:** Seja  $p \in \mathcal{F}(A)$  e  $F$  a folha de  $\mathcal{F}$  através de  $p$ . Então  $F \cap A \neq \emptyset$ , e se  $q \in A \cap F$  existe um caminho de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tais que  $q \in \alpha_1$  e  $p \in \alpha_k$ . Suponha que cada  $\alpha_j$  é uma placa de  $U_j$  com  $(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$  e seja  $\varphi(U_j) = U'_j \times U''_j$ ,

onde  $U'_j$  e  $U''_j$  são discos abertos em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{m-n}$  respectivamente,  $j = 1, \dots, k$ . Suponha que para algum  $j \in \{1, \dots, k\}$  existe um  $x \in \alpha_j$  que tem uma vizinhança aberta  $V \subset \mathcal{F}(A) \cap U_j$ . Como  $\varphi_j : U_j \rightarrow U'_j \times U''_j$  é um homeomorfismo,  $\varphi_j(V)$  é aberto em  $U'_j \times U''_j$ , então se  $\pi_2 : U'_j \times U''_j \rightarrow U''_j$  é a projeção para com a segunda entrada,  $\pi_2^{-1}(\varphi_j^2(V))$  é aberto em  $U'_j \times U''_j$ . Por outro lado,  $W = \varphi_j^{-1}(\pi_2^{-1}(\varphi_j^2(V)))$  é aberto e  $\alpha_j \subset \mathcal{F}(A)$  e assim  $\alpha_j$  está no interior de  $\mathcal{F}(A)$ . Basta observar que como  $A$  é aberto,  $\alpha_1$  está no interior de  $\mathcal{F}(A)$ , assim  $\alpha_1 \cap \alpha_2$  também está no interior de  $\mathcal{F}(A)$  e do argumento anterior, existe uma vizinhança  $W$  de  $\alpha_2$  tal que  $\alpha_2 \subset W \subset \mathcal{F}(A)$ . Repetindo esse processo  $k - 1$  vezes, provamos por indução que  $\alpha_k$  está no interior de  $\mathcal{F}(A)$  e conseqüentemente que  $\mathcal{F}(A)$  é aberto.  $\square$

Em geral a projeção  $\pi$  não é fechada. Quando isso acontece, cada folha  $F$  de  $\mathcal{F}$  é um subconjunto fechado de  $M$ , pois  $F = \pi^{-1}(\pi(x))$ , onde  $x \in F$ . A folheação da figura 2.7 é um exemplo onde  $\pi$  não é fechado, embora cada folha de  $\mathcal{F}$  seja um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.8.** Dizemos que um conjunto  $A \subset M$  é *invariante* pela folheação  $\mathcal{F}$ , quando a saturação de  $A$  em  $\mathcal{F}$  é  $A$ , isto é,  $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ .

**Teorema 2.9.** Seja  $A \subset M$  um subconjunto invariante por  $\mathcal{F}$ . Então seu interior  $\overset{\circ}{A}$ , seu fecho  $\bar{A}$  e o bordo  $\partial A$  também são invariantes por  $\mathcal{F}$ .

**Demonstração:** O conjunto  $\overset{\circ}{A}$  é caracterizado como sendo o maior conjunto aberto contido em  $A$ , ou seja, se  $B$  é um conjunto aberto tal que  $\overset{\circ}{A} \subset B \subset A$ , então  $B = \overset{\circ}{A}$ . Como  $\pi$  é aberto temos que,  $\pi^{-1}(\pi(\overset{\circ}{A})) = B$  é aberto. E como,  $\overset{\circ}{A} \subset B \subset A$ , sendo  $A$  invariante, conseqüentemente  $\overset{\circ}{A} = B = \pi^{-1}(\pi(\overset{\circ}{A}))$ . Observe agora que se  $A$  é invariante, então  $M - A$  também o é, assim  $int(M - A)$  é invariante. Por outro lado,  $int(M - A) = M - \bar{A}$ , ou,  $M - \bar{A}$  é invariante e conseqüentemente  $\bar{A}$  é invariante. Como  $\partial A = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ , segue que  $\partial A$  também é invariante.  $\square$

## 2.3 Holonomia de uma Folha

Durante esta seção,  $\mathcal{F}$  será uma folheação de  $M$  e  $M$  é uma variedade diferenciável. Nessa seção definiremos e daremos uma noção sobre holonomia de uma folha  $F$  de  $\mathcal{F}$ . Para mais informações ver [2].

Sejam  $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow F$  um caminho contínuo e  $\Sigma_0, \Sigma_1$  pequenas seções transversais de  $\mathcal{F}$  de dimensão  $n$  passando por  $p_0 = \gamma(0)$  e  $p_1 = \gamma(1)$ ,

respectivamente. Definindo uma aplicação local entre  $\Sigma_2$  e  $\Sigma_1$  “ao longo” de folhas de  $\mathcal{F}$ , “sobre” o caminho  $\gamma$  levando  $p_0$  para  $p_1$ .

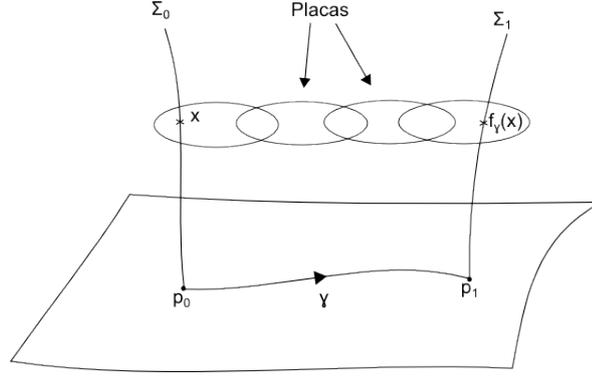


Figura 2.8: Holonomia de uma Folha através de Placas

Segue do Lema 2.6 que existe uma sequência de cartas locais  $(U_i)_{i=0}^k$  e uma partição de  $[0, 1]$ ,  $0 = t_0 < \dots < t_{k+1} = 1$  tais que se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  então  $U_i \cup U_j$  está contido numa carta local de  $\mathcal{F}$  e  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ . Dizemos então que existe uma **cadeia subordinada a  $\gamma$**  ou, por simplicidade, que  $(U_i)_{i=0}^k$  é uma cadeia subordinada a  $\gamma$ .

Para cada  $0 < i < k + 1$  fizemos uma seção transversal a  $\mathcal{F}$ ,  $D(t_i) \subset U_{i-1} \cap U_i$  homeomorfa a um disco de dimensão  $n$  passando por  $\gamma(t_i)$ . Coloquemos também  $D(0) = \Sigma_0$  e  $D(1) = \Sigma_1$ . Então para cada  $x \in D(t_i)$  suficientemente próximo de  $\gamma(t_i)$  a placa de  $U_i$  que passa por  $x$  intercepta  $D(t_{i+1})$  num único ponto  $f_i(x)$ .

O domínio da aplicação  $f_i$  contém um disco  $D'_i \subset D(t_i)$  contendo  $\gamma(t_i)$ .

Daí, podemos ver que a composição

$$f_\gamma = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_0$$

Está bem definida numa vizinhança de  $p_0 \in \Sigma_0$ . Chamaremos  $f_\gamma$  de **aplicação de holonomia** associada a  $\gamma$ .

**Definição 2.10.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $x \in X$ . No conjunto  $X = \{f : V \rightarrow Y\}$ , onde  $f$  é uma aplicação e  $V$  é uma vizinhança de  $x$ , introduzimos a relação de equivalência  $R : fRg$  se existe uma vizinhança  $W$  de  $x$  tal que  $f|_W = g|_W$ .*

Com isso, define-se o grupo  $Hol(F, p_0)$ .

**Definição 2.11.** *Um subgrupo  $Hol(F, p_0) = \Phi(\pi_1(F, p_0))$  de  $G(\Sigma_0, p_0)$  é chamado **grupo de holonomia** de  $F$  em  $p_0$ . Dados  $p_0, p_1 \in F$ , quaisquer caminho  $\alpha : I \rightarrow F$  com  $\alpha(0) = p_0$  e  $\alpha(1) = p_1$  induz um isomorfismo*

$$\alpha^* : Hol(F, p_0) \rightarrow Hol(F, p_1)$$

onde  $\alpha^*(\Phi[\mu]) = \varphi_\alpha \circ \Phi[\mu] \circ \varphi_{\alpha^{-1}}$ . Desta maneira podemos falar do **grupo de holonomia** de  $F$  como sendo qualquer grupo isomorfo a  $\text{Hol}(F, p_0)$ . Para simplificar notação, às vezes confundiremos um elemento da holonomia com um dos seus representantes.

A holonomia de uma folha  $F$  também pode ser definida usando uma fibração transversal a  $F$ . Como mostra o seguinte resultado.

**Lema 2.12.** *Seja  $F$  uma folha de  $\mathcal{F}$  e  $K \subset F$  um subconjunto compacto. Existem vizinhanças  $U \supset W$  de  $K$ ,  $U$  aberto em  $M$  e  $W$  aberto em  $F$  e uma retração de classe  $C^r$   $\pi : U \rightarrow W$  tal que para qualquer  $x \in W$ ,  $\pi^{-1}(x)$  é transversal a  $\mathcal{F}/U$ .*

**Demonstração:** Como  $K \subset F$  é compacto, então existe uma superfície induzida  $W$  formada por uma união finita de placas de  $\mathcal{F}$ , tal que,  $K \subset W$ . Seja  $\pi : \tilde{W} \rightarrow W$  uma vizinhança tubular de  $W$ . Como cada fibra  $\pi^{-1}(y)$ ,  $y \in W$  encontra  $W$  transversalmente somente em  $y$ , vemos que se  $x \in \pi^{-1}(y)$  estiver suficientemente perto de  $y$ , então  $\pi^{-1}(y)$  encontra a folha de  $\mathcal{F}$  passando por  $x$  transversalmente à  $x$ . Podemos então obter uma vizinhança  $U \subset \tilde{W}$  tal que para qualquer  $y \in U \cap F$ ,  $\pi^{-1}(y)$  encontra  $\mathcal{F}/U$  transversalmente.  $\square$

# Capítulo 3

## Fluxo Anosov - Grupo Fundamental

### 3.1 Fluxos Anosov

Nesta seção vamos definir alguns conceitos e apresentar alguns resultados básicos sobre sistemas dinâmicos, em especial a noção de fluxo Anosov. Para maiores detalhes sobre este tópico ver [3],[4],[13], [22].

#### 3.1.1 Campo de Vetores

**Definição 3.1.** Um *campo de vetores* em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma aplicação contínua  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tal campo define uma EDO autônoma:  $x' = X(x)$ .

**Definição 3.2.** Um *fluxo* é uma aplicação,  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ , tal que:

1.  $\varphi(0, p) = p, \forall p \in M$ .
2.  $\varphi(t + s, p) = \varphi(t, \varphi(s, p)), \forall s, t \in \mathbb{R}, \forall p \in M$ .

Denotamos por  $\varphi_t$  ou  $X_t$  o fluxo associado ao campo  $X$ , e escrevemos  $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$ .

**Definição 3.3.** Uma *órbita* de um ponto  $p \in M$  com relação a  $\varphi$  é o conjunto

$$\mathcal{O}(p) = \{\varphi_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$$

A **órbita positiva** e a **órbita negativa** de  $p \in M$  com relação a  $\varphi_t$  são, respectivamente, os conjuntos,

$$\mathcal{O}^+(p) = \{\varphi_t(p) : t \geq 0\} \text{ e } \mathcal{O}^-(p) = \{\varphi_t(p) : t \leq 0\}$$

**Exemplo 3.4.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ , um campo  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), cujas órbitas são espirais exteriores e interiores ao círculo  $C$  de centro na origem e raio 1.

Para,  $f_1(x, y) = y + x(1 - x^2 - y^2)$  e  $f_2(x, y) = -x + y(1 - x^2 - y^2)$ , obtemos a seguinte figura. Usando coordenadas polares, podemos transformar  $f_1$  e  $f_2$  de tal forma que temos o gráfico abaixo:

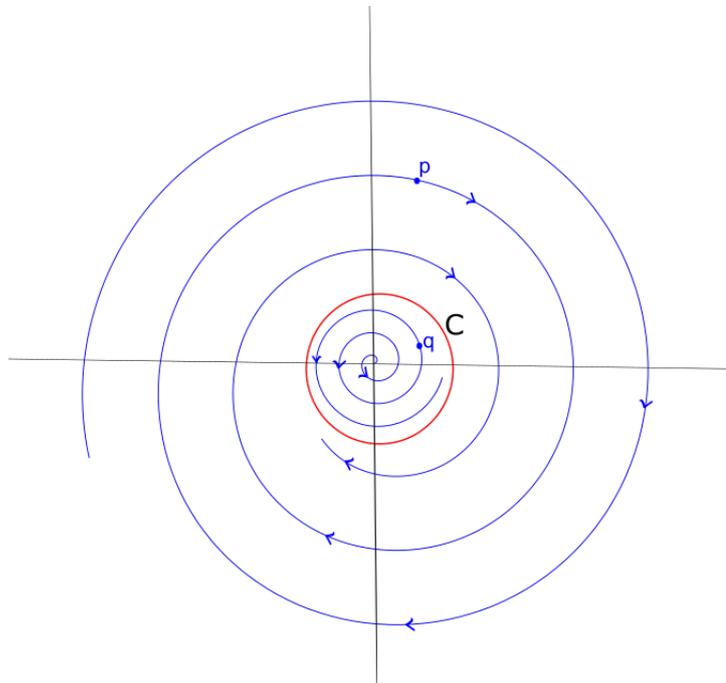


Figura 3.1: Campo de Vetores

**Definição 3.5.** Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores. Um ponto  $p \in U$  tal que  $X(p) = 0$  é dito **ponto singular** ou **singularidade** de  $X$ . Se  $X(p) \neq 0$ ,  $p$  é dito **ponto regular** de  $X$ .

### 3.1.2 Equivalência e conjugação de campos vetoriais

**Definição 3.6** (Equivalência de campos). Sejam  $X_1$  e  $X_2$  campos vetoriais de  $\mathbb{R}^n$ ,  $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diz-se que  $X_1$  é topologicamente equivalente a  $X_2$  (resp.  $C^k$ -equivalente) quando existe um homeomorfismo (resp., um difeomorfismo  $C^k$ )  $h : U_1 \rightarrow U_2$  que leva órbita de  $X_1$  em órbita de  $X_2$

preservando orientação. Mais precisamente, se  $p \in U_1$  e  $\gamma_1(p)$  é a órbita orientada de  $X_1$  passando por  $p$ , então  $h(\gamma_1(p))$  é a órbita orientada  $\gamma_2(h(p))$  de  $X_2$  passando por  $h(p)$ .

**Definição 3.7** (Conjugação de campos). *Sejam  $X$  e  $Y$  campos vetoriais de  $\mathbb{R}^n$ ,  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e sejam  $\varphi : D \rightarrow U$  e  $\psi : \hat{D} \rightarrow V$  os fluxos associados, respectivamente, a  $X$  e  $Y$ . Diz-se que  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$  (resp.  $C^k$ -conjugado) quando existe um homeomorfismo (resp., um difeomorfismo  $C^k$ )  $h : U \rightarrow V$  tal que  $h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ ,  $\forall (t, x) \in D$ . A aplicação  $h$  é dita uma conjugação topológica (resp.  $C^k$ -conjugação) entre  $X$  e  $Y$ .*

**Exemplo 3.8.** *Seja  $X : U \rightarrow E$  um campo de classe  $C^1$ , completo, isto é, definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Daí, fixado  $t \in \mathbb{R}$ , o difeomorfismo tempo  $t$ , dado por  $h(\cdot) := \varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$  conjugua  $X$  com ele mesmo. De fato, pela definição de fluxo, vale*

$$\begin{aligned} h(\varphi_s(x)) &= \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x) = \varphi_{s+t}(x) \\ &= \varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_s(h(x)), \forall s \in \mathbb{R}, \forall x \in U. \end{aligned}$$

No caso em que  $X$  não é completo, tal difeomorfismo tempo  $t$  está definido somente em um subconjunto aberto  $V_t \subset U$ , conjugando então  $X|_{V_t}$  e  $X|_{\varphi_t(V_t)}$ .

**Lema 3.9.** *Sejam  $U \subset E$ ,  $V \subset \hat{E}$  abertos em espaços de Banach  $E, \hat{E}$  e sejam  $X : U \rightarrow E$ ,  $Y : V \rightarrow \hat{E}$  campos de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $h : U \rightarrow V$  um homeomorfismo de classe  $C^1$  (com a inversa  $h^{-1}$  não necessariamente diferenciável). Então,  $h$  é uma conjugação entre  $X$  e  $Y$  se, e somente se,*

$$Dh_p \cdot X(p) = Y(h(p)); \forall p \in U.$$

Em particular, se  $h$  for um difeomorfismo de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , então  $h$  será uma  $C^k$  conjugação se, e somente se, satisfizer a fórmula acima.

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Sejam  $\varphi, \psi$  respectivamente os fluxos de  $X$  e  $Y$ . Dado  $p \in U$ , defina  $\hat{\psi}(t) := h(\varphi_1(t, p))$ . Então  $\hat{\psi}$  é solução de  $\dot{x} = Y(x), x(0) = h(p)$ , pois  $\dot{\hat{\psi}}(t) = Dh(\varphi(t, p)) \cdot \frac{d\varphi(t, p)}{dt} = Dh(\varphi(t, p)) \cdot X(\varphi(t, p)) = Y(h(\varphi(t, p))) = Y(\hat{\psi}(t))$ . Portanto,  $h(\varphi(t, p)) = \psi(t, h(p)) \Rightarrow h$  é conjugação.

( $\Rightarrow$ ) Se  $h$  é conjugação, dado  $p \in U$ , tem-se  $h(\varphi(t, p)) = \psi(t, h(p))$ , derivando-se em relação a  $t$ , obtemos:

$$Dh(\varphi(t, p)) \cdot X(\varphi(t, p)) = Y(\psi(t, h(p))) \stackrel{\text{avaliando em } t=0}{\Rightarrow} Dh(p) \cdot X(p) = Y(h(p)).$$

□

**Exemplo 3.10.** *Seja  $h : U \rightarrow \tilde{U}$  um difeomorfismo entre abertos  $U$  e  $\tilde{U}$  contidos em espaços de Banach  $E$ ,  $\tilde{E}$  respectivamente e suponha que tenhamos definido a priori um campo  $Y : \tilde{U} \rightarrow \tilde{E}$ . Podemos definir de maneira única um campo  $X : U \rightarrow E$  que é conjugado a  $Y$  via  $h$ . E assim, pelo lema 3.9 um tal campo há de satisfazer à fórmula  $Dh(p) \cdot X(p) = Y(h(p))$ . Uma vez que  $h$  seja um difeomorfismo, para cada  $p \in U$ ,  $Dh(p)$  é um isomorfismo linear e portanto a fórmula acima determina de maneira única um campo  $X : U \rightarrow E$ . Nesse caso, o campo  $X$  é denominado o **pull-back** de  $Y$  via  $h$ .*

### 3.1.3 O Teorema do Fluxo Tubular

Iremos utilizar o lema 3.9 para classificar qualquer campo  $C^k$ ,  $k \geq 1$  na vizinhança de um ponto regular  $p$ . O Teorema do Fluxo Tubular irá nos garantir que dado um campo ele vai ser localmente  $C^k$  conjugado a um outro campo constante. Mas antes precisaremos de uma definição:

**Definição 3.11** (Seção transversal a um campo). *Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^k$   $k \geq 1$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$  também aberto. Uma aplicação diferenciável  $f : A \rightarrow U$  de classe  $C^k$  chama-se **seção transversal local** a  $X$  quando para qualquer  $a \in A$ ,  $Df(a) \cdot \mathbb{R}^{n-1}$  e  $X(f(a))$  geram o espaço  $\mathbb{R}^n$ .*

*Seja  $\Sigma = f(A)$  munido da topologia induzida por  $U$ . Se  $f : A \rightarrow \Sigma$  for um homeomorfismo, diz-se que  $\Sigma$  é uma **seção transversal** a  $X$ .*

**Exemplo 3.12.** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $p \in U$  com  $X(p) \neq 0$  e  $\{v_1, \dots, v_{n-1}, X(p)\}$  uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, devido a continuidade do campo  $X$ , a aplicação  $f : B(0, \delta) \rightarrow U$  dada por  $f(x_1, \dots, x_{n-1}) := p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot v_i$  é uma seção transversal de  $X$ .*

*De fato, para ver isso em detalhes basta notar que a matriz Jacobiana  $J_f$  de  $f$  é justamente a matriz cujas colunas são  $v_1, \dots, v_{n-1}$ . Os vetores  $v_1, \dots, v_{n-1}$  formam uma base do espaço vetorial  $Df(x) \cdot \mathbb{R}^{n-1}$ , qualquer que seja o ponto  $x$  fixado em  $B(0, \delta)$ . Considerando a função  $g : B(0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$g(x) := \det(v_1, \dots, v_{n-1}, X(f(x))) = \det(J_f(x), X(f(x))),$$

*temos que  $g$  é contínua, pois é composta de aplicações contínuas. Além disso, temos que  $g(0) \neq 0$ , o que pela continuidade de  $g$  implica que existe  $\delta > 0$  tal que  $g(x) \neq 0, \forall x \in B(0, \delta)$ . Mas isso implica que para tal  $\delta$ , os espaços  $Df(x) \cdot \mathbb{R}^{n-1}$  e  $X(f(x)), x \in B(0, \delta)$  geram o  $\mathbb{R}^n$ , e logo  $f$  é seção transversal.*

**Teorema 3.13** (Fluxo Tubular). *Seja  $p$  um ponto não singular de um campo  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ . Então, existe uma vinhança  $V$  de  $p$  em  $U$  e um difeomorfismo  $C^k$   $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow V$ , onde  $\varepsilon > 0$  e  $B$  é uma bola em  $\mathbb{R}^{n-1}$  tal que  $F$  é uma  $C^k$ -conjugação entre o campo constante  $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $Y \equiv (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  e o campo  $X|_V$ .*

**Demonstração:** Seja  $\varphi : D \rightarrow U$  o fluxo de  $X$ , e considere  $f : A \rightarrow U$  uma seção transversal local com  $A$  um aberto de  $\mathbb{R}^{n-1}$  contendo a origem, e  $f(0) = p$ . Defina  $D_A \subset \mathbb{R} \times A \subset \mathbb{R}^n$  como  $D_A := \{(t, u); (t, f(u)) \in D\}$ . Assim,  $D_A$  é aberto de  $\mathbb{R}^n$ , já que é pré-imagem de um aberto de  $\mathbb{R}^n$  através da função contínua  $f$  cujo domínio também é aberto.

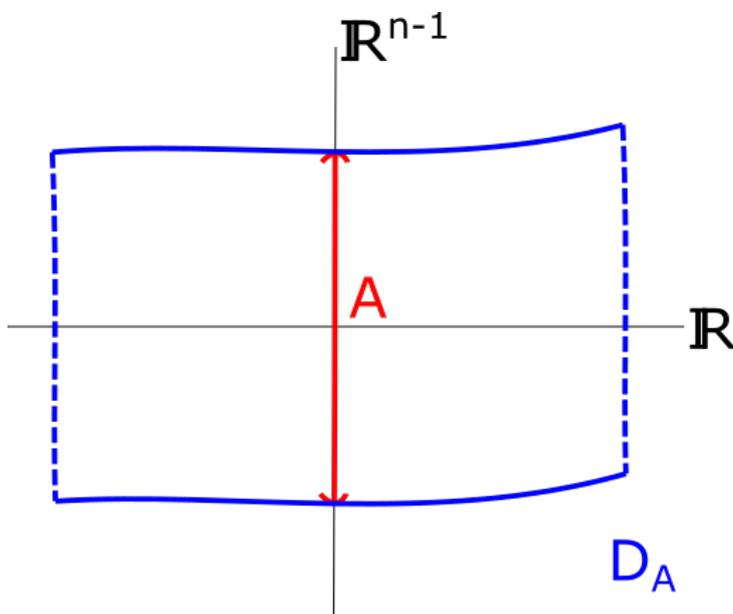


Figura 3.2: Conjunto  $D_A$

Definamos portanto  $\tilde{F} : D_A \rightarrow U$  por  $\tilde{F}(t, u) := \varphi(t, f(u))$ . Note que  $\tilde{F}$  aplica linhas paralelas (de fato, as curvas integrais do campo  $Y$ ) em curvas integrais de  $X$ .

Vamos mostrar que  $\tilde{F}$  é um difeomorfismo local em uma vizinhança de  $0 = (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Pelo teorema da função inversa, é suficiente provar que  $D\tilde{F}(0)$  é um isomorfismo. De fato,

$$\partial_t \tilde{F}(0) = \left. \frac{d\varphi(t, f(0))}{dt} \right|_{t=0} = X(\varphi(0, p)) = X(p),$$

e

$$\partial_u \tilde{F}(0) = (D_u \varphi(0, f(u)))|_{u=0} = D_u f(u)|_{u=0} = Df(0).$$

Portanto, a matriz Jacobiana de  $\tilde{F}$  em 0 é

$$(X(p) \quad Df(0))$$

Como  $f$  é seção transversal local, tal matriz é invertível, pois suas colunas geram o  $\mathbb{R}^n$ . Portanto,  $D\tilde{F}(0)$  é um isomorfismo linear, e pelo teorema da função inversa, existem  $\varepsilon > 0$  e uma bola  $B$  em  $\mathbb{R}^{n-1}$  com centro na origem tais que  $F := \tilde{F}|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}$  é um difeomorfismo sobre o aberto  $V = \tilde{F}((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$ .

Assim,

$$\begin{aligned} DF(t, u) \cdot Y(t, u) &= DF(t, u) \cdot (1, 0, \dots, 0) = \partial_1 F(t, u) = \frac{d\varphi(t, f(u))}{dt} = \\ X(\varphi(t, f(u))) &= X(F(t, u)) \stackrel{\text{lema 3.9}}{\cong} F \text{ é conjugação de } Y \text{ e } X|_V. \end{aligned}$$

□

### 3.1.4 Os conjuntos de $\omega$ -limite e $\alpha$ -limite

**Definição 3.14** ( $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite). *O conjunto de  $\omega$ -limite de um ponto  $p \in M$  é definido por:*

$$\omega(p) := \{q \in U, \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow +\infty \text{ quando } n \rightarrow +\infty \text{ e } \varphi_{t_n}(p) \rightarrow q\}.$$

Assim,  $\omega(p)$  é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita positiva de  $p$ . Analogamente, definimos o conjunto de  $\alpha$ -limite de um ponto  $p \in M$  dado por:

$$\alpha(p) := \{q \in U, \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ quando } n \rightarrow +\infty \text{ e } \varphi_{t_n}(p) \rightarrow q\}.$$

Então, o conjunto  $\alpha(p)$  é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita negativa de  $p$ .

**Exemplo 3.15.** *Tome o exemplo 3.4 como ilustração, observe que o conjunto  $\omega$ -limite de qualquer ponto arbitrário é o próprio  $C$ , e o conjunto  $\alpha$ -limite de qualquer ponto interno à  $C$  é somente a origem, e qualquer ponto externo à  $C$  é vazio. E em qualquer ponto em  $C$  os conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite são iguais e iguais ao próprio  $C$ .*

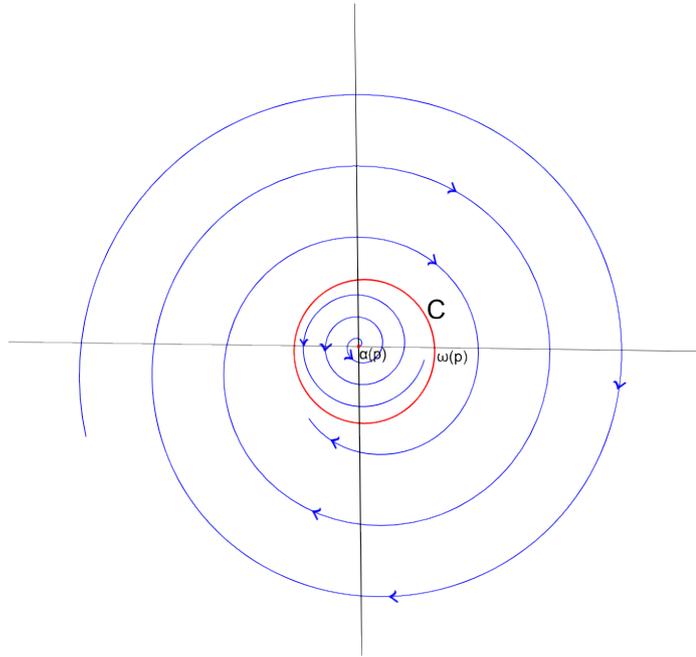


Figura 3.3: Conjunto Limite

Observe que o conjunto  $\alpha$ -limite da origem é o próprio ponto da origem, ou seja,  $\alpha(0,0) = (0,0)$  e o conjunto  $\omega$ -limite é o  $C$ , isto é,  $\omega(0,0) = C$ .

### 3.1.5 O Teorema de Grobman-Hartman

O teorema de Grobman-Hartman reduz o problema de classificar as conjugações locais de difeomorfismos em torno de pontos fixos hiperbólicos e de campos em torno de singularidades hiperbólicas ao de classificar as conjugações, respectivamente, de isomorfismos hiperbólicos e de campos lineares com singularidades hiperbólicas. Nem todas demonstrações dos resultados desta seção serão apresentadas, mas podem ser encontradas em [3].

**Definição 3.16** (Espectro de um operador linear). *Seja  $E$  um espaço vetorial normado complexo e seja  $A : E \rightarrow E$  um operador linear. O espectro de  $A$  é o conjunto*

$$sp(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - A) \text{ não é invertível.}\}$$

*Note que a definição do espectro de  $A$  não depende de qualquer métrica ou norma da qual  $E$  seja munido, mas apenas de  $A$ , se  $A - \lambda I$  é ou não sobrejetiva e injetiva.*

**Definição 3.17** (Ponto fixo hiperbólico). *Seja  $E$  um espaço de Banach. Um isomorfismo linear  $A \in \mathcal{L}(E)$  é dito **hiperbólico** se o espectro de  $A$  não intersecta*

a esfera  $S^1$ . Se  $E$  tem dimensão finita, isso é o mesmo que dizer que nenhum autovalor de  $A$  tem norma 1. Dado um difeomorfismo  $C^k$   $f : U \subset E \rightarrow E$ , um ponto fixo  $p \in U$  de  $f$  é dito **hiperbólico** se  $Df(p)$  é um isomorfismo hiperbólico.

**Exemplo 3.18.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por,  $f(x) = x^3 + p$ , onde  $p \in \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por,  $g(x) = \sqrt[3]{x} + p$

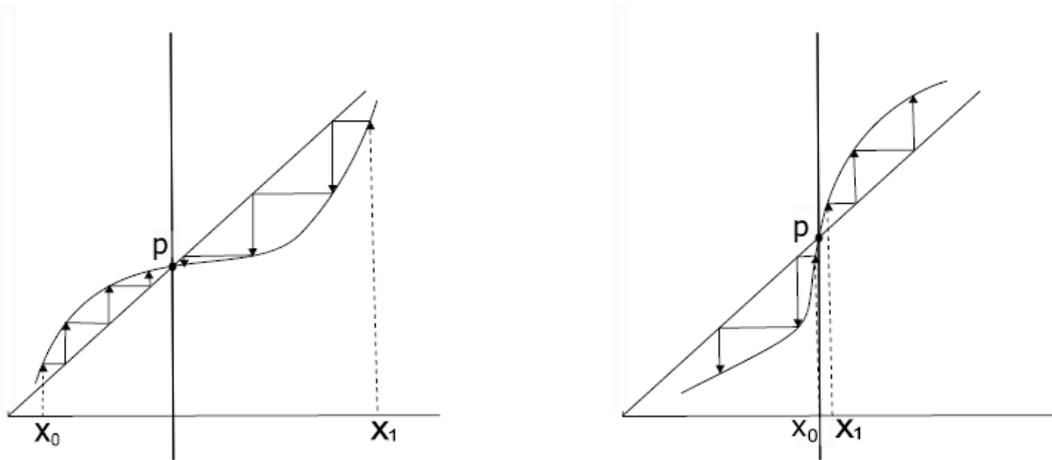


Figura 3.4: Ponto Fixo Atrator e Repulsor

Observe seus gráficos, podemos notar que no primeiro temos um ponto fixo hiperbólico atrator e no segundo um ponto fixo hiperbólico repulsor.

**Proposição 3.19** (Grobman-Hartman para difeomorfismos). *Seja  $f \in \text{Diff}^K(\mathcal{M})$  e  $p \in \mathcal{M}$  um ponto fixo hiperbólico de  $f$ . Seja  $A = Df_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ . Então existem vizinhanças  $V = V(p) \subset \mathcal{M}$ ,  $U = U(0)$  de  $T_p\mathcal{M}$  e um homeomorfismo  $h : U(0) \rightarrow V(p)$  tais que*

$$h \circ A = f \circ h$$

**Definição 3.20** (Singularidade hiperbólica). *Dado um campo de vetores  $C^k$   $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , uma singularidade  $p \in U$  de  $X$  é dita **hiperbólica** se a equação determinada pela sua parte linear  $DX(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$  é hiperbólica.*

**Proposição 3.21.**  *$A$  é um campo linear hiperbólico se, e somente se,  $e^A$  é um isomorfismo hiperbólico.*

**Demonstração:** Por hipótese,  $A$  é um campo linear hiperbólico. Seja  $\lambda \in \sigma(A)$ ,  $\lambda = \alpha + \beta i$  com  $\alpha \neq 0$ . Assim,

$$|e^\lambda| = |e^{\alpha + \beta i}| = |e^{\alpha(\cos\beta + i\sin\beta)}| = |e^\alpha| \cdot |\cos\beta + i\sin\beta| \neq 1.$$

□

A seguir enunciamos três lemas sem demonstração, cujas provas encontram-se em [3], que serão uteis para mostrar a proposição na versão para campos do Teorema de Grobman-Hartman.

**Lema 3.22.** *Seja  $X : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$  no aberto  $A$ , com  $0 \in A$  e  $X(0) = 0$  e seja  $L = DX(0)$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existem vizinhanças de 0,  $V \subset W \subset A$ , um campo  $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e uma constante  $K > 0$  tais que  $Y|_V = X|_V$ ,  $Y|_{\mathbb{R}^n - W} = L|_{\mathbb{R}^n - W}$ ,  $\|DY(x)\| \leq K$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e, sendo  $\psi_t$  o fluxo de  $Y$ ,  $\Phi_t$  o fluxo de  $L$  e  $\Phi = \psi_t - \varphi_t$ , vale ainda que  $\Phi_t \in C_b^1$  com  $\|\Phi_t\|_1 \leq \varepsilon$  para todo  $t \in [-2, 2]$ .*

**Lema 3.23.** *Dado  $L$  isomorfismo hiperbólico do espaço de Banach, existem  $\eta > 0$  e  $\delta > 0$  tais que para cada par  $\phi_1, \phi_2 \in C_b^1$  com  $\|\phi_1\|_1 < \eta$ ,  $\|\phi_2\|_1 < \eta$ , existe uma única  $u \in C_b^0$  com  $\|u\| < \delta$  tal que*

$$(I + u)(L + \phi_1) = (L + \phi_2)(I + u),$$

onde  $I$  é a identidade do espaço trabalhado. Também temos que a função  $(\phi_1, \phi_2) \in C_b^1 \times C_b^1 \rightarrow u \in C_b^0$  é contínua.

**Lema 3.24.** *Para  $L$  isomorfismo hiperbólico do espaço de Banach, existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $\phi \in C_b^1$  com  $\|\phi\|_1 < \varepsilon$  então  $L$  e  $L + \phi$  conjugam.*

**Proposição 3.25** (Grobman-Hartman para campos). *Considere  $A$  aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $X : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^1$  com um ponto  $p$  hiperbólico. Então existe  $V \subset A$  vizinhança de  $p$  e  $W \subset \mathbb{R}^n$  vizinhança de 0 tal que  $X|_V$  é topologicamente conjugado a  $L|_W$ , onde  $L = DX(p)$ .*

**Demonstração:** Basta mostrarmos para  $p = 0$ . Caso  $p \neq 0$  utilizamos o campo auxiliar de classe  $C^1$ ,  $G(x) = X(x+p)$ . Pelo lema 3.22, dado  $\varepsilon_1 > 0$ , encontramos um campo  $Y = L + \phi$ , de classe  $C^1$ , com fluxo  $\psi_t$  tal que  $\Psi_t = \psi_t - \varphi_t \in C_b^1$  e  $\|\Psi_t\|_1 < \varepsilon_1$  para todo  $t \in [-2, 2]$ , sendo  $\varphi_t = e^{tL}$  o fluxo de  $L$ . Sabemos, pela proposição 3.21 que  $e^L$  é um isomorfismo hiperbólico. Assim, se tomarmos  $\varepsilon_1 > 0$  tal que  $\varepsilon_1 < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é dado pelo lema 3.24, teremos uma única  $u \in C_b^0$  tal que  $h = I + u$  é um homeomorfismo e  $h(e^L + \Psi_1) = e^L h$ , ou seja,

$$h\psi_1 = e^L h. \tag{3.1}$$

Como localmente, em torno de  $p = 0$ ,  $\psi_t$  é o fluxo de  $X$ , o teorema estará provado se mostrarmos que  $h\psi_t = e^{tL} h$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Definamos  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$H(x) = \int_0^1 e^{-sL} h\psi_s(x) ds$ . Vemos que  $H$  é contínua, e ainda  $H\psi_t = e^{tL}H$ , para todo  $t \in [0, 1]$ . De fato, fazendo a mudança  $s + t = \xi + 1$ , temos:

$$\begin{aligned} e^{-tL}H\psi_t &= \int_0^1 e^{-(t+s)L} h\psi_{t+s} ds = \int_{t-1}^t e^{(-\xi-1)L} h\psi_{\xi+1} d\xi \\ &= \int_{t-1}^0 e^{(-\xi-1)L} h\psi_{\xi+1} d\xi + \int_0^t e^{-\xi L} e^{-L} h\psi_1(\psi_\xi) d\xi \\ &= \int_{t-1}^0 e^{(-\xi-1)L} h\psi_{\xi+1} d\xi + \int_0^t e^{-\xi L} h\psi_\xi d\xi, \end{aligned}$$

pois  $e^{-L}h\psi_1 = h$  por 3.1. Para  $\xi + 1 = \sigma$ , temos:

$$e^{-tL}H\psi_t = \int_t^1 e^{-\sigma L} h\psi_\sigma d\sigma + \int_0^t e^{-\xi L} h\psi_\xi d\xi.$$

Logo,

$$e^{-tL}H\psi_t = \int_0^1 e^{-sL} h\psi_s ds = H.$$

Agora devemos mostrar que  $H = h$ . Para isso mostremos, inicialmente, que  $H = I + v$  para algum  $v \in C_b^0$ . De fato:

$$\begin{aligned} H - I &= \int_0^1 [e^{-tL}h\psi_t - e^{-tL}e^{tL}] dt = \int_0^1 e^{-tL}(\psi_t + u\psi_t - e^{tL}) dt \\ &= \int_0^1 e^{-tL}(\Psi_t - u\psi_t) dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|H - I\| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|H(x) - x\| \leq \int_0^1 e^{\|L\|t} (\|\Psi_t\|_1 + \|u\|) dt \\ &= e^{\|L\|} (\varepsilon_1 + \|u\|). \end{aligned}$$

Então, temos que  $H = I + v$  e  $H\psi_1 = e^L H$ . Além disso, podemos tomar  $\varepsilon_1 > 0$  tal que  $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \varepsilon_2, \frac{\delta}{3e^{\|L\|}}\}$  onde  $\delta$  satisfaz a condição de unicidade do lema 3.23 e  $\varepsilon_2$  é tal que

$$\|\Psi_1\|_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow \|u\| < \frac{\delta}{2e^{\|L\|}}.$$

Assim,

$$\|v\| \leq e^{\|L\|} \left( \frac{\delta}{3e^{\|L\|}} + \frac{\delta}{2e^{\|L\|}} \right) < \delta,$$

e daí, pela unicidade do lema 3.23,  $u = v$ . Finalmente só resta mostrar que  $H\psi_t = e^{tL}H$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Escrevendo  $t = s + m$ , onde  $m \in \mathbb{Z}$  e  $s \in [0, 1]$ , temos

$$H\psi_t = H\psi_s\psi_m = e^{sL}H\psi_m = e^{sL}H\psi_1\psi_{m-1} = e^{sL}e^L H\psi_{m-1} = \dots = e^{(s+m)L}H,$$

o que prova o teorema. □

### 3.1.6 O Teorema da Variedade Estável

**Definição 3.26** (Conjunto estável de um ponto). *Seja  $f : W \subset M \rightarrow M$  um homeomorfismo de um subconjunto aberto  $W$  de um espaço métrico  $M$ . Dado  $p \in W$ , o **conjunto estável** de  $p$  é definido como*

$$W^s(p) := \{x \in W, d(f^n(x), f^n(p)) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

*Se  $p$  é um ponto fixo de  $f$ , então seu conjunto estável é constituído dos pontos  $x \in W$  tais que  $f^n(x) \rightarrow p$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .*

**Definição 3.27.** *Seja  $p \in E$  e seja  $f : U \subset E \rightarrow V$  um difeomorfismo, onde  $U, V$  são subconjuntos abertos de um espaço de Banach  $E$ .*

*Fixada uma vizinhança  $B$  da órbita de  $p$ , com  $B \subset U \cap V$ , definimos o conjunto estável local de  $p$  como*

$$W_{loc}^s(p) := \{q \in B, f^n(q) \in B, \forall n \geq 0 \text{ e } d(f^n(q), f^n(p)) \rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow +\infty\}$$

*Analogamente, definimos o conjunto instável local de  $p$*

$$W_{loc}^u(p) := \{q \in B, f^{-n}(q) \in B, \forall n \geq 0 \text{ e } d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) \rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow +\infty\}$$

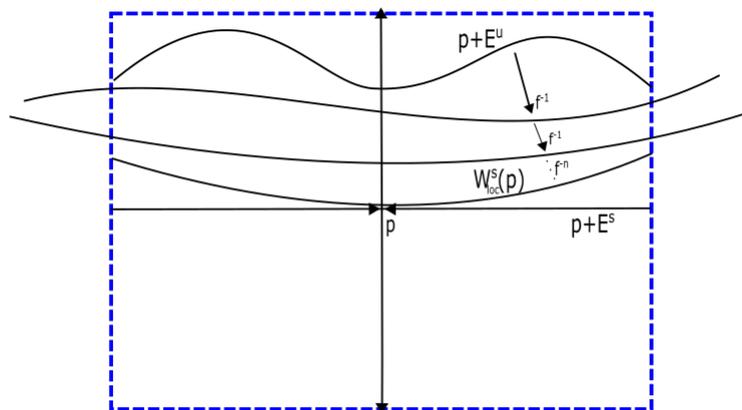


Figura 3.5: Conjunto Estável

**Definição 3.28.** *Dizemos que  $x$  é **recorrente** se  $x \in \omega(x)$ .*

**Observação 3.29.** *Quando  $M$  é uma variedade compacta, sabemos que o conjunto  $\omega$ -limite é não-vazio, compacto e conexo. Mais ainda, pelo Lema de*

Zorn mostra-se que o conjunto dos pontos recorrentes  $\{x \in M; x \in \omega(x)\}$  é não-vazio, em outras palavras, todo conjunto  $\omega$ -limite em uma variedade compacta possui ao menos um ponto recorrente.

**Exemplo 3.30.** Se  $A \in GL(\mathbb{R}^m)$  é um isomorfismo hiperbólico existe uma decomposição invariante  $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$  tal que se  $q \in E^s$  então  $A^n(q) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , enquanto que se  $q \in E^u$ ,  $A^{-n}(q) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto,  $W^s(0) = E^s$  e  $W^u(0) = E^u$ .

**Definição 3.31** (Conjunto hiperbólico). Seja  $\varphi$  um fluxo  $C^1$  em uma variedade  $M$  possivelmente com bordo. Um conjunto compacto  $\varphi$ -invariante  $\Lambda \subset M$  é **hiperbólico** se existem uma decomposição contínua e invariante do fibrado tangente  $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^0 \oplus E_\Lambda^u$  sobre  $\Lambda$  e constantes  $C, \lambda > 0$  tais que:

1.  $E_\Lambda^s$  é contrativo, isto é

$$\|D\varphi_t(x)v_x^s\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v_x^s\| \text{ para } v_x^s \in E_x^s, x \in \Lambda \text{ e } \forall t \geq 0.$$

2.  $E_\Lambda^u$  é expansivo, isto é

$$\|D\varphi_t(x)v_x^u\| \geq C^{-1}e^{\lambda t}\|v_x^u\| \text{ para } v_x^u \in E_x^u, x \in \Lambda \text{ e } \forall t \geq 0.$$

3.  $E_\Lambda^0$  é a direção do fluxo, isto é,  $E_x^0$  é tangente a curva  $\{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$  para todo  $x \in \Lambda$ .

**Definição 3.32.** Os conjuntos:

$$W^{ss}(p) = \{q \in M; d(\varphi_t(p), \varphi_t(q)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

e

$$W^{uu}(p) = \{q \in M; d(\varphi_t(p), \varphi_t(q)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

são chamados respectivamente de **variedade estável e instável forte do ponto  $p$  para o campo de vetores  $X$** . Onde  $d$  denota a métrica Riemanniana da variedade  $M$ .

Os resultados a seguir serão enunciados sem demonstração, cujas provas encontram-se em [3].

**Proposição 3.33** (Teorema da Variedade Estável para difeomorfismos). Sejam  $U$  e  $V$  abertos contidos em um espaço de Banach  $E$  e  $f : U \rightarrow V$  um difeomorfismo de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Se  $p \in U$  é um ponto fixo hiperbólico de  $f$ , então o conjunto

estável  $W^s(p)$  de  $p$  é uma variedade imersa de mesma dimensão que  $E^s$ , chamada a variedade estável (global) de  $p$ . Ademais, existem  $r > 0$  e bolas  $B^s = \overline{B(p, r)} \cap E^s$  e  $B^u = \overline{B(p, r)} \cap E^u$  tais que o conjunto estável  $W_{loc}^s(p)$  em  $\overline{B(p, r)}$ , neste caso chamado de variedade estável local, se escreve como o gráfico de uma aplicação  $g : B^s \rightarrow B^u$  de classe  $C^k$  com as seguintes propriedades:

1. O gráfico de  $g$  é igual ao maximal (positivamente) invariante

$$\bigcap_{j=0}^{+\infty} f^{-j}(B^s \times B^u),$$

sendo portanto invariante por iterados positivos de  $f$ .

2.  $W^s(p) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W_{loc}^s(p))$ .
3.  $g$  possui derivada tal que  $Lip(g) = \sup_{x \in B^s} \{\|Dg(x)\|\} < 1$ .
4. A restrição de  $f$  ao gráfico de  $g$  é uma contração.
5. O gráfico de  $g$  é tangente a  $E^s$  em  $p$ .

Difeomorfismos e campos se relacionam principalmente de duas maneiras:

- Se  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo de classe  $C^1$  com fluxo  $\varphi : D \rightarrow U$ , e  $V := \{x \in U; (1, x) \in D\}$ , então  $\varphi_1 : V \rightarrow U$  dada por  $\varphi_1(x) := \varphi(1, x)$  é um difeomorfismo sobre sua imagem, chamado de tempo 1 do campo  $X$ . Usamos deste difeomorfismo para provarmos o Teorema de Grobman-Hartman em sua versão para singularidades hiperbólicas de campos. Naquela ocasião, em particular, observamos que  $p \in U$  é uma singularidade hiperbólica de  $X$  se, e somente se,  $p$  é um ponto fixo hiperbólico para  $\varphi_1$ .
- Se  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo de classe  $C^1$  exibindo uma órbita periódica  $\gamma$ , dado  $p \in \gamma$  e uma **seção transversal** a  $X$ ,  $\Sigma \ni p$ , a transformação de Poincaré  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  é um difeomorfismo de uma vizinhança  $\Sigma_0$  de  $p$  em  $\Sigma$ , sobre sua imagem  $\pi(\Sigma_0)$ . Neste caso,  $p$  é um ponto fixo de  $\pi$ .

Desse modo, o Teorema da Variedade Estável para difeomorfismos dá origem a duas versões para campos:

**Proposição 3.34** (Variedade Estável para Singularidades Hiperbólicas.). *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  um campo de classe  $C^k$  exibindo uma singularidade hiperbólica  $p \in U$ . Designemos por  $\varphi$  o fluxo de  $X$ . Então o conjunto estável de  $p$*

$$\mathcal{W}^s(p) := \{x \in U; \varphi(t, x) \rightarrow p, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

é uma variedade de classe  $C^k$  de dimensão igual ao índice de  $p$ , e injetivamente imersa em  $\mathbb{R}^m$ .

**Definição 3.35** (Órbita periódica hiperbólica.). *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  um campo de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , exibindo uma órbita periódica  $\gamma$ .  $\gamma$  é dita **hiperbólica** se dado  $p \in \gamma$  e uma seção transversal  $\Sigma \ni p$ , então  $p$  é ponto fixo hiperbólico da transformação de Poincaré  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ , onde  $\Sigma_0$  é uma vizinhança de  $p$  em  $\Sigma$ .*

**Definição 3.36** (Conjunto estável de uma órbita.). *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  um campo de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Seja  $\gamma \subset U$  uma órbita correspondente a uma solução cujo domínio é  $\mathbb{R}$ . Então, o **conjunto estável de  $\gamma$**  é definido como*

$$W^s(\gamma) := \{x \in U; d(\varphi(t, x), \gamma) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

**Proposição 3.37** (Variedade Estável para órbitas periódicas hiperbólicas.). *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  um campo de classe  $C^k$  e  $\gamma \subset U$  uma órbita periódica hiperbólica. Então o conjunto estável de  $\gamma$*

$$\mathcal{W}^s(\gamma) := \{x \in U; d(\varphi(t, x), \gamma) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

é uma variedade de classe  $C^k$  de dimensão igual ao índice de qualquer transformação de Poincaré  $\pi$  associada a  $\gamma$  mais 1, e injetivamente imersa em  $\mathbb{R}^m$ .

### 3.1.7 Difeomorfismo de Anosov

**Definição 3.38** (Difeomorfismo de Anosov). *Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  é dito Anosov se existe uma decomposição contínua  $TM = E^u \oplus E^s$  tal que*

1. Ambos  $E^s$  e  $E^u$  são invariantes por  $Df$ , ou seja,  $Df(x)(E_x^\sigma) = E_{f(x)}^\sigma, \sigma = u, s, \forall x \in M$
2. Existem constantes  $C > 0$  e  $0 < \lambda < 1$  tais que para todo  $x \in M$

$$\begin{aligned} |Df^n(x)(v)| &\leq C\lambda^n|v|, v \in E_x^s, n > 0 \\ |Df^{-n}(x)(v)| &\leq C\lambda^n|v|, v \in E_x^u, n > 0 \end{aligned}$$

O exemplo a seguir é um protótipo de difeomorfismos Anosov

**Exemplo 3.39.** *Consideremos a aplicação  $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada pela matriz*

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é igual a 1 e  $\hat{A}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ . A expressão em coordenadas dessa aplicação é  $\hat{A}(x, y) = (2x + y, x + y)$ . Definimos a seguinte relação de equivalência em  $\mathbb{R}^2$ :

$$(x, y) \sim (x', y'), \text{ se } (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2.$$

Assim,  $\hat{A}(x, y) \sim \hat{A}(x', y')$ . Isto define uma aplicação  $A : \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , dada por  $A(x, y) = (2x + y, x + y)(\text{mod } 1)$ , e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\hat{A}} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Neste caso,  $A$  é um difeomorfismo Anosov. De fato,  $\pi$  é um difeomorfismo local, basta então mostrar que  $\hat{A}$  satisfaz a condição Anosov, uma vez que as derivadas de  $\hat{A}$  e de  $A$  diferem apenas por isomorfismos. Os autovalores de  $\hat{A}$  são:

$$\lambda_u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

ou seja,  $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$ . Seja  $E_0^\sigma$  o auto espaço associado a  $\lambda_\sigma$  ( $\sigma = u, s$ ). Para todo  $z \in \mathbb{R}^2$  definimos  $E_z^\sigma = z + E_0^\sigma$ . Uma vez que  $\mathbb{R}^2 = E_0^s \oplus E_0^u$ , temos

$$T_z \mathbb{R}^2 = E_z^s \oplus E_z^u, \forall z \in \mathbb{R}^2$$

É conhecido que os campos de planos  $E_x^s$  e  $E_x^u$  da definição de difeomorfismo Anosov são integráveis e definem folheações  $\mathcal{F}^s$  (folheação estável) e  $\mathcal{F}^u$  (folheação instável) respectivamente (uma demonstração pode ser obtida em [13] por exemplo). Denotamos por  $\mathcal{F}^\sigma(x_0)$  ( $\sigma = u, s$ ) uma folha passando por  $x_0$ . As folheações são invariantes pelo difeomorfismo, ou seja  $f(\mathcal{F}^\sigma(x_0)) = \mathcal{F}^\sigma(f(x_0))$  ( $\sigma = u, s$ ).

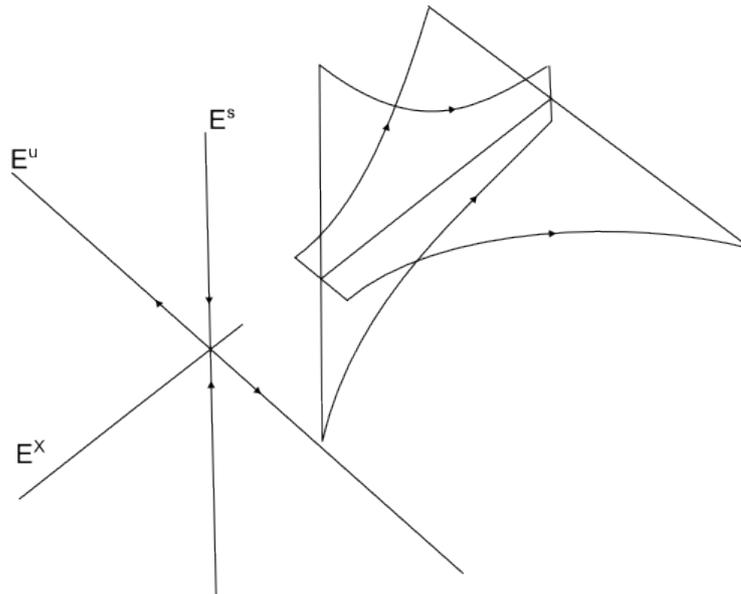


Figura 3.6: Aspecto local de um fluxo de Anosov

**Exemplo 3.40.** Seja  $f : S^2 \rightarrow S^2$  o difeomorfismo induzido no tempo 1 pelo fluxo do campo de vetores  $X$  cuja estrutura de órbitas é a seguinte: o polo norte  $p_N$  é única singularidade no hemisfério norte, e o polo sul  $p_S$  é uma sela cujas variedades invariantes formam uma “figura oito” que envolve as duas outras singularidades.

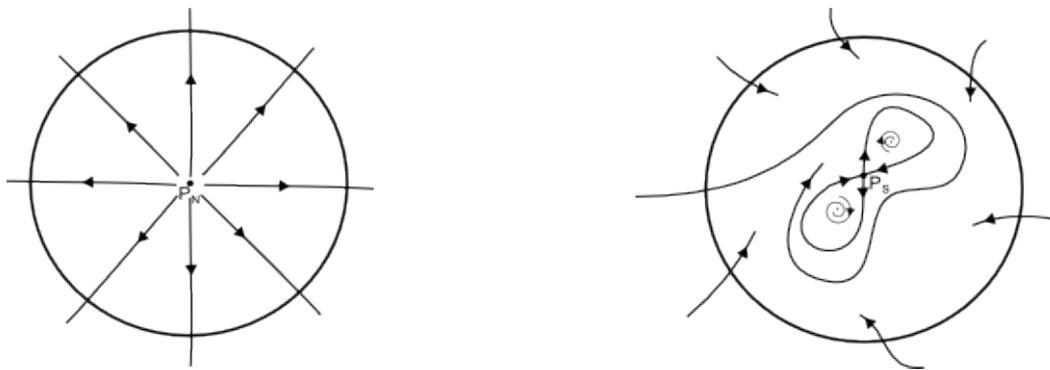


Figura 3.7: Hemisfério Norte e Sul

Neste exemplo a variedade estável de  $p_S$  não é uma subvariedade mergulhada de  $S^2$ , devido a interseção que apresenta. Essa figura 3.7 foi retirada do livro da referencia [20].

## 3.2 Grupo Fundamental

### 3.2.1 Homotopia

**Definição 3.41** (Aplicações homotópicas). *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos. Duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  dizem-se **homotópicas** quando existe uma aplicação contínua*

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

*tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . A aplicação  $H$  chama-se então uma **homotopia** entre  $f$  e  $g$ . Escreve-se, neste caso,  $H : f \simeq g$ , ou simplesmente  $f \simeq g$ .*

A homotopia é pensada como um processo de deformação contínua da aplicação  $f$  na aplicação  $g$ . O parâmetro  $t$  pode ser imaginado como sendo o tempo do processo de deformação.

**Exemplo 3.42.** *Duas aplicações constantes  $f, g : X \rightarrow Y$ , onde  $Y$  é conexo,  $f(x) = p$ ,  $g(x) = q$ , são homotópicas. De fato, tomando  $H(x, t) = (1 - t)p + tq$ , daí note que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ .*

Nem sempre duas aplicações constantes são homotópicas, observe o exemplo abaixo.

**Exemplo 3.43.** *Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  dadas por  $f(x) = 1, g(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Como 1 e  $-1$  pertencem a componentes conexas distintas de  $\mathbb{R} - \{0\}$ , segue que  $f$  e  $g$  não são homotópicas. Com efeito, se  $H : f \simeq g$ , então  $a : I \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ , dado por  $a(t) = H(0, t)$ , é um caminho ligando  $-1$  e  $1$ . Entretanto, se considerarmos  $f$  e  $g$  como sendo aplicações de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , então vale que  $f \simeq g$ . A diferença para o exemplo anterior é a conexidade do espaço imagem.*

**Proposição 3.44.** *A relação de homotopia,  $f \simeq g$ , é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ .*

#### Demonstração:

1. Reflexiva. Para toda  $f : X \rightarrow Y$  contínua, a aplicação  $F : X \times I \rightarrow Y$ , dada por  $F(x, t) = f(x)$ , é uma homotopia entre  $f$  e  $f$ , portanto,  $\simeq$  é uma relação reflexiva.

2. Simétrica. Definamos  $H : M \times I \rightarrow N$  por  $H(x, t) = F(x, 1 - t)$ , obtemos uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . Desta forma,  $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$ , isto é, a relação de homotopia é simétrica.
3. Transitiva. Se  $F : f \simeq g$  e  $H : g \simeq h$  então definamos,  $K : X \times I \rightarrow Y$  pondo  $K(x, t) = F(x, 2t)$  se  $0 \leq t \leq 1/2$  e  $K(x, t) = H(x, 2t - 1)$  se  $1/2 \leq t \leq 1$ . A aplicação  $K$  é uma homotopia entre  $f$  e  $h$ . Logo,  $f \simeq g, g \simeq h$ , ou seja, a relação  $\simeq$  é transitiva.

□

**Definição 3.45.** *As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são denominadas **classes de homotopia**. Uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  chama-se uma equivalência homotópica quando existe  $g : Y \rightarrow X$  contínua tal que  $g \circ f \cong id_X$  e  $f \circ g \cong id_Y$ . Diz-se então, que  $g$  é o inverso homotópico de  $f$  e que as variedades  $X$  e  $Y$  tem o mesmo tipo de homotopia. Escreve-se, nesse caso  $f : X \equiv Y$  ou  $X \equiv Y$ .*

**Exemplo 3.46.** *A esfera unitária  $S^n$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ .*

*De fato, considere a aplicação inclusão  $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ ,  $i(x) = x$  e a projeção radial  $r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$ ,  $r(y) = y/|y|$ , temos que  $r \circ i = id_{S^n}$ . Além disso,  $i \circ r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  é homotópico para a aplicação identidade de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  usando a homotopia linear, pois todo ponto  $y \neq 0$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  pode ser conectado a  $y/|y|$  por um segmento de reta que não contém a origem.*

**Definição 3.47** (Espaços contráteis). *Um espaço topológico  $X$  é **contrátil** quando ele tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto, isto é, um espaço topológico formado por um único elemento.*

**Proposição 3.48.**  *$X$  é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade  $id : X \rightarrow X$  é homotópica a uma aplicação constante  $X \rightarrow X$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $X$  é contrátil. Por definição,  $X$  é contrátil quando possui o mesmo tipo de homotopia de um ponto, isto é,  $X \cong \{p\}$ . Então, existem  $f : X \rightarrow \{p\}$  e  $g : \{p\} \rightarrow X$  é inversa homotópica de  $f$ , então  $g \circ f \simeq id_X$ .

Reciprocamente, suponha que,  $id_X \simeq constante$ , logo,  $id_X$  e a constante são inversas homotópicas. Portanto,  $X \simeq \{p\}$ . □

**Exemplo 3.49.** *Se o espaço  $X$  é contrátil então, para todo  $Y$ , o produto cartesiano  $X \times Y$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $Y$ . Para verificar esse*

fato, seja  $H$  uma homotopia entre  $id_X$  e a aplicação constante  $X \rightarrow \{p\}, p \in X$ . Então  $f : X \times Y \rightarrow Y, f(x, y) = y$  e  $g : Y \rightarrow X \times Y, g(y) = (p, y)$ , são equivalências homotópicas, pois  $f \circ g = id_Y$  e, além disso,  $K(x, y, t) = (H(x, t), y)$  define uma homotopia entre a aplicação identidade de  $X \times Y$  e a aplicação  $g \circ f : X \times Y \rightarrow X \times Y$ . Em particular, se  $X$  e  $Y$  forem ambos contráteis, o produto cartesiano  $X \times Y$  também é contrátil.

**Definição 3.50.** *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $Y$  um subespaço de  $X$ . Uma aplicação contínua  $r : X \rightarrow Y$  chama-se uma **retração** quando se tem  $r(y) = y$  para todo  $y \in Y$ , ou seja, quando  $r|_Y = id_Y$ . Uma retração  $r : X \rightarrow Y$  é, portanto, uma extensão contínua a  $X$  da aplicação identidade  $Y \rightarrow Y$ . Toda retração é sobrejetiva.*

Quando existe uma retração  $r : X \rightarrow Y$  o subespaço  $Y$  chama-se um **retrato** do espaço  $X$ .

**Exemplo 3.51.** *Se  $X = X_1 \cup X_2$ , em que  $X_1$  e  $X_2$  são conjuntos fechados com um único ponto em comum, isto é,  $X_1 \cap X_2 = \{x_0\}$ , então  $X_1$  e  $X_2$  são retratos de  $X$ . De fato, a função  $r : X \rightarrow X_1$  definida por  $f(x) = x$ , se  $x \in X_1$ , e  $f(x) = x_0$  caso  $x \in X_2$ , é uma retração. Da mesma maneira conseguimos ver que  $X_2$  é retrato de  $X$ .*

**Definição 3.52** (Homotopia relativa). *Dadas  $f, g : X \rightarrow Y$  contínua, diz-se que  $f$  é homotópica a  $g$  relativamente a um subespaço  $A \subset X$ , e escreve-se*

$$f \simeq g \quad (\text{rel.}A)$$

quando existe uma homotopia  $H : f \simeq g$  tal que  $H(x, t) = f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ . Evidentemente, para que se tenha  $f \simeq g$  (rel. $A$ ) é necessário, antes de tudo, que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$ .

**Exemplo 3.53.** *Sejam  $X = I, Y = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ,  $f$  e  $g$  as funções que mandam  $I$  no semicírculo superior e inferior de  $S^1$ . Seja  $A = \partial I$ . Neste caso  $f$  e  $g$  não são homotópicas relativamente a  $A$ , embora sejam homotópicas, pois qualquer homotopia que não mexe os pontos 0 e 1 teria que passar pela origem. Se  $Y = \mathbb{R}^2$ , então  $f$  e  $g$  são homotópicas também relativamente a  $A$ .*

### 3.2.2 O Grupo Fundamental

**Definição 3.54.** *Sejam  $I = [0, 1]$  diremos que  $a, b : I \rightarrow X$  são **caminhos homotópicos** quando tivermos  $a \simeq b$  (rel. $\partial I$ ). Abreviaremos esta notação por*

$a \simeq b$ . Assim, uma homotopia  $H : a \simeq b$  entre caminhos é uma aplicação contínua  $H : I \times I \rightarrow X$  tal que

$$H(s, 0) = a(s), H(s, 1) = b(s), \quad (3.2)$$

$$H(0, t) = a(0) = b(0), \quad (3.3)$$

$$H(1, t) = a(1) = b(1), \quad (3.4)$$

quaisquer que sejam  $s, t \in I$ .

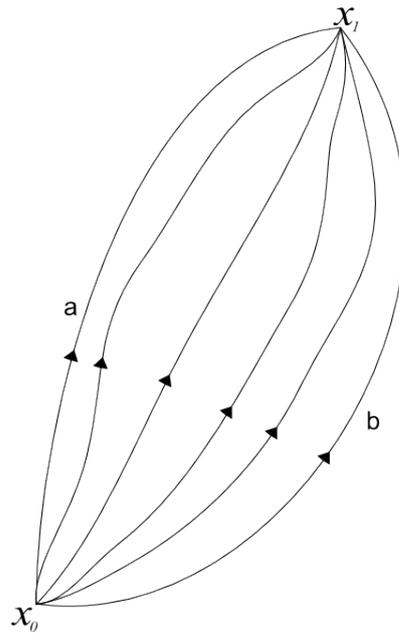


Figura 3.8: Caminhos

**Definição 3.55.** Dois caminhos fechados  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  dizem-se **livremente homotópicos** quando existe uma aplicação contínua  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que  $F(s, 0) = \alpha(s)$ ,  $F(s, 1) = \beta(s)$  e  $F(0, t) = F(1, t)$  para quaisquer  $s, t \in I$ . A última igualdade significa que, para todo  $t \in I$ , o caminho  $F_t : I \rightarrow X$ ,  $F_t(s) = F(s, t)$ , é fechado.

**Observação 3.56.** Indicaremos sempre, com  $\alpha = [\alpha]$  a **classe de homotopia do caminho**  $\alpha : I \rightarrow X$ , isto é, o conjunto de todos os caminhos em  $X$  que possuem as mesmas extremidades que  $\alpha$  e que são homotópicos a  $\alpha$  com extremos fixos durante a homotopia.

**Definição 3.57.** Sejam  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  caminhos tais que o fim de  $\alpha$  coincide com a origem de  $\beta$ . Definiremos o **produto**  $\alpha * \beta$  como sendo o caminho que consiste em percorrer primeiro  $\alpha$  e depois  $\beta$ . Como o tempo que dispomos para percorrer  $\alpha\beta = 1$ , isto nos obriga a dobrar a velocidade em  $\alpha$  e em  $\beta$ . Assim, definiremos

$\alpha\beta : I \rightarrow X$  pondo:

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \beta(2s - 1) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Como  $\alpha(1) = \beta(0)$ , as regras acima bem definem uma aplicação  $\alpha\beta : I \rightarrow X$  tal que  $\alpha\beta|_{[0, 1/2]}$  e  $\alpha\beta|_{[1/2, 1]}$  são contínuas. Segue-se que  $\alpha\beta$  é contínua e portanto é um caminho, que começa em  $\alpha(0)$  e termina em  $\beta(1)$ .

**Definição 3.58.** O caminho inverso de  $\alpha : I \rightarrow X$  é, por definição, o caminho  $\alpha^{-1} : I \rightarrow X$ , dado por  $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ .

**Observação 3.59.** Vemos que  $\alpha^{-1}(s)$  começa onde  $\alpha$  termina, e termina na origem de  $\alpha$ .

**Proposição 3.60.** Sejam  $a, a', b$  e  $b'$  caminhos em  $X$  tais que  $a$  e  $a'$  são homotópicos e  $b$  e  $b'$  também são homotópicos, então  $ab$  é homotópico à  $a'b'$  e  $a^{-1}$  é homotópico  $(a')^{-1}$ .

**Demonstração:** Se  $H : a \cong a'$  e  $K : b \cong b'$  são homotopias, definimos  $L : I \times I \rightarrow X$  pondo

$$L(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2, t \in I \\ K(2s - 1, t) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1, t \in I \end{cases}$$

Como  $H(1, t) = K(0, t) = a(1) = b(0)$  para todo  $t \in I$ , vemos que  $L$  é bem definida. Como  $L|_{([0, 1/2] \times I)}$  e  $L|_{([1/2, 1] \times I)}$  são contínuas, concluímos que  $L$  é contínua. Daí:  $L(s, 0) = H(2s, 0) = a(s)$ ,  $s \in [0, 1/2]$ ,  $L(s, 0) = K(2s - 1, 0) = b(s)$ ,  $s \in [1/2, 1]$ . Portanto  $L(s, 0) = ab(s)$ . Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos  $L(s, 1) = a'b'(s)$ . Além disso,

$$L(0, t) = H(0, t) = a'(0) = a(0) = b(0) = b'(0) = ab(0) = a'b'(0),$$

E,

$$L(1, t) = H(1, t) = a'(1) = a(1) = b(1) = b'(1) = ab(1) = a'b'(1).$$

Logo,

$$L(0, t) = ab(0) = a'b'(0)$$

$$L(1, t) = ab(1) = a'b'(1)$$

Desta forma, concluímos que  $L$  é uma homotopia entre  $ab$  e  $a'b'$ . Isto é,

$ab \simeq a'b'$ . Considere  $F : I \times I \rightarrow M$ , definida por  $L(s, t) = H(1 - s, t)$ . Então,

$$L(s, 0) = H(1 - s, 0) = a^{-1}$$

$$L(s, 1)H(1 - s, 1) = (a')^{-1}$$

$$L(0, t) = H(1, t) = a(1) = a^{-1}(0) = (a')^{-1}(0)$$

$$L(1, t) = H(0, t) = a(0) = a^{-1}(1) = (a')^{-1}(1)$$

Sendo  $L$  contínua, segue então que  $L : a^{-1} \simeq (a')^{-1}$ , como queríamos.  $\square$

**Definição 3.61.** Em uma variedade  $X$ , sejam  $\alpha$  uma classe de homotopia de caminhos que tem origem num ponto  $x \in X$  e terminam num ponto  $y \in X$ , e  $\beta$  uma classe de homotopia de caminhos que começam em  $y \in X$  e terminam em  $z \in X$ . Definiremos o **produto**  $\alpha\beta$  tomando caminhos  $a \in \alpha$ ,  $b \in \beta$  e pondo

$$\alpha\beta = [ab]$$

Assim, por definição  $[a][b] = [ab]$ .

Definimos também,  $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$ , onde  $a \in \alpha$ .

**Observação 3.62.** A proposição 3.60 mostra que o produto  $\alpha\beta$  não depende das escolhas dos caminhos  $\gamma \in \alpha$  e  $\rho \in \beta$ , portanto está bem definido. E, a segunda parte da proposição anterior, mostra que a classe de homotopia  $\alpha^{-1} = [\gamma^{-1}]$  é a mesma, seja qual for o caminho  $\gamma$  que escolhermos em  $\alpha$ . A classe  $\alpha^{-1}$  é chamada inversa de  $\alpha$ .

**Definição 3.63.** Sejam  $\alpha : I \rightarrow X$  um caminho e  $\varphi : I \rightarrow I$  uma parametrização de  $I$ , isto é, uma função contínua tal que  $\varphi(\partial I) \subset \partial I$ . O caminho  $\beta = \alpha \circ \varphi : I \rightarrow X$  chama-se **reparametrização do caminho**  $\alpha$ . A parametrização  $\varphi$  diz-se positiva quando  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi(1) = 1$ , se for negativa quando  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(1) = 0$ , e trivial quando  $\varphi(0) = \varphi(1)$ .

**Proposição 3.64.** Seja  $\beta = \alpha \circ \varphi$  uma reparametrização do caminho  $\alpha : I \rightarrow X$ . Se a parametrização  $\varphi$  for positiva, então  $\beta \simeq \alpha$ ; se for negativa, tem-se  $\beta \simeq \alpha^{-1}$ ; se for trivial então  $\beta = \text{constante}$ .

**Demonstração:** De fato, dois caminhos em  $I$  são homotópicos (com extremidades fixas) se, e somente se, têm a mesma origem e o mesmo fim. Sejam  $i, j : I \rightarrow I$  dadas por  $i(s) = s$  e  $j(s) = 1 - s$ . Tem-se portanto  $\varphi \simeq i$ ,  $\varphi \simeq j$  ou  $\varphi \simeq \text{constante}$ ,

conforme seja  $\varphi$  uma reparametrização positiva, negativa ou trivial. Segue-se imediatamente que  $\alpha \circ \varphi \simeq \alpha \circ i = \alpha$ ,  $\alpha \circ \varphi \simeq \alpha \circ j = \alpha^{-1}$  ou  $\alpha \circ \varphi \simeq \text{constante}$ , respectivamente.  $\square$

**Proposição 3.65.** *Sejam  $\alpha, \beta, \mu : I \rightarrow X$  caminhos tais que cada um deles termina onde o seguinte começa. Sejam  $\alpha = [\alpha]$ ,  $\beta = [\beta]$ ,  $\mu = [\mu]$  suas classes de homotopia,  $x = \alpha(0)$  a origem de  $\alpha$ ,  $y = \alpha(1)$  seu fim,  $e_x, e_y$  os caminhos constantes sobre esses pontos e  $\varepsilon_x = [e_x]$ ,  $\varepsilon_y = [e_y]$  as classes de homotopia dessas constantes. Tem-se então:*

1.  $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_x$
2.  $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_y$
3.  $\varepsilon_x\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon_y$
4.  $(\alpha\beta)\mu = \alpha(\beta\mu)$

**Lema 3.66.** *[Lema da Colagem] Seja  $X = A \cap B$  onde  $A$  e  $B$  são fechados em  $X$ . Sejam  $f : A \rightarrow Y$  e  $g : B \rightarrow Y$  contínuas. Se  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A \cap B$ , então a função  $h : X \rightarrow Y$  dada por  $h(x) = f(x)$  se  $x \in A$  e  $h(x) = g(x)$  se  $x \in B$  é contínua.*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [16].

**Definição 3.67** (O grupo fundamental). *Considere um espaço topológico  $X$  e  $x \in X$ . O Grupo Fundamental  $\pi_1(X, x)$  é um grupo formado pelas classes de homotopia dos caminhos fechados em  $X$  baseado em  $x$  com a operação*

$$[u][v] = [u \cdot v]$$

onde  $[u]$  é a classe de homotopia dos caminhos fechados  $u$ .

**Definição 3.68.** *Consideraremos pares do tipo  $(X, x_0)$ , onde  $x_0 \in X$  será chamado o **ponto básico** do espaço topológico  $X$ . Os caminhos fechados  $a : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$  serão chamados caminhos fechados com **base no ponto**  $x_0$ . As homotopias serão relativas a  $\partial I$ .*

*O subconjunto  $\pi_1(X, x_0)$  do grupo fundamental, formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em  $x_0$  constitui um grupo, chamado o grupo fundamental da variedade  $X$  com base no ponto  $x_0$ . O elemento neutro desse grupo é a classe de homotopia  $\varepsilon = \varepsilon_{x_0}$  do caminho constante no ponto  $x_0$ .*

**Lema 3.69.** *Sejam  $a, a', b$  e  $b'$  caminhos em  $X$  tais que  $a$  é homotópico à  $a'$  com relação à  $\{0, 1\}$  e  $b$  é homotópico à  $b'$  com relação à  $\{0, 1\}$ , então  $ab$  é homotópico à  $a'b'$  com relação à  $\{0, 1\}$*

**Demonstração:** Como  $a \simeq a'(\text{rel}\{0, 1\})$  existe uma aplicação  $H : I \times I \rightarrow X$  com

$$H(s, 0) = H(s, 1) = x, H(0, t) = a(t) \text{ e } H(1, t) = a'(t).$$

De forma semelhante existe uma aplicação contínua  $\bar{H} : I \times I \rightarrow X$  com

$$\bar{H}(s, 0) = \bar{H}(s, 1) = x, \bar{H}(0, t) = b(t) \text{ e } \bar{H}(1, t) = b'(t) \forall t, s \in I.$$

Defina  $G : I \times I \rightarrow X$  por

$$G(s, t) = \begin{cases} H(s, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{H}(s, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Então

$$G(s, \frac{1}{2}) = H(s, 1) = \bar{H}(s, 0) = x$$

e pelo Lema 3.66,  $G$  é contínua. Tem se que

$$G(s, 0) = H(s, 0) = x \text{ e } G(s, 1) = \bar{H}(s, 1) = x.$$

Também

$$G(0, t) = \begin{cases} H(0, 2t) = a(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{H}(0, 2t - 1) = b(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = a \cdot b(t),$$

e

$$G(1, t) = \begin{cases} H(1, 2t) = a'(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{H}(1, 2t - 1) = b'(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = a' \cdot b'(t).$$

Portanto  $G$  pe uma homotopia entre  $a \cdot b$  e  $a' \cdot b'$  relativo a  $\{0, 1\}$  □

Pelo Lema 3.69 a operação  $[a][b] = [a \cdot b]$  está bem definida.

**Proposição 3.70.**  $\pi_1(X, x)$  é um grupo

**Demonstração:** Para verificar que  $\pi_1(X, x)$  é de fato um grupo, é necessário verifcas as três propriedades:

1. Existência do elemento neutro e sua relação com os demais elementos.

2. Existência do elemento inverso.
3. Propriedade associativa.

O elemento neutro é o caminho constante  $\varepsilon_x$  e a sua classe será denotada por  $e$ . Dada uma classe arbitrária  $[a]$  com representante  $a$  a classe inversa é  $[\bar{a}]$ . É necessário mostrar que  $[a]e = e[a] = [a]$  para toda classe  $[a]$ ,  $[a][\bar{a}] = [\bar{a}][a] = e$  e por fim,  $[a][b \cdot c] = [a \cdot b][c]$ .

1. Dada  $[a]$  uma classe de caminhos fechados qualquer, temos que  $[a]e = [a \cdot \varepsilon_x]$ . Basta então mostrar que  $a \cdot e$  é um elemento da classe  $[a]$ , ou seja, que  $a \cdot \varepsilon_x$  é homotópico a  $a$  relativo  $\{0, 1\}$ . Isso segue da proposição 3.65. Portanto  $[a]e = [a]$ . De maneira semelhante mostra se que  $e[a] = [a]$ .
2. Dada  $[a]$  uma classe de caminhos fechados qualquer, temos que  $[a][\bar{a}] = [a \cdot \bar{a}]$ . Basta então mostrar que  $a \cdot \bar{a}$  é um elemento da classe  $e$ , ou seja, que  $a \cdot \bar{a}$  é homotópico a  $\varepsilon_x$  relativo a  $\{0, 1\}$ . Novamente pela proposição 3.65 isso é verdade. Portanto  $[a][\bar{a}] = e$ . De maneira semelhante mostra se que  $[\bar{a}][a] = e$ .
3. Dadas as classes  $[a]$ ,  $[b]$  e  $[c]$  vamos mostrar que  $[a][b \cdot c] = [a \cdot b][c]$ . Para isso é suficiente mostrar que  $a \cdot (b \cdot c)$  é homotópico a  $(a \cdot b) \cdot c$  relativo a  $\{0, 1\}$ .

De fato, considere a aplicação  $H : I \times I \rightarrow X$  dada por

$$H(s, t) = \begin{cases} a(\frac{4t}{2-s}), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{s}{4} \\ b(4t - 2 + s), & \frac{1}{2} - \frac{s}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} - \frac{s}{4} \\ c(\frac{4t-3+s}{1+s}), & \frac{3}{4} - \frac{s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

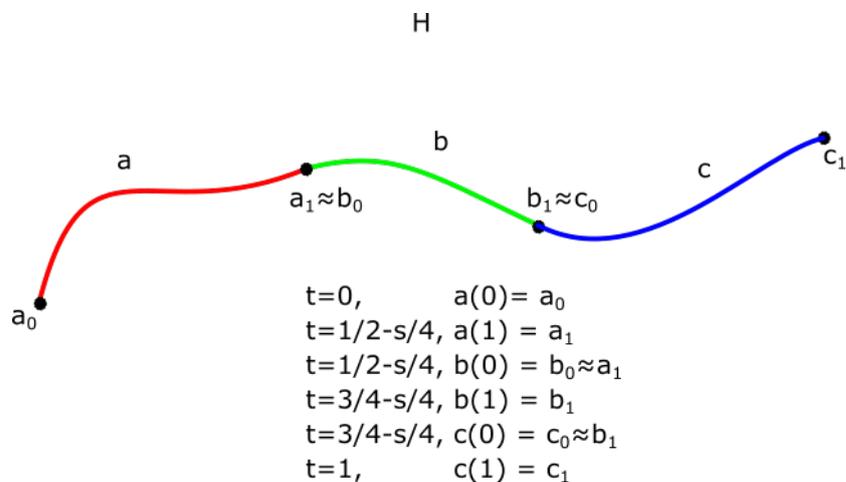


Figura 3.9: Gráfico da função  $H$

Tem se que

$$H(0, t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ b(4t - 2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ c(4t - 3), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} = u \cdot (v \cdot w)(t)$$

$$H(1, t) = \begin{cases} a(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ b(4t - 1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (u \cdot v) \cdot w(t).$$

Além disso tem se  $H(s, 0) = a(0) = x$  e  $H(s, 1) = c(1) = x$ . Resta mostrar que  $H$  é contínua. Mas

$$H(s, \frac{1}{2} - \frac{s}{4}) = a(1) = b(0) = x \text{ e } H(s, \frac{3}{4} - \frac{s}{4}) = b(1) = c(0) = x$$

e pelo Lema 3.66,  $H$  é contínua e, conseqüentemente, uma homotopia entre  $a \cdot (b \cdot c)$  e  $(a \cdot b) \cdot c$  relativo a  $\{0, 1\}$ .

□

Quando  $M$  é conexo por caminhos e  $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$  dizemos que  $X$  é **simplesmente conexo**. A próxima proposição mostra que o grupo fundamental independe do ponto base escolhido. Portanto, podemos representar o grupo fundamental por  $\pi_1(X)$ , sem nenhuma referência explícita ao ponto base.

**Exemplo 3.71.** Considere  $\mathbb{R}^2$  e a origem. Então  $\pi_1(\mathbb{R}^2, \vec{0})$  é o grupo trivial.

De fato, considere a classe neutra  $e$ . Então se  $c_0 \in e$  significa que  $c_0(t) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Seja um caminho fechado  $\alpha$  qualquer baseado na origem, isto é,  $\alpha(0) = \alpha(1) = \vec{0}$ .

Considere a aplicação  $H : I \times I \rightarrow X$  dada por  $H(s, t) = (1 - s)\alpha(t)$ . Então  $H$  é contínua,  $H(0, t) = \alpha(t)$  e  $H(1, t) = 0$  para todo  $t \in I$ . Também

$$H(s, 0) = (1 - s)\alpha(0) = (1 - s)\vec{0} = \vec{0} \text{ e } H(s, 1) = \vec{0}.$$

Isso mostra que  $H$  é uma homotopia entre  $\alpha$  e a função nula relativo a  $\{0, 1\}$ , ou seja,  $\alpha \in e$ .

Portanto,  $\pi_1(\mathbb{R}^2, \vec{0}) = \{e\}$ .

**Exemplo 3.72.** 1. Se  $X$  é contrátil então  $X$  é simplesmente conexo.

2. Se  $n > 1$ , então  $S^n$  é simplesmente conexo. Ver [16]

**Observação 3.73.** Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  satisfazem  $g \circ f \simeq id_X$  então  $f$  é injetiva e  $g$  sobrejetiva. Se  $f \circ g \simeq id_Y$  então  $g$  é injetiva e  $f$  é sobrejetiva.

**Proposição 3.74.** *Seja  $X$  conexo por caminhos. Dados  $x_0, x_1 \in X$  e  $\gamma : I \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x_1$ , então existe um isomorfismo entre  $\pi_1(X, x_0)$  e  $\pi_1(X, x_1)$ .*

**Demonstração:** Seja  $\gamma : I \rightarrow X$  caminho tal que  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x_1$ . Se  $\alpha$  é uma curva fechada de  $x_0$  então  $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma$  é uma curva fechada de  $x_1$ . Dado um elemento  $[\alpha'] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \in \pi_1(X, x_1)$ . Denotaremos essa aplicação por:

$$\eta : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$[\alpha'] = \eta([\alpha])$$

Vamos mostrar que  $\eta$  é um isomorfismo.

1.  $\eta$  é um homomorfismo.

Com efeito, dados  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ , temos:

$$\begin{aligned} \eta([\alpha] * [\beta]) &= [\gamma^{-1}] * [\alpha] * [\beta] * [\gamma] \\ &= [\gamma^{-1}] * [\alpha] * [\gamma] * [\gamma^{-1}] * [\beta] * [\gamma] \\ &= \eta([\alpha]) * \eta([\beta]) \end{aligned}$$

Assim,  $\eta$  é um homomorfismo.

2.  $\eta$  é bijetiva. Para mostrar que  $\eta$  é bijetiva, vamos introduzir a inversa de  $\eta$ . Seja:

$$\eta^{-1} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

tal que

$$\eta^{-1}([\alpha']) = [\gamma * \alpha' * \gamma^{-1}]$$

Afirmção:  $\eta^{-1}$  é a inversa de  $\eta$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \eta^{-1}\eta([\alpha]) &= \eta^{-1}([\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]) \\ &= [\gamma * \gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1}] = [\alpha]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\eta^{-1}\eta = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

e por simetria

$$\eta\eta^{-1} = id_{\pi_1(X, x_1)}$$

Pela última observação  $\eta$  é injetiva e sobrejetiva. Segue então que  $\eta$  é um homomorfismo bijetor, logo, um isomorfismo. Como queríamos.  $\square$

**Definição 3.75.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo local quando para cada ponto  $x \in X$  existe um aberto  $U$  contendo  $x$  em  $X$  tal que  $V = f(U)$  é aberto em  $Y$  e  $f|_U$  é um **homeomorfismo** de  $U$  sobre  $V$ .*

**Exemplo 3.76.** *Considere a seguinte aplicação:*

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto \exp(it) = e^{it} = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \end{aligned}$$

$\xi$  é um homeomorfismo local.

De fato, observe que a função  $\xi$  é um caso particular do exemplo 1.7, onde  $\rho = 1$ , e lá vimos que a função era uma bijeção no espaço  $V_\alpha = \{t \in (\alpha, \alpha + 2\pi)\}$ . Daí,  $\xi(V_\alpha) = U_\alpha = S^1 - \{p\}$  que é aberto sobre  $S^1$ .

**Definição 3.77.** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Z \rightarrow Y$  aplicações contínuas. Um **levantamento** de  $g$  (relativamente a  $f$ ) é uma aplicação contínua  $\tilde{g} : Z \rightarrow X$  tal que  $f \circ \tilde{g} = g$ .*

**Definição 3.78.** *Seja  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  uma função contínua,  $\tilde{X}$  e  $X$  espaços topológicos. Um aberto  $V \subset X$  é dito **vizinhança distinguida** se:*

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$$

onde  $\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$  é uma família de abertos de  $\tilde{X}$ , dois a dois disjuntos, tais que:

$$p|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V$$

é um homeomorfismo.

**Definição 3.79.** *Uma aplicação de **recobrimento** (ou simplesmente um recobrimento) é uma função:*

$$p : \tilde{X} \rightarrow X$$

contínua, sobrejetiva e tal que todo  $x \in X$  possui uma vizinhança distinguida. O espaço  $\tilde{X}$  chama-se um espaço de recobrimento de  $X$  e, para cada  $x \in X$ , o conjunto  $p^{-1}(x)$  chama-se a fibra sobre  $x$ . Às vezes,  $X$  é chamado de base do recobrimento. Veja a figura 3.10.

**Exemplo 3.80.** A aplicação  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por:

$$\exp(t) = e^{it} = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$$

é um recobrimento.

De fato, a função  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dada por  $t \mapsto (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$  é contínua, pois as funções cosseno e seno são contínuas.

Vamos mostrar que  $\exp$  é sobrejetiva. Considere  $p = (x, y) \in S^1$ , e defina  $g : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$  por:

$$g(p) = \begin{cases} \arccos(x) & \text{se } p = (x, y) \text{ com } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(x) & \text{se } p = (x, y) \text{ com } y < 0 \end{cases}.$$

Note que se  $y < 0$ , então  $x < 1$ , assim  $0 < \arccos(x) \leq \pi$  e segue que  $2\pi - \arccos(x) \in [0, 2\pi)$ .

Agora, considere  $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$  dada por  $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ . Observe que  $f \circ g = \operatorname{Id}$ , pois, escreva  $t = \arccos x \in [0, \pi]$ , daí,  $\cos t = x$  e  $\operatorname{sen} t \geq 0$ . Como  $p \in S^1$ , temos  $y = \pm\sqrt{1-x^2} = \pm\operatorname{sen} t$

Assim,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(p) &= \begin{cases} (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) & \text{se } y \geq 0 \\ (\cos(2\pi - t), \operatorname{sen}(2\pi - t)) & \text{se } y < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) & \text{se } y \geq 0 \\ (\cos(t), -\operatorname{sen}(t)) & \text{se } y < 0 \end{cases} \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

Portanto,  $f \circ g$  é a função identidade sobre  $S^1$ , logo,  $f$  é sobrejetiva. Como  $f$  é a função  $\exp$  restrita segue que  $\exp$  é sobrejetiva também.

Precisamos mostrar que para todo  $p \in S^1$  possui uma vizinhança distinguida. Mas note que para todo  $p = (x, y) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = \exp(t) \in S^1$ , temos que para  $z = t + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\exp(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = (\cos(t + 2k\pi), \operatorname{sen}(t + 2k\pi)) = \exp(t + 2k\pi) = \exp(z)$ , ou seja, temos uma família de elementos discretos cuja  $\exp^{-1}(p) = \{t + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ , de forma que é a imagem inversa de abertos dois a dois disjuntos. Em outras palavras, para cada aberto  $U$  em  $S^1$ , temos que  $\exp^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (V + \{2k\pi\})$ , onde  $V = \exp^{-1}(U)|_{[0, 2\pi)}$

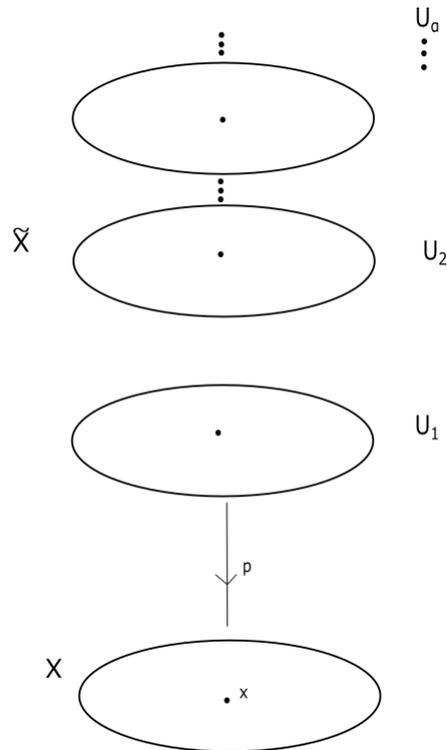


Figura 3.10: Aplicação de Recobrimento

**Proposição 3.81.** *O Grupo Fundamental  $\pi_1(S^1)$  é isomorfo ao grupo  $\mathbb{Z}$ .*

**Demonstração:** Há várias maneiras de chegar nesse resultado. Aqui vamos construir um isomorfismo entre o Grupo Fundamental e os inteiros. Para isso considere o ponto base  $b_0 = (1, 0)$  em  $S^1$ . Seja  $\alpha : I \rightarrow S^1$  um caminho fechado começando em  $b_0$  e terminando em  $b_0$  mas não necessariamente com uma volta. Note que  $\alpha$  pode ir no sentido horário e também no sentido anti horário e pode dar várias voltas, em outras palavras,  $\alpha(0) = b_0$  e  $\alpha(1) \in \{b_0\}$ .

Considere o recobrimento de  $S^1$  por  $\mathbb{R}$  dado por  $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ . Dado um  $n \in \mathbb{Z}$  temos  $p(n) = (\cos(2\pi n), \sin(2\pi n)) = (1, 0) = b_0$ , isto é,  $p(\mathbb{Z}) = b_0$ . Observe que  $n$  é o número de voltas que o caminho faz em  $S^1$ . Como  $\alpha$  é um caminho fechado em  $S^1$  começando em  $b_0$ , pelo Definição 3.77 existe um único caminho  $\bar{\alpha}$  em  $\mathbb{R}$  começando em  $p^{-1}(b_0)$  tal que  $p \circ \bar{\alpha} = \alpha$ , ou seja, que o diagrama abaixo comuta.

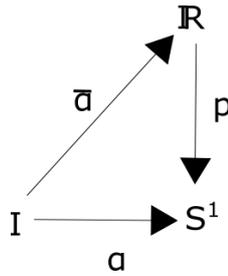


Figura 3.11: Diagrama

Note que  $\bar{\alpha} = (p^{-1} \circ \alpha)(t)$  para  $t \in [0, 1]$ , ou seja, a restrição de  $p$  sobre  $[0, 1]$  é um homeomorfismo e portanto  $\bar{\alpha}(1) = p^{-1}(\alpha(1)) = p^{-1}(b_0) = n$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ .

Pela definição 3.77, se  $\beta$  é um outro caminho fechado em  $S^1$  homotópico a  $\alpha$  relativo a  $\{0, 1\}$ , os respectivos levantamentos  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  que são únicos (quando se diz único quer dizer que se existe um outro caminho, digamos  $\gamma$ , com as tais propriedades, então  $\gamma$  é homotópico a este caminho) também são caminhos homotópicos relativos a  $\{0, 1\}$ , isto é, o inteiro  $n$  depende somente da classe de homotopia  $[\alpha]$ .

Considere a seguinte função  $\phi : \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por

$$\phi([\alpha]) = \bar{\alpha}(1) = n.$$

Vamos mostrar que  $\phi$  é bijetora. A imagem inversa de  $p$  em  $b_0$  é o conjunto  $\mathbb{Z}$ , isto é,  $p^{-1}(b_0) = n$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ . Como  $\mathbb{R}$  é conexo por caminhos, existe um caminho  $\bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$  começando em 0 e terminando em  $n$ , isto é,  $\bar{\alpha}(0) = 0$  e  $\bar{\alpha}(1) = n$ . Seja  $\alpha : I \rightarrow S^1$  um caminho em  $S^1$  definido por  $\alpha(t) = (p \circ \bar{\alpha})(t)$ . Então

$$\alpha(0) = (p \circ \bar{\alpha})(0) = p(\bar{\alpha}(0)) = p(0) = b_0.$$

Da mesma maneira,

$$\alpha(1) = (p \circ \bar{\alpha})(1) = p(\bar{\alpha}(1)) = p(n) = b_0.$$

Isso mostra que  $\alpha$  é um caminho fechado em  $S^1$ . Pela construção, note que  $\bar{\alpha}$  é um levantamento de  $\alpha$  e pela definição 3.77,  $\bar{\alpha}$  é único.

Logo, dado um  $n \in \mathbb{Z}$  qualquer existe um caminho fechado  $\alpha$  em  $S^1$  tal que  $\phi([\alpha]) = \bar{\alpha}(1) = n$ . Isso mostra que a função  $\phi$  é sobrejetora.

Agora suponha que dado  $n \in \mathbb{Z}$  na imagem de  $\phi$ , existam duas classes  $[\alpha]$  e  $[\beta]$  tais que  $\phi([\alpha]) = \phi([\beta]) = n$ . Pela construção de  $\phi$ , considere os caminhos  $\bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\bar{\beta} : I \rightarrow \mathbb{R}$  tais que sejam os levantamentos de  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente. Então

temos que  $\bar{\alpha}(0) = \bar{\beta}(0) = 0$  e por hipótese temos  $\bar{\alpha}(1) = \bar{\beta}(1) = n$ .

Pelo fato de  $\mathbb{R}$  ser simplesmente conexo e  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  terem os mesmos pontos iniciais e finais,  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  devem ser homotópicos, isto é, existe uma função contínua  $\bar{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz

$$\bar{H}(s, 0) = 0, \bar{H}(s, 1) = n, \bar{H}(0, t) = \bar{\alpha}(t), \bar{H}(1, t) = \bar{\beta}(t), \forall s, t \in I.$$

Considere a função  $H : I \times I \rightarrow S^1$  dada por  $H = p \circ \bar{H}$ . Como  $\bar{H}$  é contínua e  $p$  é contínua, a composta  $H$  é contínua e vale

$$H(s, 0) = (p \circ \bar{H})(s, 0) = p(\bar{H}(s, 0)) = p(0) = (\cos(0), \sin(0)) = (1, 0) = b_0,$$

$$H(s, 1) = (p \circ \bar{H})(s, 1) = p(\bar{H}(s, 1)) = p(n) = (\cos(2\pi n), \sin(2\pi n)) = (1, 0) = b_0,$$

$$H(0, t) = (p \circ \bar{H})(0, t) = p(\bar{H}(0, t)) = p(\bar{\alpha}(t)) = (p \circ \bar{\alpha})(t) = \alpha(t),$$

$$H(1, t) = (p \circ \bar{H})(1, t) = p(\bar{H}(1, t)) = p(\bar{\beta}(t)) = (p \circ \bar{\beta})(t) = \beta(t).$$

Essas contas mostram que  $H$  é uma homotopia entre  $\alpha$  e  $\beta$  relativo a  $\{0, 1\}$ , ou seja,  $[\alpha] = [\beta]$  e portanto  $\phi$  é injetora.

Agora vamos mostrar que  $\phi$  é de fato um homomorfismo entre os grupos  $\pi_1(S^1)$  com a operação definida na definição 3.57 e o grupo  $(\mathbb{Z}, +)$ .

Note que a função de recobrimento  $p$  é periódica de período  $2\pi$  e portanto vale:

$$p(n+x) = (\cos(2\pi(n+x)), \sin(2\pi(n+x))) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) = p(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Considere  $\alpha : I \rightarrow S^1$  e  $\beta : I \rightarrow S^1$  dois caminhos fechados começando em  $b_0$ . Considere seus levantamentos  $\bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\bar{\beta} : I \rightarrow \mathbb{R}$  que são únicos tais que  $\bar{\alpha}(0) = \bar{\beta}(0) = 0$ . Pelo fato de  $\mathbb{R}$  ser conexo por caminhos existem inteiros  $n$  e  $m$  tais que  $\bar{\alpha}(1) = n$  e  $\bar{\beta}(1) = m$ . Seja  $\bar{\gamma}$  um caminho em  $\mathbb{R}$  dado por

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \bar{\alpha}(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ n + \bar{\beta}(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Note que  $\bar{\gamma}$  está bem definida, é contínua pelo lema 3.66,  $\bar{\gamma}(0) = \bar{\alpha}(0) = 0$  e  $\bar{\gamma}(1) = n + \bar{\beta}(1) = n + m$ . Ou seja,  $\bar{\gamma}$  é um caminho em  $\mathbb{R}$  entre a origem e  $n + m$ . Agora considere  $\gamma : I \rightarrow S^1$  dado por  $\gamma = p \circ \bar{\gamma}$ . Então

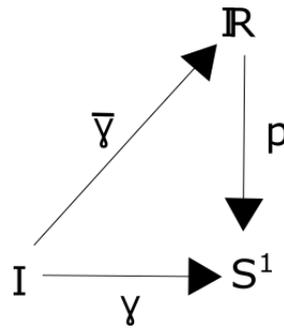


Figura 3.12: Diagrama de  $\gamma$

$$\begin{aligned}
 \gamma(t) &= (p \circ \bar{\gamma})(t) = p(\bar{\gamma}(t)) \\
 &= \begin{cases} p(\bar{\alpha}(2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ p(n + \bar{\beta}(2t - 1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} p(\bar{\alpha}(2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ p(\bar{\beta}(2t - 1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},
 \end{aligned}$$

ou seja,  $\gamma = \alpha \cdot \beta$ . Isso mostra que  $\bar{\gamma}$  é o levantamento de  $\gamma$ . Com isso temos

$$\begin{aligned}
 \phi([\alpha \cdot \beta]) &= \phi([\gamma]) = \bar{\gamma}(1) \\
 &= n + m \\
 &= \bar{\alpha}(1) + \bar{\beta}(1) \\
 &= \phi([\alpha]) + \phi([\beta]).
 \end{aligned}$$

□

Conhecendo o Grupo Fundamental de  $S^1$  podemos calcular o Grupo Fundamental de outros espaços, cuja construção depende de  $S^1$ , bem como podemos analisá-las do ponto de vista de homeomorfismo, ou seja, espaços que possuem Grupo Fundamental diferentes não são homeomorfos.

Primeiramente, usando Grupo Fundamental, mostraremos que  $S^1$  não é homeomorfo à  $S^n$  quando  $n \geq 2$ , mas, para isto precisamos calcular o Grupo Fundamental de  $S^n$ . Para tal, considere o seguinte lema.

**Lema 3.82.** *Seja  $X$  um espaço topológico tal que  $X = U \cup V$ , onde  $U$  e  $V$  são subespaços abertos, simplesmente conexos e  $U \cap V$  é conexo por caminhos. Então  $X$  é simplesmente conexo.*

**Demonstração:** Considere uma classe de homotopias  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ , onde  $\alpha : I \rightarrow X$ , tal que  $x_0 \in X \cap V$ . Pela continuidade de  $\alpha$ , temos que o conjunto  $\{\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V)\}$  é uma cobertura de  $I$ , que é compacto. Logo, podemos construir uma partição de  $I$ :

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

de tal maneira que  $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \in U$  ou  $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \in V$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Quando dois intervalos consecutivos  $[t_{i-1}, t_i]$  e  $[t_i, t_{i+1}]$  são tais que  $\alpha([t_{i-1}, t_i])$  e  $\alpha([t_i, t_{i+1}])$  pertencem à mesma componente conexa  $U$  ou  $V$ , podemos eliminar o ponto comum juntando os intervalos em um só de tal maneira que repartindo o intervalo  $I$  adequadamente tenhamos que  $\alpha(t_i) \in U \cap V$ . Mas, como  $U \cap V$  é conexo por caminhos, existe um caminho  $\eta_i$  que liga  $x_0$  a  $\alpha(t_i)$ .

Para cada  $i$ , definamos:

$$\alpha_i(s) = \alpha((t_i - t_{i-1})s + t_{i-1}), 0 \leq s \leq 1.$$

Logo,  $\alpha_i(0) = \alpha_i(t_{i-1})$  e  $\alpha_i(1) = \alpha(t_i)$ . Assim, podemos escrever  $\alpha$  da seguinte maneira:

$$\alpha \simeq \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_n.$$

Então:

$$\alpha \simeq (\alpha_1 \cdot \eta_1^{-1}) \cdot (\eta_1 \cdot \alpha_2 \cdot \eta_2^{-1}) \cdot (\eta_2 \cdot \alpha_3 \cdot \eta_3^{-1}) \cdot \cdots \cdot (\eta_n \cdot \alpha_n).$$

Note que, devido a forma como foi feita a partição de  $I$ , cada  $(\eta_i \cdot \alpha_{i+1} \cdot \eta_{i+1}^{-1})$  é um caminho totalmente em  $U$  ou em  $V$ . Utilizando o fato de que  $U$  e  $V$  são simplesmente conexos, temos que, para cada  $i$ ,

$$\eta_i \cdot \alpha_{i+1} \cdot \eta_{i+1}^{-1} \simeq e_i;$$

então  $\alpha \simeq e_{x_0}$  e, portanto,  $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ . □

A consequência direta desse lema é que o Grupo Fundamental de  $S^n$  ( $n \geq 2$ ) é o grupo trivial. Mostraremos no exemplo, considerando os subespaços  $U$  como sendo  $S_+^n$  que nada mais é do que a esfera  $S^n$  sem o polo norte  $p_N$  e  $V$  como sendo  $S_-^n$  que nada mais é do que a esfera  $S^n$  sem o polo sul  $p_S$ .

**Exemplo 3.83.**  $\pi_1(S^n, p) = \{0\}$  para todo  $n \geq 2$ .

**Solução:** Observe que

$$S^n = S_-^n \cup S_+^n,$$

em que ambos os conjuntos  $S_-^n$  e  $S_+^n$  são abertos e contráteis pois são homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ , logo, além de abertos, são simplesmente conexos. Além do mais, é fácil notar que  $S_-^n \cap S_+^n$  é conexo por caminhos. Assim, pelo lema anterior, temos que  $S^n$  é simplesmente conexo, para todo  $n \geq 2$ . Portanto,  $S^n$  possui somente uma classe de homotopia, de onde segue o resultado.

Portanto a esfera  $S^n$ ,  $n \geq 2$  não é homeomorfa a  $S^1$ , caso contrário teríamos:

$$\{0\} = \pi_1(S^n, p_0) \simeq \pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z},$$

o que é um absurdo.

Conhecendo o Grupo Fundamental de  $S^1$  também podemos calcular o Grupo Fundamental do cilindro  $C$ . basta observar que  $C = S^1 \times \mathbb{R}$ , assim temos

$$\pi_1(C, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(S^1, x_0) \times \pi_1(\mathbb{R}, z_0) \simeq \mathbb{Z} \times \{0\} \simeq \mathbb{Z}.$$

De forma semelhante, podemos calcular o Grupo Fundamental do toro  $\mathbb{T}^2$ . Como  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ , então

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, (z_0, z_0)) \simeq \pi_1(S^1, z_0) \times \pi_1(S^1, z_0) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Da onde segue que o toro  $\mathbb{T}$  não é homeomorfo à  $S^n$ , ( $n \geq 1$ ).

### 3.3 Crescimento Exponencial

Nesta seção, definiremos crescimento exponencial para grupos finitamente gerados e veremos que crescimento do grupo fundamental pode ter sentido geométrico dentro da variedade. E, por fim, veremos exemplos de grupos com distintos tipos de crescimento. Para maiores detalhes, [1], [8], [9] e [24].

**Definição 3.84.** Um grupo  $G$  é **finitamente gerado** se existe  $F = \{g_1, \dots, g_N\} \subset G$ , de tal forma que todo elemento de  $G$  pode ser escrito como produto dos finitos elementos de  $F$  e de seus inversos. O conjunto  $F$  é um **gerador simétrico** sempre que  $g \in F$  implicar que  $g^{-1} \in F$ .

**Definição 3.85.** Seja  $R$  um grupo finitamente gerado por  $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ . Para

$$w = w_{i_1}^{\varepsilon_1} w_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots w_{i_m}^{\varepsilon_m}$$

onde  $\varepsilon_j = \pm 1$  e  $w_{i_j} \in W$ , com  $1 \leq j \leq m$ , definimos o comprimento de  $w$  em  $W$

por

$$l_1(w) = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \cdots + |\varepsilon_m|$$

Para cada  $m \in \mathbb{N}^*$ , definimos a função crescimento de  $R$ , por:

$$\Gamma(m) = \#\{w \in R; l_1(w) \leq m\}$$

Veja [8] ou [9].

**Definição 3.86.** Dizemos que  $R$  tem **crescimento exponencial** se existem constantes  $A, a > 0$  tais que

$$\Gamma(m) \geq Ae^{am}$$

com  $m \geq 1$ .

**Observação 3.87.** O crescimento exponencial da função independe do conjunto de geradores

**Definição 3.88.** Quando  $R = \pi_1(M)$ . Definimos para  $\bar{\alpha} \in \pi_1(M)$ ,

$$l_2(\bar{\alpha}) = \inf\{|\alpha|; \alpha \in \bar{\alpha}\}$$

onde  $|\alpha|$  é o comprimento de arco da curva  $\alpha$ . Para cada  $r \in \mathbb{R}^+$ , definimos a função,

$$P(r) = \#\{\bar{\alpha} \in \pi_1(M); l_2(\bar{\alpha}) \leq r\}$$

Provaremos no Lema 4.9 que o grupo fundamental tem crescimento exponencial se, e somente,  $P$  tem crescimento exponencial, isto é, existem constantes  $B > 0, b > 0$  tal que  $P(r) \geq Be^{br}$ .

O gráfico de Cayley de um grupo,  $G$  com um determinado conjunto de geradores,  $X$ , codifica como os elementos geradores escolhidos operam nos elementos do grupo.

**Definição 3.89** (Cayley). Dado um grupo,  $G$ , e um conjunto de geradores,  $X$ , podemos formar um gráfico direcionado com os elementos de  $G$  como vértices e com suas arestas rotuladas pelos elementos de  $X$  com uma aresta unindo um vértice,  $g$ , ao vértice  $gx$  rotulado por  $x$

$$g \xrightarrow{x} gx$$

Esse gráfico é chamado de **gráfico de Cayley** do grupo,  $G$ , em relação ao conjunto de geradores.

**Exemplo 3.90.** *Seja  $M$  o bitoro sólido. Afirmamos que o crescimento de  $\pi_1(M)$  é exponencial.*

*De fato, fixemos  $\gamma(m)$  como sendo as palavras de comprimento iguais a  $m$  e  $\Gamma(m)$  as palavras de comprimento menores ou iguais à  $m$ . Considere o gráfico de Cayley do grupo livre sobre dois geradores  $a$  e  $b$ .*

*Pelo gráfico (3.13), temos que as palavras distintas de comprimento 1, são:  $e, a, b, a^{-1}, b^{-1}$ , daí,  $\gamma(1) = 4$  e as palavras distintas de comprimento 2, são:  $aa, ab, bb, ba, ab^{-1}, ba^{-1}, a^{-1}b, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, a^{-1}b^{-1}, a^{-1}a^{-1}, b^{-1}b^{-1}$ , por causa disso,  $\gamma(2) = 12$ .*

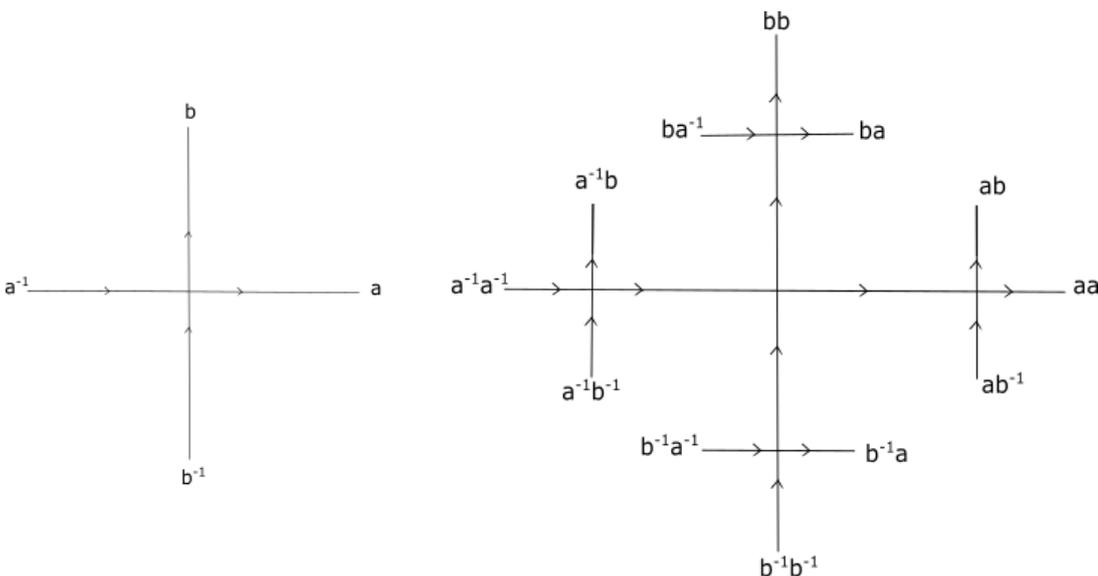


Figura 3.13: A esquerda o Grafo de Cayley representando as palavras de comprimento 1 e a direita o Grafo de Cayley representando as palavras de comprimento 2.

Logo,

$$\Gamma(2) = \gamma(1) + \gamma(2) = 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^0 + 1 = 17$$

*Assim, podemos observar pelo gráfico de Cayley que a medida que aumentamos o comprimento das nossas palavras elas aumentam de três em três. Logo, a nossa função  $\gamma$  pode ser vista como,*

$$\gamma(m) = 4 \cdot 3^{m-1}, \text{ para } m \geq 1.$$

*E quando  $m = 0$ , temos que  $\gamma(0) = 1$ . Daí,  $\gamma(3) = 36 = 4 \cdot 3^2$ . Logo,*

$$\Gamma(3) = \gamma(1) + \gamma(2) + \gamma(3) = 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^0 + 1 = 53$$

*Por indução, conseguimos verificar,  $\Gamma(m) = \sum_{i=0}^m \gamma(i)$ .*

De fato, para  $m = 0$ , temos

$$\Gamma(0) = \sum_{i=0}^0 \gamma(i) = \gamma(0)$$

Agora assumindo que é verdade para  $m$ , mostremos para  $m + 1$ .

Note que,

$$\Gamma(m + 1) \stackrel{\text{Def.}}{=} \Gamma(m) + \gamma(m + 1) \stackrel{\text{H.I.}}{=} \sum_{i=0}^m \gamma(i) + \gamma(m + 1) = \sum_{i=0}^{m+1} \gamma(i)$$

Portanto,

$$\Gamma(m) = 4 \cdot 3^{m-1} + 4 \cdot 3^{m-2} + \dots + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^0 + 1$$

Logo,  $\Gamma(m) \geq 4 \cdot 3^{m-1} = (3 + 1)3^{m-1} = 3^m + 3^{m-1} \geq 3^m \geq e^m$ .

Assim,  $\Gamma(m) \geq e^m$ , como desejávamos.

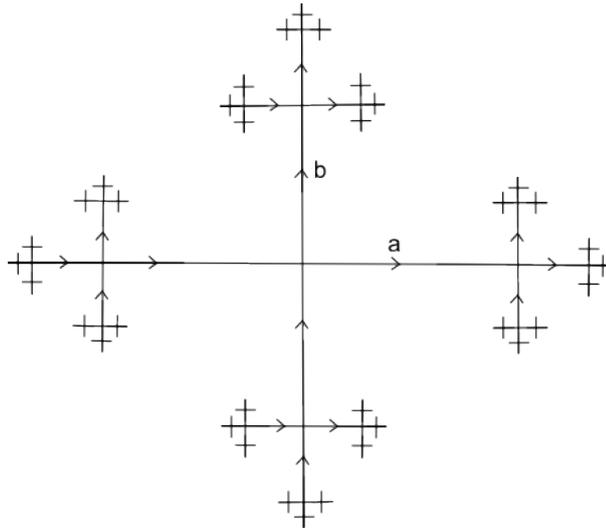


Figura 3.14: Gráfico de Cayley

**Definição 3.91.** Dizemos que  $R$  tem **crescimento polinomial** se

$$\Gamma(m) \geq p,$$

onde  $p$  é um polinômio de grau  $n$ , com  $n \geq 1$ .

**Exemplo 3.92.** Considerando  $M = S^1 \times D^2$  o Toro Sólido, o grupo fundamental é  $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ , pois como  $D^2$  é contrátil, o grupo fundamental de  $D^2$  é isomorfo à um grupo formado por um único elemento, ou seja,  $\pi_1(D^2) \simeq \{0\}$ . O crescimento de  $\pi_1(M)$  é **polinomial**.

De fato, podemos observar que, as palavras de comprimento menores do que 1 são  $e, a, a^{-1}$ , logo,  $\Gamma(1) = 3$ , e as palavras de comprimento menores do que 2 são  $e, a, a^{-1}, aa, a^{-1}a^{-1}$ , dessa forma,  $\Gamma(2) = 5$ . Seguindo esse raciocínio, teremos  $\Gamma(3) = 7, \Gamma(4) = 9, \dots$ , com isso conseguimos observar que as palavras de comprimento menores do que  $m$  é dado por:  $\Gamma(m) = 2m + 1$ . É fácil ver que formamos uma sequência de números ímpares. Portanto, o Toro Sólido tem crescimento polinomial. Veja a figura 3.15.

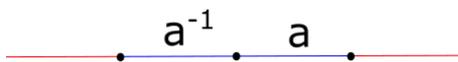


Figura 3.15: Crescimento Polinomial

**Exemplo 3.93.** Considerando  $M = S^1 \times S^1$  o Toro, o grupo fundamental é  $\pi_1(M) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . O crescimento de  $\pi_1(M)$  é polinomial.

De fato, observamos que  $\Gamma(0) = 1, \Gamma(1) = 5, \Gamma(2) = 13, \Gamma(3) = 25, \dots$ ,  
 Pois,

$$\underbrace{e}_0, \underbrace{a, a^{-1}, b, b^{-1}}_1, \underbrace{aa, ab, bb, ab^{-1}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}, a^{-1}a^{-1}, b^{-1}b^{-1}}_2, \underbrace{\dots}_3, \dots$$

Note que  $a^{-1}b = b^{-1}a, ab^{-1} = ba^{-1}, b^{-1}a^{-1} = ab$  e  $a^{-1}b^{-1} = ba$ .

Dessa forma, conseguimos verificar por meio de processo indutivo que,

$$\Gamma(m) = 2m^2 + 2m + 1,$$

De fato,

$$\text{Para } \Gamma(1) = 2(1)^2 + 2(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 5$$

Agora assumindo que seja verdadeiro para  $m$ , mostremos para  $m + 1$ .

Note que,

$$\begin{aligned} \Gamma(m + 1) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \Gamma(m) + \gamma(m + 1) \stackrel{\text{H.I.}}{=} 2m^2 + 2m + 1 + \gamma(m + 1) \\ &= (2m^2 + 2m + 1) + 4(m + 1) = 2(m^2 + 2m + 1) + 2m + 2 + 1 \\ &= 2(m + 1)^2 + 2(m + 1) + 1. \end{aligned}$$

Logo, a função crescimento do grupo fundamental do Toro é polinomial.

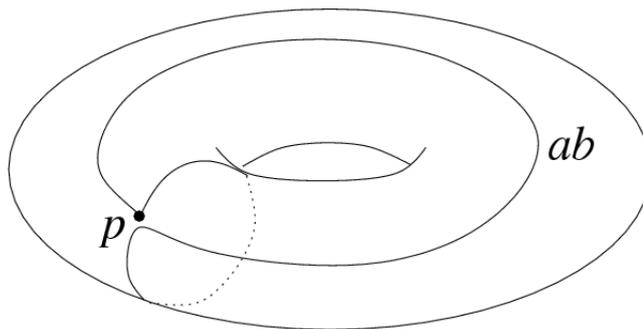


Figura 3.16: Grupo Fundamental do Toro

**Exemplo 3.94.** *Pelo exemplo 3.83, sabemos que  $\pi_1(S^3) \simeq \{0\}$ ,  $\pi_1(S^2 \times S^1) \simeq \pi_1(S^2) \times \pi_1(S^1) \simeq \{0\} \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$  e  $\pi_1(T^3) \simeq \pi_1(S^1 \times S^1 \times S^1) \simeq \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Note que,  $\pi(S^3)$  é finito,  $\pi(S^2 \times S^1)$  é abeliano da mesma forma que  $\pi(T^3)$  e em todos esses casos, o crescimento do grupo fundamental não é exponencial. Existe um resultado, que não provaremos, pois foge aos propósitos desse trabalho, que diz: Se  $\pi_1(M)$  é finito ou abeliano então  $\pi_1(M)$  não tem crescimento exponencial. Sugerimos que ao leitor interessado veja as referências [1] e [14].*

# Capítulo 4

## Teorema Principal

Neste capítulo apresentaremos a prova do teorema que motivou este estudo. Para isto, utilizaremos os resultados e conceitos apresentados nos capítulos anteriores, bem como os resultados apresentados na primeira seção deste capítulo. A principal referência para este capítulo foi [18].

### 4.1 Resultados Auxiliares

No que segue  $M$  é uma 3-variedade compacta e consideramos um fluxo Anosov definido em  $M$ .

**Definição 4.1.** *Seja  $\varphi_t$  um fluxo de Anosov sobre uma variedade compacta diferencial de classe  $C^2$ . Por analogia com o fluxo geodésico sobre uma variedade com curvatura negativa as fibras da folheação  $\mathcal{F}^s$  são chamadas folha estável forte as fibras da folheação  $\mathcal{F}^u$  são chamadas folha instável forte. As fibras de folheações  $\mathcal{F}^{s+1}$  e  $\mathcal{F}^{u+1}$  são chamadas estável e instável, respectivamente. Veja [19].*

A aplicação  $f$  da variedade  $E_1$  na variedade  $E_2$  é chamada de um homeomorfismo local se para qualquer ponto  $p \in E_1$  podemos encontrar uma vizinhança que é homeomorficamente aplicado por  $f$  na vizinhança de  $f(p)$  em  $E_2$ . Se, mais ainda, o Teorema da Cobertura homotópica (veja [12]) for válida para  $f$ , dizemos que  $f$  é uma cobertura.

Lembremos que um grupo com um número finito de geradores é chamado um grupo de crescimento exponencial se podemos encontrar números positivos  $c$  e  $t$

tal que para todo número positivo  $k$  o número distintos de elementos do grupo que pode ser escrito da forma de uma palavra (em termos dos geradores) de comprimento que não exceda  $k$  é maior que  $ce^{kt}$ .

Tome agora uma folha instável qualquer  $L^u$  e desenhe através de cada ponto  $x$  dessa folha uma folha estável  $L^s$ .

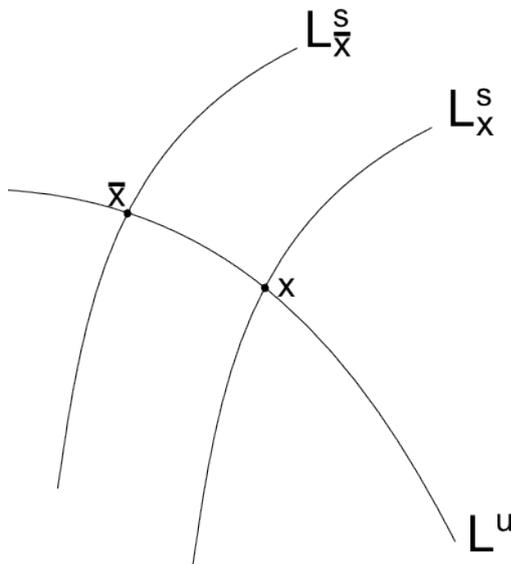


Figura 4.1: Folhas instável e estável

Considere o conjunto  $A_1$  dos pares  $(x, y)$ , onde  $x \in L^u$  e  $y \in L_x^s$ , isto é,  $A_1 = \{(x, y) \in M/x \in L^u \text{ e } y \in L_x^s\}$  e introduza uma topologia sobre  $A_1$ . A soma

$$d(x_1(t), x_2(t)) = \rho_{L^u}(x_1, x_2) + \min_{x_1(t), x_2(t)} \max_t \rho_M(x_1(t), x_2(t))$$

onde  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são todos os caminhos possíveis na folha estável que unem  $x_1$  à  $y_1$  e  $x_2$  à  $y_2$ , respectivamente, é chamado de a distância entre os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  ( $\rho_{L^u}$  é a distância com respeito a métrica Riemanniana de  $L^u$  e  $\rho_M(x_1(t), x_2(t))$  é a distância com respeito à métrica de  $M$ ). Utilizaremos nessa métrica a ideia de transporte paralelo (ver figura 4.2).

O conjunto  $A_1$  pode ser aplicado naturalmente para  $M$ , colocando  $f(x, y) = y$ , onde  $y$  no lado direito é considerado um ponto de  $M$ . Uma vez que as folhas instável e estável são transversais aos espaços tangentes em cada ponto, essa aplicação é vista como um homeomorfismo local.

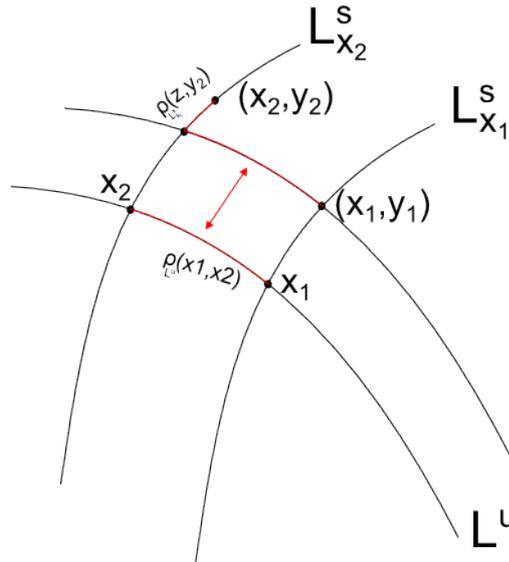


Figura 4.2: Transporte Paralelo

Como  $A_1$  é localmente aplicado homeomorficamente em  $M$ , podemos introduzir nele uma estrutura da variedade Riemanniana que é a imagem inversa da estrutura Riemanniana em  $M$ . A métrica Riemanniana transforma  $A_1$  em um espaço métrico (a métrica obtida para o espaço  $A_1$  geralmente não coincide com a métrica introduzida anteriormente). Dessa forma realizamos o completamento de  $A_1$  com relação à métrica obtida e a denotamos por  $\overline{A_1}$ . Como a aplicação não aumenta a distância, poderá ser estendida continuamente em  $\overline{A_1}$ . Notamos que  $f$  pode ser naturalmente definida usando o fluxo Anosov.

**Lema 4.2.**  $\overline{A_1} \subset M$  é uma variedade com bordo, o bordo está sendo decomposto em um conjunto formado por subespaços  $\Gamma_\alpha$ . E cada subespaço é aplicado por  $f : \overline{A_1} \rightarrow M$  sobre uma folha estável e a aplicação é um recobrimento sobre  $\Gamma_\alpha$ .

**Demonstração:** Temos que mostrar dois resultados, primeiro que  $\overline{A_1}$  é uma variedade com bordo e por fim que a aplicação  $f$  é um recobrimento sobre o subespaço  $\Gamma_\alpha$

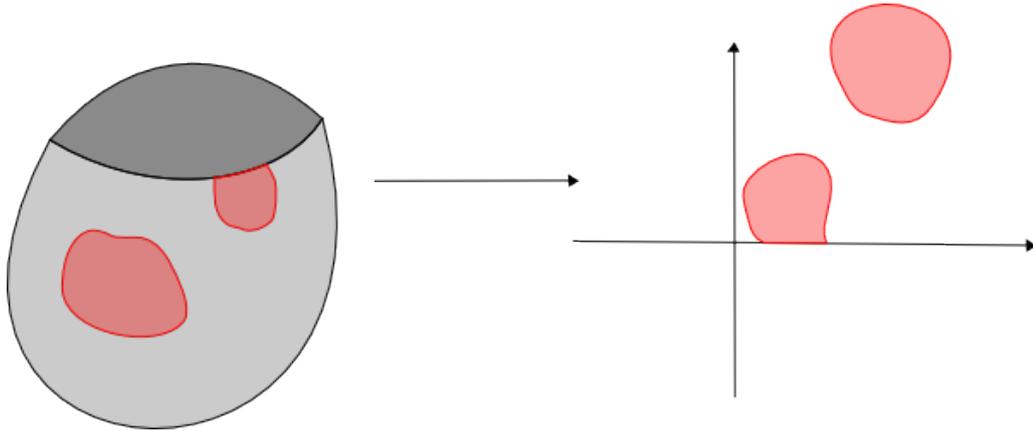


Figura 4.3: Homeomorfismo ao semiespaço superior

Para mostrarmos que  $\overline{A_1}$  é uma variedade com bordo utilizaremos a definição que nós diz que é suficiente mostrarmos que  $\overline{A_1}$  é homeomorfo ao semiespaço superior, ou seja, à  $\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 \geq 0\}$ . Seja  $p \in \overline{A_1}$ , então existe  $x_n \rightarrow p$ , e essa sequência  $(x_n)$  existe, pois, sempre conseguimos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$  sequência de pontos no nosso conjunto  $\overline{A_1}$ .

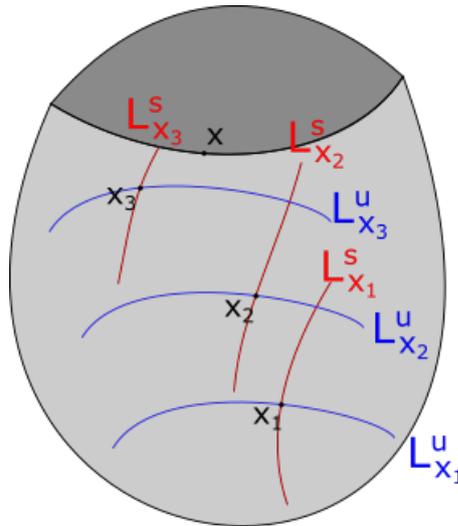


Figura 4.4: Saturado das folhas estáveis sobre as folhas instáveis

Dessa forma, por definição, temos

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A_1 \neq \emptyset \text{ e } B(p, \varepsilon) \cap A_1^c \neq \emptyset.$$

Agora, tome,  $U = B(p, \varepsilon) \cap A_1$  um aberto relativo à  $A_1$ . Assim, precisamos encontrar um homeomorfismo  $\psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{H}^3$ .

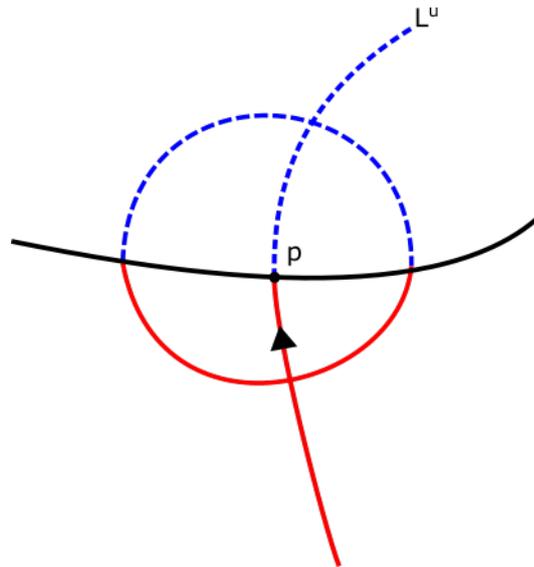


Figura 4.5: Vizinhança do Fecho de  $\overline{A_1}$

Tome  $p = \omega(x_n)$ , defina  $V = \{(a_1, a_2, t) \in \mathbb{R}^3 / t > 0, x_n = \varphi_{-t}(p)\}$ . Dessa forma, temos nosso homeomorfismo  $\psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{H}^3$ , o que garante que  $\overline{A_1}$  é uma variedade com bordo.

Queremos mostrar que  $f$  é um recobrimento, ou seja, que é contínua, sobrejetiva e que para qualquer  $x \in M$  conseguimos uma vizinhança distinguida.

De fato, como a função  $f$  está definida em termos do fluxo de Anosov, isto é,  $f(x) = \varphi_t(x)$ , para  $t$  fixo, e como para cada tempo  $t$  o fluxo é uma aplicação homeomórfica, temos pela igualdade que a função  $f$  é um homeomorfismo, e disso tiramos que  $f$  é contínua e sobrejetiva. Resta mostrar que conseguimos  $\forall p \in M$  uma vizinhança distinguida, em outras palavras queremos que cada  $p \in M$  pertença a um aberto  $U \subset M$  tal que  $f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$  é uma reunião de abertos  $V_{\alpha}$ , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por  $f$  homeomorficamente sobre  $U$ . Mas note que, ao aplicar a imagem inversa de  $f$  teremos que as vizinhanças inversas de  $p$  mergulham nas folhas estáveis, que por sua vez são por definição duas a duas disjuntas, e, portanto, temos o resultado buscado. A figura abaixo serve para ilustrar o que esta acontecendo.

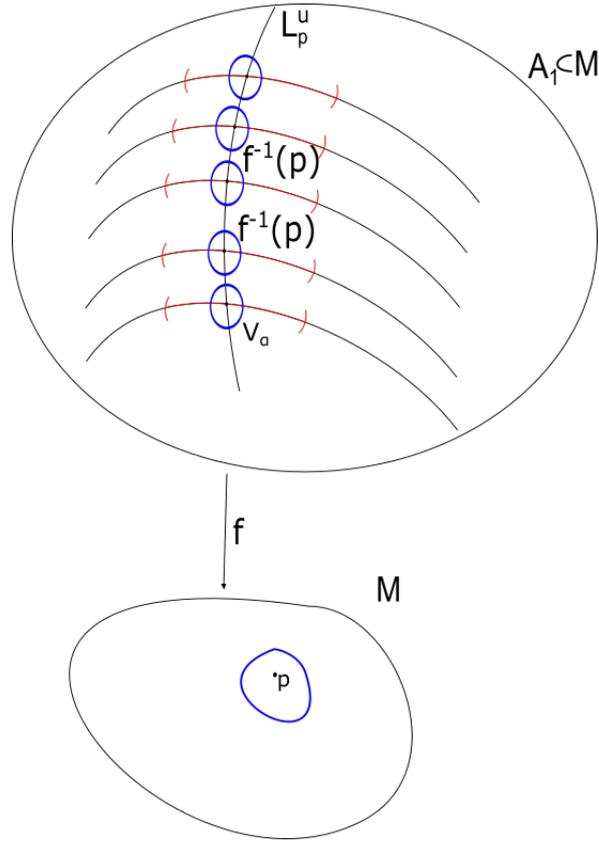


Figura 4.6: Vizinhança Distinguida

□

Sejam  $\Gamma_\alpha$  e  $y \in \Gamma_\alpha$ . Então, como dito acima, uma curva  $y(t) \in \Gamma_\alpha$  pode ser encontrada de forma que seja transversal à  $L_{y(t)}^2$  e tal que  $f(y(t)) \in L_{f(y(t))}^s$ .

Portanto, se desenharmos uma folha instável  $L_{f(y)}^u$  através de  $f(y)$ , uma vizinhança de  $f(y)$  em  $L_{f(y)}^u$  é dividida por  $f(y)$  em duas partes:  $L_{f(y)}^u$  que é coberto em  $A_1$  e  $L_{f(y)}^s$  que não é. Agora construa o espaço  $A_2^\alpha$  que é uma fibra sobre  $\Gamma_\alpha$  com fibra  $L_{f(y)}^s$ . Considere a união  $A_1 \cup \left( \bigcup_\alpha A_2^\alpha \right)$  e denote por  $A_2$ , da mesma maneira que  $A_1$  é aplicada naturalmente sobre  $M$ . Vamos mostrar que a aplicação  $f$  estendida à  $A_2$  é um homeomorfismo local. É suficiente verificar isso para  $y \in \Gamma_\alpha$ . Mas  $f(\Gamma_\alpha)$  divide uma vizinhança de  $f(y)$  em  $M$  em duas partes, uma das quais foi provada estar coberta em  $A_1$ , a outra podemos ver que é coberto em  $A_2^\alpha$ .

**Afirmção.** A outra parte da vizinhança de  $f(y)$  é coberto em  $A_2^\alpha$ .

De fato, pois  $A_2^\alpha$  são as fibras estáveis, e dessa forma, utilizando a mesma ideia do Lema 4.2, podemos concluir o desejado.

Uma superfície que cobre uma folha instável passa por cada ponto em  $A_2$ .

Isso é verdade, em particular, para  $y \in \Gamma_\alpha$ , mas através desse ponto passa uma superfície cobrindo uma folha estável. Portanto, existe um número  $\varepsilon$  que não depende de  $y$  tal que a  $\varepsilon$ -vizinhança de  $f(y)$  é coberta em  $A_2$  ( $y$  definido como antes, sendo um elemento da fronteira de  $A_1$ ). Vamos considerar, como fizemos para  $A_1$ , a fronteira de  $A_2$ . Podemos usar o mesmo método para provar que  $\overline{A_2}$  é uma variedade com fronteira, onde a fronteira é decomposta em um conjunto de folhas instáveis (não estáveis, como é o caso de  $A_1$ ). Continuando a construção, obtemos conjuntos  $A_i$  para qualquer inteiro positivo  $i$  e vemos que  $A_i$  está mergulhado em  $A_{i+1}$ . Podemos, portanto, considerar a união  $A$  desses conjuntos (mais precisamente, o limite indutivo).

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

onde cada  $A_i = \begin{cases} \{(x, y) \in M/x \in L^u \text{ e } y \in L_x^s\} & \text{se } i = 2n + 1 \\ \{(x, y) \in M/x \in L^s \text{ e } y \in L_x^u\} & \text{se } i = 2n \end{cases}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma topologia natural é introduzida em  $A$ . Quanto à  $A_1$ , está provado que, para qualquer ponto da fronteira de  $A_i$  uma vizinhança distinguida em  $A_{i+1}$  pode ser encontrada e é aplicada homeomorficamente a  $\varepsilon$ -vizinhança da imagem desse ponto, onde  $\varepsilon$  como antes depende apenas do fluxo Anosov. O Teorema do Fluxo Tubular, nós garante a extensão das folhas através dos conjuntos  $A_i$ 's.

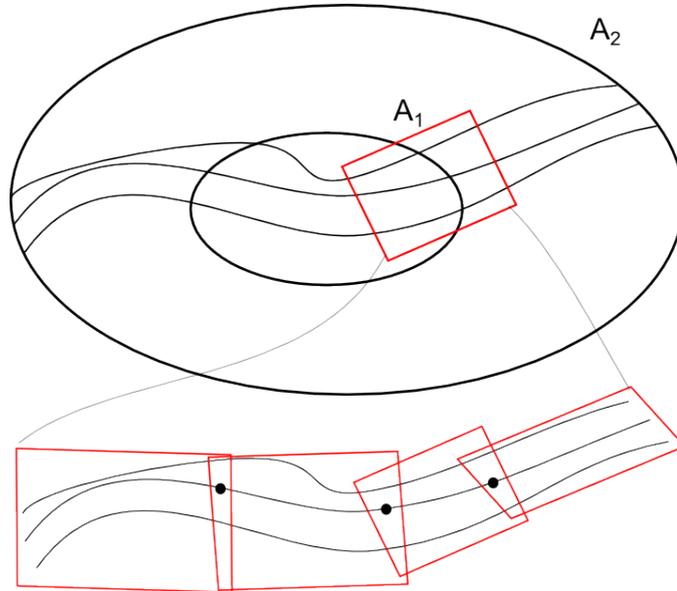


Figura 4.7: Teorema do Fluxo Tubular Longo

A partir disso, deduzimos:

**Lema 4.3.** *A aplicação natural  $f : A \rightarrow M$  é um recobrimento.*

**Demonstração:** A prova segue de forma semelhante ao lema 4.2, o que  $A_2$  não cobre o  $A_3$  cobrirá, e seguindo essa ideia, e levando em consideração o

$$A_n = \begin{cases} \{(x, y) \in M/x \in L^u \text{ e } y \in L_x^s\} & \text{se } n = 2m + 1 \\ \{(x, y) \in M/x \in L^s \text{ e } y \in L_x^u\} & \text{se } n = 2m \end{cases}, \text{ com } m \in \mathbb{N}$$

fazendo um limite indutivo, concluímos então que vale para todo  $A_n$  e nesse caso, o limite indutivo do  $A_n$  é o próprio  $A$ . E, portanto, o lema está provado.  $\square$

Denotamos por  $S(R)$  o círculo de raio  $R$ .

**Definição 4.4.** *Seja  $\Omega = \{x \in M/x \in S(R) \text{ e } x = f^{-1}(u), u \in M\}$*

**Lema 4.5.** *Existem  $c$  e  $t$  tais que para qualquer  $R > 0$ , temos que  $\#\Omega > ce^{Rt}$ .*

**Demonstração:** Considere a folha instável  $L^u$  com a qual começamos a construção no lema 4.2 e tomamos um ponto  $x$  nela.

**Afirmção.** A área  $S(R)$  do círculo de raio  $R$  e centro  $O$  na métrica de  $L^u$  cresce exponencialmente.

De fato, pela definição de folha instável, temos que

$$\|D\varphi_t(p)v\| \geq ke^{\lambda t}\|v\|, \forall t > 0, \forall p \in M \text{ e } \forall v \in L^u$$

Agora olhando para  $A_1$  e destacamos dele o conjunto  $A_1^{R,\varepsilon}$ , que consiste dos pontos da seguinte forma:

$$A_1^{R,\varepsilon} = \{(x, y) \in M, x \in S(R) \text{ e } y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \subset E^u$$

onde  $x$  pertence ao círculo de raio  $R$  em  $L^u$  com o centro em  $O$ , e  $y$  pertence à  $\varepsilon$ -vizinhança de  $L^u$  em  $A_1$ .

Podemos ver que para  $\varepsilon$  fixo, o volume deste conjunto é maior que  $a \cdot S(R)$ , onde  $a$  é um número que não depende de  $R$ . Disso e do Teorema de Fubini, temos que um ponto  $u \in M$  pode ser encontrado para que o número de imagens inversas em  $A_1^{R,\varepsilon}$  seja maior que  $ce^{Rt}$ . E assim, está provado o lema.

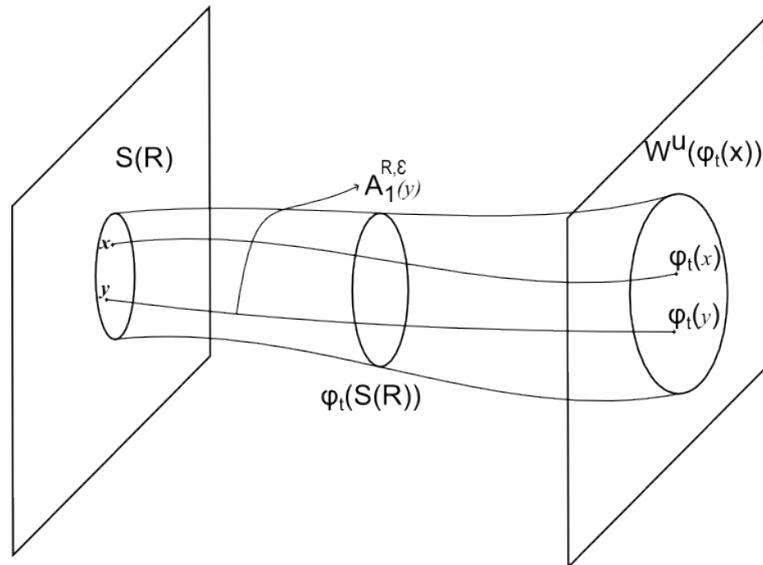


Figura 4.8: Volume  $A_1^{R, \epsilon}$

□

Vejamos que o grupo fundamental de toda variedade fechada conexa é finitamente gerado.

**Lema 4.6.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana fechada. Então existe  $L > 0$  tal que entre todo par de caminhos menor ou igual a  $L$  de forma que compartilhem o mesmo extremo inicial e final, existe uma homotopia nos extremos fixos que transforma um no outro. Em particular, toda curva fechada de comprimento menor ou igual a  $L$  é homotopicamente trivial.*

**Demonstração:** Todo ponto  $x \in M$  têm um aberto  $B_x$  que é homeomorfo a uma bola euclidiana. Tomando  $L > 0$  um número da cobertura de  $\{B_x\}_{x \in M}$ , obtemos que toda curva de diâmetro menor ou igual a  $L$  está inclusa em alguma bola  $B_x$  e, portanto, a tese é deduzida diretamente, uma vez que a concatenação de dois caminhos de comprimento menor ou igual a  $L$  com as mesmas extremidades inicial e final tem um diâmetro menor ou igual a  $L$ . □

**Lema 4.7.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana fechada,  $x_0$  o ponto base em  $M$  e  $k > 0$  fixo. Existem finitos elementos de  $\pi_1(M)$ , com representante de comprimento menor ou igual que  $k$ .*

**Demonstração:** Suponhamos por contradição, que existem infinitas curvas fechadas  $\{\alpha_i\}_{i \in \Omega}$ .

Seja  $L > 0$  como no lema 4.6. Podemos então reparametrizar cada uma dessas curvas fechadas de modo a terem velocidade constante e particionando o intervalo  $[0, 1]$  em tempos  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = 1$ , de forma que toda curva fechada  $\alpha_i$ , as curvas  $\alpha_i|_{[t_{j-1}, t_j]}$  tenham comprimento menor que  $\frac{L}{2}, \forall j = 1, \dots, n$ .

Observe que  $\{(\alpha_i(t_0), \alpha_i(t_1), \dots, \alpha_i(t_n))\}_{i \in \Omega} \subset M^n$  acumula em algum ponto e assim, existem duas curvas fechadas  $\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}$ , tais que a distância entre  $\alpha_{i_0}(t_j)$  e  $\alpha_{i_1}(t_j)$  é menor que  $\frac{L}{2}, \forall j = 1, \dots, n$ .

Vejamus que estas duas curvas fechadas com ponto base em  $x_0$  devem ser homotópicas.

Consideremos entre  $\alpha_{i_0}(t_j)$  e  $\alpha_{i_1}(t_j)$  uma curva  $\beta_j$  de comprimento menor ou igual que  $\frac{L}{2}$ .

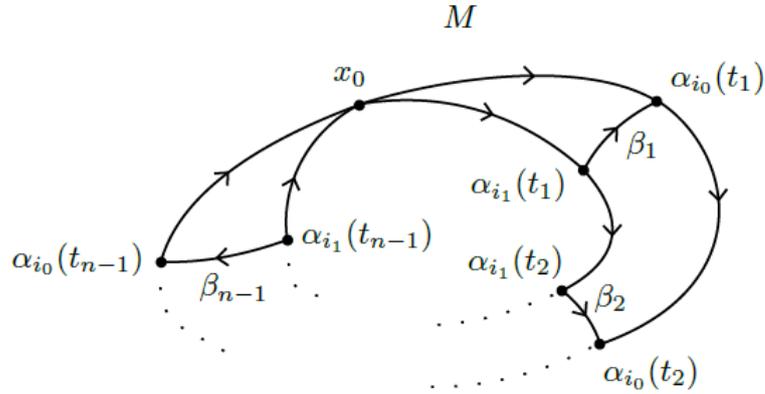


Figura 4.9: Homotopia entre duas curvas fechadas

Assim, do lema 4.6, temos

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i_1} &= \alpha_{i_1}|_{[t_0, t_1]} * \alpha_{i_1}|_{[t_1, t_2]} * \dots * \alpha_{i_1}|_{[t_{n-1}, t_n]} \\
 &\simeq \alpha_{i_0}|_{[t_0, t_1]} * \beta_1 * \alpha_{i_1}|_{[t_1, t_2]} * \dots * \alpha_{i_1}|_{[t_{n-1}, t_n]} \\
 &\vdots \\
 &\simeq \alpha_{i_0}|_{[t_0, t_1]} * \alpha_{i_0}|_{[t_1, t_2]} * \dots * \beta_{n-1} * \alpha_{i_1}|_{[t_{n-1}, t_n]} \\
 &\simeq \alpha_{i_0}|_{[t_0, t_1]} * \alpha_{i_0}|_{[t_1, t_2]} * \dots * \alpha_{i_0}|_{[t_{n-1}, t_n]} \\
 &= \alpha_{i_0}
 \end{aligned}$$

E isso, nós leva à uma contradição,, pois a curva  $\alpha_{i_0}$  está aumentando, logo o lema está provado.  $\square$

**Proposição 4.8.** *Toda variedade diferenciável fechada têm o grupo fundamental finitamente gerado.*

**Demonstração:** Fixemos uma métrica riemanniana em  $M$ . Observe que a distância  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  induzida pela métrica é uma função real contínua definida em  $M \times M$  compacto e, portanto, existe  $D$  valor máximo de  $d$  que chamamos de diâmetro de  $M$ .

Seja  $x_0 \in M$  um ponto base. Em virtude do lema 4.7 podemos afirmar que as curvas fechadas com ponto base  $x_0$  e comprimento menor ou igual a  $3D$  representa apenas um conjunto finito de elementos  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  de  $\pi_1(M)$ . Vejamos que  $X$  é um gerador de  $\pi_1(M)$ .

Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  uma curva fechada qualquer com ponto base  $x_0$ . Particionando  $\alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_n$  em finitas curvas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n : [0, 1] \rightarrow M$  de comprimento menor que  $D$ . Podemos então considerar, para cada ponto  $\alpha_i(1)$  no percurso de  $\alpha$ , uma curva  $\beta_i$  de comprimento menor ou igual à  $D$  que une  $x_0$  com  $\alpha_i(1)$  (Se isso for possível,  $D$  não seria o diâmetro de  $M$ ).

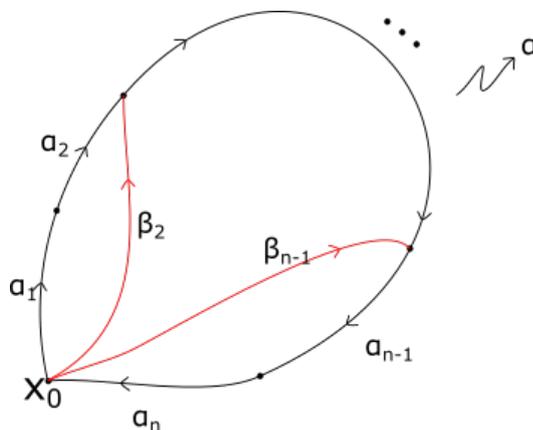


Figura 4.10: Partição da Curva

Assim, temos que,

$$\alpha \simeq (\alpha_1 * \alpha_2 * \beta_2^{-1}) * (\beta_1 * \alpha_3 * \beta_3^{-1}) * \dots * (\beta_{n-2} * \alpha_{n-1} * \alpha_n)$$

E isso conclui a proposição, pois  $\bar{\alpha}$  é decomposta como produto de finitas classes de  $\pi_1(M)$  representadas por curvas fechadas de comprimento menor que  $3D$ .  $\square$

**Lema 4.9.** *Seja  $M$  uma variedade compacta cujo grupo fundamental é finitamente gerado pelos elementos de  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Então existe uma constante  $k$  tal que qualquer curva fechada de comprimento  $R$  representa uma classe do grupo fundamental escrita na forma de uma palavra em termos de  $x_1 \dots x_n$  de comprimento menor que  $kR$ .*

**Demonstração:** Como  $M$  é uma variedade riemanniana compacta, podemos

definir  $r_1 = \max_{x_1, x_2 \in M} \rho_M(x_1, x_2)$  e  $r_2 = 2r_1$ . Então,

**Afirmação:** Qualquer curva fechada de comprimento  $R$  pode ser colocada na forma de um produto com no máximo  $\frac{R}{r_1}$  curvas de comprimento menor que  $r_2$ .

De fato, podemos escrever uma curva como produto de curvas, e também como o diâmetro da variedade é finito, ou seja, é  $r_1$ , qualquer curva do grupo fundamental que for pega terá uma ordem menor que duas vezes o diâmetro, isto é, menor que  $2r_1$ , com isso temos,

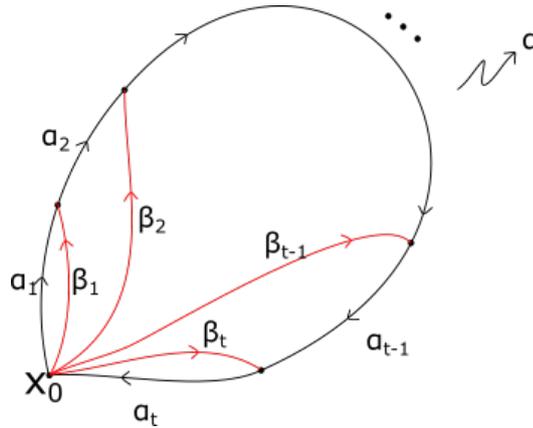


Figura 4.11: Classe de Curva

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_t, \text{ onde cada } |\alpha_i| \leq r_2, 1 \leq i \leq t$$

Sabemos que,  $|\alpha_i|^{2r_1} = |\alpha_i|^{r_2} = e$ . Assim,

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_t \\ \Rightarrow \alpha^R &= (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_t)^R \\ &= (\alpha_1)^R \cdot (\alpha_2)^R \cdot \dots \cdot (\alpha_t)^R \\ &= (\alpha_1^{\frac{R}{r_2}})^{r_2} \cdot (\alpha_2^{\frac{R}{r_2}})^{r_2} \cdot \dots \cdot (\alpha_t^{\frac{R}{r_2}})^{r_2} \\ &= (\alpha_1^{r_2})^{\frac{R}{r_2}} \cdot (\alpha_2^{r_2})^{\frac{R}{r_2}} \cdot \dots \cdot (\alpha_t^{r_2})^{\frac{R}{r_2}} \end{aligned}$$

Daí,  $t = \frac{R}{r_2}$ .

Por outro lado, existe uma constante  $k_1$ , de modo que qualquer curva fechada de comprimento que não exceda  $r_2$  representa uma classe do grupo fundamental escrita na forma de uma palavra em termos dos geradores  $x_1 \cdots x_n$  de tal forma

que a quantidade não seja superior a  $k_1$ .

$$\alpha = \overbrace{(\alpha_1 \cdot \beta_1^{-1})}^{\gamma_1} \overbrace{(\beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{-1})}^{\gamma_2} \cdots \overbrace{(\beta_t \cdot \alpha_t)}^{\gamma_t}$$

Onde todas as curvas  $\gamma_i$  são fechadas para  $i \in \{1, \dots, t\}$

Assim, existe uma quantidade  $k_1$  de curvas  $\gamma_i$  de forma que  $|\gamma_i| < r_2$ . Portanto, uma curva fechada de comprimento  $R$  representa uma classe do grupo fundamental escrita na forma de uma palavra de comprimento não superior ao produto da quantidade de curvas totais que conseguimos anteriormente com a quantidade das curvas fechadas obtidas depois  $\frac{k_1 R}{r_2}$ , logo, se  $k = \frac{k_1}{r_2}$  mostramos o que queríamos.  $\square$

## 4.2 Prova do Teorema Principal

Agora, com os resultados apresentados na seção anterior, conseguiremos demonstrar o teorema que motivou esse estudo.

**Teorema 4.10.** *Se um fluxo de Anosov opera sobre uma variedade  $M$  riemanniana compacta, tridimensional, o grupo fundamental de  $M$  é um grupo de crescimento exponencial.*

**Demonstração:** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta. Suponha que  $M$  suporta um fluxo Anosov  $\varphi$ .

Uma forma de mostrarmos que  $\pi_1(M)$  têm crescimento exponencial é mostrar:

$$\exists B, \lambda > 0 / \#\{\gamma \in \pi_1(M) / \exists c \in \gamma, |c| \leq R\} \geq B e^{\lambda R}$$

Dessa forma, fixado um domínio fundamental  $K$  do recobrimento  $f : A \rightarrow M$  do lema 4.3. Como  $M$  é compacto, temos que  $diam(K) = a$  é finito.

Assim, fixando agora  $\bar{\gamma} \in \pi_1(M)$  tal que  $\bar{\gamma}(K) \cap S(R) \neq \emptyset$ . Então,  $\exists \bar{y} \in \bar{\gamma}(K) \cap S(R)$ , logo,  $\exists \bar{c}$  de tal sorte que  $|c| \leq R + a$  que junta  $\bar{x}$  e  $\bar{\gamma}(\bar{x})$ .

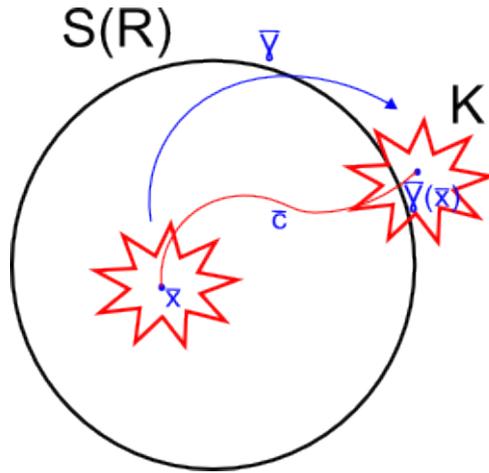


Figura 4.12: Domínio Fundamental  $K$  e o círculo  $S(R)$

Com isso, temos que,  $c = f \circ \bar{c}$  é uma curva fechada (veja figura 4.13), em  $\bar{\gamma}$  de comprimento menor igual à  $R + a$ .

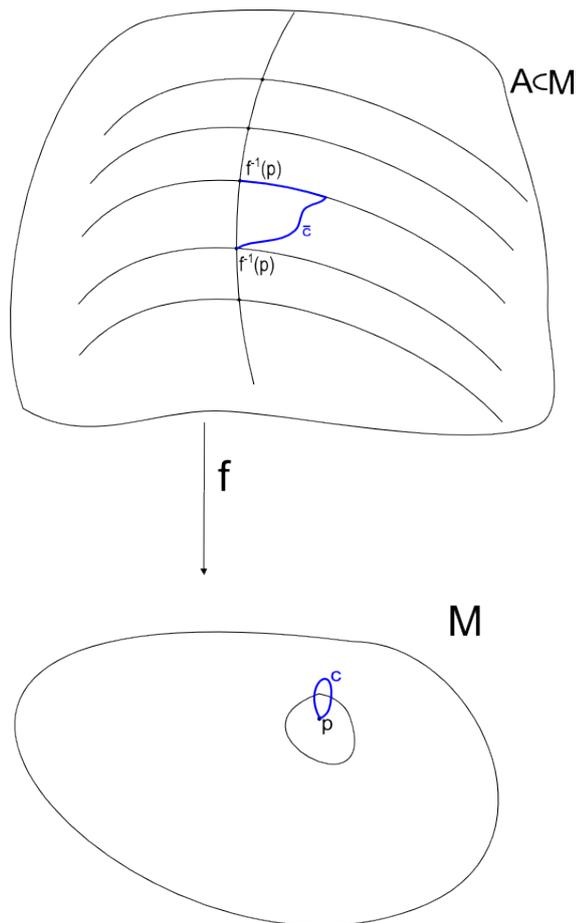


Figura 4.13: Fibras

Assim, mostramos que  $\bar{\gamma} \in \{\gamma \in \pi_1(M) / \exists c \in \gamma, |c| \leq R + a\}$  e daí, temos uma

inclusão

$$\{\gamma \in \pi_1(M)/\gamma(K) \cap S(R) \neq \emptyset\} \subseteq \{\gamma \in \pi_1(M)/\exists c \in \gamma, |c| \leq R + a\} \quad (4.1)$$

Denote  $N(R) = \#\{\gamma \in \pi_1(M)/\gamma(K) \cap S(R) \neq \emptyset\}$ . Por definição, temos

$$\bigcup_{\gamma(K) \cap S(R) \neq \emptyset} \gamma(K) \supseteq S(R)$$

Daí,

$$A(S(R)) \leq N(R).a \quad (4.2)$$

Como  $S(R)$  tem crescimento exponencial, argumento utilizado no lema 4.5, isto é,  $A(S(R)) \geq Be^{\lambda R}$ , então por 4.2, teremos

$$N(R) \geq \frac{A(S(R))}{a} \geq \frac{B}{a}e^{\lambda R} = B'e^{\lambda R}, \text{ onde } B' = \frac{B}{a}$$

Consequentemente,

$$\#\{\gamma \in \pi_1(M)/\exists c \in \gamma, |c| \leq R + a\} \stackrel{\text{Por 4.1}}{\geq} B''e^{\lambda R}$$

onde  $B'' = B'e^{-\lambda a}$

Portanto,  $\pi_1(M)$  tem crescimento exponencial.

□

# Considerações Finais

A referência [18], usada como base para o nosso trabalho, tem como objetivo principal dar resposta à seguinte pergunta: Se um fluxo Anosov opera sobre uma variedade tridimensional  $M$ , o grupo fundamental de  $M$  é um grupo de crescimento exponencial?

A resposta para esta questão é positiva, conforme foi apresentado no Teorema 4.10. Neste trabalho mostramos que:

1. Podemos obter um recobrimento através do espaço das folheações para a variedade trabalhada  $M$ , de forma que esse conjunto seja uma variedade com bordo.
2. Os círculos no espaço instável crescem de forma exponencial.
3. É possível termos uma quantidade finita de curvas fechadas com comprimento finito gerada apenas pelos finitos geradores do grupo fundamental, onde temos que esse grupo cresce de modo exponencial.

Trabalhamos com fluxos Anosov para conseguirmos garantir a existência das curvas fechadas nas folheações da variedade  $M$ .

Atualmente, o conceito de fluxo Anosov já tem extensões que estão sendo estudadas. Uma dessas extensões são os fluxos Seccional Anosov. Na sua tese de doutorado, Bulmer mostrou que o grupo fundamental  $\pi_1(M)$  de uma variedade que suporta um fluxo Seccional Anosov de Codimensão um é infinito.

Ainda restam por explorar outras extensões, que podem ser assuntos de trabalhos posteriores.

# Referências Bibliográficas

- [1] BAUTISTA,S.; C. MORALES, Lectures on sectional Anosov. Disponível em: [http://www.preprint.impa.br/Shadows/SERIE\\_D/2011/86.html](http://www.preprint.impa.br/Shadows/SERIE_D/2011/86.html). Último acesso em: 19 de Setembro de 2019.
- [2] CAMACHO, CÉSAR; NETO, ALCIDES L., Geometric theory of foliations Transl. by SUE E. GOODMAN - Boston; Basel; Stuttgart: Birchauser, 1985.
- [3] CASTRO JÚNIOR, A. A. de, Curso de Equações Diferenciais Ordinárias, Salvador, 2008.
- [4] DEVANEY, ROBERT L., An introduction to chaotic dynamical systems - 2nd edition, Boston University, 1948.
- [5] DO CARMO, M. Geometria Riemanniana. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2008.
- [6] DUGUNDJI JAMES, Topology, Allyn and Bacon, 1978.
- [7] GARCÍA, B. M., Fluxos Seccional-Anosov e Grupo Fundamental - TESE UFMG, Belo Horizonte, 2016.
- [8] GRIGORCHUK, R. I. - Degrees of Growth of Finitely Generated Groups, and the Theory of Invariant Means, 1985.
- [9] GRIGORCHUK, R. I.; Pak, I - Groups of Intermediate Growth: an Introduction for Beginners, 2006.
- [10] HATCHER, ALLEN; Algebraic Topology. Disponível em: <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/#ATI>. Último acesso em: 13 de Setembro de 2019.
- [11] HIRSCH, M.W; PUGH, C.C.; SUHB, M. Invariant Manifolds. Lecture Notes in Mathematics, 583. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977.
- [12] HUEBSCH, W; On the Covering Homotopy Theorem, Annals of Mathematics, Vol 61, No.3, May, 1955 - Printed in U.S.A.
- [13] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. A moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos, Coordenação e revisão da tradução por Luis Barreira, Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 2005.

- [14] LIM, C.H, Growth Rate of Groups, University of Chicago, 2009.
- [15] LIMA, E.L.; Curso de Análise, v. 2, 11. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [16] LIMA, E.L.; Grupo Fundamental e espaços de Recobrimento, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2006.
- [17] LIMA, E.L. Variedades Diferenciáveis, Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [18] MARGULIS, G.A,  $Y$ -flows on three-dimensional manifolds, D.V Anosov and Ya. G. Sinai, 1967.
- [19] MARGULIS, G.A; SHARP, R. - On Some Aspects of the Theory of Anosov Systems and Periodic Orbits of Hyperbolic Flows, Springer Monographs in Mathematics, 2003.
- [20] MELO, W. Topologia das Variedades. Disponível em: <http://w3.impa.br/~demelo/topologiadiferencial2011>. Último acesso em: 13 de Setembro de 2019.
- [21] MILNOR, JOHN W., From the Differentiable Viewpoint, Princeton University Based on notes by David W. Weaver, 1965.
- [22] PALIS, J.; MELO, W. Introdução aos Sistemas Dinâmicos, Rio de Janeiro: IMPA, 1978.
- [23] ROBINSON, C. Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos. CRC Press Inc, 1995.
- [24] ROJAS, CARLOS A. M.; SCÁRDUA, BRUNO - Geometry, dynamics, and topology of foliations, a first course, World Scientific, 2017.
- [25] SOTOMAYOR, JORGE, Equações Diferenciais Ordinárias, São Paulo, 2009.
- [26] SZE-TSEN HU, Homotopy Theory, Wayne State University, Detroit, Michigan, 1959.
- [27] VILCHES, M. A., Topologia Algébrica: Grupo Fundamental, Departamento de Análise - IME, UERJ. Rio de Janeiro.