PEDRO HENRIQUE ANTUNES DE OLIVEIRA

TEMPO DE RECORRÊNCIA E ESPERA PARA ROTAÇÕES DO CÍRCULO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: André Junqueira da Silva Corrêa

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T
O48t
2020

Oliveira, Pedro Henrique Antunes de, 1989-
Tempo de recorrência e espera para rotações do círculo / Pedro Henrique Antunes de Oliveira. – Viçosa, MG, 2020.
85 f. ; 29 cm.

Orientador: André Junqueira da Silva Corrêa.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.84-85.

1. Teoria ergódica. 2. Frações contínuas. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 515.48

PEDRO HENRIQUE ANTUNES DE OLIVEIRA

TEMPO DE RECORRÊNCIA E ESPERA PARA ROTAÇÕES DO CÍRCULO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 06 de março de 2020.

Assentimento:

Pedro Henrique Antunes de Oliveira
Autor

André Junqueira da Silva Corrêa
Orientador

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha mãe Mônica pela compreenção e paciência para que eu pudesse estudar. Caso ela não possuísse estes atributos, certamente não estaria aqui.

Dentre os professores, queria agradecer especialmente o professor Rogério Carvalho Picanço que, talvez sem querer, me convenceu a começar a estudar Matemática seriamente. Se tivesse feito aquele curso de Álgebra Linear com um outro professor, talvez também não estaria aqui hoje. Além disso, agradeço o professor Rogério Carvalho Picanço (uma segunda vez) e o professor Abílio Lemos pela paciência demonstrada através de várias seções demoradas para auxílio e resolução de dúvidas nas primeiras disciplinas da Matemática que fiz na minha transição (da Ciência da Computação à Matemática).

Quero agradecer o meu orientador André Junqueira da Silva Corrêa pelas recomendações de vários livros, que certamente vão me deixar ocupado por um bom tempo nos próximos anos, e pela orientação neste trabalho, que contribuiu de modo significante para que este corresse bem sem maiores problemas.

Agradeço aos meus colegas de curso, tanto os antigos da Ciência da Computação quanto os novos da Matemática, pela parceria e ajuda sempre que foi preciso.

Por último, mas de modo algum menos importante, agradeço também à CAPES pelo apoio financeira indispensável. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

OLIVEIRA, Pedro Henrique Antunes, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2020. **Tempo de Recorrência e Espera para Rotações Irracionais**. Orientador: André Junqueira da Silva Corrêa.

Este trabalho aborda recorrência em sistemas dinâmicos (motivada pelo Teorema da Recorrência de Poincaré) com foco nas rotações irracionais do círculo. Tratamos o círculo como $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$ e assim também fazemos um estudo das estruturas topológica, métrica e de medida em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Em particular, damos uma definição do que entendemos pela medida de Lebesgue sobre o círculo e definimos uma métrica $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$ compatível com a topologia quociente de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. O principal resultado apresentado neste trabalho diz que dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pondo $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dada por $f(x + \mathbb{Z}) = (x + \alpha) + \mathbb{Z}$ (i.e. rotação do círculo por um ângulo α), para todo ponto x do círculo e para μ^1-quase todo ponto y do círculo (sendo μ^1 a medida de Lebesgue sobre círculo), tem-se $\frac{1}{\beta} = \underline{R}(x) \leq \overline{R}(x) = 1 = \underline{R}(x, y) \leq \overline{R}(x, y) = \beta$, sendo $\beta = \sup\left\{t > 0 : \liminf_{j\to\infty} j^t \mathrm{d}(j\alpha, \mathbb{Z}) = 0\right\}$, $\underline{R}(x, y) = \liminf_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_r(x,y))}{-\log(r)}$, $\overline{R}(x, y) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_r(x,y))}{-\log(r)}$, $\tau_r(x, y) = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1, \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(f^n(x), y) < r\}$, $\underline{R}(x) = \underline{R}(x, x)$ e $\overline{R}(x) = \overline{R}(x, x)$. É um fato conhecido que para quase todo número real α (de acordo com a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$), tem-se $\beta = 1$, o que enfatiza a relevância deste resultado. Também estudamos resultados mais gerais sobre a relação entre recorrência e dimensão pontual de uma medida, a saber, uma desigualdade apresentada por Barreira e Saussol e uma outra desigualdade apresentada por Galatolo.

Palavras-chave: Círculo. Rotação Irracional. Recorrência.

Abstract

OLIVEIRA, Pedro Henrique Antunes, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2020. **Recurrence and Hitting Time for Irrational Rotations**. Advisor: André Junqueira da Silva Corrêa.

In this work, we study recurrence in dynamical systems (motivated by the Poincaré Recurrence Theorem) with a focus on irrational circle rotations. The circle is treated as the quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$ and thus we explore some of its topological, metric, and measure-theoretical structure. In particular, we give a definition of what is understood by the Lebesgue measure in the circle and we also define a metric $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$ compatible with the quotient topology of $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. The main result of this work states that given $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, if we put $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ given by $f(x + \mathbb{Z}) = (x + \alpha) + \mathbb{Z}$ (i.e. circle rotation of angle α), then for all $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, and for μ^1-almost every $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (μ^1 denotes the Lebesgue measure in the circle), we have: $\frac{1}{\beta} = \underline{R}(x) \leq \overline{R}(x) = 1 = \underline{R}(x, y) \leq \overline{R}(x, y) = \beta$, where $\beta = \sup\left\{t > 0 : \liminf_{j\to\infty} j^t \mathrm{d}(j\alpha, \mathbb{Z}) = 0\right\}$, $\underline{R}(x, y) = \liminf_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_x(x,y))}{-\log(r)}$, $\overline{R}(x, y) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_x(x,y))}{-\log(r)}$, $\tau_r(x, y) = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1, \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(f^n(x), y) < r\}$, $\underline{R}(x) = \underline{R}(x, x)$, and $\overline{R}(x) = \overline{R}(x, x)$. It is a known fact that for almost every real number α (with respect to the Lebesgue measure in $\mathbb{R}$), the β above is 1, which emphasizes the above result's relevance. Throughout this dissertation, we also study more general results about recurrence reates, relating them to pointwise dimension of a measure, namely, an inequality presented by Barreira and Saussol and another inequality presented by Galatolo.

Keywords: Circle. Irrational Rotation. Recurrence.

Sumário

Introdução **7**

1 Preliminares **9**
1.1 Topologia 9
1.2 Teoria da Medida 15
1.3 Frações Contínuas 20
1.3.1 O Tipo de um Número 22
1.4 Sistemas Dinâmicos 32

2 O Círculo e suas Rotações **34**
2.1 O Círculo como um Quociente 34
2.1.1 Intervalos no Círculo 37
2.2 Medida no Círculo 39
2.3 Rotação 43
2.4 Mapas do Círculo 49

3 Recorrência e Dimensão **51**
3.1 Introdução, Definições e Preliminares 51
3.1.1 Recorrência 51
3.1.2 Dimensão 57
3.2 Desigualdade de Barreira-Saussol 58
3.3 Desigualdade de Galatolo 68
3.4 Recorrência e Dimensão no Círculo 73

Referências Bibliográficas **84**

Introdução

Neste trabalho, estudamos certos conceitos em sistemas dinâmicos. Em particular, é abordada a noção de recorrência cuja motivação é dada pelo Teorema da Recorrência de Poincaré. Nesta dissertação focamos no estudo do tempo de primeiro retorno no caso particular das rotações irracionais e também no estudo de certos modos com que se relacionam as ideias de recorrência e de dimensão pontual, termos cujas definições serão apresentadas no capítulo terceiro. Nos capítulos primeiro e segundo, apresentamos noções que servem de base para os resultados principais deste trabalho, que serão apresentados no último capítulo.

No primeiro capítulo, que é o de conceitos preliminares, introduzimos a linguagem topológica e de medida utilizada no texto. Mencionamos os resultados principais que serão utilizados aqui. Nestas seções, o objetivo é apenas explicitar teoremas, observações, terminologias e comentários que serão relevantes ao longo deste trabalho. Além disso, ainda no primeiro capítulo, de modo parecido com o que é feito nas seções de Topologia e de Teoria da Medida, certas noções básicas de sistemas dinâmicos e frações contínuas são expostas em suas respectivas seções. Estas ainda tem um caráter preliminar, porém recebem uma atenção maior. A importância da seção de frações contínuas deve ser enfatizada pelo seu papel na demonstração do resultado principal deste trabalho (Proposição 221).

O resultado principal deste trabalho é uma afirmação sobre dinâmica no círculo. Sendo assim, o segundo capítulo dá uma visão geral e introdutória sobre este assunto. Definimos a aplicação principal deste trabalho, que é a rotação no círculo sobre ele mesmo. Mostramos também como se apresentam, no círculo, certos aspectos topológicos e de medida, além de certas propriedade métricas. Mostramos algumas propriedades dinâmicas das rotações. Entretanto, não exploramos os resultados padrões envolvendo número de rotação por exemplo (para tais resultados, ver [12] e [21]).

Finalmente, no último capítulo, o terceiro, introduzimos um dos assuntos centrais deste trabalho: recorrência. A noção de dimensão pontual também é dada aqui. Os resultados individualmente fortes que estão nesta seção são as Proposições 216, 205 e 221 e o Lema 217. As duas primeiras exemplificam como as noções de recorrência e dimensão pontual se relacionam de modo útil. A terceira, e mais importante, explora noções de recorrência no caso particular da rotação irracional. O lema faz uma afirmação sobre a "velocidade" da recorrência fazendo uma relação com a noção de dimensão pontual, dando algo como um limitante para a recorrência. Ressaltamos aqui que *a demonstração* apresentada para a Proposição 221 é inédita e de autoria dos seguintes matemáticos Alexander Arbieto, Jairo Bochi, Artur Ávila e Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira. O resultado em si dado pela Proposição 221 não é inédito e já foi exposto por Kim em [14] e por Kim e Seo em [16].

Como já foi dito, o estudo feito neste trabalho visa abordar noções de recorrência, dimensão pontual e rotações irracionais do círculo de modo interligado. Relações entre

recorrência e dimensão pontual, de modo geral, já foram abordadas em outros trabalhos. Nesta dissertação estudamos (através das Proposições 205 e 216 e através do Lema 217) o trabalho já realizado por Barreira e Saussol em [1], Galatolo em [11] e por Bonano e Galatolo em [4].

Há outros trabalhos que estudam formas de recorrência de uma rotação irracional. Por exemplo, em [16], Kim e Seo estudaram o que se entende pelo tempo de espera de rotações no círculo. Uma das conclusões deste trabalho citado é que para μ-quase todo ângulo α de rotação (μ aqui denota a medida de Lebesgue da reta), definindo $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = (x+\alpha) - \lfloor x+\alpha \rfloor$, $Q_n(x) = [2^{-n}i, 2^{-n}(i+1))$ tal que $x \in [2^{-n}i, 2^{-n}(i+1))$ e $K_n(x,y) = \min\{j \in \mathbb{N} : f^j(y) \in Q_n(x)\}$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(K_n(x,y))}{n} = 1.$$

A noção de tempo de entrada estudada por [16], que é capturada pela definição de K_n logo acima, é ligeiramente diferente da abordada nesta dissertação e que será introduzida no capítulo 3.

Neste trabalho, abordamos o que se entende pela dimensão pontual de uma medida em um ponto e a relacionamos com recorrência. Há outros objetos que também se relacionam com recorrência. Um exemplo disso é a medida-α de Hausdorff, $\alpha > 0$, (ver [5]). Em [5], Boshernitzan expõe um resultado quantitativo sobre a recorrência provando que se a medida-α de Hausdorff, que é de fato uma medida de acordo com a Teoria da Medida, for σ-finita, então

$$\liminf_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\alpha}} \mathrm{d}(x, T^n(x)) < \infty$$

para μ-quase todo $x \in X$, sendo (X,d) um espaço métrico separável, μ uma medida de probabilidade boreliana sobre X e $T : X \to X$ uma transformação Borel mensurável μ-invariante. O Teorema da Recorrência de Poincaré, que motiva o estudo de recorrência em sistemas dinâmicos, apenas afirma, no caso topológico, que $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{d}(x, T^n(x)) = 0$ para μ-quase todo $x \in X$ (ver Proposição 190 para um enunciado formal do teorema), o que pode ser visto como uma consequência do resultado de Boshernitzan para os casos em que as hipóteses do Teorema de Boshernitzan são satisfeitas. Assim, nestes casos, o restuldado de Boshernitzan pode ser visto como uma afirmação mais forte sobre recorrência.

O trabalho de Boshernitzan, de certa froma, dá informações quantitativas sobre a recorrência de Poincaré. Perceba que, como consequência do Teorema de Bosheritzan, pode-se conseguir uma constante $C > 0$ e infinitos índices $n \in \mathbb{N}$ tais que $\mathrm{d}(x, T^n(x)) < Cn^{-\frac{1}{\alpha}}$. Então é como se este resultado ajudasse na obtenção de uma certa cota superior para a recorrência. No que diz respeito a este tipo de estudo no caso específico das rotações, temos [15], onde Kim prova que dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, vale que para μ-quase todo $s \in \mathbb{R}$, tem-se $\liminf_{n\to\infty} n\mathrm{d}(n\alpha - s, \mathbb{Z}) = 0$. Na linguagem deste trabalho, que será introduzida no capítulo 2, pode-se reformular o resultado de Kim da seguinte forma: dado qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e dado qualquer $x \in S^1$, então para μ^1-quase todo $y \in S^1$, tem-se que $\liminf_{n\to\infty} n\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^n(x), y) = 0$ (sendo que μ^1-quase é a medida de Lebesgue do círculo, que será também introduzida no capítulo 2).

Como uma dissertação usual de mestrado, o objetivo do mestrando neste trabalho é entender, em um certo nível de detalhe mais aprofundado, os resultados centrais apresentados (as Proposições 216, 205 e 221 e o Lema 217). Por isso, observa-se que foram dadas demonstrações detalhadas das mesmas. Nenhuma demonstração aqui é de autoria do mestrando. O que foi feito é um estudo destes resultados e de suas demonstrações.

Capítulo 1

Preliminares

Neste trabalho, usamos certos conceitos básicos de Topologia, Teoria da Medida, Frações Contínuas e Sistemas Dinâmicos, dentro dos resultados expostos. Este capítulo tem como objetivo deixar claro o que destes assuntos será usados neste trabalho. Além disso, certas considerações e convenções válidas para o texto todo serão introduzidas.

As seções preliminares sobre Topologia e Teoria da Medida essencialmente listam definições, proposições e observações de interesse. Não há provas inclusas. No que diz respeito às de Frações Contínuas e Sistemas Dinâmicos, o que é de conhecimento comum, não será provado. Entretanto, certos resultados são ao mesmo tempo mais específicos e fortemente associados ao trabalho, e assim são provados.

1.1 Topologia

Existe uma extensa literatura sobre espaços topológicos e também espaços métricos. Abordagens mais detalhadas sobre estes assuntos podem ser encontradas em vários livros, como [17], [7] e também [18]. Nesta seção, falaremos das noções de Topologia Geral usadas neste trabalho. Nenhuma proposição será provada aqui. As referências logo acima possuem todas as provas dos fatos enunciados nesta seção.

Definição 1. Um conjunto X munido de uma coleção τ de subconjuntos de X é dito um **espaço topológico** se:

1. $X, \emptyset \in \tau$.
2. Dado $A \subset \tau$ finito, vale que $\bigcap_{\alpha \in A} \alpha \in \tau$.
3. Dado $A \subset \tau$ (arbitrário), vale que $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha \in \tau$.

Cada elemento de τ é dito ser um **aberto** de X.

Observação 2. Estritamente falando, o espaço topológico é o par (X, τ), porém é comum omitir τ e dizer apenas que X é o espaço topológico. Isso é um abuso de notação. O espaço topológico depende tanto de X quanto de τ.

Definição 3. Dizemos que (X, τ) é um espaço topológico **separável** se existe $\beta \subset \tau$ enumerável tal que para todo $G \in \tau$, e para todo $x \in X$, existe $U \in \beta$ tal que $x \in U \subset G$.

Observação 4. Uma consequência imediata de X ser um espaço topológico separável é que existe $\beta \subset \tau$ enumerável tal que todo aberto de X é igual a alguma união enumerável de abertos, cada um dos quais em β. É fácil ver que se existe $\beta \subset \tau$ enumerável tal que todo $A \in \tau$ é uma união de certos elementos de β, então X é um espaço topológico separável.

Definição 5. Um espaço topológico X é dito ser **compacto** se dado uma coleção qualquer $\{A_i\}_{i \in I}$ de abertos de X tal que $X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, então existe $J \subset I$ finito tal que $X \subset \bigcup_{j \in J} A_j$.

Observação 6. Dizemos que, num espaço topológico compacto, toda cobertura por abertos admite uma subcobertura finita.

Definição 7. Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que A é um fechado de X se $X \setminus A$ é um aberto de X.

Proposição 8. Seja X um espaço topológico com os abertos dados por τ. Se γ é o conjunto de todos os subconjuntos fechados de X, temos:

1. $X, \emptyset \in \gamma$.
2. Dado $F \subset \gamma$ com F finito, tem-se $\bigcup_{a \in F} a \in \gamma$.
3. Dado $F \subset \gamma$, tem-se $\bigcap_{a \in F} a \in \gamma$.

De acordo com a proposição logo acima, temos então que ser fechado é uma propriedade preservada por interseções arbitrárias, falando a grosso modo. Como em vários outros contextos dentro da matemática, este fenômeno motiva a noção do menor conjunto fechado que contém um certo conjunto dado.

Definição 9. Seja X um espaço topológico e $A \subset X$, chamamos de **fecho** de A, denotado por $\overline{A}$, a interseção de todos os fechados de X que possuem A como subconjunto.

Observação 10. Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. De acordo com a proposição acima, $\overline{A}$ é um fechado de X. Além disso, é fácil ver que se F é um fechado de X com $A \subset F$, então $\overline{A} \subset F$.

Definição 11. Seja X um espaço topológico. Sejam $A, B \subset X$ com $A \subset B$. Dizemos que A é **denso** em B se $B \subset \overline{A}$.

Proposição 12. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $Y \subset X$ Ponha $\gamma = \{Y \cap A : A \in \tau\}$. Então (Y, γ) é um espaço topológico.

Observação 13. Dentro do contexto da proposição acima, dizemos que γ é a topologia de Y induzida pela topologia de X. De modo geral, quando falamos sobre um subconjunto de um espaço topológico, fica sempre implícito que estamos tomando a topologia induzida pela de X sobre Y, a não ser que seja dito o contrário. Utilizando-se da topologia induzida, vários conceitos que comumente falamos para o espaço todo podem ser transferidos para subconjuntos (como é feito na definição seguinte).

Definição 14. Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$. Dizemos que Y é compacto se

for compacto de acordo com a topologia induzida de X. Similarmente, dizemos que Y é separável se Y for separável com a topologia induzida de X.

Observação 15. Um espaço topológico leva a outros espaços topológicos de várias formas. Falamos de uma acima (i.e. o espaço induzido no subconjunto), mas há outras. Dois exemplos de como um ou mais espaços topológicos levam a certos outros espaços topológicos são os produtos de espaços topológicos e também os quocientes de espaços topológicos, de acordo com uma certa relação de equivalência. Neste trabalho, estamos mais interessados na noção de espaço topológico quociente. Usaremos espaços produtos poucas vezes e o que usamos de espaços produtos se dá dentro do contexto de espaços métricos.

Proposição 16. Seja X um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Seja Q o conjunto quociente de X por $\sim$ cujos elementos são as classes de equivalência com relação à relação $\sim$. Seja $\pi : X \to Q$ a projeção canônica ao quociente com relação ao $\sim$. Defina $\gamma = \{A \subset Q : \exists B \in \tau, B = \pi^{-1}(A)\}$. Então (Q, γ) é um espaço topológico.

Definição 17. O espaço topológico (Q, γ) da proposição acima é chamado de **espaço topológico quociente**, ou simplesmente espaço quociente, de X pela relação de equivalência $\sim$.

Observação 18. A noção de espaço quociente é mais geral do que a introduzida aqui (ver [18]), porém esta daqui é a que é útil no nosso trabalho e não será necessário nada mais geral. A noção de espaço quociente utilizada nesta dissertação é baseada em [7].

Definição 19. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$. Dizemos que f é uma função contínua se $f^{-1}(B)$ é aberto de X sempre que B for aberto de Y.

Proposição 20. Sejam X, Q e π como na definição acima de espaço quociente. Sejam Z um espaço topológico e $F : Q \to Z$ uma função. Então F é contína se, e somente se, $F \circ \pi$ for contínua.

Observação 21. É direto da definição de espaço quociente que a projeção ao quociente é uma função contínua de X sobre o espaço quociente. Na verdade a topologia quociente é feita de modo a ter a projeção ao quociente contínua. Pode-se tornar preciso que a topologia quociente é a menor topologia que se põe no espaço quociente de modo a ter π contínua, mas não faremos isso aqui.

Definição 22. Um espaço topológico X se diz **Hausdorff** se dados quaisquer dois $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem abertos G, U de X tais que $G \cap U = \emptyset$, $x \in G$ e $y \in U$.

Neste trabalho, de modo geral, estaremos interessados em uma classe de espaços topológicos mais específica. São os espaços topológicos cuja topologia é dada por uma métrica. Estes espaços são chamados de espaços métricos. Os abertos destes espaços topológicos são caracterizados por um padrão mais forte (dado pela métrica), sendo assim menos arbitrários e possuindo várias propriedades boas.

Definição 23. Uma **métrica** sobre um conjunto X é uma função $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

1. $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$.

2. $\mathrm{d}(x,x) = 0$ para todo $x \in X$.

3. $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$ para todo $x, y \in X$.

4. Dados $x, y \in X$ tais que $x \neq y$, tem-se $\mathrm{d}(x,y) > 0$.

5. Dados $x, y, z \in X$, tem-se $\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$.

A última propriedade é conhecida como a desigualdade triangular por causa da sua possível interpretação considerando x, y, z como vértices de um triângulo.

Definição 24. Um conjunto X munido de uma métrica d sobre X é chamado de espaço métrico.

Observação 25. Estritamente falando, o espaço métrico é o par (X, d) e não apenas X. É comum, no entanto, dizer que X é um espaço métrico e deixar implícito, quando é claro, qual é a métrica que está sendo considerada.

Exemplo 26. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ com a métrica usual euclidiana,

$$\mathrm{d}_2((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Ou então $\mathbb{R}^n$ com as métricas d_1 ou d_∞, sendo

$$\mathrm{d}_1((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

e

$$\mathrm{d}_\infty((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Exemplo 27. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Seja $C_0([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ contínua }\}$. A função $\mathrm{d}_\infty : C_0([a,b]) \times C_0([a,b]) \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{d}_\infty(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ é uma métrica sobre $C_0([a,b])$ e, logo, faz $(C_0([a,b]), \mathrm{d}_\infty)$ ser um espaço métrico.

Definição 28. Sejam X um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$. Definimos a bola aberta centrada em x de raio r, denotada por $B(x,r)$, como sendo o conjunto dado por $\{y \in X : \mathrm{d}(x,y) < r\}$.

Proposição 29. Seja X um espaço métrico com uma métrica d. Ponha τ o conjunto dos subconjuntos A de X satisfazendo a seguinte condição: para todo $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$. Então (X, τ) é um espaço topológico.

Observação 30. A topologia dada por τ, como na proposição acima, sobre X é dita ser a topologia da métrica (ou ainda induzida pela métrica).

Observação 31. Fenômenos como separabilidade e compacidade são consideravelmente simplificados em espaços métricos no sentido de existirem critérios relativamente mais simples para decidir se um conjunto é ou não separável e/ou compacto. A seguinte proposição exemplifica o que foi dito aqui para o caso da separabilidade.

Proposição 32. Seja X um espaço métrico. Temos que X é separável se, e somente se, X possui um subconjunto enumerável e denso (em X).

Definição 33. Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de termos em um espaço métrico X. Dizemos que a sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** para o **limite** $L \in X$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de ε) tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$, tem-se $\mathrm{d}(a_n, L) < \varepsilon$. Escrevemos $a_n \to L$, ou ainda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Dizemos que a sequência $\{n_n\}_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é **convergente**.

Definição 34. Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de termos em um espaço métrico X. Dizemos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma **sequência de Cauchy** se para qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de ε) tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n, m > n_0$, tem-se $\mathrm{d}(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Definição 35. Dizemos que um espaço métrico X é **completo** se toda sequência de Cauchy é convergente.

Definição 36. Em um espaço métrico X, um subconjunto $Y \subset X$ se diz **sequencialmente compacto** se para toda sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de termos em Y, tem-se que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente que converge para um elemento de Y, ou seja, existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $\left\{a_{\sigma(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente e seu limite é elemento de Y.

Além de um critério mais conveniênte para a separabilidade, os espaços métricos possuem uma caracterização dos conjuntos compactos. A seguinte famosa proposição sobre compactos em espaços métricos nos dá essa caracterização.

Proposição 37. Seja X um espaço métrico. Dado $Y \subset X$, são equivalentes:

1. Y é compacto
2. Y é sequencialmente compacto.
3. Y é competo e para todo $\varepsilon > 0$, existe $A \subset Y$ finito tal que para todo $y \in Y$, existe $a \in A$ tal que $\mathrm{d}(y, a) < \varepsilon$.

Proposição 38. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ contínua. Se $C \subset X$ é compacto, então $f(C)$ é compacto.

Definição 39. Sejam X, Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ contínua e bijetora cuja inversa também é contínua é chamada de **homeomorfismo**. Dizemos que os espaços topológicos X e Y são **homeomorfos** caso haja um homeomorfismo entre os dois.

Espaços métricos também admitem uma ferramenta para a identificação de homeomorfismos.

Proposição 40. Seja f uma bijeção contínua de X, um espaço topológico compacto, sobre Y, um espaço topológico Hausdorff. Então f é homeomorfismo.

Nosso interesse em espaços topológicos se dá pelo fato da rotação, como estudada neste projeto de mestrado, ser uma aplicação de um espaço métrico compacto que provem de um espaço quociente (i.e. o círculo S^1 como será introduzido posteriormente). A

proposição acima, por exemplo, será utilizada para mostrar que o círculo, como trabalhado neste projeto, é homeomorfo ao círculo usual do $\mathbb{R}^2$ centrado na origem e de raio igual a 1.

Observação 41. No $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ qualquer, a topologia considerada será sempre a usual dada pela métrica euclidiana:

$$\mathrm{d}((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

sendo $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. No $\mathbb{R}^n$, tem-se propriedades ainda mais conveniêntes do que em um espaço métrico arbitrário. Por exemplo, é conhecido que todo subconjunto de todo $\mathbb{R}^n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, é separável. É conhecido também que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado. Há outras propriedades fortes sobre o $\mathbb{R}^n$. Uma grande vantagem do $\mathbb{R}^n$ é que várias propriedades possuem um apelo geométrico forte, o que facilita na vizualização a na prova dos resultados.

Definição 42. Sejam X e Y espaços métricos com d_X a métrica em X e d_Y a métrica em Y. Seja $f : X \to Y$ uma função tal que para todo $x, y \in X$, tem-se $\mathrm{d}_X(x, y) = \mathrm{d}_Y(f(x), f(y))$. Dizemos que f é então uma **isometria**.

Observação 43. Certos autores pedem que isometrias sejam sobrejetoras e chamam uma função entre espaços métricos que meramente preservam distâncias de **imersão isométrica**. Esta distinção não nos é útil. Assim, usaremos apenas o termo "isometria" como na definição logo acima.

Finalmente, introduziremos a noção de espaço métrico produto, que é fortemente motivada pela seguinte proposição.

Proposição 44. Sejam (X_1, d_1), (X_2, d_2) espaços métricos. Defina as funções $\mathrm{d}_+, \mathrm{d}_\infty, \mathrm{d}_e : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_+((x, y), (a, b)) &= \mathrm{d}_1(x, a) + \mathrm{d}_2(y, b) \\ \mathrm{d}_\infty((x, y), (a, b)) &= \max\{\mathrm{d}_1(x, a), \mathrm{d}_2(y, b)\} \\ \mathrm{d}_e((x, y), (a, b)) &= \sqrt{\mathrm{d}_1(x, a)^2 + \mathrm{d}_2(y, b)^2} \end{aligned}$$

Então tanto d_+, d_∞ quanto d_e são métricas em $X_1 \times X_2$. Além disso, elas dão origem à mesma topologia, ou seja, $A \subset X_1 \times X_2$ é aberto de acordo com a métrica d_e se, e somente se, for de acordo com a métrica d_∞ e, também, A é aberto de acordo com a métrica d_e se, e somente se, for de acordo com a métrica d_+.

Definição 45. O espaço métrico introduzido na proposição acima dada pelo produto cartesiano de X_1 com X_2 é conhecido como **espaço métrico produto**.

Observação 46. Como a topologia obtida com qualquer uma das três métricas é a mesma, não se costuma especificar qual das métricas é usada na definição. Na prática, costuma-se usar a que for mais conveniênte já que os resultados de interesse não dependem da métrica em si, mas sim da topologia que ela gera. É claro que noções como uma função ser isometria depende da métrica específica e, para resultados desta natureza, especifica-se a métrica.

Observação 47. Há outras métricas que podem ser utilizadas no espaço produto de modo a ainda obter a mesma topologia que se obtem com as três acima.

1.2 Teoria da Medida

Todos os três principais resultados desta dissertação fazem afirmações que dependem fortemente de conceitos de Teoria da Medida. Como na seção anterior, não provaremos nada do que for enunciado aqui. As referências que podem ser consultadas para as demonstrações e elaborações do conteúdo desta seção são: [3], [10] e [20].

Definição 48. Uma **σ-álgebra** $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X (ou simplesmente σ-álgebra) é um subconjunto do conjunto das partes de X (i.e. os elementos de $\mathcal{M}$ são subconjuntos de X) tais que:

1. $X \in \mathcal{M}$.
2. Dado $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{M}$, tem-se $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{M}$.
3. Dado $A \in \mathcal{M}$, tem-se $X \setminus A \in \mathcal{M}$.

O par $(X, \mathcal{M})$ é chamado de **espaço mensurável** e os elementos de $\mathcal{M}$ são chamados de **conjuntos mensuráveis** de X (com relação à σ-álgebra $\mathcal{M}$). Diremos, comumente, que X é um espaço mensurável e deixaremos implícita a σ-álgebra em questão.

Proposição 49. Seja $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Então $\emptyset \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{M}$ é fechada para uniões e interseções enumeráveis (finitas ou infinitas).

Proposição 50. Seja X um conjunto e $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ uma família de σ-álgebras de subconjuntos de X. Então, pondo $\mathcal{M}^* = \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$, temos $\mathcal{M}^*$ uma σ-álgebra de X.

Definição 51. Sejam X um conjunto arbitrário e $A \subset 2^X$ (2^X denota o conjunto de todos os subconjuntos de X). Considere $\mathcal{F}$ o conjunto formado por todas as σ-álgebras $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X com $A \subset \mathcal{M}$. A σ-álgebra $\bigcap\limits_{B\in\mathcal{F}} B$ é chamda da σ-álgebra (de subconjuntos de X) gerada por A, e é denotada por $\sigma(A)$.

Observação 52. O conjunto $\mathcal{F}$ acima é não vazio pois $2^X \in \mathcal{F}$.

Definição 53. Seja X um espaço topológico e τ a coleção de abertos de X. Chamamos $\sigma(\tau)$ de **σ-álgebra de Borel**, ou σ-álgebra boreliana, de X (com relação à escolha dos abertos τ).

Definição 54. Sejam X um conjunto e $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ é chamada de uma **medida** sobre X (com relação à σ-álgebra $\mathcal{M}$) se:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ sempre que $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ for uma sequência de termos em $\mathcal{M}$ tal que $E_m \cap E_n = \emptyset$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$.

Definição 55. Uma tripla $(X, \mathcal{M}, \mu)$, sendo X um conjunto arbitrário, $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X e μ uma medida sobre X definida em $\mathcal{M}$, é chamada de **espaço de medida**. Comumente, omitiremos os dois últimos termos da tripla e diremos apenas que X é um espaço de medida (ficará implícito qual é $\mathcal{M}$ e qual é μ).

Definição 56. Seja X um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$. Dizemos que μ é uma **medida finita**. Caso $\mu(X) = 1$, dizemos que μ é uma **medida de probabilidade** e, neste caso, dizemos também que X é um **espaço de probabilidade** (mais uma vez, fica ficam implícitas quais são as σ-álgebra e medida em questão).

Definição 57. Seja X um espaço de medida com μ a medida posta neste espaço. Dizemos que μ é uma medida **σ-finita** se existe uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis $E_1, E_2, ...$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ e que $\mu(E_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definição 58. Num espaço de medida X com medida μ, dizemos que um conjunto mensurável $A \subset X$ é de **medida nula** se $\mu(A) = 0$. Dizemos que A é de **medida total** se A^c é de medida nula.

Observação 59. Seja X um espaço de medida e suponha que $N \subset X$ é um conjunto de medida nula. Se uma certa propriedade vale para todo $x \in X \setminus N$, dizemos que esta propriedade vale para μ-quase todo ponto de X, ou seja, ela vale para todo ponto de X exceto possivelmente para os pontos de um certo conjunto de medida nula.

Definição 60. Se X é um espaço topológico e μ é uma medida definida na σ-álgebra de Borel de X, dizemos que μ é uma **medida boreliana** em X.

Observação 61. No $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$ qualquer, fica implícito que consideramos sempre a σ-álgebra de Borel dada pela topologia padrão do $\mathbb{R}^n$ (a da métrica euclidiana), a não ser que seja dito o contrário.

Proposição 62. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe uma única medida μ boreliana sobre $\mathbb{R}^n$ que faz $\mu([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$, quaisquer que sejam $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$, $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ com $b_i \geq a_i$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Definição 63. A medida da proposição acima é chamada de **medida de Lebesgue** no $\mathbb{R}^n$.

Observação 64. Que a definição acima está de fato de acordo com o que se entende, dentro da literatura relevante, pela medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, pode ser confirmado em [3]. Além disso, estritamente falando, o que se entende na pela medida de Lebesgue (dentro da literatura relevante, ver [3] e também [10]) é uma medida definida em uma σ-álgebra sobre o $\mathbb{R}^n$ que, não só estritamente contém a σ-álgebra de Borel no $\mathbb{R}^n$, mas também possui cardinalidade estritamente maior (ver [3] para mais detalhes). Neste trabalho, estamos apenas interessados nos conjuntos borelianos e assim não nos faz mal tratar dessa versão mais restrita da medida de Lebesgue.

Proposição 65. A medida μ de Lebesgue satisfaz que dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mensuráveis tais que $A = f(B)$, sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria com relação à métrica euclidiana, tem-se $\mu(A) = \mu(B)$.

A noção de medida está fortemente relacionada à noção de integração. A partir de uma medida, pode-se definir o que se entende pelas funções integráveis dentro do espaço de medida em consideração. Neste trabalho, não somente a noção de medida e σ-álgebras borelianas serão usadas, mas também certos teoremas sobre integração.

Definição 66. Sejam X, Y espaços mensuráveis. Uma função $f : X \to Y$ é dita ser **mensurável** se para cada conjunto A mensurável de Y, $f^{-1}(A)$ é um mensurável de X.

Observação 67. Nos reais extendidos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, a σ-álgebra padrão, também chamada de σ-álgebra de Borel em $\overline{\mathbb{R}}$ é o seguinte conjunto, pondo $\mathcal{M}$ a σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{M}} \{A, A \cup \{\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{-\infty, \infty\}\}.$$

Definição 68. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Uma função $\phi : X \to \mathbb{R}$ é dita simples se for mensurável e possuir imagem finita. A integral de uma função simples não negativa ϕ é definida como $\sum\limits_{a \in \phi(X)} a\mu(\phi^{-1}(a))$ e é denotada por $\int \phi d\mu$. Uma função não negativa mensurável $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tem sua integral $\int f d\mu$ definida como

$$\sup \left\{ \int \phi d\mu : \phi : X \to \mathbb{R}, \phi \text{ simples }, \forall x \in X, 0 \leq \phi(x) \leq f(x) \right\},$$

que é um real estendido não negativo. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável é dita integrável se f^+ e f^- tem integrais finitas, sendo $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ e $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$ (prova-se que $f^+, f^- : X \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis não negativas). No caso de f ser integrável, define-se a integral de f, denotada por $\int f d\mu$, como $\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$. O conjunto das funções integráveis será denotado por $L(X, \mathcal{M}, \mu)$, ou somente por $L(X)$ ou L quando não houver problemas.

Observação 69. Cada noção de integrabilidade acima (para funões simples, funções mensuráveis não negativas e funções mensuráveis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ com f^+ e f^- de integrais finitas), de certa forma, extende a anterior. No caso em que mais de uma noção de integrabilidade se aplica a uma mesma função, prova-se que estas coincidem. Deve-se prestar atenção especialmente no salto de integrais de funções mensuráveis não negativos para o caso de integrais de funções em L. Se $f : X \to \mathbb{R}$ for mensurável e não negativa, tem-se que $f \in L$ se, e somente se, $\int f d\mu < \infty$. No caso $\int f d\mu = \infty$, não temos f integrável, porém ainda falamos da integral de f com relação à medida μ (sendo $+\infty$). Assim, para funções não negativas mensuráveis, sempre podemos falar da integral desta função (com relação à medida em questão), independente da integrabilidade ou não desta função. Perceba também que podemos falar das integrais das funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis não negativas, mas que todas as funções em L são de contra-domínio real.

Proposição 70. O espaço das funções reais integráveis em um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço vetorial real com as operações usuais entre funções. O mesmo é verdade para o espaço das funções reais mensuráveis.

Proposição 71. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções integráveis e $f(x) = g(x)$ para μ-quase todo $x \in X$, tem-se $\int f d\mu = \int g d\mu$. Além disso, se $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ são funções não negativas mensuráveis com $f(x) = g(x)$ para μ-quase todo $x \in X$, tem-se $\int f d\mu = \int g d\mu$. A relação $\sim$ que põe f e g mensuráveis como sendo

relacionadas exatamente quando são iguais em μ-quase todo ponto de X é uma relação de equivalência.

Observação 72. Nas próximas proposições, definições, dentre outros, a menos que seja dito o contrário, $\sim$ denota a relação de equivalência introduzida na proposição logo acima.

Observação 73. É fácil ver que se $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ são mensuráveis com f integrável e $f \sim g$, então g também é integrável.

Definição 74. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e seja M o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis. Dada uma classe α de equivalência em $M/\sim$, então para todo $f, g \in \alpha$, temos f integrável se, e somente se g for integrável e, em caso afirmativo, $\int f d\mu = \int g d\mu$. Assim, definimos a integral de α, $\int \alpha d\mu$, como a integral de qualquer um de seus elementos, caso pelo menos um (e logo todos) seja integrável. Dadas classes $\alpha, \beta \in M/\sim$, com representantes $f \in \alpha, g \in \beta$, e dado um número real $k \in \mathbb{R}$, definimos:

1. $k\alpha$ como a classe de kf,
2. $\alpha + \beta$ como a classe de $f + g$,
3. $\alpha\beta$ como a classe de fg,
4. $\frac{1}{\alpha}$ como a classe de $\frac{1}{f}$ (no caso em que $f(x) \neq 0$ para μ-quase todo $x \in X$),
5. dado $k \in \mathbb{R}$, α^k como a classe de f^k (no caso em que $f(x) \geq 0$ para μ-quase todo $x \in X$) e
6. $|\alpha|$ como a classe de $|f|$.

Todas essas definições acima fazem sentido (pode-se mostrar a independência com relação à escolha dos representantes para todas elas).

Definição 75. Seja X um espaço de medida e seja $p \in \mathbb{R}$ com $0 < p < \infty$. Dado uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, definimos $||f||_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. A aplicação $||.||_p$ é chamada de **norma-p** (a motivação por trás deste nome ficará clara posteriormente).

Observação 76. Note que $||.||_p$ está definida para toda função mensurável pois $|f|^p$ é sempre uma função não negativa mensurável. Além disso, note que $||f||_p$ pode ser ∞.

Proposição 77. Seja X um espaço de medida e $p \in \mathbb{R}$ com $0 < p < \infty$. Dados $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, temos que $f \sim g$ se, e somente se, $||f - g||_p = 0$. Além disso, $f \sim g$ implica em $||f||_p = ||g||_p$.

Definição 78. Seja X um espaço de medida e $p \in (0, \infty)$. Denote por M o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis. Definimos o espaço L_p como sendo o conjunto das funções $f \in M$ tais que $||f||_p < \infty$. Dado $f \in M$ e $\alpha \in M/\sim$ a classe de f, definimos $||\alpha||_p = ||f||_p$. Da mesma forma que falamos do espaço L_p para funções mensuráveis, falamos também do espaço L_p para as classes de equivalência das funções mensuráveis de acordo com $\sim$. É costume usar a mesma notação para os dois conjuntos e fica claro do contexto o que se quer dizer por L_p. Formalmente, o conjunto L_p das classes de equivalência (de acordo com $\sim$) de funções mensuráveis é o conjunto cujos elementos são as classes $\alpha \in M/\sim$ tais que $||\alpha||_p < \infty$.

Proposição 79. Seja $p \in (0, \infty)$. O espaço L_p é um espaço vetorial (tanto no caso das classes quanto no outro). Suponha daqui pra frente nesta proposição que $p \geq 1$. No espaço L_p das classes, $||.||_p$ é uma norma (no sentido usual utilizado na teoria de espaços vetoriais normados) e o espaço L_p é um espaço de Banach (i.e. é um espaço vetorial normado completo). Para $p = 2$, L_p é um espaço de Hilbert (i.e. um espaço vetorial normado completo cuja norma provem de um produto interno), sendo que o produto interno entre $\alpha, \beta \in L_p$ é dado por $\int \alpha\beta d\mu$. No caso do L_p como espaço das funções, $||.||_p$ é uma semi-norma em L_p.

Observação 80. Dado X um espaço de medida, prova-se que dado $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável, então $f \in L$ se, e somente se, $||f||_1 < \infty$. Assim, $L = L_1$. O modo usual de se tomar uma função integrável que se encontra em vários livros sobre o assunto é tomar $f \in L_1$.

Observação 81. A teoria sobre espaços L_p possui um foco para o caso $p \geq 1$. Há, porém, resultados para o caso $p \in (0, 1)$. Um destes resultados será utilizado neste trabalho. Antes de falarmos do mesmo, definiremos o que entendemos por L_∞.

Definição 82. O conjunto $L_\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$, ou simplesmente L_∞ é definido como o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis **essencialmente limitadas**, ou seja, o conjunto das funções $f : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis tais que existe M_f mensurável com $\mu(M_f^c) = 0$ e existe $A_f \in \mathbb{R}$ com $|f(x)| \leq A_f$ para todo $x \in M_f$. A **norma-∞** de α é definida como $||\alpha||_\infty = \inf\{\sup f(A) : A \in \mathcal{M}, \mu(A^c) = 0\}$. Mostra-se que se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são mensuráveis com $f \sim g$, então $||f||_\infty = ||g||_\infty$. Assim, extende-se a noção de $||.||_\infty$ para as classes $\alpha \in M/\sim$, sendo M o conjunto das funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$. Assim, $L_\infty = \{f \in M : ||f||_\infty < \infty\}$. De modo análogo, define-se o conjunto L_∞ para as classes $\alpha \in M/\sim$.

Proposição 83. O conjunto $L_\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço vetorial (tanto para o caso das classes quanto para o caso das funções mensuráveis) com as operações usuais. No caso das classes, $||.||_\infty$ é uma norma em L_∞ que o faz ser um espaço de Bannach. No caso do L_∞ para as funções mensuráveis, $||.||_\infty$ é uma semi-norma.

Os seguintes resultados são de extrema importância para o trabalho desenvolvido nesta dissertação. Estes servem como resultados auxiliares que serão usados nas provas dos principais resultados deste texto (Proposições 205, 216 e 221).

Proposição 84. (Lema de Borel-Cantelli) Sejam (X, A, μ) um espaço de medida e $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos mensuráveis. Suponha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \infty.$$

Então:

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} B_n\right) = 0.$$

Prova. Ver [10].

■

Definição 85. Seja X um espaço topológico e μ uma medida boreliana sobre X. Definimos o **suporte** de μ, denotado por $\text{supp}(\mu)$, como o conjunto dos elementos x de X que

possuem a seguinte propriedade: para todo aberto $A \subset X$ com $x \in A$, tem-se $\mu(A) > 0$.

Proposição 86. Seja X um espaço métrico separável e μ uma medida finita boreliana em X. Então, $\text{supp}(\mu)$ é Borel mensurável e $\mu(\text{supp}(\mu)) = \mu(X)$.

Prova. Ver [20].

■

Proposição 87. (Desigualdade de Chebyshev) Seja (X, A, μ) um espaço de medida. Se $f \in L_p(X, A, \mu)$, $p \in (0, +\infty)$, então para todo $a \in (0, +\infty)$, tem-se $\mu(E_a) \leq \left(\frac{||f||_p}{a}\right)^p$ sendo $E_a = \{x \in X : |f(x)| > a\}$.

Prova. Ver [10].

■

Neste trabalho, usaremos certas noções de produto de epaços mensuráveis. Em particular, durante a prova da Proposição 205, precisaremos aplicar o Teorema de Tonelli, que é a Proposição 91. Também usaremos noções gerais sobre medidas produto e, consequentemente, σ-álgebra produto

Definição 88. Dados X_1, X_2 conjuntos com $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ σ-álgebras sobre X_1 e X_2 respectivamente, definimos o espaço produto de $(X_1, \mathcal{M}_1)$ por $(X_2, \mathcal{M}_2)$ como o conjunto $X_1 \times X_2$ munido da σ-álgebra gerada pelo conjunto $\{A \times B : A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2\}$. Esta σ-álgebra é chamada de **σ-álgebra produto** entre X_1 e X_2.

Proposição 89. Sejam $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ espaços de medida σ-finitos. Assim existe, e é unica, uma medida μ definida no espaço produto de modo que para todo $A_1 \in \mathcal{M}_1$ e que para todo $A_2 \in \mathcal{M}_2$, tem-se $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$.

Definição 90. A medida da proposição acima é chama de **medida produto** com relação às medidas μ_1 e μ_2.

Proposição 91. (Teorema de Tonelli) Sejam $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ espaços de medida σ-finitos. Seja μ a medida produto com relação às medidas μ_1 e μ_2. Seja $\mathcal{M}$ a σ-álgebra produto entre $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$. Seja $F : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ não negativa e mensurável. Ponha, para cada $x \in X$, $F_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $F_x(y) = F(x, y)$ e ponha também, para cada $y \in Y$, $F^y : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $F^y(x) = F(x, y)$. Defina $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ dadas por $f(x) = \int F_x d\mu_2$ e $g(y) = \int F^y d\mu_1$. Então, f e g são mensuráveis e $\int f d\mu_1 = \int g d\mu_2 = \int F d\mu$.

Prova. Ver [3].

■

1.3 Frações Contínuas

Contrário do que ocorre com Topologia e Teoria da Medida, no caso de Frações Contínuas, estamos interessados em certos resultados específicos da teoria e não nas noções gerais da mesma. O resultado principal deste trabalho utiliza fortemente noções de frações contínuas como um ferramental para a sua demonstração. As referências principais para esta seção são [22] e [13].

A teoria de Frações Contínuas faz certas afirmações sobre aproximações ótimas de números reais através de números racionais, além de dar sentido à noção de *aproximação ótima de um real por um racional*. Estas aproximações podem ser completamente e unicamente especificadas por uma sequência infinita de inteiros que são, exceto no caso do primeiro, positivos. O caso em que se deseja aproximar um racional de modo ótimo através de outros racionais é pouco interessante. Neste caso, a sequência acima é na verdade finita e eventualmente obtem-se uma "aproximação" racional que na verdade é igual ao número que se quer aproximar. O caso em que se quer aproximar um número irracional é mais interessante e é o caso sobre o qual daremos foco.

Proposição 92. Seja $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Existe uma sequência de inteiros positivos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e um inteiro, não necessariamente positivo, a_0 tais que se definirmos indutivamente $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$, $q_{i+1} = a_{i+1}q_i + q_{i-1}$, $p_{-1} = 1$, $p_0 = a_0$ e $p_{i+1} = a_{i+1}p_i + p_{i-1}$, e se definirmos para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $C_i = \frac{p_i}{q_i}$, temos $\lim\limits_{i\to\infty} C_i = x$. Além disso, a sequência $a_0, a_1, ...$ com a propriedade acima é unicamente determinada por x, ou seja, se $b_0, b_1, ...$ é uma sequência de inteiros (com $b_i > 0$ para $i \in \mathbb{N}$) tal que definido os $\hat{q}_n$'s, $\hat{p}_n$'s e os $\hat{C}_n$'s como acima, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{C}_n = x$, então $b_i = a_i$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Definição 93. Os a_n's acima são chamados de **quocientes** da representação (ou expansão) de x em frações contínuas. Dizemos $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$. Os C_n's são chamados de **convergentes** da expansão. Dado $n \in \mathbb{N}$, é comum dizer que q_n é o denominador de C_n e que p_n é o numerador de C_n. Essa nomenclatura é justificada pela Proposição 96.

Observação 94. Dizemos que todo irracional possui uma única representação em frações contínuas.

Observação 95. Pode-se provar que

$$C_0 = a_0, C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, C_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, C_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, ...$$

o que motiva o nome *frações contínuas*.

Estamos interessados, neste trabalho, em várias afirmações que relacionam x com os dados de sua expansão em frações contínuas, em particular com os denominadores dos convergentes na forma simplificada (i.e. os q_n's). Lembrando mais uma vez que não trataremos o caso em que $x \in \mathbb{Q}$ e assim, as proposições daqui pra frente serão enunciadas para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mas várias dessas proposições valem igualmente ou quase que igualmente para o caso racional.

De modo geral, daqui pra frente, estamos sempre falando de um irracional x cujos quocientes da expansão em frações contínuas são $a_0, a_1, a_2, ...$, cujos denominadores dos convergentes na forma simplificada são $q_{-1}, q_0, q_1, ...$, cujos convergentes são $C_0, C_1, C_2, ...$, cujos numeradores dos convergentes na forma simplificada são $p_n = q_nC_n$ para $n \in \mathbb{N}_0$ e $p_{-1} = 1$ (exatamente como na proposição acima).

Proposição 96. Temos, dado $k \in \mathbb{N}_0$, $q_n > 0$ e $(-1)^{k-1} = p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k$. Em particular, C_k é um racional cuja forma simplificada tem numerador p_k e denominador q_k.

Proposição 97. A sequência $\{q_n\}_{n\geq -1, n\in\mathbb{Z}}$ é crescente estritamente.

Definição 98. Defina, para $k \in \mathbb{N}_0$, $D_k = q_k x - p_k$ é a k-ésima diferença da expansão de x em frações contínuas.

Definição 99. Definimos, para $a \in \mathbb{R}$, $||a||_{\mathbb{Z}}$ como $\mathrm{d}(a, \mathbb{Z}) = \inf_{z \in \mathbb{Z}} |a - z|$ (aqui, d denota a distância usual em $\mathbb{R}$ dada pelo valor absoluto da diferença entre dois números).

As duas seguintes proposições são de extrema importância para este trabalho.

Proposição 100. Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $|D_k| < \frac{1}{q_{k+1}}$, $||q_k x||_{\mathbb{Z}} = |D_k|$ e $|D_k| > \frac{1}{q_k + q_{k+1}}$. Além disso, a sequência $\{|D_k|\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge para zero de modo estritamente decrescente.

A seguinte proposição é um teorema que [22] atribui a Lagrange e é o resultado mais importante desta seção.

Proposição 101. Sejam $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ com $0 < b \leq q_{k+1}$. Suponha $\frac{a}{b} \neq C_{k+1}$. Então:

$$|bx - a| \geq |q_k x - p_k| > |q_{k+1} x - p_{k+1}|.$$

Observação 102. Não tratamos aqui em detalhe o aspecto ótimo dos convergentes como as melhores aproximações racionais para x, porém a proposição acima de certa forma ajuda a entender o motivo da otimalidade dos convergentes. Uma primeira motivação para a denominação dos convergentes como aproximações racionais ótimas para x vem da seguinte proposição, que é uma consequência direta da proposição acima.

Proposição 103. Seja $k \in \mathbb{Z}$ com $k \geq 2$, dado $a, b \in \mathbb{Z}$ com $0 < b \leq q_k$ e com $\frac{a}{b} \neq C_k$, então $\left|x - \frac{a}{b}\right| > |x - C_k|$.

A seguinte proposição também é uma consequência direta das proposições anteriores e será útil para este trabalho.

Proposição 104. Para todo $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq 2$ e para todo $j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq j < q_i$, tem-se $||jx||_{\mathbb{Z}} \geq ||q_{i-1} x||_{\mathbb{Z}}$.

Prova. Existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $||jx||_{\mathbb{Z}} = |jx - a|$. Temos $\frac{a}{j} \neq C_i$. De fato, se $C_i = \frac{a}{j}$, teríamos $\frac{a}{j} = \frac{p_i}{q_i}$ e logo $jp_i = aq_i$. Sendo $\mathrm{mdc}(p_i, q_i) = 1$, temos que se $r \in \mathbb{N}$ é um primo e $m \in \mathbb{N}$, com r^m divisor de q_i, então r^m divide j (pois $\mathrm{mdc}(r^m, p_i) = 1$, ou se não p_i e q_i não seriam coprimos). Logo q_i divide j. Sendo assim, $j \geq g_i$, uma contradição. A Proposição 101 então nos dá $|jx - a| \geq |q_{i-1} x - p_{i-1}| = |D_{i-1}|$. Pela Proposição 100, tem-se $||q_{i-1} x||_{\mathbb{Z}} = |D_{i-1}|$. Assim, $||jx||_{\mathbb{Z}} \geq ||q_{i-1} x||_{\mathbb{Z}}$.

■

1.3.1 O Tipo de um Número

Fortemente relacionado à noção de frações contínuas neste trabalho é a noção de tipo de um número. Nesta seção daremos a definição do que entendemos pelo tipo de um número e o resultado principal é a Proposição 109, que é uma consequência quase que imediata da Proposição 108 (ver [6]). Diferente das seções anteriores, provaremos certos fatos.

Definição 105. Dados $x \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, dizemos que x é do tipo γ se

$$\gamma = \sup \left\{ t > 0 : \liminf_{j \to \infty} j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} = 0 \right\}$$

Proposição 106. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ com x do tipo γ. Ponha $Z = \{t > 0 : \liminf_{j \to \infty} j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} = 0\}$. Temos $\gamma = \sup Z$. Então:

i. Se γ for finito, então x não é racional.

ii. Dados $t, s \in \mathbb{R}$ com $t > s > 0$ e com $\liminf_{n \to \infty} n^t \, ||nx||_{\mathbb{Z}} = 0$, então $\liminf_{n \to \infty} n^s \, ||nx||_{\mathbb{Z}} = 0$.

iii. Se $\gamma \in \mathbb{R}$, então para todo $r > 0$, $\liminf_{n \to \infty} n^{\gamma - r} \, ||nx||_{\mathbb{Z}} = 0$.

iv. Se $\gamma \in \mathbb{R}$, então para todo $r > 0$, $\liminf_{n \to \infty} n^{\gamma + r} \, ||nx||_{\mathbb{Z}} > 0$.

v. Se $\gamma = \infty$, então $Z = (0, \infty)$.

Prova. **(i)** Suponha $x \in \mathbb{Q}$. Tem-se que existem infinitos índices $j \in \mathbb{N}$ tal que $jx \in \mathbb{Z}$ e logo $||jx||_{\mathbb{Z}} = 0$. Assim todo $t > 0$ é tal que $t \in Z$, o que implica em $\gamma = \sup Z = \infty$. Logo, se x for de tipo finito, não pode ser que x é racional.

Seja $\left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ é a sequência dos convergentes de x (da teoria de frações contínuas) na forma canônica ($p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}$ e $\mathrm{mdc}(q_i, p_i) = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$).

(ii). Seja $t > 0$ tal que $\liminf_{n \to \infty} n^t \, ||xn||_{\mathbb{Z}} = 0$. Sejam $0 < s < t$ e $\{j_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência estritamente crescente de naturais tal que $\lim_{i \to \infty} j_i^t \, ||j_i x||_{\mathbb{Z}} = 0$. Sendo $0 < j_i^s \, ||j_i x||_{\mathbb{Z}} < j_i^t \, ||j_i x||_{\mathbb{Z}}$, então $\lim_{i \to \infty} j_i^s \, ||j_i x||_{\mathbb{Z}} = 0$, o que dá $\liminf_{n \to \infty} n^s \, ||nx||_{\mathbb{Z}} = 0$.

(iii). Seja $r > 0$ e suponha $\gamma < \infty$. Se $\gamma - r < 0$, temos para todo $j \in \mathbb{N}$ $0 \leq j^{\gamma - r} \, ||jx||_{\mathbb{Z}} \leq j^{\gamma - r}$ sendo que $\lim_{j \to \infty} j^{\gamma - r} = 0$. Assim $\liminf_{j \to \infty} j^{\gamma - r} \, ||jx||_{\mathbb{Z}} = 0$. Se $\gamma - r = 0$, $j^{\gamma - r} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sendo $\lim_{i \to \infty} ||q_i x||_{\mathbb{Z}} = 0$, temos $\liminf_{n \to \infty} n^{\gamma - r} \, ||nx|| = 0$. Suponha agora que $\gamma - r > 0$. Temos $\sup Z = \gamma > \gamma - r > 0$. Logo existe $t \in Z$ tal que $\gamma - r < t \leq \gamma$. De **(ii)**, $\liminf_{n \to \infty} n^{\gamma - r} \, ||xn||_{\mathbb{Z}} = 0$.

(iv). Seja $r > 0$ e suponha $\gamma < r$. Sendo $\gamma + r > \gamma = \sup Z$, temos $\gamma + r \notin Z$ e logo $\liminf_{n \to \infty} n^{\gamma + r} \, ||nx||_{\mathbb{Z}} \neq 0$. Sendo $n^{\gamma + r} \, ||nx||_{\mathbb{Z}} \geq 0$ para todo natural n, tem-se então que $\liminf_{n \to \infty} n^{\gamma + r} \, ||nx||_{\mathbb{Z}} > 0$.

(v) Para todo $s > 0$, existe $t > s > 0$ tal que $t \in Z$ pois $\sup Z = \gamma = \infty$. De **(ii)**, $(0, t] \subset Z$ e logo $s \in \mathbb{Z}$. Sendo $\mathbb{Z} \subset (0, \infty)$, segue que $Z = (0, \infty)$.

■

Um fato útil para este trabalho é que quase todo (de acordo com a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$) número é do tipo 1. Isso fica mais preciso nas três seguintes proposições. Para este trabalho, a importância deste fato vem de um dos resultados principais desta dissertação, a Proposição 221. Nesta afirmação $\frac{1}{\beta}$ é cota inferior para certos números e β é cota superior para estes mesmos números, sendo β o tipo de um certo número α. No caso em que $\beta = 1$, que é o que vale para quase todo α, temos que estes números são então todos iguais.

Proposição 107. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, sendo γ o tipo de x. Temos então $\gamma \geq 1$.

Prova. Seja $t \in (0,1)$. Considere a sequência q_k dos denominadores dos convergentes na forma simplificada de x em sua expansão em frações contínuas. Suponha γ finito (se for ∞, já temos $\gamma \geq 1$). Logo x não é racional. Assim q_k segue indefinidamente. Temos $t = 1 - \varepsilon$ com $\varepsilon \in (0,1)$. Assim, usando a Proposição 100,

$$q_k^t \, ||q_k x||_{\mathbb{Z}} = \frac{q_k}{q_k^{\varepsilon}} \, ||q_k x||_{\mathbb{Z}} \leq \frac{1}{q_k^{\varepsilon}} \frac{q_k}{q_{k+1}} = \frac{1}{q_k^{\varepsilon}}$$

Sendo que $\lim\limits_{k\to\infty} q_k^{-\varepsilon} = 0$. Logo, $\liminf\limits_{j\to\infty} j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} = 0$. Sendo $\gamma = \sup\{t > 0 : \liminf\limits_{j\to\infty} j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} = 0\}$, temos $\gamma \geq 1$.

■

Foi dito antes que quase todo número é do tipo 1. O que provamos acima é que *todo* número é de tipo maior do que ou igual a 1. Não é possível mostrar que todo número é de tipo menor do que ou igual a 1 (os racionais e os números de Liouville, que serão introduzidos posteriormente nesta seção, são de tipo infinito por exemplo). Para mostar que quase todo número é do tipo 1, a seguinte proposição, cujos enunciado e prova estão em [6], é essencial.

Proposição 108. Seja $\phi : \mathbb{N} \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ monótona não crescente. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Dados $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, considere o conjunto $S(x_1, x_2, ..., x_n) = \{q \in \mathbb{N} : \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, ||qx_i||_{\mathbb{Z}} < \phi(q)\}$. Ponha $A \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n-uplas de reais $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tais que $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ é infinito. Temos:

1. Se $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \phi(q)$ converge, então a medida de Lebesgue de A é nula.

2. Se $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \phi(q)$ diverge, então $\mathbb{R}^n \setminus A$ tem medida de Lebesgue nula.

Usando a proposição acima para $n = 1$, é possível provar que quase todo número real possui tipo 1.

Proposição 109. Para quase todo número real x (de acordo com a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$), tem-se que o tipo de x é 1.

Prova. Seja $k \in \mathbb{N}$. Defina Defina $\phi_k : \mathbb{N} \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ dada por

$$\phi_k(q) = \frac{1}{2} q^{-1-\frac{1}{k}}.$$

Ponha A_k o conjunto de todos os $q \in \mathbb{N}$ tais que $||qx||_{\mathbb{Z}} < \phi_k(q)$ possui infinitas soluções (como no enunciado da Proposição 108). Como $1 + \frac{1}{k} > 1$, temos $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \phi_k(q)$ convergente. Logo A_k tem medida de Lebesgue nula (pela Proposição 108). Ponha $A_\infty = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Temos que A_∞ tem medida de Lebesgue nula. Seja $x \in \mathbb{R}$ com x de tipo $\gamma > 1$. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma > 1 + \frac{1}{k}$. Ponha $t = 1 + \frac{1}{k}$. Assim,

$$\liminf_{j\to\infty} j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} = 0.$$

Sendo assim, existem então infinitos índices $j \in \mathbb{N}$ tais que $j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} < \frac{1}{2}$ e logo

$$||jx||_{\mathbb{Z}} < \frac{1}{2j^t} = \phi_k(j).$$

Isso implica que $x \in A_k \subset A_\infty$. Assim, todos os números reais de tipo $\gamma > 1$ são elementos de A_∞. Sendo A_∞ de medida nula, segue-se que o conjunto dos números reais de tipo estritamente maior do que 1 também é de medida nula.

■

De certa forma já é claro que há relações entre noções de frações contínuas com o tipo de um número. A seguinte proposição reforça esta relação.

Proposição 110. Se $x \in \mathbb{R}$ é de tipo $\gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, então

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)},$$

e também

$$\frac{1}{\gamma} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(q_n)}{\log(q_{n+1})},$$

sendo que $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência dos convergentes da expansão de x em frações contínuas.

Prova. Primeiro veremos que $\frac{1}{\gamma} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(q_n)}{\log(q_{n+1})}$ é consequência de $\gamma = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)}$. Depois provaremos que de fato vale $\gamma = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)}$.

Ponha $a_n = \frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)} > 0$ e $k = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Temos três casos: $k = 0$, $k = +\infty$ e o último caso é $k \in (0, \infty)$. No caso em que $k = +\infty$, existe um subconjunto infinito $N \subset \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\in N} a_n = +\infty$ e logo $\lim_{n\in N} \frac{1}{a_n} = 0$. Então $0 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \leq \lim_{n\in N} \frac{1}{a_n} = 0$ donde $0 = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$. No caso em que $k = 0$, temos $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e assim, sendo cada a_n positivo, temos $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$, o que implica $\lim_{n\in N} \frac{1}{a_n} = \infty$. Suponha agora que $k \in (0, \infty)$. Existe um subconjunto infinito $N \subset \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\in N} a_n = k$ e logo $\lim_{n\in N} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{k}$. Então $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{k}$. Ponha $l = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$. Existe $M \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\lim_{n\in M} \frac{1}{a_n} = l$ e logo $\lim_{n\in M} a_n = l'$, sendo $l' = \frac{1}{l}$ se $l \neq 0$ e $l' = +\infty$ se $l = 0$. Assim, $k = \limsup_{n\to\infty} a_n \geq l'$. Então $l \leq \frac{1}{k}$ e $k \geq l'$, donde $k = l'$. Assim, $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = l = \frac{1}{k}$. Com isso, se provarmos que $\gamma = \limsup_{n\to\infty} a_n$, então teremos $\frac{1}{\gamma} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$, sendo que $\frac{1}{a_n} = \frac{\log(q_n)}{\log(q_{n+1})}$.

Vamos agora à prova da igualdade $\gamma = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Para isso vamos mostrar que qualquer que seja $t > \limsup_{n\to\infty} a_n$, tem-se $t \geq \gamma$ e, também, que qualquer que seja $t > \gamma$, temos $t \geq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

De fato, suponha primeiro que $t \in \mathbb{R}$ satisfaz $t > \limsup_{n\to\infty} a_n$. Primeiro, observe que então existe $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$, tem-se $t > \varepsilon + a_n$. Além disso, $q_n^{a_n} = q_{n+1}$. Seja $n > n_0$. Temos:

$$q_n^t \, ||q_n x||_{\mathbb{Z}} \geq q_n^\varepsilon q_n^{a_n} \, ||q_n x||_{\mathbb{Z}} \geq q_n^\varepsilon q_{n+1} \, ||q_n x||_{\mathbb{Z}} \geq q_{n+1} |q_n x - p_n| \geq \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} \geq \frac{1}{2}$$

Aqui, estamos usando certos resultados do capítulo de preliminares expostos na seção de Frações Contínuas (mais especificamente as Proposições 100 e a definição dos quocientes da expansão de x em frações contínuas que permite concluir a última desigualdade pois sendo $0 < q_n < q_{n+1}$, temos $\frac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}} \geq \frac{1}{2}$). Agora, observe que dado $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq q_1$, existe um único $n \in \mathbb{N}$ tal que $j \in \{q_n, q_n + 1, ..., q_{n+1} - 1\}$. Considere $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para

todo $j \in \mathbb{N}$ com $j > j_0$, $j \in \{q_n, q_n + 1, ..., q_{n+1} - 1\}$ com $n > n_0$ (isso é possível pois a sequência $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de naturais e estritamente crescente). Assim, dado $j > j_0$, seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$ e $j \in \{q_n, q_n + 1, ..., q_{n+1} - 1\}$. Assim, usando a Proposição 104, temos:

$$j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} \geq j^t \, ||q_n x||_{\mathbb{Z}} \geq q_n^t \, ||q_n x||_{\mathbb{Z}} \geq \frac{1}{2}.$$

Isso implica que $\liminf j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} \geq \frac{1}{2}$. Pela Proposição 106, temos então que $t \geq \gamma$ pois ou $\gamma = 0$ e daí $t \geq \gamma$ pois $t > \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$, ou então $\gamma > 0$ e assim se se $t < \gamma$, então teríamos $\liminf j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} = 0$ pela Proposição 106.

Assim, se $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, é claro que $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \geq \gamma$. Caso $\infty > \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$, então vimos que para todo $t \in \mathbb{R}$ com $t > \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, tem-se $t \geq \gamma$. De qualquer forma, concluímos que $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \geq \gamma$.

Suponha agora que $t \in \mathbb{R}$ satisfaz $t > \gamma$. Então $\liminf\limits_{j\to\infty} j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} > c > 0$ (ou se não $\gamma \geq t$), sendo $c \in \mathbb{R}$. Temos

$$\liminf_{n\to\infty} q_n^t \, ||q_n x||_{\mathbb{Z}} \geq \liminf_{j\to\infty} j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} > c > 0.$$

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$, tem-se $q_n^t \, ||q_n x||_{\mathbb{Z}} > c > 0$, o que implica em $q_n^t |q_n x - p_n| > c$. Da Proposição 100, temos:

$$q_n^t \frac{1}{q_{n+1}} > q_n^t |q_n x - p_n| > c.$$

Assim: $q_n^t > c q_{n+1}$ e $t \log(q_n) > \log(c) + \log(q_{n+1})$ donde

$$t > \frac{\log(c)}{\log(q_n)} + \frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)}.$$

Sendo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(c)}{\log(q_n)} = 0$, temos então $t \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Como antes, isso implica em $\gamma \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Logo, $\gamma = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ e fica então provado a proposição.

■

Observação 111. Dentro do contexto da proposição acima, temos então que para μ-quase todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\gamma = 1$ e assim $1 = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)}$. Note, porém, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)} > 1$. Isso implica em $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)} \geq 1$. Assim, existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)}$ e é 1.

Exemplo 112. Já vimos da Proposição 106 que se $x \in \mathbb{R}$ for racional, então o seu tipo tem que necessariamente ser ∞. Assim, mesmo que quase todo tipo seja do tipo 1, os números comuns com que estamos acostumados (me refiro aqui aos racionais) não possuem esta propriedade.

Exemplo 113. Daremos agora um exemplo de uma classe infinita, porém enumerável, de números de tipo 1. Estes números são simples do ponto de vista de suas representações em frações contínuas, a saber, são os números em que para todo $i \in \mathbb{N}$, $a_i = a_1 \in \mathbb{N}$. Seja $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se $a_i = k$. Suponha

$a_0 = 0$. É fácil ver que sabendo calcular o tipo de x para $a_0 = 0$, então sabe-se calcular o tipo de x para qualquer que seja o valor inteiro de a_0 já que para todo $j \in \mathbb{N}$, para todo $t > 0$, tem-se $j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} = j^t \, ||jx + jm||_{\mathbb{Z}}$, qualquer seja o inteiro m. Seja $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência dos denominadores dos convergentes na forma simplificada de x na sua expansão em frações contínuas. Temos $q_{n+2} = kq_{n+1} + q_n$, $n \in \mathbb{N}$, e logo

$$\begin{pmatrix} q_{n+2} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n+1} \\ q_n \end{pmatrix}$$

o que nos dá

$$\begin{pmatrix} q_{n+2} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizando a matriz

$$\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{k^2+4}} & \frac{\phi_2}{\sqrt{k^2+4}} \\ \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} & \frac{-\phi_1}{\sqrt{k^2+4}} \end{pmatrix}$$

sendo $\phi_1 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$. Ponha $A = \sqrt{k^2+4}$. Assim:

$$\begin{pmatrix} q_{n+2} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^{n+1} & 0 \\ 0 & \phi_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{A} & \frac{\phi_2}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{-\phi_1}{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

Fazendo as contas, usando que $q_0 = 1$ e que $q_1 = k$, temos

$$q_{n+2} = \frac{\phi_2 - k}{A}\phi_1^{n+2} + \frac{k - \phi_1}{A}\phi_2^{n+2}$$

$$q_{n+1} = \frac{\phi_2 - k}{A}\phi_1^{n+1} + \frac{k - \phi_1}{A}\phi_2^{n+1}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\log(q_{n+2})}{\log(q_{n+1})} &= \frac{\log(\frac{\phi_2-k}{A}\phi_1^{n+2} + \frac{k-\phi_1}{A}\phi_2^{n+2})}{\log(\frac{\phi_2-k}{A}\phi_1^{n+1} + \frac{k-\phi_1}{A}\phi_2^{n+1})} \\
&= \frac{\log\left(\phi_2^{n+2}\left(\frac{\phi_2-k}{A}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{n+2} + \frac{k-\phi_1}{A}\right)\right)}{\log\left(\phi_2^{n+1}\left(\frac{\phi_2-k}{A}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{n+1} + \frac{k-\phi_1}{A}\right)\right)} \\
&= \frac{(n+2)\log(\phi_2) + \log\left(\frac{\phi_2-k}{A}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{n+2} + \frac{k-\phi_1}{A}\right)}{(n+1)\log(\phi_2) + \log\left(\frac{\phi_2-k}{A}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{n+1} + \frac{k-\phi_1}{A}\right)} \\
&= \frac{\log(\phi_2) + \frac{\log\left(\frac{\phi_2-k}{A}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{n+2} + \frac{k-\phi_1}{A}\right)}{n+2}}{\frac{n+1}{n+2}\log(\phi_2) + \frac{\log\left(\frac{\phi_2-k}{A}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{n+2} + \frac{k-\phi_1}{A}\right)}{n+2}}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4}{k^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k^2}}}$$

e assim $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ é um número de valor absoluto estritamente menor que 1. Então

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{n+2} = 0.$$

Isso implica em

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(q_{n+2})}{\log(q_{n+1})} = \frac{\log(\phi_2)}{\log(\phi_2)} = 1.$$

Pela Proposição 110, o tipo de x é 1.

Observação 114. É um fato conhecido (ver [22]) que a razão áurea, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, é um número como no exemplo acima tendo $k = 1$ e $a_0 = 1$. Assim, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é do tipo 1.

Observação 115. Conhecendo-se um pouco mais sobre a teoria introdutória das frações contínuas, pode-se provar que todo número que satisfaz a equação $x = k + \frac{1}{x}$ se encaixa no exemplo acima e, assim, tem tipo 1. Além disso, pode-se provar também que todo número $x \in \mathbb{R}$ que se encaixa no exemplo acima é tal que existe $m \in \mathbb{Z}$ de modo que $x + m = k + \frac{1}{x+m}$. Não faremos a demonstração deste fato aqui. O que é feito em [22], porém, para o caso particular da razão áurea pode ser facilmente estendido para o caso geral (i.e. o descrito nesta observação). Usando este resultado obtemos que todo número da forma $\frac{2m+k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, sendo $k \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ arbitrários, tem tipo 1 e, além disso, estes são exatamente todos os números que se encaixam no exemplo acima.

Observação 116. A Proposição 106 nos dá que todo racional é de tipo infinito. Fica a pergunta se há números de tipo infinito que são irracionais. A resposta é sim. Uma classe de números irracionais de tipo infinito são os chamados de números de Liouville.

Definição 117. Um número irracional x é dito ser um **número de Liouville** se para cada $n \in \mathbb{N}$, existir $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

e $q > 1$.

Observação 118. A definição de número de Liouville dada acima foi retirada do livro [19].

Proposição 119. Seja $a > 1$ um inteiro e seja $c \in \mathbb{N}_0$. Considere o número $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{i!+c}}$. Então x é um número de Liouville.

Prova. A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{i!+c}}$$

converge e isso pode ser verificado fazendo uma comparação com a série geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^i}$. A expansão de x na base a é dada por $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{a^j}$, sendo $b_j = 1$ se $j = i! + c$ para algum $i \in \mathbb{N}$ e sendo $b_j = 0$ caso contrário. É um fato conhecido que a expansão de um número racional na base a é finita ou infinita eventualmente periódica. Afirmamos que x é irracional. De fato, se x fosse racional, sendo sua expansão em a infinita, teríamos a mesma eventualmente periódica. Assim, haveria $i_0 \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathbb{N}$ tais que para todo $j, m \in \mathbb{N}_0$ e para todo $l \in \{0, 1, ..., P-1\}$:

$$b_{i_0+Pj+l} = b_{i_0+Pm+l},$$

o $b_k = 1$ se, e somente se, $k = i! + c$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Assim, x é de fato irracional.

Seja $j \in \mathbb{N}$. Ponha $q = a^{j!}$ e $C = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{a^{i!+c}}$. Sendo $i! + c > (i-1)! + c > ... > 1! + c$, tem-se $C = \frac{p}{q}$ para algum $p \in \mathbb{Z}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
x - C &= \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{a^{i!+c}} \\
&\leq \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{a^{i!}} \\
&= \frac{1}{a^{(j+1)!}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^{(j+1)!}}{a^{(i+j+1)!}} \\
&= \frac{1}{(a^{j!})^{j+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^{(i+j+1)!-(j+1)!}} \\
&\leq \frac{1}{(a^{j!})^{j}} \frac{1}{(a^{j!})} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(i+j+1)!-(j+1)!}} \\
&< \frac{1}{(a^{j!})^{j}} \frac{1}{(a^{j!})} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i}} \\
&= \frac{1}{(a^{j!})^{j}} \frac{2}{(a^{j!})} \leq \frac{1}{(a^{j!})^{j}} = \frac{1}{q^j}.
\end{aligned}$$

Assim, $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^j}$. Sendo $j \in \mathbb{N}$ arbitrário, x é um número de Liouville.

■

Observação 120. A Proposição 119 nos dá uma família infinita de exemplos de números de Liouville entre 0 e 1. Por exemplo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i!}}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i!+1}}, ... \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^{i!}}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^{i!+1}}, ..., \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!+1}}, ...$$

Observação 121. É fácil ver que se x é um número de Liouville, então qualquer transladado inteiro de x também é um número de Liouville. De fato, dados x um número de Liouville e $m \in \mathbb{Z}$, pondo $y = x + m$, tem-se que se $j \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ satisfazem

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^j},$$

então

$$\left| y - \frac{p + mq}{q} \right| = \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^j}.$$

Observação 122. Para mostrarmos que os números de Liouville tem tipo infinito, precisaremos da seguinte caracterização dos mesmos.

Proposição 123. Seja $x \in \mathbb{R}$ um número irracional. São equivalentes:

1. x é um número de Liouville.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existem sequências $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de inteiros e $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de naturais com $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k = +\infty$ e $|x - \frac{P_k}{Q_k}| < Q_k^{-n}$.

Prova. Que o segundo item implica no primeiro é claro. Suponha agora que $x \in \mathbb{R}$ é um número de Liouville. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $p_n \in \mathbb{Z}$ e $q_n \in \mathbb{N}$, $q_n > 1$, tais que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Note que, dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\frac{1}{q_n^n} < \frac{1}{q_n^{n-1}} < \frac{1}{q_n^{n-2}} < ... < \frac{1}{q_n}$$

e, logo, para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^k}.$$

Dados $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, ponha $Q_n = q_{k+n}$ e $P_n = p_{k+n}$ (as sequências $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dependem, claramente, de k, mas isso não ficará implicito na notação para a mesma não ficar carregada). Temos então que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|x - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n^k}.$$

Resta ver que $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = \infty$. É claro que basta ver que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$. De fato, note que $q_n \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e logo $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{2^n}$. Seja $A > 1$. Ponha $D = \left\{\frac{p}{q} : q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}, q \leq A\right\}$. Sendo $x \notin D$ e D fechado, tem-se que $\mathrm{d}(x, D) = d_A > 0$. Ponha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < d_A$. Assim, $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{2^n} < d_A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$, e logo $q_n > A$, ou, se não, $\frac{p_n}{q_n} \in D$, o que contradizeria $|x - \frac{p_n}{q_n}| < d_A$. Desse modo, fica provado que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$ pela arbitrariedade de $A > 1$.

■

Proposição 124. Todo número de Liouville é de tipo infinito.

Prova. Seja $x \in \mathbb{R}$ um número de Liouville. Ponha $Z = \left\{t > 0 : \liminf\limits_{j\to\infty} j^t \, ||jx||_{\mathbb{Z}} = 0\right\}$. Seja $m \in \mathbb{N}$. Ponha $n = m + 2$. Pela Proposição 123 acima, existem sequências $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de inteiros e $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de naturais com $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k = +\infty$ e $|x - \frac{P_k}{Q_k}| < Q_k^{-n}$. Assim, dado $k \in \mathbb{N}$, tem-se $|Q_k x - P_k| < Q_k^{-n+1} = Q_k^{-m-1}$ e então

$$Q_k^m \, ||Q_k x||_{\mathbb{Z}} \leq Q_k^m |Q_k x - P_k| < Q_k^{-n+1} = Q_k^{-1}.$$

Sendo $k \in \mathbb{N}$ arbitrário e $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k = +\infty$, isso implica em $m \in Z$. Como $m \in \mathbb{N}$ qualquer, tem-se $\mathbb{N} \subset Z$. O tipo de x é $\sup Z = +\infty$.

■

Corolário 125. O conjunto dos números de Liouville tem medida de Lebesgue nula.

Prova. Este fato é uma consequência direta da Proposição 124 e da Proposição 109. ■

Queremos agora relacionar a noção de tipo de um número com o fato do número ser algébrico. Mostraremos que todo número algébrico de grau 2 é de tipo 1 e, de modo geral, mostraremos que um número algébrico de grau $N \geq 2$ tem tipo certamente menor que ou igual a $N - 1$.

Definição 126. Um número real x é um **número algébrico** se existe um polinômio $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_k t^k$, de coeficientes inteiros, tal que $p(x) = 0$. O grau do polinômio não nulo de coeficientes inteiros de menor grau que tem x como raiz é chamado de **grau** do número algébrico x ou simplesmente de grau de x (caso seja claro qual é a noção de grau sendo utilizada no contexto).

Exemplo 127. Todo racional é algébrico pois dados $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, o polinômio de coeficientes inteiros $f(x) = qx - p$ tem $\frac{p}{q}$ como raiz. Fica então provado também que o grau de qualquer racional é 1. Também é fácil ver que todo número algébrico de grau 1 é racional. É um fato conhecido que se $p \in \mathbb{N}$ não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{p}$ é um irracional e assim, como $\sqrt{p}$ é raiz de $f(x) = x^2 - 2$, tem-se que $\sqrt{p}$ é um número algébrico de grau 2.

Observação 128. Técnicas para se determinar o grau de números algébricos podem se encontradas em vários livros padrões de Álgebra que incluem seções sobre extensões de corpos como por exemplo [9].

Proposição 129. Seja $x \in \mathbb{R}$ um número algébrico de grau $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Existe então $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z} : \left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Mq^n}.$$

Prova. Seja $x \in \mathbb{R}$ um número algébrico de grau $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Seja $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$ um polinômio com coeficientes inteiros tal que $f(x) = 0$. Seja $I = [x - 1, x + 1]$ e ponha $M \in \mathbb{N}$ qualquer natural que sirva de cota superior para $\{|f'(t)| : t \in I\}$ (f' denota a derivada de f). Como $t \in I \mapsto |f'(t)|$ é uma função contínua no conjunto compacto I, existe um tal M. Seja $t \in [x - 1, x + 1]$. O Teorema do Valor Médio nos dá que $|f(t)| = |f(t) - f(x)| \leq M|t - x|$ (lembrando que $f(x) = 0$). Sejam agora $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Temos dois casos a considerar:

1. $|x - \frac{p}{q}| > 1$,
2. $|x - \frac{p}{q}| \leq 1$.

No caso (1), temos $|x - \frac{p}{q}| > 1 \geq \frac{1}{Mq^n}$. Vamos tratar agora o caso (2) e ficará provada a proposição. No caso (2), $\frac{p}{q} \in I$ e logo

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq M \left| x - \frac{p}{q} \right|$$

donde

$$\left| q^n f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq q^n M \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

Perceba que $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ é um inteiro já que o grau de f é n e os coeficientes de f são inteiros. Além disso, $f(p/q) \neq 0$, ou se não poderíamos fatorar o polinômio $f(t) = g(t)(t - p/q)$ e concluiríamos que o grau de x é menor ou igual do que o grau de $g(t)$, que é estritamente menor do que n, contradizendo então que x é um número algébrico de grau n (note que $g(t)$ não necessariamente tem coeficientes inteiros, porém é certamente verdade que tem coeficientes racionais, o que implica em existir um inteiro K tal que $Kg(t)$ tem coeficientes inteiros – é claro que $g(t)$ e $Kg(t)$ tem as mesmas raízes). Então $q^n M|x - p/q| \geq 1$. Sendo x irracional (o grau algébrico de x é $n \geq 2$), temos que a desigualdade é estrita. Portanto

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^n M}.$$

■

Observação 130. A Proposição 129 e sua prova foram retiradas do livro [19].

Proposição 131. Seja $x \in \mathbb{R}$ um número algébrico de grau $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Seja γ o tipo de x. Então $\gamma \leq n - 1$.

Prova. Seja $M \in \mathbb{N}$ como na Proposição 129 acima. Seja $j \in \mathbb{N}$ arbitrário. Existe $p_j \in \mathbb{Z}$ tal que $||jx||_{\mathbb{Z}} = |jx - p_j|$. Temos

$$\left|x - \frac{p_j}{j}\right| > \frac{1}{Mj^n},$$

donde

$$j^{n-1}\,|jx - p_j| = j^n \left|x - \frac{p_j}{j}\right| > \frac{1}{M}.$$

Isso implica que se pôr-mos $Z = \left\{t > 0 : \liminf_{j\to\infty} j^t\,||jx||_{\mathbb{Z}} = 0\right\}$, então temos $n - 1 \notin Z$. Pela Proposição 106, o tipo de x então não pode ser maior do que $n - 1$.

■

Corolário 132. Seja $x \in \mathbb{R}$ um número algébrico de grau 2. Então x tem tipo 1.

Corolário 133. Os números de Liouville não são algébricos.

1.4 Sistemas Dinâmicos

Introduziremos aqui o que usaremos da linguagem básica sobre sistemas dinâmicos discretos. Neste trabalho, o nosso foco se dá na dinâmica de mapas definidos no círculo. Devido a este fato, noções de dinâmica específicas do círculo possuem um capítulo próprio. Por mais que este trabalho seja sobre sistemas dinâmicos, a teoria básica do assunto não é fortemente utilizada. Essencialmente, estamos interessados em deixar claro o que entendemos por órbitas e por invariância.

Definição 134. Sejam X um conjunto e $f : X \to X$ uma função. O par (X, f) é chamado de **sistema dinâmico discreto**. É comum nos referirmos à função f como uma **dinâmica** sobre X ou simplesmente como dinâmica.

Observação 135. Comumente dentro deste trabalho, X assumirá uma certa estrutura topológica juntamente de uma de espaço de medida. De modo geral nestes casos, os resultados apresentados no texto assumem uma dinâmica f contínua ou então mensurável. Além disso, no caso de X apresentar uma estrutura topológica, a maioria dos resultados aqui presentes são para o caso de X sendo pelo menos um espaço métrico separável com f contínua.

Observação 136. O termo "discreto" refere-se ao interesse em estudar as iteradas de f sobre um certo ponto $x \in X$, ou seja, a sequência $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pode-se pensar que f descreve como um processo evolui de um certo estado x para o próximo $f(x)$, sendo que X é o conjunto de todos os estados sendo considerados. O contraste é feito entre os termos "discreto" e "contínuo". Dinâmica "contínua" se preocupa em estudar fluxos (dados por equações diferenciais ordinárias por exemplo).

Definição 137. Seja X um conjunto e $f : X \to X$. Dado $x \in X$, definimos a **órbita** (ou ainda a **órbita positiva** ou a **órbita para a frente**) de x por f, ou simplesmente a órbita de x, como $\mathrm{orb}(f, x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Em certos casos, tomaremos a órbita de x por f como o conjunto $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$, nestes casos, a órbita de x será denotata por $\mathrm{orb}_0(f, x)$ e será chamada de **órbita semi-positiva**. Quando for claro, omitiremos f e denotaremos $\mathrm{orb}(f, x)$ apenas por $\mathrm{orb}(x)$ (analogamente para $\mathrm{orb}_0(x)$). No caso em que f for bijeção, definimos a **órbita total** de x por f como o conjunto $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ (não daremos aqui uma notação para a órbita total).

Definição 138. Seja X um conjunto e $f : X \to X$ uma função. Dizemos que $Y \subset X$ é **f-invariante**, ou invariante por f, se $f(Y) \subset Y$.

Proposição 139. Sejam X um espaço métrico e $f : X \to X$ contína. Dado $x \in X$, temos $\overline{\mathrm{orb}(x)}$ f-invariante.

Prova. Dados $x \in X$ e $y \in \overline{\mathrm{orb}(x)}$, temos dois casos: $y \in \mathrm{orb}(x)$ ou então $y \notin \mathrm{orb}(x)$. Se $y \in \mathrm{orb}(x)$, então $y = f^i(x)$ e logo $f(y) = f^{i+1}(x) \in \mathrm{orb}(x)$ $(i \in \mathbb{N})$. Se $y \in \overline{\mathrm{orb}(x)} \backslash \mathrm{orb}(x)$, então existe uma sequência $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de entradas em $\mathbb{N}$ com $f^{n_i}(x) \to y$ para $i \to \infty$. Da continuidade de f: $f(y) = f\left(\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)\right) = \lim_{i\to\infty} f^{n_i+1}(x) \in \overline{\mathrm{orb}(x)}$.

■

Capítulo 2

O Círculo e suas Rotações

2.1 O Círculo como um Quociente

Ponha $S^1_{\mathbb{R}^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Este é o círculo unitário centrado na origem usual do $\mathbb{R}^2$. De modo geral, não trabalharemos com este diretamente, mas sim com um outro espaço, que é homeomorfo ao $S^1_{\mathbb{R}^2}$. Sabemos que $F : \mathbb{R} \to S^1_{\mathbb{R}^2}$ dada por $F(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$ é sobrejetora e contínua. Além disso, sabemos que toda função induz uma relação de equivalência em que dois elementos do seu domínio são equivalentes exatamente quando possuem a mesma imagem pela função. Denote por $\sim$ a relação de equivalência induzida por F. Assim, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos $x \sim y$ se, e somente se $F(x) = F(y)$, ou seja, se $x - y \in \mathbb{Z}$. Denote por $\mathbb{R}/\sim$ o conjunto das classes de equivalência com relação ao $\sim$ e denote também $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ como sendo a função passagem ao quociente que leva um elemento $x \in \mathbb{R}$ na sua classe de equivalência em $\mathbb{R}/\sim$. A relação de equivalência induzida por F nos permite definir uma função, que é comumente referida como a passagem ao quociente da função F, $\overline{F} : \mathbb{R}/\sim \to S^1_{\mathbb{R}^2}$ injetora com $\forall x \in \mathbb{R}$, $\overline{F}(\pi(x)) = F(x)$. Perceba que, sendo F sobrejetora, $\overline{F}$ é bijeção.

Proposição 140. $\mathbb{R}/\sim = \{\pi(x) : x \in [0, 1)\}$.

Prova. Dado $x \in \mathbb{R}$, temos $x \sim x - [x]$, sendo $x - [x] \in [0, 1)$.

■

A partir de agora denotaremos $\mathbb{R}/\sim$ por S^1. O trabalho que faremos sobre o círculo será feito em cima de S^1 e não sobre $S^1_{\mathbb{R}^2}$. Além de ser um resultado interessante por si só, a próxima proposição justifica a possibilidade de trabalhar com S^1 no lugar de $S^1_{\mathbb{R}^2}$. Daqui pra frente considere sobre S^1 a topologia quociente induzida por $\mathbb{R}$ e $\sim$ (ver a Definição 17).

Proposição 141. S^1 é compacto e homeomorfo ao $S^1_{\mathbb{R}^2}$.

Prova. Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma cobertura de S^1 por abertos. Ponha $B_i = \pi^{-1}(A_i)$ (que é um aberto pela definição da topologia quociente), para cada $i \in I$. Assim, por $S^1 \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, temos que $\{B_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura por abertos de $\mathbb{R}$ e, com maior razão, de $[0, 1]$, que é compacto. Existem, então, $r \in \mathbb{N}$ e $i_1, ..., i_r \in I$ tais que $[0, 1] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{r} B_{i_j}$. Assim:

$$S^1 = \pi([0, 1]) \subset \pi\left(\bigcup_{j=1}^{r} B_{i_j}\right) = \bigcup_{j=1}^{r} \pi(B_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^{r} A_{i_j}$$

(acima, na última igualdade, estamos usando que π é sobrejetora). Isso prova que S^1 é compacto.

Já sabemos que $\overline{F} : S^1 \to S^1_{\mathbb{R}^2}$ é uma bijeção. $\overline{F}$ é contínua pois F e π são contínuas e $\overline{F} = F \circ \pi$ (ver Proposição 20). $\overline{F}$ é, então, uma bijeção contínua de um espaço topológico compacto em um espaço métrico, e logo Hausdorff. Então $\overline{F}$ é homeomorfismo (Proposição 40).

■

Proposição 142. Dados $\pi(x), \pi(y) \in S^1$, defina $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\pi(x), \pi(y)) = \mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z})$. Temos $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$ bem definida e também que é uma métrica em S^1

Prova. Sejam $x, \alpha, y, \beta \in \mathbb{R}$ com $\pi(x) = \pi(\alpha)$ e $\pi(y) = \pi(\beta)$. Daí $\alpha = x + a$ ($a \in \mathbb{Z}$) e $\beta = y + b$ ($b \in \mathbb{Z}$). Daí:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z}) &= \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - y - n| \\
&= \inf_{n \in \mathbb{Z}} |(x + a) - (y + b) - n - a + b| \\
&= \inf_{n \in \mathbb{Z}} |(x + a) - (y + b) - n| \\
&= \inf_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha - \beta - n| \\
&= \mathrm{d}(\alpha - \beta, \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Isso resolve a boa definição de $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\pi(x), \pi(y)) = 0$, então $\mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z}) = 0$. Sendo $\mathbb{Z}$ fechado, $x - y \in \mathbb{Z}$. Logo $\pi(x) = \pi(y)$. Além disso, se $\pi(x) = \pi(y)$, então $x - y \in \mathbb{Z}$ e, claro, $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\pi(x), \pi(y)) = \mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z}) = 0$. Como já sabemos, $\mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z}) \geq 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Isso dá que: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z}) \geq 0$, sendo que $\mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z}) = 0$ se, e somente se, $\pi(x) = \pi(y)$.

Dados $\pi(x), \pi(y) \in S^1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\pi(x), \pi(y)) &= \mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z}) \\
&= \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - y - n| \\
&= \inf_{n \in \mathbb{Z}} |y - x + n| \\
&= \inf_{n \in \mathbb{Z}} |y - x - n| \\
&= \mathrm{d}(y - x, \mathbb{Z}) \\
&= \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\pi(y), \pi(x))
\end{aligned}$$

Resta ver a desigualdade triângular. Sejam $\pi(x), \pi(y), \pi(z) \in S^1$ e $a \in \mathbb{Z}$. Então para todo $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z}) &\leq |x - y - n| \\
&= |x - y + z - z + a - a - n| \\
&\leq |x - z - a| + |-y + z + a - n|
\end{aligned}$$

e logo para todo inteiro n, tem-se $\mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z}) - |x - z - a| \leq |-y + z + a - n|$, e assim $\mathrm{d}(x - y, \mathbb{Z}) - |x - z - a| \leq \inf_{n \in \mathbb{Z}} |-y + z + a - n| = \mathrm{d}(-y + z, \mathbb{Z})$. Isso então

dá que $\mathrm{d}(x-y,\mathbb{Z})-\mathrm{d}(-y+z,\mathbb{Z}) \leq |x-z-a|$. Sendo $a \in \mathbb{Z}$ arbitrário, tem-se que $\mathrm{d}(x-y,\mathbb{Z})-\mathrm{d}(-y+z,\mathbb{Z}) \leq \inf\limits_{a\in\mathbb{Z}} |x-z-a| = \mathrm{d}(x-z,\mathbb{Z})$. Segue daí que:

$$\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\pi(x),\pi(y)) \leq \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\pi(x),\pi(z)) + \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\pi(z),\pi(y))$$

■

Estamos interessados em usar as propriedades topológicas provenientes do quociente em S^1, mas também nas propriedades topológicas da métrica $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$. A proposição seguinte nos diz que as duas geram a mesma topologia. Assim, pode-se usar a que for mais conveniente.

Proposição 143. Em S^1, a topologia quociente e a topologia da métrica $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$ coincidem.

Prova. Seja $U \subset \mathcal{P}(S^1)$ os abertos de S^1 de acordo com a topologia quociente, sendo que $\mathcal{P}(S^1)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de S^1.
Afirmação 1. Dado $A \in U$ com $A \neq \emptyset$ e dado $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$, sendo que, aqui, $B(a,r)$ denota a bola de acordo com a métrica $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$.

Sendo $A \in U$, tem-se $\pi^{-1}(A)$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Seja $b \in \pi^{-1}(A)$ tal que $\pi(b) = a$. Existe $r > 0$ com $(b-r, b+r) \subset \pi^{-1}(A)$. Vamos ver que $B(a,r) \subset A$. Seja $\pi(c) \in B(a,r)$. Assim, $\mathrm{d}(c-b,\mathbb{Z}) < r$. Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $|c+n-b|$ seja mínimo. Ponha $c' = c+n$. Como $|c+n-b|$ é mínimo, temos $\mathrm{d}(c-b,\mathbb{Z}) = |c+n-b| = |c'-b| < r$. Daí $c' \in (b-r, b+r)$ e logo $c' \in \pi^{-1}(A)$. Então $\pi(c') = \pi(c) \in A$. Sendo $\pi(c) \in B(a,r)$ qualquer, tem-se $B(a,r) \subset A$.

Isso prova a afirmação 1.

Da afirmação 1, todo $A \in U$ com $A \neq \emptyset$ é a união de bolas abertas do espaço métrico $(S^1, \mathrm{d}_{\mathbb{Z}})$. Segue-se que A é um aberto da topologia da métrica. Claro que se $A = \emptyset$, então A também é um aberto da topologia da métrica. Logo, todo aberto da topologia quociente é um aberto da topologia métrica.
Afirmação 2 Dado $a \in S^1$ e $r > 0$, temos $B(a,r) \in U$.

Queremos ver aqui que $\pi^{-1}(B(a,r))$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Seja $a = \pi(x)$. Dado $y \in \mathbb{R}$:

$$y \in \pi^{-1}(B(a,r)) \iff \pi(y) \in B(\pi(x),r) \iff \mathrm{d}(x-y,\mathbb{Z}) < r$$

Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(q) = \mathrm{d}(x-q,\mathbb{Z})$. Sabemos que f é contínua, donde $\pi^{-1}(B(a,r)) = f^{-1}((-\infty, r))$ é aberto.

Isso termina a prova da afirmação 2.

Dado agora um aberto $A \subset S^1$ de acordo com a topologia da métrica $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$, tem-se que A é a união de bolas abertas pois para cada $x \in A$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$ e assim tem-se $A = \bigcup\limits_{x\in A} B(x, r_x)$. Logo A é um aberto de acordo com a topologia quociente.

Assim, como consequência direta das afirmações 1 e 2, a topologia da métrica e a topologia quociente compartilham dos mesmos abertos.

■

Esta próxima proposição nos dá uma caracterização simples, porém útil das pré-imagens da projeção π de $\mathbb{R}$ sobre S^1.

Proposição 144. Dados $A \subset S^1$ e $B \subset \mathbb{R}$ com $\pi(B) = A$, então $\pi^{-1}(A) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (B+n)$.

Prova. Dado $x \in \pi^{-1}(A)$, há $b \in B$ com $\pi(b) = \pi(x)$ pois $\pi(x) \in A = \pi(B)$. Logo $x - b \in \mathbb{Z}$, ou seja, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = b + n \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (B+n)$. Sendo $x \in \pi^{-1}(A)$

qualquer, segue que $\pi^{-1}(A) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(B+n)$. Dado agora $x \in x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(B+n)$, há $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in B+n$. Assim, tem-se $x = b+n$ para algum $b \in B$ e logo $\pi(x) = \pi(b) \in A$, ou seja, $x \in \pi^{-1}(A)$. Sendo $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(B+n)$ qualquer, segue que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(B+n) \subset \pi^{-1}(A)$. Então $\pi^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(B+n)$.

■

Proposição 145. $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ é uma aplicação aberta.

Prova. Seja $A \subset \mathbb{R}$ aberto. Ponha $B = \pi(A)$. Daí $\pi^{-1}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(A+n)$. Sendo cada $A+n$ aberto, por ser um transladado do aberto A, temos $\pi^{-1}(B)$ aberto. Assim, pela definição da topologia quociente, segue-se que B é aberto.

■

Proposição 146. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $c < d$. Suponha $\pi((a,b)) = \pi((c,d))$, $b - a \leq 1$ e $d - c \leq 1$. Então existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = c + n_0$ e $b = d + n_0$.

Prova. Temos $\pi^{-1}(\pi((a,b)) = \pi^{-1}(\pi((c,d))$ e assim $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}((a,b)+n) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}((c,d)+n)$. Então $(a,b) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}((c,d)+n)$.

Sejam $x, y \in (a,b)$ com $x < y$. Existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $x \in (c,d)+n$ e $y \in (c,d)+m$. Essencialmente, a prova desta proposição consiste em justificar a igualdade $m = n$, o que será feito adiante. Como $x < y$, temos que $n \leq m$ pois se $n > m$, teríamos (por $0 \leq d - c \leq 1$):

$$c + m < y < d + m \leq c + m + 1 \leq c + n < x < d + n$$

o que contradiz $x < y$. Agora, se $n < m$, temos:

$$c + n < x < d + n \leq c + 1 + n \leq c + m < y < d + m$$

o que dá $c + m \in (a,b)$, e logo $c + m \in \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}((c,d)+i)$. Assim existe $t \in (c,d)$ e $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $c + m = t + i_0$, o que implica em $t - c \in \mathbb{Z}$, mas isso é uma contradição já que $1 \geq d - c > t - c > 0$. Então, de fato, $m = n$.

A argumentação acima implica na existência de um inteiro n_0 tal que $(a,b) \subset (c,d) + n_0$. De fato, seja $x_0 \in (a,b)$ arbitrário. Seja $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0 \in (c,d) + n_0$. Sejam $y \in (a,b)$ com $y \neq x_0$ e $n \in \mathbb{Z}$ tais que $y \in (c,d) + n$. Não importa se $y < x_0$ ou $x_0 < y$, a argumentação acima dá que $n = n_0$ e assim $y \in (c,d) + n_0$.

De modo inteiramente análogo, existe um inteiro n_1 tal que $(c,d) \subset (a,b) + n_1$. Logo $(a,b) \subset (c,d) + n_0 \subset (a,b) + n_0 + n_1$ e, assim, $n_0 + n_1 = 0$. Então $(a,b) \subset (c,d) + n_0$ e $(c,d) \subset (a,b) - n_0$, ou seja, $(a,b) = (c,d) + n_0$ e, em particular, $a = c + n_0$ e $b = d + n_0$.

■

2.1.1 Intervalos no Círculo

Definição 147. Dizemos que $I \subset S^1$ é um **intervalo do círculo**, ou simplesmente intervalo caso não haja conflito de significados do termo no contexto utilizado, se existe um intervalo $J \subset \mathbb{R}$, usual de $\mathbb{R}$, tal que $I = \pi(J)$. Se I é um itervalo do círculo e $I \subset A$ (com $A \subset S^1$), dizemos que I é um intervalo de A ou em A.

Proposição 148. Dados $A \subset S^1$ e $x \in A$, então são equivalentes:

i. $x \in \text{int}A$.

ii. Existe $J \subset A$ intervalo aberto com $x \in J$.

Prova. Suponha (i). Seja $B \subset A$ aberto com $x \in B$. Seja $C = \pi^{-1}(B)$ (C é aberto de $\mathbb{R}$). Tome $a \in C$ tal que $\pi(a) = x$. Existe então $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subset C$. Logo $x \in \pi((a-\delta, a+\delta)) \subset A$. Pondo $J = \pi((a-\delta, a+\delta))$, (ii) segue. Que (ii) implica em (i) é consequência direta da definição de ponto de interior. Sendo $J \subset A$ um aberto e $x \in J$, segue que x é ponto de interior de A.

■

Proposição 149. Sejam $A \subset S^1$, $x \in \text{int}A$ e $\{J_i\}_{i \in L}$ uma família de intervalos abertos de A contendo x. Então $\bigcup\limits_{i \in L} J_i$ é um intervalo aberto de A contendo x.

Prova. É claro que $\bigcup\limits_{i \in L} J_i$ é aberto e que $x \in \bigcup\limits_{i \in L} J_i \subset A$. Seja I_i intervalo de $\mathbb{R}$ com $\pi(I_i) = J_i$ para cada $i \in L$. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(a) = x$. Para cada $i \in L$, escolha $n_i \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in I_i + n_i$ (lembrando que $\pi^{-1}(J_i) = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} (I_i + j)$ para todo $i \in L$). Logo $\{I_i + n_i\}_{i \in L}$ é uma família de intervalos contendo a. Logo $K = \bigcup\limits_{i \in L} (I_i + n_i)$ é um intervalo de $\mathbb{R}$. Sendo $\bigcup\limits_{i \in I} J_i = \bigcup\limits_{i \in I} \pi(I_i + n_i) = \pi\left(\bigcup\limits_{i \in I} I_i + n_i\right) = \pi(K)$, temos que $\bigcup\limits_{i \in I} J_i$ é um intervalo do círculo.

■

Definição 150. Dados $A \subset S^1$ e $x \in A$, dizemos que $J \subset S^1$ é um **intervalo aberto maximal** de A contendo x se: $x \in J \subset A$, J é um intervalo aberto e se $I \subset A$ é intervalo aberto com $x \in I$, então $I \subset J$.

Proposição 151. Dados $A \subset S^1$ e $x \in \text{int}A$, então existe um único $J \subset S^1$ intervalo maximal aberto de A contendo x.

Prova. Ponha $L_x = \{J \subset A : J \text{ intervalo aberto e } x \in J\}$. Sendo $x \in \text{int}A$, já vimos da Proposição 148 que $L_x \neq \emptyset$. Da Proposição 149, temos $J_0 = \bigcup\limits_{J \in L_x} J \subset A$ é um intervalo aberto de A contendo x. Agora é de verificação imediata que J_0 é intervalo maximal aberto de A contendo x pois se J é um intervalo aberto em A contendo x, tem-se $J \in L_x$ e logo $J \subset J_0$. Que J_0 é único também é imediato pois se J_1 é um intervalo aberto maximal de A contendo x, então da definição, tem-se $J_0 \subset J_1$ e $J_1 \subset J_0$.

■

Definição 152. Se $A \subset S^1$ e $x \in \text{int}A$, então o único intervalo aberto maximal de A contendo x será denotado por $\text{IM}^\circ(A, x)$.

Proposição 153. Seja $A \subset S^1$ e $x \in \text{int}A$. Se $y \in \text{IM}^\circ(A, x)$, então $\text{IM}^\circ(A, x) = \text{IM}^\circ(A, y)$.

Prova. Dado $y \in \text{IM}^\circ(A, x)$, temos $\text{IM}^\circ(A, x) \subset \text{IM}^\circ(A, y)$ pela maximalidade de $\text{IM}^\circ(A, y)$. Além disso, $x \in \text{IM}^\circ(A, y)$. Pela maximalidade de $\text{IM}^\circ(A, x)$, $\text{IM}^\circ(A, y) \subset \text{IM}^\circ(A, x)$. Logo $\text{IM}^\circ(A, y) = \text{IM}^\circ(A, x)$.

■

Proposição 154. Seja $J \subset S^1$ um intervalo aberto não vazio. Existe então $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto limitado com $\pi(I) = J$. Além disso, se $J \neq S^1$ e $J = \pi(I)$ com I intervalo, então I é um intervalo aberto e limitado.

Prova. Se $J = S^1$, tome $I = (-1, 1)$. Suponha agora que $J \neq S^1$. Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo com $\pi(I) = J$. Vamos ver que I é intervalo aberto e limitado. Como $\forall a \in \mathbb{R}$, $[a, a+1)$ é um sistema completo de representantes para S^1, temos que $J \neq S^1$ implica no comprimento de I menor ou igual que 1. Daí I é limitado.

Seja I de extremos $a \leq b$ com $0 \leq b - a \leq 1$. Assim: $I = [a, b)$, $I = (a, b]$, $I = [a, b]$ ou $I = (a, b)$.

Afirmação 1: Se o comprimento de I for 1, então I tem que ser (a, b).

De fato, supondo que $b - a = 1$, temos:

1. Se $I = [a, a + 1]$, então $S^1 = \pi([a, a + 1)) \subset \pi([a, a + 1]) = J$, uma contradição.
2. Se $I = [a, a + 1)$, então $J = \pi([a, a + 1)) = S^1$, uma contradição.
3. Se $I = (a, a + 1]$, então $J = \pi(I) = \pi(I \cup (I + 1)) = \pi((a, a + 1] \cup (a + 1, a + 2]) = \pi((a, a + 2]) = S^1$ pois $\left[a + \frac{1}{2}, a + \frac{3}{2}\right) \subset (a, a + 2]$. De novo, uma contradição.

Assim, se $b - a = 1$, então $I = (a, b)$ e não há nada mais a provar. Isso termina a afirmação 1.

Suponha agora que $b - a < 1$. Vamos ver que I é aberto neste caso também.

Ponha $b = a + r$ com $0 < r < 1$ ($r > 0$ é consequência de J ser aberto e não vazio). Temos que J é aberto e logo $\pi^{-1}(J)$ é aberto. Vamos ver que se $I = [a, b]$, $I = [a, b)$ ou $I = (a, b]$, então $\pi^{-1}(J)$ tem ponto que não é de interior.

Suponha $I = [a, b]$ ou $I = (a, b]$. Dado $n \geq 1$, $I + n$ é de extremos $a + n$ e $a + r + n$. Sendo $a + r < a + 1 \leq a + n < a + r + n$, temos $(a + r, a + 1) \cap (I + n) = \emptyset$. Se $n = 0$, $I = I + n$ é de extremos a e $a + r$ e daí $(a + r, a + 1) \cap I = \emptyset$. Se $n \leq -1$, então $I + n$ é de extremos $a + n < a + r + n$ e logo $(a + r, a + 1) \cap (I + n) = \emptyset$ (pois $a + r + n < a < a + r$). Daí:

$$(a + r, a + 1) \cap \pi^{-1}(J) = (a + r, a + 1) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (I + n) \right) = \emptyset$$

o que implica em $b = a + r \in \pi^{-1}(J)$, mas com $a + r$ fora do interior de $\pi^{-1}(J)$, o que contradiz $\pi^{-1}(J)$ ser aberto.

O caso em que $I = [a, b)$ é tratado de modo inteiramente análogo. Teremos aqui que $a \in \pi^{-1}(J)$ sem que $a \in \operatorname{int}(\pi^{-1}(J))$. Então $I = (a, b)$ de fato.

■

2.2 Medida no Círculo

Introduziremos aqui uma caracterização da σ-álgebra de Borel do círculo (com relação à topologia quociente) e definiremos o que se entende pela medida de Lebesgue no círculo. Nesta seção, entenderemos que $\mathcal{B}$ denota a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.

Defina $\hat{\mathcal{B}}^1 = \{A \subset S^1 : \pi^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$. É fácil ver que $(S^1, \hat{\mathcal{B}}^1)$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de S^1. Seja $\mathcal{B}^1$ a σ-álgebra de Borel do círculo S^1. Defina também $\mu^1 : \hat{\mathcal{B}}^1 \to [0, 1]$ dada por $\mu^1(X) = \mu([0, 1) \cap \pi^{-1}(X))$, sendo que μ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. É de verificação imediata que μ^1 é uma medida de probabilidade e assim $(S^1, \hat{\mathcal{B}}^1, \mu^1)$ é um espaço de probabilidade.

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que $\mathcal{B}^1 = \hat{\mathcal{B}}^1$ e desenvolver alguns resultados sobre μ^1.

Definição 155. A medida μ^1 é a medida de Lebesgue no círculo.

Proposição 156. Todo intervalo I de S^1 é $\hat{\mathcal{B}}^1$-mensurável e $\mu^1(I) > 0$ se $I = \pi(J)$ com $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado.

Prova. Coomo I é um intervalo de S^1, segue que $I = \pi(J)$ com $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Assim $\pi^{-1}(I) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (J+n)$. Como cada $J+n \in \mathcal{B}$, tem-se que $\pi^{-1}(I) \in \mathcal{B}$ e logo $I \in \hat{\mathcal{B}}^1$.

Suponha agora que J não é degenerado. Sejam $a < b$ reais com $a, b \in J$. Daí $(a,b) \subset J$. Como (a,b) é infinito não-enumerável e $\mathbb{Z}$ é enumerável, segue que há $x \in (a,b) \setminus \mathbb{Z}$. Ponha $\delta_1 = \mathrm{d}(x, \mathbb{Z}) > 0$ ($\mathbb{Z}$ é fechado) e seja $\delta_2 > 0$ tal que $(x-\delta_2, x+\delta_2) \subset J$. Tome $r = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Com isso, temos $(x-r, x+r) \subset J \setminus \mathbb{Z}$. Ponha $n_0 = \lfloor x - r \rfloor$. Assim $x - r - n_0 \in [0,1)$ e também $(x-r-n_0, x+r-n_0) \subset J - n_0 \subset \pi^{-1}(I)$. Então $(x-r-n_0, c) \subset [0,1) \cap \pi^{-1}(I)$, onde $c = \min\{x+r-n_0, 1\}$ (note que $c > x-r-n_0$). Daí vale que $\mu([0,1) \cap \pi^{-1}(I)) \geq \mu((x-r-n_0, c)) > 0$, ou seja, $\mu^1(I) > 0$.

■

Proposição 157. $\mathcal{B}^1 \subset \hat{\mathcal{B}}^1$.

Prova. Dado $A \subset S^1$ aberto, temos $\pi^{-1}(A)$ aberto e o que dá $\pi^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Logo $A \in \hat{\mathcal{B}}^1$. Assim, todo aberto de S^1 é elemento de $\hat{\mathcal{B}}^1$, o que implica em $\mathcal{B}^1 \subset \hat{\mathcal{B}}^1$.

■

Proposição 158. Dado $x \in S^1$, tem-se $\{x\} \in \mathcal{B}^1$.

Prova. Como S^1 é um espaço métrico, e logo Hausdorff, os conjuntos unitários $\{x\}$, $x \in S^1$, são fechados de S^1. Como $\mathcal{B}^1$ contem todos os abertos e fechados de S^1 como elementos, fica provada a proposição.

■

Proposição 159. $\mathcal{B}^1 = \hat{\mathcal{B}}^1$.

Prova. Defina $X = \{A \in \mathcal{B} : \pi(A) \in \mathcal{B}^1\}$. Se $X = \mathcal{B}$, então $\forall A \in \mathcal{B}$, $\pi(A) \in \mathcal{B}^1$ e logo $\forall A \in \hat{\mathcal{B}}^1$, temos $A = \pi(A')$ com $A' \in \mathcal{B}$ donde $A \in \mathcal{B}^1$. Disso segue que $\hat{\mathcal{B}}^1 \subset \mathcal{B}^1$. Junto da proposição anterior em que foi provado que $\mathcal{B}^1 \subset \hat{\mathcal{B}}^1$, temos a igualdade entre $\mathcal{B}^1$ e $\hat{\mathcal{B}}^1$. Resta então ver que $X = \mathcal{B}$.

Defina $Y = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ é aberto de } \mathbb{R}\}$. Vamos ver que:

1. $Y \subset X$
2. X é uma σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Isso então nos dá que $\mathcal{B} \subset X$ já que $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ gerada por Y e $Y \subset X$. Pela definição de X, já temos que $X \subset \mathcal{B}$. Daí teremos mostrado que $X = \mathcal{B}$.

Prova de (1)

Dado $A \in Y$, $\pi(A)$ é aberto pois π é uma aplicação aberta (Proposição 145) . Logo $\pi(A) \in \mathcal{B}^1$ e assim $A \in X$.

Prova de (2)

Temos $\mathbb{R}, \emptyset \in X$ pois $\pi(R) = S^1, \pi(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{B}^1$, sendo que $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{B}$.

Dado $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma coleção enumerável de elementos $A_i \in X$. Temos que:

$$\pi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \pi(A_i) \in \mathcal{B}^1$$

Logo: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$ com $\pi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in \mathcal{B}^1$. Daí $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in X$.

Seja agora $A \in X$, temos $A \in \mathcal{B}$ e $\pi(A) \in \mathcal{B}^1$. Temos $A^c \in \mathcal{B}$. Vamos ver que $\pi(A^c) \in \mathcal{B}^1$. Ponha $A = A_{\mathbb{Z}} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n\right)$ com $A_{\mathbb{Z}} = A \cap \mathbb{Z}$ e $A_n = A \cap (n, n+1)$. É fácil ver que $A^c = (\mathbb{Z} \setminus A_{\mathbb{Z}}) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1) \setminus A_n\right)$ e então:

$$\pi(A^c) = \pi(\mathbb{Z} \setminus A_{\mathbb{Z}}) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \pi((n, n+1) \setminus A_n)\right)$$

Temos:

1. $\pi(\mathbb{Z} \setminus A_{\mathbb{Z}}) = \{\pi(0)\}$ ou $\emptyset$, de todo modo é um elemento de $\mathcal{B}^1$. Lembrando que já vimos que conjuntos unitários são elementos de $\mathcal{B}^1$.

2. Em cada $(n, n+1)$, sabemos que π é injetora e $A_n \subset (n, n+1)$ e logo $\pi((n, n+1) \setminus A_n) = \pi((n, n+1)) \setminus \pi(A_n)$ com $\pi((n, n+1)) = S^1 \setminus \{\pi(0)\} \in \mathcal{B}^1$ e com $\pi(A_n) = \pi(A \cap (n, n+1)) = \pi(A)$ ou $\pi(A) \setminus \{\pi(0)\}$, que é um elemento de $\in \mathcal{B}^1$ de todo modo.

Logo $\pi(A^c)$ é união enumerável de elementos de $\mathcal{B}^1$. Assim, $\pi(A^c) \in \mathcal{B}^1$. Então $A^c \in X$. Isso termina a prova de (2) e também a prova da proposição.

■

Proposição 160. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $[\alpha, \alpha+1)$ é um sistema completo de representantes para S^1, ou seja, $\pi|_{[\alpha,\alpha+1)} : [\alpha, \alpha+1) \to S^1$ é bijeção.

Prova. Sejam $a, b, \in [\alpha, \alpha+1)$ com $a < b$. Daí $\alpha \leq a < b < \alpha+1$ e logo $0 < b - a < 1$. Assim $a - b \notin \mathbb{Z}$ e logo $\pi(a) \neq \pi(b)$. Isso dá $\pi|_{[\alpha,\alpha+1)}$ injetora. Dado agora $x \in S^1$, seja $a \in \mathbb{R}$ com $\pi(a) = x$. Seja $n \in \mathbb{Z}$ o maior inteiro tal que $a+n < \alpha$. Assim $a+n+1 < \alpha+1$ e, pela maximalidade de n, $a+n+1 \geq \alpha$. Então $\pi(a) = \pi(a+n+1) = x$. Logo $\pi|_{[\alpha,\alpha+1)}$ é sobrejetora. Portanto, $[\alpha, \alpha+1)$ é um sistema completo de representantes para S^1.

■

Proposição 161. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe $f = f_\alpha : [\alpha, \alpha+1) \to [0, 1)$ bijeção mensurável com inversa mensurável tal que

1. $\forall t \in [\alpha, \alpha+1)$, $\pi(t) = \pi(f(t))$.

2. $\forall A \in \mathcal{B}, \mu([0, 1) \cap A) = \mu(f^{-1}([0, 1) \cap A))$.

3. $\forall A \in \mathcal{B}, \mu([\alpha, \alpha+1) \cap A) = \mu(f([\alpha, \alpha+1) \cap A))$.

4. $\forall A \subset S^1$, tem-se $[0, 1) \cap \pi^{-1}(A) = f([\alpha, \alpha+1) \cap \pi^{-1}(A))$

Observação 162. Pareceba que o item (1) acima caracteriza $f(x)$ como o elemento em $[0, 1)$ tal que $\pi(x) = \pi(f(x))$, ou seja, $f(x)$ é o representante em $[0, 1)$ de $\pi(x)$.

Prova. Defina $F_\alpha = F : [\alpha, \alpha+1) \to \mathbb{R}$ dada por $F(t) = t - \lfloor \alpha \rfloor$ se $t - \lfloor \alpha \rfloor < 1$ e por $F(t) = t - \lfloor \alpha \rfloor - 1$ se $t - \lfloor \alpha \rfloor \geq 1$. Vamos ver que f_α satisfaz as condições enúnciadas na proposição.

Seja $t \in [\alpha, \alpha+1)$. Temos $F(t) - t \in \mathbb{Z}$ da definição de F. Logo $\pi(F(t)) = \pi(t)$. Além disso:

i. Se $t \in [\alpha, \alpha+1)$ com $t - \lfloor \alpha \rfloor < 1$, então $F(t) = t - \lfloor \alpha \rfloor < 1$ e, além disso, $\lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha \leq t$ donde $F(t) = t - \lfloor \alpha \rfloor \geq 0$.

ii. Se $t \in [\alpha, \alpha+1)$ com $t - \lfloor \alpha \rfloor \geq 1$, então $\alpha < 1 + \lfloor \alpha \rfloor \leq t < \alpha + 1$ e logo $0 \leq t - \lfloor \alpha \rfloor - 1 = F(t) < \alpha - \lfloor \alpha \rfloor < 1$.

De todo modo, $\forall t \in [\alpha, \alpha+1)$, tem-se $F(t) \in [0, 1)$. Ponha $f = f_\alpha : [\alpha, \alpha+1) \to [0, 1)$ dada por $f(t) = F(t)$. Pelo que foi feito acima, f está bem definida e $\pi \circ f = \pi$.

Afirmação 1: f é bijeção.

Dados $a, b \in [\alpha, \alpha+1)$, temos $\pi(a) = \pi(f(a))$ e $\pi(b) = \pi(f(b))$. Logo se $f(a) = f(b)$, então $\pi(a) = \pi(b)$. Sendo $a, b \in [\alpha, \alpha+1)$ e sendo $[\alpha, \alpha+1)$ um sistema completo de representantes para S^1, tem-se que f é injetora.

Dado $a \in [0, 1)$, seja $x = \pi(a)$ e $b \in [\alpha, \alpha+1)$ tal que $\pi(b) = x$. Temos $\pi(f(b)) = \pi(b) = x = \pi(a)$. Assim, $f(b) = a$ pela injetividade da π em $[0, 1)$. A arbitrariedade de $a \in [0, 1)$ dá que f é sobrejetora.

Afirmação 2: f é mensurável.

Temos, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (\chi_A T_{-\lfloor \alpha \rfloor} + \chi_B T_{-\lfloor \alpha \rfloor - 1})(x)$, sendo que $A = [\alpha, \lfloor \alpha \rfloor + 1)$, $B = [\lfloor \alpha \rfloor + 1, \alpha + 1)$, $T_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($y \in \mathbb{R}$) é dada por $T(x) = x + y$ (é a translação por y) e χ_X denota a função característica de X. Assim, f é mensurável.

Afirmação 3: f^{-1} é mensurável.

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g = \chi_A T_{\lfloor \alpha \rfloor} + \chi_B T_{\lfloor \alpha \rfloor + 1}$ com $A = [\alpha - \lfloor \alpha \rfloor, 1)$ e $B = [0, \alpha - \lfloor \alpha \rfloor)$. É fácil ver que para todo $x \in [0, 1)$, $g(x) = f^{-1}(x)$. Daí f^{-1} mensurável.

Afirmação 4: $\forall A \in \mathcal{B}$, tem-se $\mu(A \cap [\alpha, \alpha+1)) = \mu(f(A \cap [\alpha, \alpha+1)))$.

Seja $\beta = \lfloor \alpha \rfloor + 1$. Logo $[\alpha, \alpha+1) = [\alpha, \beta) \biguplus [\beta, \alpha+1)$ (obs.: $\biguplus$ denota união disjunta).

Do que foi feito na afirmação 2, em $[\alpha, \beta)$, f coincide com $T_{-\lfloor \alpha \rfloor}$ e, em $[\beta, \alpha+1)$, f coincide com $T_{-\lfloor \alpha \rfloor - 1}$. Além disso, a medida de Lebesgue é invariante por translação. Assim:

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap [\alpha, \alpha+1)) &= \mu\Big((A \cap [\alpha, \beta)) \biguplus (A \cap [\beta, \alpha+1))\Big) \\
&= \mu(A \cap [\alpha, \beta)) + \mu(A \cap [\beta, \alpha+1)) \\
&= \mu(A \cap [\alpha, \beta) - \lfloor \alpha \rfloor) + \mu(A \cap [\beta, \alpha+1) - \lfloor \alpha \rfloor - 1) \\
&= \mu(f(A \cap [\alpha, \beta))) + \mu(f(A \cap [\beta, \alpha+1))) \\
&= \mu\Big(f(A \cap [\alpha, \beta)) \biguplus f(A \cap [\beta, \alpha+1))\Big) \\
&= \mu(f(A \cap [\alpha, \alpha+1)))
\end{aligned}$$

Afirmação 5: $\forall A \in \mathcal{B}$, tem-se $\mu(A \cap [0, 1)) = \mu(f^{-1}(A \cap [0, 1)))$.

Dado $A \in \mathcal{B}$, ponha $B = f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Daí, pela afirmação 4, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\mu(B \cap [\alpha, \alpha+1)) = \mu(f(B \cap [\alpha, \alpha+1))) \\
\Longrightarrow\ &\mu(f^{-1}(A) \cap f^{-1}([0, 1))) = \mu(A \cap [0, 1)) \\
\Longrightarrow\ &\mu(f^{-1}(A \cap [0, 1))) = \mu(A \cap [0, 1))
\end{aligned}$$

Afirmação 6: $\forall A \subset S^1$, tem-se $[0,1) \cap \pi^{-1}(A) = f([\alpha, \alpha+1) \cap \pi^{-1}(A))$.

Seja $x \in [0,1) \cap \pi^{-1}(A)$, então $\pi(x) = a \in A$. Seja $y \in [\alpha, \alpha+1)$ com $\pi(y) = a$. Assim, $f(y) = x$ (pois $f(y)$ é o elemento em $[0,1)$ tal que $\pi(y) = \pi(f(y))$). Então $y \in [\alpha, \alpha+1) \cap \pi^{-1}(A)$ com $x = f(y)$. Logo $x \in f([\alpha, \alpha+1) \cap \pi^{-1}(A))$. Dado agora $x \in f([\alpha, \alpha+1) \cap \pi^{-1}(A))$, então $x \in [0,1)$. Além disso, como $x = f(y)$ com $y \in [\alpha, \alpha+1) \cap \pi^{-1}(A)$, então $\pi(y) = \pi(f(y)) \in A$. Logo $\pi(x) \in A$, o que dá $x \in [0,1) \cap \pi^{-1}(A)$. ■

Proposição 163. Seja $A \in \mathcal{B}^1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\mu([\alpha, \alpha+1) \cap \pi^{-1}(A)) = \mu([0,1) \cap \pi^{-1}(A))$$

Prova. Seja $f : [\alpha, \alpha+1) \to [0,1)$ como na Proposição 161. Temos:

$$[0,1) \cap \pi^{-1}(A) = f([\alpha, \alpha+1) \cap \pi^{-1}(A))$$

e logo

$$\mu([0,1) \cap \pi^{-1}(A)) = \mu(f([\alpha, \alpha+1) \cap \pi^{-1}(A))) = \mu([\alpha, \alpha+1) \cap \pi^{-1}(A))$$

■

Proposição 164. Sejam $r \geq 0$ e $x \in S^1$. Temos $\mu^1(B(x,r)) = \min\{1, 2r\}$.

Prova. Para $r = 0$, $B(x,r) = \emptyset$ e logo $\mu^1(B(x,r)) = 0 = 2r < 1$.

Suponha agora $0 < r \leq \frac{1}{2}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(a) = x$. Temos $\pi((a-r, a+r)) = B(x,r)$. De fato, dado $t \in (a-r, a+r)$, $\mathrm{d}(t-a, \mathbb{Z}) \leq |t-a| < r$ e logo $\pi(t) \in B(x,r)$. Dado $y \in B(x,r)$, seja $t \in [a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ tal que $\pi(t) = y$. Como $|t-a| \leq \frac{1}{2}$, temos $\mathrm{d}(t-a, \mathbb{Z}) = |t-a|$. Daí $|t-a| < r$ e logo $t \in (a-r, a+r)$, o que dá $y \in \pi((a-r, a+r))$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\mu^1(B(x,r)) &= \mu\left(\left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right) \cap \pi^{-1}(B(x,r))\right) \\
&= \mu\left(\left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right) \cap \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (j + (a-r, a+r))\right) \\
&= \mu((a-r, a+r)) \\
&= 2r \leq 1.
\end{aligned}$$

No caso em que $r > \frac{1}{2}$, tem-se $B(x,r) = S^1$. De fato, sendo $a \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(a) = x$, temos que $\pi\left(\left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)\right) \subset B(x,r)$. Pois dado $t \in \left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ arbitrário, tem-se $|t-a| \leq \frac{1}{2}$ e logo $\mathrm{d}(t-a, \mathbb{Z}) = |t-a| \leq \frac{1}{2} < r$, donde $\pi(t) \in B(x,r)$. Com isso, concluímos que $B(x,r) = S^1$ e $\mu^1(B(x,r)) = \mu^1(S^1) = \mu([0,1) \cap \mathbb{R}) = \mu([0,1)) = 1 < 2r$. ■

2.3 Rotação

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, defina $\mathrm{Rot}_\alpha : S^1 \to S^1$ dada por $\mathrm{Rot}_\alpha(\pi(x)) = \pi(x+\alpha)$. Rot_α está bem definida pois:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \pi(x) = \pi(y) \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff (x-\alpha) - (y-\alpha) \in \mathbb{Z}$$

Definição 165. O mapa do círculo Rot_α definido logo acima é chamado de **rotação no círculo**, ou simplesmente rotação. No caso de α ser racional ou irracional, dizemos que Rot_α é uma **rotação racional** ou uma **rotação irracional** respectivamente.

Observação 166. O principal resultado desta dissertação é uma afirmação que diz respeito às rotações irracionais. Por isso, existe uma prioridade no caso $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ neste trabalho.

Observação 167. Os resultados vistos até então sobre o círculo foram todos dados de modo a serem usado no estudo de rotações apresentado neste trabalho.

Proposição 168. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, Rot_α é uma isometria.

Prova. Sejam $x, y \in S^1$. Ponha $x = \pi(a), y = \pi(b)$. Temos:

$$\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(x, y) = \mathrm{d}(a - b, \mathbb{Z}) = \mathrm{d}(a + \alpha - (b + \alpha), \mathbb{Z}) = \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha(x), \mathrm{Rot}_\alpha(y)).$$

■

Corolário 169. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, Rot_α é uniformemente contínua.

Proposição 170. Dado $\alpha \in \mathbb{Q}$, tem-se que para todo $a \in S^1$, a é ponto periódico de Rot_α. Além disso, todo ponto $a \in S^1$ tem um mesmo período.

Prova. Ponha $\alpha = \frac{p}{q}$ com $q \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$. Dado $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Rot}_\alpha^q(\pi(x)) = \pi(x + q\alpha) = \pi(x + p) = \pi(x).$$

■

Proposição 171. Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tem-se que Rot_α não possui pontos periódicos.

Prova. Suponha que Rot_α tem algum ponto periódico $\pi(x)$. Assim, há $n \in \mathbb{N}$ com $\mathrm{Rot}_\alpha^n(\pi(x)) = \pi(x)$, ou seja, $\pi(x) = \pi(x + n\alpha)$. Sendo assim, $x = x + n\alpha + a$ com $a \in \mathbb{Z}$ e logo $\alpha = \frac{-a}{n} \in \mathbb{Q}$, uma contradição.

■

Proposição 172. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $J \subset S^1$ um intervalo, então $\mathrm{Rot}_\alpha(J)$ é um intervalo.

Prova. Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo tal que $\pi(I) = J$. Ponha $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\alpha(t) = \alpha + t$ e assim $\mathrm{Rot}_\alpha \circ \pi = \pi \circ F_\alpha$. Daí $\mathrm{Rot}_\alpha(J) = \mathrm{Rot}_\alpha(\pi(I)) = \pi(F_\alpha(I))$. Sendo $F_\alpha(I)$ um intervalo, segue que $\mathrm{Rot}_\alpha(J)$ é um intervalo.

■

Proposição 173. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{B}^1$, tem-se $\mathrm{Rot}_\alpha(A) \in \mathcal{B}^1$ e $\mu^1(A) = \mu^1(\mathrm{Rot}_\alpha(A))$.

Prova. Temos $\mathrm{Rot}_\alpha(A) \in \mathcal{B}^1$ pois $R_{-\alpha}$ é contínua com $\mathrm{Rot}_\alpha(A) = R_{-\alpha}^{-1}(A) \in \mathcal{B}^1$. Seja

$C = \pi^{-1}(A)$. Ponha $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(t) = t + \alpha$. Assim:

$$\begin{aligned}
\mu^1(\mathrm{Rot}_\alpha(A)) &= \mu^1(\mathrm{Rot}_\alpha(\pi(C))) = \mu^1(\pi(F(C)) = \mu([0,1) \cap \pi^{-1}(\pi(F(C))))\\
&= \mu\left([0,1) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (F(C)+n))\right) = \mu\left([0,1) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (C+\alpha+n))\right)\\
&\textit{(a medida de Lebesgue é invariante por translação)}\\
&= \mu\left([-\alpha,-\alpha+1) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (C+n))\right) = \mu\left([-\alpha,-\alpha+1) \cap \pi^{-1}(A)\right)\\
&\textit{(Proposição 163)}\\
&= \mu\left([0,1) \cap \pi^{-1}(A)\right) = \mu^1(A)
\end{aligned}$$

■

Observação 174. Uma consequência da proposição acima é que $\mu^1(A) = \mu^1(\mathrm{Rot}_\alpha^{-1}(A))$ para todo $A \in \mathcal{B}^1$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ pois $\mathrm{Rot}_\alpha^{-1} = \mathrm{Rot}_{-\alpha}$. Se diz que a transformação Rot_α é invariante com relação à medida μ^1, ou ainda que μ^1 é invariante com relação à transformação Rot_α.

O seguinte resultado não tem diretamente a ver com a teoria desenvolvida neste capítulo, porém é uma ferramenta que será usada para provar a Proposição 176.

Proposição 175. Seja $a \in \mathbb{R}$. Ponha $G = \{m+an : m,n \in \mathbb{Z}\}$. Então $(G,+)$ é subgrupo de $(\mathbb{R},+)$ e além disso:

i. Se $a \in \mathbb{Q}$, então G é um grupo cíclico.

ii. Se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então G é não é cíclico e G é denso em $\mathbb{R}$.

Prova. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e G como no enunciado. Que G é subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ é evidente dado que para todo $m,n,p,q \in \mathbb{Z}$, temos $m + an - (p + qa) = (m-p) + (n-q)a \in G$ e temos também $0 = 0 + 0a \in G$.

Suponha a racional. Se $a = 0$, então $G = \mathbb{Z}$, que é cíclico. Suponha $a \neq 0$. Seja $a = \frac{p}{q}$ com $q \in \mathbb{N}$ e $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$. Afirmamos que G é o grupo gerado por $\frac{1}{q}$. De fato, o grupo (aditivo) H gerado por $\frac{1}{q}$ é $\left\{\frac{r}{q} : r \in \mathbb{Z}\right\}$. Dado $m + n\frac{p}{q} \in G$, temos $m + n\frac{p}{q} = \frac{mq+np}{q} \in H$. Dado agora $\frac{r}{q} \in H$, $r \in \mathbb{Z}$, existem $m,n \in \mathbb{Z}$ tais que $mq + pn = 1$ pois $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$. Logo $rmq + rpn = r$, donde $\frac{r}{q} = rm + rn\frac{p}{q} \in G$. Assim, $G = H$ é grupo cíclico.

Suponha agora a irracional. Primeiro vamos ver que G não é cíclico. De fato, se G fosse cíclico, existiria $g \in G$ tal que $a = tg$, sendo $t \in \mathbb{Z}$. Temos $g = m_0 + an_0$. Considere as seguintes observações:

1. Temos $a = tg = tm_0 + atn_0$ e assim $a(1 - tn_0) = tm_0$.

2. Sendo $a \neq 0$ e $a = tg$, temos $t \neq 0$.

3. Suponha $1 - tn_0 = 0$. Assim, $tm_0 = 0$ e, sendo $t \neq 0$, teríamos $m_0 = 0$. Daí $g = n_0 a$. Temos $\mathbb{Z} \subset G$ e assim haveria $s \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = sg = sn_0 a$, o que implica $a = \frac{1}{sn_0} \in \mathbb{Q}$, uma contradição. Logo $1 - tn_0 \neq 0$.

Assim $a(1-tn_0) = tm_0$ com $(1-tn_0) \neq 0$ implica em $a = \frac{tm_0}{1-tn_0} \in \mathbb{Q}$, uma contradição. Logo G não é cíclico.

Ponha $G^+ = \{x \in G : x > 0\}$. Vamos provar que $\inf G^+ = 0$. De fato, temos $\inf G^+ \geq 0$. Suponha que $\inf G^+ > 0$. Ponha $g = \inf G^+$. Temos duas possibilidades: pode ser que $g \in G$ ou então que $g \notin G$. Se $g \notin G$, existe $x \in G$ tal que $g < x < 2g$ e também $y \in G$ tal que $g < y < x < 2g$. Assim, $x - y \in G^+$ com $0 < x - y < g$, o que contradiz $g = \inf G^+$. Assim, $g \in G^+$ se $\inf G^+ > 0$. Neste caso, afirmamos que G é cíclico gerado por g. De fato, seja $t \in G^+$ e seja $m \in \mathbb{N}_0$ o maior inteiro tal que $mg < t$. Como G é grupo, temos $t - mg \in G$. Sendo $t - mg > 0$, temos $t - mg \in G^+$. Logo $g \leq t - mg$. Além disso, $(1 + m)g \geq t$ pela maximalidade de m. Temos então $mg < t \leq (1 + m)g$, o que dá $0 < t - mg \leq (1 + m)g - mg = g$. Então $t - mg = g$ e logo $t = (m + 1)g$. Isso mostra que todo elemento em G^+ é um múltiplo inteiro de g, o que implica em todo elemento de G ser múltiplo inteiro de g. Assim, no caso de $\inf G^+ > 0$, temos G cíclico gerado por $\inf G^+$. Sendo G não cíclico, temos $\inf G^+ = 0$.

Para ver que G é denso em $\mathbb{R}$, seja $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Seja $k \in G^+$ tal que $0 < k < \frac{\varepsilon}{2}$. Se $x > 0$, então tome $j \in \mathbb{N}_0$ o maior inteiro tal que $jk < x$. Se $x - jk \geq \varepsilon$, então $x - jk \geq \varepsilon > k$ e logo $x > (j+1)k$, contrariando a maximalidade de j. Assim $|x - jk| = x - jk < \varepsilon$, sendo $jk \in G$. No caso de $x = 0$, o próprio x é um elemento de G que está ε-próximo de x. Se $x < 0$, faça o argumento acima para $-x$ e obtenha $t \in G$ com $|t - (-x)| < \varepsilon$, donde $\varepsilon > |t + x| = |x - (-t)|$ com $-t \in G$.

■

Proposição 176. Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e seja $x \in S^1$. Temos então que a órbita total O de x por Rot_α está contida no fecho da órbita de x por Rot_α, ou seja, $O \subset \overline{\mathrm{orb}(\mathrm{Rot}_\alpha, x)}$. Lembrando que $O = \{\mathrm{Rot}_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ e que $\mathrm{orb}(\mathrm{Rot}_\alpha, x) = \{\mathrm{Rot}_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Prova. Seja $y \in O$. Temos que $y = R_\alpha^n(x)$ com $n \in \mathbb{Z}$. Se $n > 0$, então $y \in \mathrm{orb}(\mathrm{Rot}_\alpha, x) \subset \overline{\mathrm{orb}(\mathrm{Rot}_\alpha, x)}$.

Suponha $n \leq 0$. Ponha $a \in \mathbb{R}$ com $\pi(a) = x$. Temos $y = \pi(a + n\alpha)$. Seja $G = \{k + l\alpha : k, l \in \mathbb{Z}\}$ como na Proposição 175. Temos G grupo aditivo denso em $\mathbb{R}$ e logo existem $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{j_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sequências de inteiros tais que $\lim\limits_{i\to\infty} (k_i + j_i\alpha) = 0$. Faremos agora algumas considerações sobre as sequências acima. Podemos assumir que estas possuem certas propriedades boas:

i. Podemos supor que para todo $i \in \mathbb{N}$, $j_i \neq 0$ pois $\{i \in \mathbb{N} : j_i = 0\}$ é finito ou se não $\lim\limits_{i\to\infty} (k_i + j_i\alpha) \neq 0$. Assuma então daqui pra frente $j_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

ii. Podemos supor que para todo $i \in \mathbb{N}$, $j_i > 0$ pois há ou não uma quantidade infinita de índices $i \in \mathbb{N}$ tais que $j_i > 0$ e, caso haja, use a subsequência dos índices i com $j_i > 0$. Caso não haja, troque as sequências $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{j_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ por $\{-k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{-j_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e então extraia a subsequência como indicado. Daqui pra frente, então, assumimos $j_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

iii. Caso $n < 0$, podemos assumir também que para todo $i \in \mathbb{N}$, $j_i > -n$ pois o conjunto de índices tais que $j_i > -n$ é infinito já que se fosse finito, $|k_i + j_i\alpha| \geq \min\{d(b\alpha, \mathbb{Z}) : b = 1, 2, ..., -n\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, o que contradiz $\lim\limits_{i\to\infty} (k_i + j_i\alpha) = 0$. Assumimos assim que $j_i + n > 0$, $i \in \mathbb{N}$, daqui em diante.

Temos:

$$\lim_{i\to\infty} (a + k_i + (j_i + n)\alpha) = a + n\alpha$$

Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(t) = t + \alpha$. Temos $\mathrm{Rot}_\alpha \circ \pi = \pi \circ F$. Então:

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} F^{j_i+n}(a + k_i) = \lim_{i\to\infty} (a + k_i + (j_i + n)\alpha) = a + n\alpha \\
\Longrightarrow\ &\pi\left(\lim_{i\to\infty} F^{j_i+n}(a + k_i)\right) = \pi(a + n\alpha) = y \\
\Longrightarrow\ &\lim_{i\to\infty} \mathrm{Rot}_\alpha^{j_i+n}(\pi(a + k_i)) = y \\
\Longrightarrow\ &\lim_{i\to\infty} \mathrm{Rot}_\alpha^{j_i+n}(x) = y \\
\Longrightarrow\ &y \in \overline{\mathrm{orb}(\mathrm{Rot}_\alpha, x)}.
\end{aligned}$$

Sendo $y \in O$ qualquer, segue que $O \subset \overline{\mathrm{orb}(\mathrm{Rot}_\alpha, x)}$.

■

Proposição 177. Sejam $A \subset S^1$ e $x \in \mathrm{int}A$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Rot}_\alpha(\mathrm{IM}^\circ(A, x)) = \mathrm{IM}^\circ(\mathrm{Rot}_\alpha(A), \mathrm{Rot}_\alpha(x))$.

Prova. Sejam $K = \mathrm{IM}^\circ(\mathrm{Rot}_\alpha(A), \mathrm{Rot}_\alpha(x))$ e $J = \mathrm{IM}^\circ(A, x)$. Temos $\mathrm{Rot}_\alpha(J)$ intervalo aberto (pois J é intervalo aberto de S^1, Rot_α é homeomorfismo e Rot_α leva intervalos em intervalos). Assim, sendo $\mathrm{Rot}_\alpha(J) \subset \mathrm{Rot}_\alpha(A)$ com $\mathrm{Rot}_\alpha(x) \in \mathrm{Rot}_\alpha(J)$, tem-se $\mathrm{Rot}_\alpha(J) \subset K$. Temos $\mathrm{Rot}_\alpha(x) \in K$, $R_{-\alpha}(\mathrm{Rot}_\alpha(x)) = x$, $R_{-\alpha}(K) \subset R_{-\alpha}(\mathrm{Rot}_\alpha(A)) = A$ e $J = \mathrm{IM}^\circ(A, x)$. Logo $R_{-\alpha}(K) \subset J$, o que dá $K \subset \mathrm{Rot}_\alpha(J)$. Segue que $K = \mathrm{Rot}_\alpha(J)$, ou seja, $\mathrm{IM}^\circ(\mathrm{Rot}_\alpha(A), \mathrm{Rot}_\alpha(x)) = \mathrm{Rot}_\alpha(\mathrm{IM}^\circ(A, x))$.

■

Observação 178. Usando a Proposição 177 acima, pode-se provar que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall A \subset S^1$, $\forall x \in \mathrm{int}A$, tem-se:

$$\mathrm{Rot}_\alpha^n(\mathrm{IM}^\circ(A, x))) = \mathrm{IM}^\circ(\mathrm{Rot}_\alpha^n(A), \mathrm{Rot}_\alpha^n(x)).$$

Proposição 179. Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tem-se que $\forall x \in S^1$, $\mathrm{orb}(\mathrm{Rot}_\alpha, x)$ é denso em S^1.

Observação 180. Na observação mais abaixo (Observação 182), daremos uma prova mais simples dessa proposição. O interessante da prova dada aqui é o tanto que ela toca em vários conceitos relacionados às rotações e ao círculo.

Prova. Suponha que há $x \in S^1$ com $O^+ = \mathrm{orb}(\mathrm{Rot}_\alpha, x)$ não denso em S^1. Logo $\overline{O^+}$ é um fechado com $\overline{O^+} \neq S^1$. Ponha $A = S^1 \setminus \overline{O^+}$, que é um aberto não vazio de S^1. Seja $y \in A$ e $J = \mathrm{IM}^\circ(A, y)$. Como $J \neq \emptyset$ e $J \neq S^1$, temos $J = \pi(I)$ com $I = (a, b)$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $0 < b - a \leq 1$.
Afirmação 1: $\mathrm{Rot}_\alpha(A) = A$.

Se há $w \in A$ com $\mathrm{Rot}_\alpha(w) \notin A$, ou seja, com $\mathrm{Rot}_\alpha(w) \in \overline{O^+}$, então existe uma sequência $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de naturais com $\lim_{j\to\infty} \mathrm{Rot}_\alpha^{i_j}(x) = \mathrm{Rot}_\alpha(w)$. Temos $\{j \in \mathbb{N} : i_j = 1\}$ finito pois caso fosse infinito, então $\mathrm{Rot}_\alpha(w) = \mathrm{Rot}_\alpha(x)$, o que dá $w = x \in A^c$ já que $x \in \overline{O^+}$ (Proposição 176), uma contradição. Assim, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq j_0$, vale que $i_j \geq 2$. Com isso, $\lim_{j\to\infty} \mathrm{Rot}_\alpha{}^{i_j-1}(x) = w$ (continuidade de $R_{-\alpha}$) e logo $w \in \overline{O^+} = A^c$, o que é uma contradição novamente. De todo modo se $w \in A$, é não podemos ter $\mathrm{Rot}_\alpha(w) \notin A$. Isso mostra que $\mathrm{Rot}_\alpha(A) \subset A$. Dado agora $a \in A$, existe $b \in S^1$ com $\mathrm{Rot}_\alpha(b) = a$. Como $\mathrm{Rot}_\alpha(\overline{O^+}) \subset \overline{O^+}$ (Proposição 139), tem-se que $b \notin \overline{O^+}$, ou se não $a \in \overline{O^+} = A^c$, uma contradição. Logo $b \in S^1 \setminus \overline{O^+} = A$. Sendo

assim, $a = \mathrm{Rot}_\alpha(b) \in \mathrm{Rot}_\alpha(A)$. Pela arbitrariedade de $a \in A$, temos $A \subset \mathrm{Rot}_\alpha(A)$. Logo $\mathrm{Rot}_\alpha(A) = A$ e fica provada a afirmação 1.

Afirmação 2: $\forall n \in \mathbb{N}$, tem-se $\mathrm{Rot}_\alpha^n(J) \cap J = \emptyset$.

De fato, ponha $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(t) = t + \alpha$. Assim: $R_\alpha^n(J) = R_\alpha^n(\pi(I)) = \pi(F^n(I)) = \pi(F^n((a,b))) = \pi((a+\alpha n, b+\alpha n))$. Suponha que para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, tem-se $R_\alpha^{n_0}(J) \cap J \neq \emptyset$. Primeiro vamos ver que é um absurdo ter $R_\alpha^{n_0}(J) = J$. Depois vamos ver que $R_\alpha^{n_0}(J) \cap J \neq \emptyset$ implica em $R_\alpha^{n_0}(J) = J$, o que então, pelo que foi feito primeiro, nos dá uma contradição.

Suponha $R_\alpha^{n_0}(J) = J$. Temos:

$$\pi((a,b)) = J = R_\alpha^{n_0}(J) = R_\alpha^{n_0}(\pi((a,b))) = \pi((a + n_0\alpha, b + n_0\alpha)).$$

Logo $\pi((a,b)) = \pi((a + n_0\alpha, b + n_0\alpha))$ e então $\pi(a) = \pi(a + n_0\alpha)$ (pela Proposição 146), o que dá $R_\alpha^{n_0}(\pi(a)) = \pi(a)$. Isso é uma contradição já que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ implica em Rot_α não ter pontos periódicos.

De modo geral, supondo que $R_\alpha^{n_0}(J) \cap J \neq \emptyset$, temos:

1. $J = \mathrm{IM}^\circ(A, y)$.
2. $R_\alpha^{n_0}(J) = \mathrm{IM}^\circ(R_\alpha^{n_0}(A), R_\alpha^{n_0}(y))) = \mathrm{IM}^\circ(A, R_\alpha^{n_0}(y)))$.

Seja $z \in J \cap R_\alpha^{n_0}(J)$. Então (pela Proposição 153):

1. $J = \mathrm{IM}^\circ(A, y) = \mathrm{IM}^\circ(A, z)$.
2. $\mathrm{Rot}_\alpha^{n_0}(J) = \mathrm{IM}^\circ(A, R_\alpha^{n_0}(y)) = \mathrm{IM}^\circ(A, z)$.

Logo $J = R_\alpha^{n_0}(J)$ e assim, pelo o que foi feito acima, temos uma contradição aqui também.

Isso termina a afirmação 2.

Com a afirmação 2 provada, segue-se que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$, temos $R_\alpha^{m-n}(J) \cap J = \emptyset$ e logo $\mathrm{Rot}_\alpha^m(J) \cap \mathrm{Rot}_\alpha^n(J) = \emptyset$. Em particular, isso implica que a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_\alpha^n(J)$ é disjunta. Como J é um intervalo aberto não vazio, tem-se $\mu^1(J) > 0$. Então:

$$1 \geq \mu^1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_\alpha^n(J)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^1(\mathrm{Rot}_\alpha^n(J)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^1(J) = \infty$$

o que é uma contradição. Logo, de fato, $\overline{O^+} = S^1$.

■

Corolário 181. Dado $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ e dado $x \in S^1$, tem-se que $\overline{O^+} = \overline{O} = \overline{O^-} = \overline{O_0^+} = \overline{O_0^-} = S^1$, sendo que $O = \{\mathrm{Rot}_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$, $O^+ = \{\mathrm{Rot}_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$, $O^- = \{\mathrm{Rot}_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n < 0\}$, $O_0^+ = \{\mathrm{Rot}_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ e $O_0^- = \{\mathrm{Rot}_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n \leq 0\}$.

Observação 182. A Proposição 179 admite uma outra prova, que é drasticamente mais simples. Nas hipóteses da Proposição 179, a órbita total de $x \in S^1$ por Rot_α é dada por $\pi(G)$, sendo $G = \{k + j\alpha : k, j \in \mathbb{Z}\}$. Sendo α irracional, G é denso em $\mathbb{R}$ (pela Proposição 175). Sendo π contínua e sobrejetora, segue-se que $\overline{\pi(G)} = S^1$ pois dado qualquer $y = \pi(z)$ em S^1, existe uma sequência $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de entradas em G tais que $\lim_{i\to\infty} g_i = z$ e logo $\lim_{i\to\infty} \pi(g_i) = \pi(z) = y$, donde $y \in \overline{\pi(G)}$. Como a órbita total de x por Rot_α é subconjunto de $\overline{\mathrm{orb}(f,x)}$ (pela Proposição 176), segue-se que $\overline{\mathrm{orb}(f,x)} = S^1$. Isso basta para provar a Proposição 179. A vantagem da prova dada acima como a demonstração de fato da proposição se dá no fato dela auxiliar num melhor entendimento das rotações e do próprio círculo.

Definição 183. Chamamos de **topologicamente transitivo** um sistema dinâmico discreto (X, f) num espaço métrico separável que tem a propriedade: $\exists x \in X$ com $\text{orb}(x)$ denso em X.

Observação 184. (S^1, Rot_α) é topologicamente transitivo para qualquer α irracional. Uma consequência disso é que dados $x, y \in S^1$, a órbita de x for Rot_α fica tão próximo de y quanto se queira. Pode-se dizer também que dado uma vizinhança V de y, a órbita de x por Rot_α visita esta vizinhança em infinitos instantes futuros de tempo, ou seja, $\#\{i \in \mathbb{N} : f^i(x) \in V\} = \infty$.

Observação 185. Ponha (X, f) um sistema dinâmico discreto. É fácil ver que dado $x \in X$, se $\text{orb}(f, x)$ é denso em X, então também vale que $\text{orb}(f, f(x))$ é denso em X. Isso implica que, no caso de (X, f) ser topologicamente tansitivo, tem-se que é denso em X o conjunto de pontos cujas órbitas formam conjuntos densos em X. A noção de transitividade topológica pode ser estudada em situações mais gerais com uma definição mais abrangente, mas foge consideravelmente do que nos é de interesse nesta dissertação.

2.4 Mapas do Círculo

É de se esperar que existam mapas interessantes de S^1 nele próprio além das rotações. Nesta seção falaremos superficialmente sobre outros mapas do círculo. Será feita uma exposição em aberto, diferente do que é feito no resto deste trabalho, sem a preocupação de enunciar proposições ou destacar definições. Queremos mostrar um modo, a fim de se obter exemplos, de se conseguir mapas do círculo nele próprio através de um método sistemático. Considere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) - F(y) \in \mathbb{Z}$ sempre que $x - y \in \mathbb{Z}$. Defina $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(\pi(x)) = \pi(F(x))$. Que f está bem definida é claro pois dados $y, x \in \mathbb{R}$ tais que $\pi(x) = \pi(y)$, tem-se $x - y \in \mathbb{Z}$, o que implica em $F(x) - F(y) \in \mathbb{Z}$ e, logo, $\pi(F(x)) = \pi(F(y))$. Como consequência da Proposição 20, se F for contínua, então f também é contínua. Dizemos que f é a aplicação do círculo induzida por F. Com isso, podemos facilmente produzir mapas do círculo. Seguem alguns exemplos (em todos os itens abaixo, F é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$).

1. Dados $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, ponha $F(x) = \beta\text{sen}(2k\pi x) + x + \gamma$. Aqui, dado $x \in \mathbb{R}$, $F(x+1) = \beta\text{sen}(2k\pi + 2k\pi x) + x + 1 + \gamma = \beta\text{sen}(2k\pi x) + x + 1 + \gamma = F(x) + 1$ e logo $F(x) - F(x+1) \in \mathbb{Z}$, o que implica em $F(x) - F(y) \in \mathbb{Z}$ sempre que $x - y \in \mathbb{Z}$. Então F induz uma aplicação $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(\pi(x)) = \pi(\beta\text{sen}(2k\pi x) + x + \gamma)$. A continuidade de F dá que f é contínua.

2. $F(x) = \text{sen}(4\pi x) + \cos(2\pi x) - x$. Dado $x \in \mathbb{R}$, temos $F(x + 1) = \text{sen}(4\pi x + 4\pi) + \cos(2\pi x + 2\pi) - x - 1 = \text{sen}(4\pi x) + \cos(2\pi x) - x - 1 = F(x) - 1$. Isso implica em $F(x) - F(y) \in \mathbb{Z}$ dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ com $x - y \in \mathbb{Z}$. A aplicação $f : S^1 \to S^1$ induzida por F é contínua. Como feito no exemplo acima, pode-se introduzir parâmetros nesta F para obter algo mais geral.

3. $F(x) = x + a$, sendo $a \in \mathbb{R}$ qualquer. A função f induzida por F é uma rotação, a saber, Rot_a.

4. $F(x) = \tan(\text{sen}^2(2\pi x))$. A periodicidade de sen com período 2π dá que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ com $x - y \in \mathbb{Z}$, tem-se $F(x) - F(y) = 0 \in \mathbb{Z}$.

É de fácil verificação que o conjunto $\mathcal{F}$ das funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $F(x) - F(y) \in \mathbb{Z}$ sempre que $x - y \in \mathbb{Z}$ forma um espaço de funções que tem, dentre outras, as seguintes propriedades:

1. Qualquer função constante pertence ao espaço $\mathcal{F}$.
2. A função identidade pertence ao espaço $\mathcal{F}$.
3. Dada uma função $F \in \mathcal{F}$ e dado $a \in \mathbb{Z}$, então $aF \in \mathcal{F}$.
4. Dados $F, G \in \mathcal{F}$, tem-se que $F + G \in \mathcal{F}$.
5. Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica de período T, então, pondo $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x) = F(Tx)$, tem-se que $G \in \mathcal{F}$.

Todos os exemplos acima foram encontrados explorando essas cinco propriedades. Uma última observação sobre o conjunto $\mathcal{F}$ antes de encerrarmos esta seção é que se considerarmos o conjunto $\mathcal{F}^C$ das funções em $\mathcal{F}$ que são contínuas, temos que estas são determinadas, de modo único, por uma certa função contínua e periódica de período 1 (porém 1 não necessariamente é o período fundamental desta função) e um número inteiro. Seja $F \in \mathcal{F}^C$. Ponha $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x) = F(x + 1) - F(x)$. Sendo G contínua e com $G(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$, tem-se G constante. Seja $k \in \mathbb{Z}$ com $G(x) = k$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Considere agora $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $H(x) = F(x) - kx$. Temos H periódica de período 1. Assim, fica provado que para todo $F \in \mathcal{F}^C$, existe uma função contínua periódica $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de período 1 e um inteiro k tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = H(x) + kx$. Portanto, o comportamento de F fica determinado por H e k. Além disso, F unicamente determina H e k. Suponha que $F(x) = H'(x) + k'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo $k' \in \mathbb{Z}$ e $H' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua periódica de período 1. Temos $k = F(1) - F(0) = H'(1) + k' - H'(0) = k'$, donde $k' = k$. Sendo $H'(x) + k'x = H(x) + kx$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $H' = H$. Isso termina o que queríamos fazer nesta seção.

Pode-se elaborar sobre esta ideia (de se obter mapas do círculo através de mapas em $\mathcal{F}$), mas isso não será feito neste trabalho. Há teorias que estudam propriedades de f a partir de propriedades de F. Para encontrar mais sobre este tipo de assunto, pode-se consultar [12], [8] e também [21].

Capítulo 3

Recorrência e Dimensão

Neste capítulo, apresentamos as noções de dimensão pontual e recorrência. Aqui seguiremos para os outros dois objetivos deste trabalho (sendo que o primeiro foi o estudo desenvolvido no capítulo anterior), que é um desenvolvimento de certos resultados interligando as duas noções (recorrência e dimensão pontual) e uma proposição que fala de como a rotação em S^1 estudada no capítulo anterior se comporta com relação a estes conceitos. Usaremos aqui certos fatos sobre Teoria Ergódica que serão enunciados, mas não serão provados.

3.1 Introdução, Definições e Preliminares

3.1.1 Recorrência

Considere uma dinâmica $f : X \to X$ sobre um espaço X e um estado $x \in X$ inicial. Em Sistemas Dinâmicos, queremos fazer afirmações interessantes sobre $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sob certas condições. Em alguns casos, podemos concluir que a dinâmica é trivial, que é o que dizemos quando $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge (assumindo que X seja um espaço métrico por exemplo). No caso em que $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ não converge, pode se buscar outras perguntas a se fazer sobre a sequência. Por exemplo, pode-se considerar uma certa função $\phi : X \to \mathbb{R}$ possuindo algumas propriedades de interesse e estudar $\{\phi(f^n(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$ (pode-se pensar em ϕ como uma projeção ou alguma função que extrai algum atributo de um elemento de X como por exemplo se x é ou não é de um certo tipo, ou qual é a distância de x até um certo conjunto fixado, etc). Em linhas gerais, a noção de recorrência tem a ver com escolher ϕ como a função característica de um certo conjunto $E \subset X$. Assim $\{\phi(f^n(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$ se torna uma sequência de zeros e uns capturando o "padrão de visitas" que a órbita de x por f tem com relação ao conjunto E. Esse estudo é motivado pelo Teorema da Recorrência da Poincaré.

O Teorema da Recorrência de Poincaré

Os primeiros teoremas sobre recorrência, que deram início ao estudo do assunto, são os dois Teoremas da Recorrência de Poincaré: a sua versão probabilística e a sua versão topológica.

Definição 186. Seja X um espaço de medida com medida μ. Dizemos que $f : X \to X$ é μ-invariante se para todo conjunto mensurável $E \subset X$, tem-se $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$. Também dizemos que μ é f-invariante com o mesmo sentido.

Proposição 187. (Teorema da Recorrência de Poincaré Probabilístico) Seja X um espaço de medida com medida μ finita e seja $f : X \to X$ uma função mensurável μ-invariante. Seja $E \subset X$ mensurável com $\mu(E) > 0$. Assim, para μ-quase todo ponto $x \in E$, $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in E\}$ é infinito.

A versão topológica do Teorema da Recorrência de Poincaré depende da seguinte definição.

Definição 188. Seja X um espaço topológico e seja $f : X \to X$. Dizemos que $x \in X$ é um ponto recorrente com relação a f se existe uma sequência de naturais $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ com $\lim\limits_{i\to\infty} n_i = \infty$ e $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = x$.

Observação 189. No caso de X acima ser um espaço métrico com uma métrica d, dado $x \in X$, dizer que x é ponto recorrente com relação a f é o mesmo que dizer que $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}(f^n(x), x) = 0$. No caso em que x não é ponto periódico de f, tem-se que $x \in X$ é um ponto recorrente com relação ao f se, e somente se, x pertence ao fecho do conjunto $\{f^i(x) : i \in \mathbb{N}\}$.

Proposição 190. (Teorema da Recorrência de Poincaré Topológico) Seja X um espaço topológico com uma base enumerável de abertos. Seja $f : X \to X$ Borel mensurável e μ uma medida finita e boreliana em X. Suponha f μ-invariante. Então para μ-quase todo $x \in X$, tem-se x recorrente com relação a f.

Provas de ambas versões do teorema podem ser encontradas em [23]. O Teorema da Recorrência de Poincaré é um dos teoremas que motiva o estudo de recorrência em Sistemas Dinâmicos. Neste trabalho, olharemos para certos aspectos quantitativos da recorrência. Para isso, precisamos do seguinte resultado fortemente relacionado ao Teorema da Recorrência de Poincarré.

Proposição 191. (Lema de Kač) Sejam (X, A, μ) um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$, $f : X \to X$ mensurável μ-invariante e $E \in A$ com $\mu(E) > 0$. Defina $\rho_E : X \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ dada por $\rho_E(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in E\}$. Ponha $E_0^* = \{x \in X : \forall n \in \mathbb{N}, f^n(x) \notin E\}$. Então ρ_E é mensurável, $\rho_E\chi_E$ é integravel (χ_E denota a função característica de E) e $\int_E \rho_E d\mu = \mu(X) - \mu(E_0^*)$.

Prova. Ver [23]

■

Aspectos Quantitativos

Definição 192. Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$. Dado $x \in X$ e $r > 0$, define-se o **tempo de primeiro retorno** de x à bola de centro x e raio r como $\tau_r(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathrm{d}(f^n(x), x) < r\}$. Dados $x, y \in X$ e $r > 0$, define-se o **tempo de primeira entrada** de x à bola de centro y e raio r como $\tau_r(x, y) = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathrm{d}(f^n(x), y) < r\}$. O tempo de primeiro retorno também é chamado de **tempo de recorrência** e o tempo de primeira entrada também é chamado de **tempo de espera**. O título deste trabalho faz referência a estes nomes.

Observação 193. Na definição acima e também em alguns outros lugares deste texto, ao tomarmos o ínfimo de um certo subconjunto de $\mathbb{R}$, estamos assumindo a noção extendida

de ínfimo, podendo ser $-\infty$ ou $+\infty$. Por exemplo, $\inf \mathbb{R} = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$. O mesmo vale para supremos.

Observação 194. No contexto da definição acima, é claro que $\tau_r(x,x) = \tau_r(x)$.

Observação 195. É fácil ver que τ admite uma certa monotonicidade, no seguinte sentido, dados $x, y \in X$ e dados $0 < s < r$, tem-se $\tau_s(x,y) \geq \tau_r(x,y)$. Isso se dá pois se $\mathrm{d}(f^n(x), y) < s$, então $\mathrm{d}(f^n(x), y) < r$. Da observação anterior, essa monotonicidade também ocorre para a função $r \in (0,\infty) \mapsto \tau_r(x)$.

Definição 196. Sejam (X,d) um espaço métrico, $f : X \to X$, e sejam $x, y \in X$. A **taxa de recorrência superior** de x em y, $\overline{R}(x,y)$, é definida como:

$$\overline{R}(x,y) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_r(x,y))}{-\log(r)}.$$

A **taxa de recorrência inferior** de x em y, $\underline{R}(x,y)$, é definida como:

$$\underline{R}(x,y) = \liminf_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_r(x,y))}{-\log(r)}.$$

A **taxa de recorrência superior** de x, $\overline{R}(x)$, é definida como: $\overline{R}(x) = \overline{R}(x,x)$ e a **taxa de recorrência inferior** de x, $\underline{R}(x)$, é definida como: $\underline{R}(x) = \underline{R}(x,x)$. No caso em que $\overline{R}(x) = \underline{R}(x)$, falamos da **taxa de recorrência** de x, $R(x) = \overline{R}(x) = \underline{R}(x)$. Similarmente, no caso em que $\overline{R}(x,y) = \underline{R}(x,y)$, falamos da **taxa de recorrência** de x em y, $R(x,y) = \overline{R}(x,y) = \underline{R}(x,y)$.

Observação 197. No contexto da definição acima, temos $\underline{R}(x) = \liminf\limits_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_r(x))}{-\log(r)}$ e também $\overline{R}(x) = \limsup\limits_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_r(x))}{-\log(r)}$.

Observação 198. Comumente tomaremos, como uma extensão da definição da função log, $\log(0) = -\infty$ neste trabalho.

É conveniente ter uma abordagem sequencial para o estudo de recorrência. Para isso, precisaremos do seguinte lema técnico.

Lema 199. Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos, monótona não crescente, convergindo para 0 e com

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_n)}{\log(a_{n+1})} = 1.$$

Seja também $f : (0,\infty) \to [1,\infty)$ uma função monótona não crescente. Então:

1. $\liminf\limits_{r\to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)} = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)}$
2. $\limsup\limits_{r\to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)}$

Prova. Faremos a prova do primeiro item (para o limite inferior). A prova do segundo item se dá de modo inteiramente análogo.

Considere $r \in (0, \infty)$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $a_{n+1} \leq r \leq a_n < 1$. Temos $\log(a_{n+1}) \leq \log(r) \leq \log(a_n) < 0$ e assim

$$0 < \frac{1}{-\log(a_{n+1})} \leq \frac{1}{-\log(r)} \leq \frac{1}{-\log(a_n)}.$$

Além disso:

$$\log(f(a_{n+1})) \geq \log(f(r)) \geq \log(f(a_n)) \geq 0.$$

Segue então que:

$$\frac{\log(a_{n+1})}{\log(a_n)} \frac{\log(f(a_{n+1}))}{-\log(a_{n+1})} \geq \frac{\log(f(r))}{-\log(r)} \geq \frac{\log(a_n)}{\log(a_{n+1})} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)} \geq 0.$$

Defina $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\gamma(r) = \inf\limits_{s \in (0,r]} \frac{\log(f(s))}{-\log(s)}$. Temos:

$$\liminf_{r \to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)} = \lim_{r \to 0^+} \gamma(r).$$

Vamos ver primeiro que

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)} \geq \liminf_{r \to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)}$$

Considere $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência estritamente crescente de naturais com

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\log(f(a_{n_k}))}{-\log(a_{n_k})} = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)}.$$

Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq k_0$, tem-se $a_{n_k - 1} < 1$. Pondo $r_k = a_{n_k}$ ($k \in \mathbb{N}$ com $k \geq k_0$), temos $a_{n_k} \leq r_k \leq a_{n_k - 1} < 1$. Assim, pelo que foi feito acima, temos que para todo $k \geq k_0$:

$$\frac{\log(a_{n_k})}{\log(a_{n_k - 1})} \frac{\log(f(a_{n_k}))}{-\log(a_{n_k})} \geq \frac{\log(f(r_k))}{-\log(r_k)} \geq \gamma(r_k).$$

Fazendo o limite para $k \to \infty$, temos

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)} \geq \lim_{k \to \infty} \gamma(r_k) = \lim_{r \to 0^+} \gamma(r) = \liminf_{r \to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)}.$$

Vamos ver agora que

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)} \leq \liminf_{r \to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, escolha $r_k \in (0, \frac{1}{k}]$ tal que $\frac{\log(f(r_k))}{-\log(r_k)} \in \left[\gamma\left(\frac{1}{k}\right), \gamma(\frac{1}{k}) + \frac{1}{k}\right)$.

Seja $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $r_{k_1} < a_1$. Seja então $n_1 \in \mathbb{N}$ o maior inteiro tal que $r_{k_1} \leq a_{n_1}$. Então temos $a_{n_1+1} < r_{k_1} \leq a_{n_1}$. Seja $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $k_2 > k_1$, $r_{k_2} < a_{n_1+1}$. Escolha $n_2 \in \mathbb{N}$ o maior inteiro tal que $r_{k_2} \leq a_{n_2}$. Temos então que $a_{n_2+1} < r_{k+1} \leq a_{n_2}$. Note que $n_2 > n_1$ necessariamente (pois $a_{n_1+1} > r_{k_2}$ e logo $n_2 \geq n_1 + 1$). Siga indutivamente da seguinte forma. Suponha que temos os naturais $k_1 < k_2 < ... < k_q$ ($q \in \mathbb{N}$) e também os naturais $n_1 < n_2 < ... < n_q$ com $a_{n_i+1} < r_{k_i} \leq a_{n_i}$ para todo $i \in \{1, 2, ..., q\}$. Escolha agora $k_{q+1} > k_q$ tal que $r_{k_{q+1}} < a_{n_q+1}$. Escolha n_{q+1} o maior inteiro tal que $r_{k_{q+1}} \leq a_{n_{q+1}}$. Assim: $n_{q+1} > n_q$ (pois $a_{n_q+1} > r_{k_{q+1}}$ e logo $n_{q+1} \geq n_q + 1$) e $a_{n_{q+1}+1} < r_{k_{q+1}} \leq a_{n_{q+1}}$. Isso termina a construção indutiva da sequência de índices $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tais que:

(1) $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sequências estritamente crescentes de números naturais e logo $\lim\limits_{i\to\infty} k_i = \infty$ e $\lim\limits_{i\to\infty} n_i = \infty$.

(2) Para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se $a_{n_i+1} < r_{k_i} \leq a_{n_i}$.

(3) $\frac{\log(f(r_{k_i}))}{-\log(r_{k_i})} \in \left[\gamma\left(\frac{1}{k_i}\right), \gamma\left(\frac{1}{k_i}\right) + \frac{1}{k_i}\right)$.

De (2) e (3) acima, para todo $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (mais precisamente, para todo $i \geq i_0$ e sendo $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_{i_0}} < 1$):

$$\gamma\left(\frac{1}{k_i}\right) + \frac{1}{k_i} \geq \frac{\log(f(r_{k_i}))}{-\log(r_{k_i})} \geq \frac{\log(a_{n_i})}{\log(a_{n_i+1})}\frac{\log(f(a_{n_i}))}{-\log(a_{n_i})}.$$

Ponha $b_i = \frac{\log(a_{n_i})}{\log(a_{n_i+1})}\frac{\log(f(a_{n_i}))}{-\log(a_{n_i})}$ e $c_i = \gamma\left(\frac{1}{k_i}\right) + \frac{1}{k_i}$ e então, claro, $c_i \geq b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Agora temos três possibilidades. Primeiramente, se $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ admite subsequência $\left\{b_{i_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge para um número real, segue-se que $\lim\limits_{j\to\infty} c_{i_j} \geq \lim\limits_{j\to\infty} b_{i_j}$, donde

$$\liminf_{r\to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)} \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)}.$$

Segundo, se $\lim\limits_{i\to\infty} c_i = \infty$, então

$$\liminf_{r\to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)} = \infty \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)}.$$

Finalmente, terceiro, se $\lim\limits_{i\to\infty} c_i < \infty$ e $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente (para um número real), então (por $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ser limitada superiormente neste caso), deve necessariamente ser verdade que $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = -\infty$. Isso implica em

$$\liminf_{r\to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)} \geq -\infty = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)}$$

Assim, de todo modo (em qualquer um dos casos):

$$\liminf_{r\to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)} \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)}$$

Fica então provado que

$$\liminf_{r\to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)}.$$

A prova para o limite superior é inteiramente análoga.

■

Proposição 200. Sejam (X, d) um espaço métrico, $f : X \to X$, e sejam $x, y \in X$. Então, para todo $b > 0$:

1. $\underline{R}(x, y) = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{be^{-n}}(x,y))}{n}$

2. $\overline{R}(x, y) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{be^{-n}}(x,y))}{n}$

3. $\underline{R}(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{be^{-n}}(x))}{n}$

4. $\overline{R}(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{be^{-n}}(x))}{n}$

Prova. Primeiro, é claro que (3) e (4) são consequências diretas de (1) e (2) pois, para $b > 0$, $\log(\tau_{be^{-n}}(x)) = \log(\tau_{be^{-n}}(x,x))$, $\underline{R}(x) = \underline{R}(x,x)$ e $\overline{R}(x) = \overline{R}(x,x)$. Daremos aqui a prova de (2). A prova de (1) se faz de modo inteiramente análogo. Usaremos aqui o Lema 199.

Sejam $b > 0$ e $x, y \in X$. Suponha que exista $r > 0$ tal que $\tau_r(x,y) = \infty$. Neste caso, temos $\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{be^{-n}}(x,y))}{n} = \infty$ pois para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tem-se $be^{-n} < r$ e logo $\tau_{be^{-n}}(x,y) \geq \tau_r(x,y) = \infty$. Além disso, neste caso $\overline{R}(x,y) = \infty$ pois $\overline{R}(x,y) = \limsup_{s\to 0^+} \frac{\log(\tau_s(x,y))}{-\log(s)}$ e para todo $s \in (0,r)$, tem-se $\tau_s(x,y) \geq \tau_r(x,y) = \infty$. Assim a igualdade de (2) vale.

Suponha agora que para todo $r > 0$, $\tau_r(x,y) < \infty$. Defina $a_n = be^{-n}$ e $f : (0,\infty) \to [1,\infty)$ dada por $f(r) = \tau_r(x,y)$. Assim:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não crescente de termos positivos que converge para 0.

2. $\frac{\log(a_n)}{\log(a_{n+1})} = \frac{\log(be^{-n})}{\log(be^{-n-1})} = \frac{\log(b)-n}{\log(b)-n-1} = \frac{1-\frac{\log(b)}{n}}{1+\frac{1}{n}-\frac{\log(b)}{n}} \to 1$ (para $n \to \infty$).

3. f é monótona não crescente de fato (ver Observação 195).

Assim, do Lema 199, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)} = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)}.$$

Sendo que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{a_n}(x,y))}{-\log(a_n)} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{be^{-n}}(x,y))}{-\log(be^{-n})} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{be^{-n}}(x,y))}{-\log(b)+n}.\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log(b)+n}{n} = 1,$$

tem-se

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{be^{-n}}(x,y))}{-\log(b)+n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left[\left(\frac{-\log(b)+n}{n}\right)\left(\frac{\log(\tau_{be^{-n}}(x,y))}{-\log(b)+n}\right)\right] \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{be^{-n}}(x,y))}{n}.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\log(f(r))}{-\log(r)} = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_r(x,y))}{-\log(r)} = \overline{R}(x,y).$$

Isso então prova (2). A prova de (1) é inteiramente análoga.

■

3.1.2 Dimensão

Definição 201. Seja X um espaço métrico com uma medida boreliana μ. A **dimensão pontual superior** de μ em $x \in X$, denotada por $\overline{d}_\mu(x)$, é difinida como

$$\overline{d}_\mu(x) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\log(\mu(B(x,r)))}{\log(r)}.$$

De modo similar, define-se a **dimensão pontual inferior** de μ em $x \in X$, denotada por $\underline{d}_\mu(x)$, como

$$\underline{d}_\mu(x) = \liminf_{r\to 0^+} \frac{\log(\mu(B(x,r)))}{\log(r)}.$$

Observação 202. No caso em que $X = \mathbb{R}^n$ e μ é a medida de Lebesgue, tem-se que $\mu(B(x,r)) = C_n r^n$ onde $C_n > 0$ é um constante que depende de n apenas. E logo

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\log(\mu(B(x,r)))}{\log r} = \lim_{r\to 0^+} \frac{n\log(r) + \log(C_n)}{\log r} = n$$

Assim, pode-se pensar que a noção de dimensão definida acima captura a potência à qual deve-se elevar o raio para que se obtenha o volume da bola deste raio, a menos de um certo termo de ordem menor (do que o log) como uma constante por exemplo.

Observação 203. A ideia da dimensão ser pontual está claro da definição. A dimensão pontual é um número que depende do $x \in X$ e leva em consideração bolas centradas em x de raio $r > 0$ cada vez menores, tomando o limite $r \to 0^+$. Para a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$, vimos que este limite sempre existe e independe do x, mas a definição de dimensão pontual deixa livre a possibilidade deste limite ser de natureza diferente dependendo do ponto que se considera. Um exemplo trivial da dependência da dimensão no ponto que se escolhe é o caso da medida atômica δ_p centrada em $p \in X$, sendo esta medida definida como $\delta_p(A) = 1$ se $p \in A$ e $\delta_p(A) = 0$ se $p \notin A$, $A \subset X$ um boreliano. Aqui, a dimensão pontual em todo ponto é $+\infty$, exceto em p, que é 0.

Assim como há um método sequêncial para a caracterização das taxas de recorrência como consequência do Lema 199, também há um resultado inteiramente análogo para dimensões pontuais.

Proposição 204. Sejam (X,d) um espaço métrico e μ uma media boreliana sobre X. Então, para todo $b > 0$:

1. $\underline{d}_\mu(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{-\log(\mu(B(x,be^{-n})))}{n}$
2. $\overline{d}_\mu(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{-\log(\mu(B(x,be^{-n})))}{n}$

Prova. A ideia para provar tanto (1) quanto (2) é usar o Lema 199. Dividimos a prova em casos. Os que o lema se aplica, o usamos. Nos casos em que o lema não se aplica, a igualdade ocorre de modo trivial. Vamos provar (1). A prova de (2) se dá de modo parecido e não será feita aqui.

Se há $r_0 > 0$ tal que $\mu(B(x, r_0)) = 0$, então, da definição de $\underline{d}_\mu$ e da expressão para o limite inferior do enunciado de (1), a igualdade segue trivialmente pois $\frac{-\log(\mu(B(x,e^{-n})))}{n} = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > \frac{1}{r_0}$ e $\frac{\log(\mu(B(y,r)))}{\log(r)} = \infty$ para todo $r \in (0, \min\{1, r_0\})$ (lembrando que, neste trabalho, estamos tomando $\log(0) = -\infty$).

Se não há tal r_0, ponha $a_n = be^{-n}$ e $f : (0, \infty) \to [1, \infty)$ dada por $f(r) = \max\left\{1, \frac{1}{\mu(B(x,r))}\right\}$. Assim:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não crescente de reais positivos que converge para 0.

2. $\frac{\log(a_n)}{\log(a_{n+1})} = \frac{\log(be^{-n})}{\log(be^{-n-1})} = \frac{\log(b)-n}{\log(b)-n-1} = \frac{1-\frac{\log(b)}{n}}{1+\frac{1}{n}-\frac{\log(b)}{n}} \to 1$ (para $n \to \infty$).

3. Dados $r, s \in (0, \infty)$ com $r < s$, tem-se $\mu(B(x, r)) \leq \mu(B(x, s))$ e logo $f(r) \geq f(s)$. Daí f é monótona não crescente.

Se há $r_1 > 0$ tal que $\mu(B(x, r_1)) \leq 1$, então o Lema 199 nos dá (1). Note que, neste caso, para $r \in (0, r_1)$ e para $n > \frac{1}{r_1}$:

$$\frac{\log(f(r))}{-\log(r)} = \frac{\log\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right)}{-\log(r)} = \frac{-\log(\mu(B(x,r)))}{-\log(r)} = \frac{\log(\mu(B(x,r)))}{\log(r)}$$

$$\frac{\log(f(a_n))}{-\log(a_n)} = \frac{\log\left(\frac{1}{\mu(B(x,e^{-n}))}\right)}{-\log(e^{-n})} = \frac{-\log(\mu(B(x,e^{-n}))}{n}$$

Se não há tal r_1, então para todo $r \in (0, \infty)$, $\mu(B(x, r)) \geq 1$, o que implica que ambos os limites inferiores são de fato limites e vão para zero. De novo, segue (1).

A prova de (2) é inteiramente análoga.

■

3.2 Desigualdade de Barreira-Saussol

A seguinte desigualdade (Proposição 205) foi provada no artigo [1] e também no livro [2]. Esta desigualdade exemplifica uma forma como recorrência e dimensão pontual são conceitos relacionados. A presente seção é dedicada a dar uma prova detalhada do referido resultado.

Proposição 205. (Desiguladade de Barreira-Saussol) Seja $m \in \mathbb{N}$ e $X \subset \mathbb{R}^m$. Seja μ uma medida boreliana finita sobre X e $f : X \to X$ uma função mensurável μ-invariante. Então, para μ-quase todo $x \in X$:

$$\underline{R}(x) \leq \underline{d}_\mu(x) \text{ e } \overline{R}(x) \leq \overline{d}_\mu(x).$$

A prova desta proposição é longa e depende de vários passos. A prova de fato da desigualdade de Barreira-Saussol vem no final desta seção.

Proposição 206. Seja (X, d) um espaço métrico separável e seja $f : X \to X$ Borel mensurável. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que a função que leva $x \in X$ em $\mathrm{d}(f^k(x), x)$ é Borel mensurável e, também, para todo $r > 0$, a função que leva $x \in X$ em $\tau_r(x)$ é Borel mensurável.

Prova. O espaço produto $X \times X = X^2$ tem sua σ-álgebra de Borel gerada por $\{A \times B : A, B$ borelianos de $X\}$. Temos $D : X \to X^2$, dada por $D(x) = (x, x)$, mensurável pois dados $A, B \subset X$ borelianos, tem-se $D^{-1}(A \times B) = A \cap B$ é um boreliano de X. Dado $k \in \mathbb{N}$, defina $F_k : X^2 \to X^2$ como $F_k(a, b) = (f^k(a), b)$. Dados $A, B \subset X$ borelianos, temos $F_k^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \times B$ é um dos conjuntos que geram a σ-álgebra de Borel de X^2. Sendo F_k Borel mensurável e d contínua, segue-se que $d \circ F_k$ é Borel mensurável. Seja agora $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$\tau_r^{-1}(\{n\}) = (d \circ F_n \circ D)^{-1}([0, r)) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (d \circ F_i \circ D)^{-1}([r, \infty)) \right)$$

e assim $\tau_r^{-1}(\{n\})$ é boreliano de X. Além disso:

$$\tau_r^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{i=1}^{+\infty} (d \circ F_i \circ D)^{-1}([r, \infty))$$

donde $\tau_r^{-1}(\{+\infty\})$ também é um boreliano de X. Dado então $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ Borel mensurável, temos $\tau_r^{-1}(A) = \tau_r^{-1}(A \cap (\mathbb{N} \cup +\infty))$, que é uma união enumerável de conjuntos Borel mensuráveis de X pelo o que foi feito acima.

■

Definição 207. Sejam (X, d) um espaço métrico e $E \subset X$. Dizemos que E é ε-separado, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, se para todo $x, y \in E$, temos $\mathrm{d}(x, y) \geq \varepsilon$.

Proposição 208. Seja $m \in \mathbb{N}$. Existe $M \in \mathbb{N}$, que depende apenas de m, tal que para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $E \subset \mathbb{R}^m$ ε-separado com relação à distância dada pela norma $||.||_2$ em $\mathbb{R}^m$, existem $E_1, ..., E_n$, com $n \leq M$, tais que $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, sendo que cada E_i é 4ε-separado com relação à distância dada pela norma $||.||_2$ no $\mathbb{R}^m$. Além disso, se E é boreliano, então cada E_i também é.

Prova. Temos que, no $\mathbb{R}^m$, as normas $||.||_2$ e $||.||_\infty$ são equivalentes. Existe então $r > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^m$, tem-se $||x||_2 \leq \frac{1}{r} ||x||_\infty$. Segue-se que para todo $\rho > 0$ e para todo $x \in \mathbb{R}^m$: $B_\infty(x, r\rho) \subset B_2(x, \rho)$ (sendo que $B_\infty(x, r\rho)$ denota a bola na norma $||.||_\infty$ de centro x e raio $r\rho$ e $B_2(x, \rho)$ denota a bola na norma $||.||_2$ de centro x e raio ρ). Seja $q \in \mathbb{N}$ com $qr > 4$. Considere $J = ([1, q+1] \cap \mathbb{N})^m$ (i.e. o produto cartesiano de $[1, q+1] \cap \mathbb{N}$ tendo m cópias do conjunto), que é finito. Para cada $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m \in J$, defina $C_\alpha = \prod_{i=1}^{m} [(\alpha_i - 1)r\varepsilon, \alpha_i r\varepsilon]$. Ainda para $\alpha \in J$, ponha $P_\alpha = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}^m} (C_\alpha + (1+q)r\varepsilon a)$.

Ponha $M = \#J \in \mathbb{N}$, $C = \{E \cap P_\alpha : \alpha \in J\}$ e $n = \#C \leq M$. Além disso, liste os elementos de C como $C = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$. Para terminar a prova, resta ver o seguinte:

1. $\bigcup_{\alpha \in J} P_\alpha = R^m$, o que implica em $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$.
2. Para todo $\alpha \in J$, $E \cap P_\alpha$ é 4ε-separado.

Prova de (1).

Dado $x \in \mathbb{R}^m$, ponha $x = (x_i)_{i=1}^m$. Pra $i \in \{1, 2, ..., m\}$, seja $t_i = \lfloor x_i/(r\varepsilon) \rfloor$ e sejam $d_i, g_i \in \mathbb{Z}$ como na divisão euclidiana de t_i por $q+1$, ou seja, $t_i = d_i(q+1) + g_i$ sendo que $g_i \in \{0, 1, ..., q\}$. Ponha $\alpha = (g_i + 1)_{i=1}^m \in J$. Vale que $x \in P_\alpha$. De fato:

$$t_i \leq \frac{x_i}{r\varepsilon} < t_i + 1$$

e logo

$$d_i(q+1)r\varepsilon + g_i r\varepsilon \leq x_i < d_i(q+1)r\varepsilon + (g_i+1)r\varepsilon$$

donde $x \in C_\alpha + (q+1)r\varepsilon a$ para $a = (d_i)_{i=1}^m \in \mathbb{Z}^m$. Isso prova (1).

Prova de (2).

Dados $x, y \in E_\alpha = P_\alpha \cap E$, para algum $\alpha \in J$, com $x \neq y$. Temos $x \in E \cap (C_\alpha + (1+q)\varepsilon r a_x)$, $y \in E \cap (C_\alpha + (1+q)\varepsilon r a_y)$, com $a_x, a_y \in \mathbb{Z}^m$. Primeiro temos que $a_x \neq a_y$ pois caso contrário, $|x_i - y_i| \leq r\varepsilon$, o que dá $x \in B_\infty(y, \varepsilon r)$, o que implica em $x \in B_2(y, \varepsilon)$, o que é um absurdo pois E é ε-separado com a norma $||.||_2$. Assim, pondo $a_x = (a_x^i)_{i=1}^m$ e $a_y = (a_y^i)_{i=1}^m$, existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $a_x^i \neq a_y^i$, então $||x - y||_\infty \geq |x_i - y_i|$, sendo:

$$x_i \in [(\alpha_i - 1)r\varepsilon + a_x^i(1+q)r\varepsilon, \alpha_i r\varepsilon + a_x^i(1+q)r\varepsilon]$$

$$y_i \in [(\alpha_i - 1)r\varepsilon + a_y^i(1+q)r\varepsilon, \alpha_i r\varepsilon + a_y^i(1+q)r\varepsilon]$$

e então

$$(\alpha_i - 1)r\varepsilon + a_x^i(1+q)r\varepsilon \leq x_i \leq \alpha_i r\varepsilon + a_x^i(1+q)r\varepsilon$$

$$(\alpha_i - 1)r\varepsilon + a_y^i(1+q)r\varepsilon \leq y_i \leq \alpha_i r\varepsilon + a_y^i(1+q)r\varepsilon$$

$$-\alpha_i r\varepsilon - a_x^i(1+q)r\varepsilon \leq -x_i \leq -(\alpha_i - 1)r\varepsilon - a_x^i(1+q)r\varepsilon$$

$$-\alpha_i r\varepsilon - a_y^i(1+q)r\varepsilon \leq -y_i \leq -(\alpha_i - 1)r\varepsilon - a_y^i(1+q)r\varepsilon$$

o que dá em

$$r\varepsilon + (a_x^i - a_y^i)(1+q)r\varepsilon \leq x_i - y_i \leq -r\varepsilon + (a_x^i - a_y^i)(1+q)r\varepsilon$$

$$-r\varepsilon + (a_y^i - a_x^i)(1+q)r\varepsilon \leq y_i - x_i \leq r\varepsilon + (a_y^i - a_x^i)(1+q)r\varepsilon$$

Considere a seguinte análise de casos para terminar a prova desta proposição:

1. Se $a_x^i - a_y^i > 0$, então $|x_i - y_i| = x_i - y_i \geq r\varepsilon + (a_x^i - a_y^i)(1+q)r\varepsilon \geq qr\varepsilon$. Sendo $qr > 4$, temos $||x - y||_2 \geq |x_i - y_i| > 4\varepsilon$.

2. Se $a_x^i - a_y^i < 0$, então $a_y^i - a_x^i > 0$ e logo $|x_i - y_i| = y_i - x_i \geq -r\varepsilon + (a_y^i - a_x^i)(1+q)r\varepsilon \geq -r\varepsilon + (1+q)r\varepsilon = qr\varepsilon > 4\varepsilon$. Portanto, $||x - y||_2 \geq |x_i - y_i| > 4\varepsilon$.

Isso termina a prova de (2), e logo da proposição.

■

Proposição 209. Seja (X, d) um espaço métrico. Dado $r > 0$, ponha $A_r = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times B(x, r))$. Então A_r é um aberto de $X^2 = X \times X$.

Prova. Seja $(x, y) \in A_r$. Considere a distância da soma d_1 em X^2 (i.e. $\mathrm{d}_1((x, y), (p, q)) = \mathrm{d}(x, p) + \mathrm{d}(y, q)$). Temos $y \in B(x, r)$ e logo $\mathrm{d}(x, y) = \rho < r$. Ponha $\varepsilon = r - \rho$. Seja $(a, b) \in X^2$ com $\mathrm{d}_1((x, y), (a, b)) < \varepsilon$. Daí $\mathrm{d}(a, b) \leq \mathrm{d}(a, x) + \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, b) = \mathrm{d}_1((a, b), (x, y)) + \mathrm{d}(x, y) < r - \rho + \rho = r$. Segue-se $(a, b) \in A_r$.

■

Proposição 210. Sejam (X, d) um espaço métrico, M a σ-álgebra dos borelianos de X com relação à topologia induzida pela métrica e μ uma medida σ-finita definida em M. Dado $r > 0$, ponha $f_r : X^2 \to \mathbb{R}$, $g_r : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dadas por $f_r(x, y) = \chi_{B(x,r)}(y)$ e $g_r(x) = \mu(B(x, r))$. Então f_r e g_r são mensuráveis.

Prova. Ponha A_r como na Proposição 209. Dado $B \subset \mathbb{R}$ boreliano, temos:

1. $f_r^{-1}(B) = A_r$ se $1 \in B$ e $0 \notin B$.
2. $f_r^{-1}(B) = X^2 \setminus A_r$ se $1 \notin B$ e $0 \in B$.
3. $f_r^{-1}(B) = \emptyset$ se $1 \notin B$ e $0 \notin B$.
4. $f_r^{-1}(B) = X^2$ se $1 \in B$ e $0 \in B$.

De todo modo f_r é mensurável pela arbitrariedade de B. Assim, sendo f_r uma função mensurável não negativa, o Teorema de Tonelli então nos dá que g_r é mensurável pois para todo $x \in X$, tem-se $g_r(x) = \mu(B_r(x)) = \int_{B(x,r)} 1 d\mu = \int \chi_{B(x,r)}(y) d\mu(y) = \int_X f_r(x, y) d\mu(y)$. ■

Proposição 211. Seja (X, d) um espaço métrico separável. Sejam μ uma medida boreliana finita sobre X e $G \subset \text{supp}(\mu)$ com G Borel mensurável. Dado $r > 0$, existe $E \subset G$ enumerável tal que

1. Para todo $x, y \in E$ com $x \neq y$, $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.
2. $G \subset \bigcup_{x \in E} B(x, 2r)$ e, em particular, $\mu\left(G \setminus \bigcup_{x \in E} B(x, 2r)\right) = 0$.

Prova. Ponha $A = \{E \subset G : \text{para todo } x, y \in E \text{ com } x \neq y, \text{ tem-se } B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset\}$. Considere a relação de ordem partical $\subset$ (i.e. "ser subconjunto de") e use o Lema de Zorn sobre $(A, \subset)$ para extrair um elemento $E \in A$ maximal. De fato podemos usar o Lema de Zorn pois $A \neq \emptyset$ (já que $\emptyset \in A$) e dado $S = \{E_i\}_{i \in I}$ (I um conjunto de índices) uma família totalmente ordenada de elementos $E_i \in A$, ponha $\hat{\text{E}} = \bigcup_{i \in I} E_i$. Por S ser totalmente ordenado, é fácil ver que $\hat{\text{E}} \in A$ é cota superior para S de acordo com a relação de ordem parcial $\subset$.

Se há $x \in G$ com $x \notin \bigcup_{y \in E} B(y, 2r)$, então E é subconjunto próprio de $E \cup \{x\} \subset G$. É fácil ver que para todo $y, z \in E \cup \{x\}$ com $y \neq z$, tem-se $B(y, r) \cap B(z, r) = \emptyset$ pois:

1. Se $y, z \in E$, então $B(y, r) \cap B(z, r) = \emptyset$ vale por $E \in A$.
2. Se $y = x$, então vale $z \in E$ e $B(y, r) \cap B(z, r) = \emptyset$ ou se não haveria $t \in B(x, r) \cap B(z, r)$. Daí $\text{d}(x, z) \leq \text{d}(x, t) + \text{d}(t, z) < 2r$, o que contradiz $x \notin B(z, 2r)$.
3. Se $z = x$, faça como acima e obtenha $B(y, r) \cap B(z, r) = \emptyset$.

Assim, a existência de um tal x contradizeria a maximalidade de E. Logo não há um tal x e $G \subset \bigcup_{y \in E} B(y, 2r)$, donde $\mu\left(G \setminus \bigcup_{x \in E} B(x, 2r)\right) = \mu(\emptyset) = 0$. Provamos então os itens (1) e (2) do enunciado. Resta ver que E é enumerável.

Temos $\mu\left(\bigcup_{x\in E} B(x,2r)\right) \leq \mu(X)$. Além disso, sendo $E \subset \text{supp}(\mu)$, vale $\mu(B(x,r)) > 0$ para todo $x \in E$. Considere $E_n = \left\{x \in E : \mu(B(x,r) \geq \frac{1}{n}\right\}$. Afirmamos que cada E_n deve ser finito. De fato, se há $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que E_{n_0} é infinito, ponha $D = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset E_{n_0}$ enumerável infinito. A união $\bigcup_{i=1}^{\infty} B(y_i,r)$ é disjunta (pelo item (1) do enunciado, que já foi provado), o que dá:

$$\mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B(y_i,r)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B(y_i,r)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

e assim $\mu(X) = +\infty$, uma contradição. Sendo assim, cada E_n é de fato finito e $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ é enumerável.

■

Observação 212. Na proposição acima, não concluímos que E é mensurável, porém todo espaço métrico é Hausroff, o que implica que os conjuntos unitários são fechados e assim todo conjunto enumerável é Borel mensurável. Isso implica em E ser mensurável.

Proposição 213. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X \subset \mathbb{R}^m$, μ uma medida finita boreliana sobre X. Existe $Z \subset X$ boreliano de medida total e $N_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel mensurável tal que para todo $x \in Z$, tem-se $N_0(x) \in \mathbb{N}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq N_0(x)$, vale que $\mu(B(x,2^{-n})) \leq n^2\mu(B(x,2^{-n-1}))$.

Prova. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$. Defina $K_n(\delta) = \{x \in \text{supp}(\mu) : \mu(B(x,2^{-n-1})) < \delta\mu(B(x,2^{-n}))\}$. $K_n(\delta) \subset X$ é Borel mensurável pois, sendo g_r, $r > 0$, como na Proposição 210, temos $K_n(\delta) = \text{supp}(\mu) \cap (\delta g_{2^{-n}} - g_{2^{-n-1}})^{-1}(0,+\infty)$.
Afirmação. Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $\delta > 0$, tem-se $\mu(K_n(\delta)) \leq M\delta\mu(X)$.

Prova. Seja M como na Proposição 208. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$. Veremos que $\mu(K_n(\delta)) \leq M\delta\mu(X)$. Ponha $A_n = \{E \subset K_n(\delta) : E \text{ é } 2^{-n-1}\text{-separado}\}$. Pelo lema de Zorn, temos que A_n admite um elemento maximal com a relação de ordem parcial "ser subconjunto de". De fato, $A_n \neq \emptyset$ (pois $\emptyset \in A_n$) e dado $S = \{E_i\}_{i\in I}$ uma família totalmente ordenada de elementos de A_n, ponha $E = \bigcup_{i\in I} E_i$. Temos $E \subset K_n(\delta)$ e, por S ser totalmente ordenado, E é 2^{-n-1}-separado pois se tomarmos $x, y \in E$ com $x \neq y$, há $i_1, i_2 \in I$ com $x \in E_{i_1}, y \in E_{i_2}$ e, sem perda de generalidade, $E_{i_1} \subset E_{i_2}$. Isso nos dá $x, y \in E_{i_2}$ e logo $\text{d}(x,y) \geq 2^{-n-1}$ (pois $E_{i_2} \in A_n$ é 2^{-n-1}-separado). Assim $E \in A_n$ é cota superior para S.

Seja E^n um elemento maximal de A_n. Ponha $E_1^n, E_2^n, ..., E_l^n$ como na Proposição 208, sendo $l \in \mathbb{N}$ com $l \leq M$, $E^n = \bigcup_{i=1}^{l} E_i^n$ sendo cada E_i^n $(4 \times 2^{-n-1})$-separado, e logo 2^{-n+1}-separado. Note que para cada $i \in \{1,2,...,l\}$ e para cada $x, y \in E_i^n$ com $x \neq y$, temos $\text{d}(x,y) \geq 2^{-n+1}$ e logo $B(x,2^{-n}) \cap B(y,2^{-n}) = \emptyset$. De fato, se há $z \in B(x,2^{-n}) \cap B(y,2^{-n})$, então $2^{-n+1} \leq \text{d}(x,y) \leq \text{d}(x,z) + \text{d}(z,y) < 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-n+1}$, uma contradição. Assim, para todo $i \in \{1,2,...,l\}$, a união $\bigcup_{x\in E_i} B(x,2^{-n})$ é disjunta. Temos $K_n(\delta) \subset \bigcup_{x\in E} B(x,2^{-n-1})$, ou se não, haveria $y \in K_n(\delta)$ com $\text{d}(y,x) \geq 2^{-n-1}$ para todo $x \in E^n$ e logo $E \subset E \cup \{y\} \subset K_n(\delta)$ com $E \cup \{y\}$ 2^{-n-1}-separado, o que contraria

a maximalidade de $E^n \in A_n$. Assim:

$$\begin{aligned}
\mu(K_n(\delta)) &\leq \sum_{x\in E} \mu(B(x, 2^{-n-1})) \\
&\leq \sum_{x\in E} \delta\mu(B(x, 2^{-n})) && \text{(por } E \subset K_n(\delta)) \\
&\leq \delta \sum_{i=1}^{l} \sum_{x\in E_i} \mu(B(x, 2^{-n})) \\
&\leq \delta \sum_{i=1}^{l} \mu(X) = l\delta\mu(X) \leq M\delta\mu(X).
\end{aligned}$$

Fim da Afirmação.

A afirmação acima nos dá:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n(n^{-2})) \leq M\mu(X) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Pelo Teorema de Borel-Cantelli (Proposição 84), temos que $\mu(Y) = 0$, sendo $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} K_j(j^{-2})$. Ponha $Z = (X \setminus Y) \cap \operatorname{supp}(\mu) = Y^c \cap \operatorname{supp}(\mu)$. Dado $x \in Z$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \bigcup_{j=n_0}^{\infty} K_j(j^{-2})$ e assim $x \notin K_j(j^{-2})$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq n_0$. Então não vale que $\mu(B(x, 2^{-j-1})) < j^{-2}\mu(B(x, 2^{-j}))$ e logo $j^2\mu(B(x, 2^{-j-1})) \geq \mu(B(x, 2^{-j}))$ para todo $j \geq n_0$ com $j \in \mathbb{N}$ pois se fosse verdade o contrário (i.e. se fosse verdadeiro que $\mu(B(x, 2^{-j-1})) < j^{-2}\mu(B(x, 2^{-j})))$, então $x \in K_j(j^{-2})$ já que $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ (re-veja a definição de $K_j(j^{-2})$ caso necessário).

Defina agora $N_1 : Z \to \mathbb{R}$ dada por $N_1(x) = \min\left\{n \in \mathbb{N} : x \notin \bigcup_{j=n}^{\infty} K_j(j^{-2})\right\}$. Extenda N_1 para $N_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $N_0(x) = N_1(x)$ se $x \in Z$, e por $N_0(x) = +\infty$ se $x \notin Z$. Assim, dado $x \in Z$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq N_0(x) = N_1(x)$, tem-se $n^2\mu(B(x, 2^{-n-1})) \geq \mu(B(x, 2^{-n}))$ como já foi visto acima.

Resta ver que N_0 é Borel mensurável. Dado $x \in Z$ e dado $n \in \mathbb{N}$, considere a seguinte cadeia de equivalências:

$$\begin{aligned}
x \in N_1^{-1}(n) &\iff \forall k < n, x \in \bigcup_{j=k}^{\infty} K_j(j^{-2}) \text{ e } x \notin \bigcup_{j=n}^{\infty} K_j(j^{-2}) \text{ e } x \in Z \\
&\iff x \in Z \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \bigcup_{j=k}^{\infty} K_j(j^{-2})\right) \cap \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j(j^{-2})\right)^c
\end{aligned}$$

Ponha $\Gamma_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \bigcup_{j=k}^{\infty} K_j(j^{-2})\right) \cap \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j(j^{-2})\right)^c$. Daí $N_1^{-1}(n) = Z \cap \Gamma_n$, sendo que Γ_n é Borel mensurável.

Finalmente, dado $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, temos:

1. Caso $\infty \notin A$, $N_0^{-1}(A) = \bigcup_{a\in A\cap\mathbb{N}} N_1^{-1}(a)$ é $\mathbb{R}$-Borel mensurável e logo $\overline{\mathbb{R}}$-Borel mensurável.

2. Caso $\infty \in A$, $N_0^{-1}(A) = \left(\bigcup_{a\in A\cap\mathbb{N}} N_1^{-1}(a)\right) \cup Z^c$ é $\overline{\mathbb{R}}$-Borel mensurável.

Assim N_0 é Borel mensurável.

■

Na verdade, a proposição acima é apenas uma versão "discreta"do resultado de fato utilizado, que é o próximo. A prova desta proposição seguinte usa a proposição anterior.

Proposição 214. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X \subset \mathbb{R}^m$, μ uma medida finita boreliana sobre X. Existe $Z \subset X$ boreliano de medida total tal que para todo $\eta > 1$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta_\varepsilon^\eta : X \to (0, +\infty)$ Borel mensurável tal que para todo $x \in Z$, para todo $r \in (0, \delta(x))$, tem-se $\mu(B(x, \eta r)) \leq r^{-\varepsilon}\mu(B(x, r))$.

Prova.

Seja $Z \subset X$ e N_0 como na Proposição 213. Sejam $\varepsilon > 0$, $\eta > 1$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k \geq \eta$. Temos:

$$\lim_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}, n>k} \frac{(2^\varepsilon)^n}{n^2(n-1)^2...(n-k)^2} = +\infty$$

e logo há $n_1 \in \mathbb{N}$ com $n_1 > k$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_1$, tem-se

$$2^{\varepsilon n} \geq n^2(n-1)^2...(n-k)^2.$$

Ponha $\hat{\delta}_\varepsilon^\eta : Z \to (0, +\infty)$ dada por

$$\hat{\delta}_\varepsilon^\eta(x) = \frac{1}{2^{\max\{n_1, N_0(x)+k\}}}.$$

Extenda $\hat{\delta}_\varepsilon^\eta$ para $\delta_\varepsilon^\eta : X \to (0, +\infty)$ dada por $\delta_\varepsilon^\eta(x) = \hat{\delta}_\varepsilon^\eta(x)$ se $x \in Z$ e dada por $\delta_\varepsilon^\eta(x) = 1$ se $x \notin Z$, ou seja

$$\delta_\varepsilon^\eta(x) = \chi_Z(x)\left((t \mapsto (1/2)^t) \circ (x \mapsto \max\{n_1, N_0(x) + k\}\right)(x) + \chi_{X\setminus Z}(x)$$

e logo δ_ε^η é Borel mensurável.

Vamos ver agora que para todo $x \in Z$ e para todo $r \in (0, \delta_\varepsilon^\eta(x))$, tem-se $\mu(B(x, \eta r)) \leq r^{-\varepsilon}\mu(B(x, r))$.

Sejam $x \in Z$ e $r \in (0, \delta_\varepsilon^\eta(x))$. Ponha $n = \left\lfloor \frac{\log(1/r)}{\log 2} \right\rfloor$. Então:

$$n \leq \frac{\log(1/r)}{\log(2)} < n + 1$$

implica em

$$\frac{1}{2^{n+1}} < r \leq \frac{1}{2^n}.$$

Além disso $r \in (0, \delta_\varepsilon^\eta(x))$, sendo que $\hat{\delta}_\varepsilon^\eta(x) = 2^{-\max\{n_1, N_0(x)+k\}}$, o que implica em

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{\hat{\delta}_\varepsilon^\eta(x)}$$

e assim

$$n = \left\lfloor \frac{\log(1/r)}{\log 2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{\log\left(\frac{1}{\hat{\delta}_\varepsilon^\eta(x)}\right)}{\log 2} \right\rfloor = \max\{n_1, N_0(x) + k\}.$$

Também temos que $2^{-n} \geq r$, o que também nos dá $r^{-\varepsilon} \geq (2^n)^\varepsilon$. Com isso, $(2^\varepsilon)^n \geq n^2(n-1)^2...(n-k)^2$ e, sendo $n \geq N_0(x)+k$, temos $n, n-1, ..., n-k \geq N_0(x)$. Aplicando agora a consequência da Proposição 213, temos:

$$\begin{aligned}
\mu(B(x,\eta r)) &\leq \mu(B(x,2^k r)) && \text{(por } \eta \leq 2^k\text{)}\\
&\leq \mu(B(x,2^{k-n})) && \text{(por } 2^{-n} \geq r\text{)}\\
&\leq (n-k)^2\mu(B(x,2^{k-n-1})) && \text{(Proposição 213)}\\
&\leq (n-k)^2(n-k+1)^2\mu(B(x,2^{k-n-2})) && \text{(Proposição 213)}\\
&\leq ...\\
&\leq (n-k)^2(n-k+1)^2...n^2\mu(B(x,2^{-n-1})) && \text{(Proposição 213)}\\
&\leq (2^\varepsilon)^n\mu(B(x,2^{-n-1})) && \text{(por } (2^\varepsilon)^n \geq n^2(n-1)^2...(n-k)^2\text{)}\\
&\leq r^{-\varepsilon}\mu(B(x,2^{-n-1})) && \text{(por } r^{-\varepsilon} \geq (2^n)^\varepsilon\text{)}\\
&\leq r^{-\varepsilon}\mu(B(x,r)) && \text{(por } r > 2^{-n-1}\text{)}
\end{aligned}$$

■

Prova da Desigualdade de Barreira-Saussol

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X \subset \mathbb{R}^m$, μ uma medida boreliana finita sobre X, $f : X \to X$ mensurável μ-invariante. Vamos então ver que existe $J \subset X$ mensurável de medida total tal que para todo $x \in J$, vale $\underline{R}(x) \leq \underline{d}_\mu(x)$ e $\overline{R}(x) \leq \overline{d}_\mu(x)$.

Observação 215. Vale lembrar que estamos considerando o espaço métrico $X \subset \mathbb{R}^m$ com a distância euclidiana vinda do $\mathbb{R}^m$. Este é um espaço métrico separável. As bolas tomadas nesta demonstração são do espaço métrico X, assim $B(a,b) = \{c \in X : \mathrm{d}(a,c) < b\}$ $a \in X$ e $b > 0$, sendo d a distância euclidiana.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Sejam $r, \lambda > 0$ quaisquer. Seja $x \in \mathrm{supp}(\mu)$. Defina:

$$A^\lambda_{r,x} = \{y \in B(x,4r) : \tau_{4r}(y,x) \geq \lambda^{-1}\mu(B(x,4r))^{-1}\}$$

sendo $\tau_{4r}(y,x) = \inf\{k \in \mathbb{N} : \mathrm{d}(f^k(y),x) < 4r\}$, ou seja, $\tau_{4r}(y,x) = \rho_{B(x,4r)}(y)$ (ρ como no Lema de Kač, i.e. a Proposição 191). Então

$$A^\lambda_{r,x} = B(x,4r) \cap \rho^{-1}_{B(x,4r)}([\lambda^{-1}\mu(B(x,4r))^{-1}, +\infty]).$$

Como $\mu(B(x,4r)) > 0$ (por $x \in \mathrm{supp}(\mu)$), o Lema de Kač nos dá $\rho_{B(x,4r)}$ mensurável e assim $A^\lambda_{r,x}$ é um boreliano de X.

Afirmação 1. Para quaisquer $r' > 0$ e $y \in X$ com $\mathrm{d}(x,y) < 2r'$, tem-se $\tau_{8r'}(y) \leq \tau_{4r'}(y,x) \leq \tau_{2r'}(y)$.

Prova. Se há $k \in \mathbb{N}$ com $\mathrm{d}(f^k(y),y) < 2r'$, então

$$\mathrm{d}(f^k(y),x) \leq \mathrm{d}(f^k(y),y) + \mathrm{d}(y,x) \leq 2r' + 2r' = 4r'.$$

e assim $\tau_{4r'}(y,x) \leq k$. Pela arbitrariedade de k acima, $\tau_{4r'}(y,x) \leq \tau_{2r'}(y)$. Se há $k \in \mathbb{N}$ com $\mathrm{d}(f^k(y),x) \leq 4r'$, então

$$\mathrm{d}(f^k(y),y) \leq \mathrm{d}(f^k(y),x) + \mathrm{d}(y,x) < 4r' + 2r' < 8r'.$$

Logo $\tau_{8r'}(y) \leq \tau_{4r'}(y,x)$.
Fim da Afirmação 1.

O Lema de Kač dá que $\rho_{B(x,4r)}\chi_{B(x,4r)} \in L^1(X)$. A desigualdade de Chebyshev (Proposição 87) nos dá:

$$\mu(A_{r,x}) = \mu\left(|\rho_{B(x,4r)}\chi_{B(x,4r)}| \geq \lambda^{-1}\mu(B(x,4r))^{-1}\right) \leq \frac{\int_{B(x,4r)} |\rho_{B(x,4r)}(y)|d\mu(y)}{\lambda^{-1}\mu(B(x,4r))^{-1}}.$$

Note que $|\rho_{B(x,4r)}\chi_{B(x,4r)}| = \rho_{B(x,4r)}\chi_{B(x,4r)}$ e assim

$$\mu(A^{\lambda}_{r,x}) \leq \lambda\mu(B(x,4r)) \int_{B(x,4r)} \tau_{4r}(y,x)d\mu(y).$$

Ainda pelo o Lema de Kač, temos $\int_{B(x,4r)} \tau_{4r}(y,x)d\mu(y) \leq \mu(X)$. Então:

$$\begin{aligned}
\lambda\mu(B(x,4r))\mu(X) &\geq \mu(A_{r,x}) \\
&= \mu\left(\{y \in B(x,4r) : \tau_{4r}(y,x)\mu(B(x,4r)) \geq \lambda^{-1}\}\right) \\
&\geq \mu\left(\{y \in B(x,2r) : \tau_{4r}(y,x)\mu(B(x,4r)) \geq \lambda^{-1}\}\right) \qquad (*_1)
\end{aligned}$$

Além disso, se $y \in X$ é tal que $\mathrm{d}(x,y) < 2r$, a afirmação 1 acima nos dá $\tau_{4r}(y,x) \geq \tau_{8r}(y)$ e, assim,

$$\tau_{4r}(y,x)\mu(B(x,4r)) \geq \tau_{8r}(y)\mu(B(y,2r)) \qquad (*_2)$$

Ponha $\eta = 4$ e aplique a Proposição 214. Assim, existe $Z \subset X$ Borel mensurável com $\mu(Z^c) = 0$ e existe $\delta^{\eta}_{\epsilon} : X \to (0,+\infty)$ Borel mensurável de modo que para todo $x \in Z$ e para todo $r \in (0, \delta^{\eta}_{\varepsilon}(x))$, tem-se

$$\mu(B(x,\eta r)) \leq r^{-\varepsilon}\mu(B(x,r)).$$

Defina $G^{\varepsilon}_n = \{x \in Z : \delta^{\eta}_{\varepsilon}(x) > \frac{1}{n}\}$, que é Borel mensurável. Como, $\delta^{\eta}_{\varepsilon}(X) \subset (0,+\infty)$, tem-se $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} G^{\varepsilon}_n$. Além disso, $G^{\varepsilon}_i \subset G^{\varepsilon}_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e, assim, $\mu(Z) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G^{\varepsilon}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(G^{\varepsilon}_n)$. Existe então $\hat{n}_{\varepsilon}$ tal que $\mu(G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}}) \in (\mu(Z) - \varepsilon, \mu(Z) + \varepsilon)$, ou seja, $\mu(G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}}) > \mu(X) - \varepsilon$.

Coloque $\hat{\delta}_{\varepsilon} = 1/\hat{n}_{\varepsilon}$ e $G_{\varepsilon} = G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}} \cap \mathrm{supp}(\mu)$. Como X é um espaço métrico separável, tem-se $\mu(\mathrm{supp}(\mu)) = \mu(X)$ (Proposição 86). Então:

$$\begin{aligned}
\mu(G^c_{\varepsilon}) &= \mu((G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}} \cap \mathrm{supp}(\mu))^c) \\
&= \mu((G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}})^c \cup \mathrm{supp}(\mu)^c) \\
&\leq \mu((G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}})^c) + \mu(supp(\mu)^c) \\
&= \mu((G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}})^c)
\end{aligned}$$

e, sendo $G_{\varepsilon} \subset G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}}$, tem-se $(G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}})^c \subset (G_{\varepsilon})^c$ e logo $\mu((G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}})^c) \leq \mu((G_{\varepsilon})^c)$. Assim $\mu(G_{\varepsilon}) = \mu(G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}})$. Temos então que:

1. $G_{\varepsilon} \subset \mathrm{supp}(\mu) \cap Z$,
2. $\mu(G_{\varepsilon}) = \mu(G^{\varepsilon}_{\hat{n}_{\varepsilon}}) > \mu(X) - \varepsilon$ e

3. $\forall x \in G_\varepsilon$, tem-se que $\delta_\varepsilon^\eta(x) > \hat{\delta}_\varepsilon$, sendo que $\hat{\delta}_\varepsilon = 1/\hat{n}_\varepsilon$ independe de x (lembre-se que a escolha de $\hat{n}_\varepsilon$ está na verdade relacionada com a convergência $\lim_{n\to\infty} \mu(G_n^\varepsilon) = \mu(Z)$ e, de fato, independe de x).

O que foi feito até então serve para qualquer $r, \lambda > 0$. Vamos daqui pra frente restringir a escolha destes valores. Tome $r \in (0, \hat{\delta}_\varepsilon)$ e $\lambda = r^{2\varepsilon}$. Pela Proposição 211, existe $E_\varepsilon \subset G_\varepsilon$ enumerável tal que:

1. $\forall x, y \in E_\varepsilon$ com $x \neq y$, tem-se $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$ e
2. $G_\varepsilon \subset \bigcup_{x\in E_\varepsilon} B(x, 2r)$ e, em particular, $\mu\left(G_\varepsilon \setminus \bigcup_{x\in E_\varepsilon} B(x,2r)\right) = 0$.

Defina $D_\varepsilon(r) = \mu(\{y \in G_\varepsilon : \tau_{8r}(y)\mu(B(y,2r)) \geq r^{-2\varepsilon}\})$. Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
D_\varepsilon(r) &\leq \sum_{x\in E_\varepsilon} \mu(\{y \in B(x,2r) : \tau_{8r}(y)\mu(B(y,2r)) \geq r^{-2\varepsilon}\}) \\
&\leq r^{2\varepsilon}\mu(X) \sum_{x\in E_\varepsilon} \mu(B(x,4r)) && \text{(por } (*_1), (*_2)) \\
&\leq \mu(X) r^{2r} \sum_{x\in E_\varepsilon} r^{-\varepsilon}\mu(B(x,r)) && \text{(por } r \in (0,\hat{\delta}_\varepsilon); \forall x \in G_\varepsilon, \\
& && \delta_\varepsilon^\eta(x) > \hat{\delta}_\varepsilon; E_\varepsilon \subset G_\varepsilon \subset Z; \\
& && \eta = 4) \\
&= \mu(X) r^\varepsilon \sum_{x\in E_\varepsilon} \mu(B(x,r)) \\
&= \mu(X) r^\varepsilon \mu\left(\biguplus_{x\in E_\varepsilon} B(x,r)\right) \\
&\leq \mu(X)^2 r^\varepsilon
\end{aligned}$$

Então

$$\sum_{n\in\mathbb{N}, n > -\log(\hat{\delta}_\varepsilon)} D_\varepsilon(e^{-n}) = \sum_{n=\lfloor \log(\hat{n}_\varepsilon)\rfloor+1}^{\infty} D_\varepsilon(e^{-n}) \leq \sum_{n=\lfloor \log(\hat{n}_\varepsilon)\rfloor+1}^{\infty} e^{-n\varepsilon}\mu(X)^2 < +\infty$$

e, pelo Lema de Borel-Cantelli (Proposição 84), temos $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} F_\varepsilon(e^{-n})\right) = 0$, sendo $F_\varepsilon(r)$ definido como $\{y \in G_\varepsilon : \tau_{8r}\mu(B(y,2x)) \geq r^{-2\varepsilon}\}$, ou seja, $F_\varepsilon(r)$ é o conjunto usado na definição de $D_\varepsilon(r)$, sendo $D_\varepsilon(r) = \mu(F_\varepsilon(r))$. Logo $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} F_\varepsilon(e^{-n})\right) = 0$.

Ponha $Z_\varepsilon = G_\varepsilon \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} F_\varepsilon(e^{-n})\right)^c$. De $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} F_\varepsilon(e^{-n})\right) = 0$, temos $\mu(Z_\varepsilon) = \mu(G_\varepsilon) > \mu(X) - \varepsilon$. Além disso, para todo $x \in Z_\varepsilon$, temos que existe $k_0 = k_0(x)$ tal que $x \notin \bigcup_{n=k_0}^{\infty} F_\varepsilon(e^{-n})$, ou seja, para todo $n \geq k_0$, temos $x \notin F_\varepsilon(e^{-n})$ e, sendo também $x \in G_\varepsilon$, tem-se

$$\tau_{8e^{-n}}(x)\mu(B(x, 2e^{-n})) < e^{2n\varepsilon}$$

e logo

$$\frac{\log(\tau_{8e^{-n}}(x))}{n} < \frac{\log(\mu(B(x,2e^{-n}))}{-n} + 2\varepsilon$$

Com isso, pelas Proposições 204 e 200, temos que para μ-quase todo $x \in Z_\varepsilon$, temos: $\underline{R}(x) \leq 2\varepsilon + \underline{d}_\mu(x)$ e $\overline{R}(x) \leq 2\varepsilon + \overline{d}_\mu(x)$.

Resta agora extender do que foi feito acima a desigualdade para μ-quase todo $x \in X$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, ponha $\varepsilon_i = 1/i$. Obtemos então $Z_{1/i} \subset X$ Borel mensurável com $\mu(Z_{1/i}) \geq \mu(X) - 1/i$, sendo que para todo $x \in Z_{1/i}$, tem-se $\overline{R}(x) \leq \frac{2}{i} + \overline{d}_\mu(x)$ e $\underline{R}(x) \leq \frac{2}{i} + \underline{d}_\mu(x)$. Ponha $J = \limsup_{i \to +\infty} Z_{1/i} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} Z_{1/i}$ é Borel mensurável. Vamos ver que $\mu(X) = \mu(J)$ e que para todo $x \in J$, tem-se $\overline{R}(x) \leq \overline{d}_\mu(x)$ e $\underline{R}(x) \leq \underline{d}_\mu(x)$.

De fato, dado $x \in J$, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $x \in \bigcup_{i=2k}^{\infty} Z_{1/i}$ e assim existe $i_0 \geq 2k$ tal que $x \in Z_{1/i_0}$. Logo: $\overline{R}(x) \leq \frac{2}{i_0} + \overline{d}_\mu(x) \leq 1/k + \overline{d}_\mu(x)$ e $\underline{R}(x) \leq \frac{2}{i_0} + \underline{d}_\mu(x) \leq 1/k + \underline{d}_\mu(x)$. Sendo $k \in \mathbb{N}$ arbitrário: $\overline{R}(x) \leq \overline{d}_\mu(x)$ e $\underline{R}(x) \leq \underline{d}_\mu(x)$. Finalmente:

$$\mu(J) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} Z_{1/i}\right) = \lim_{k \to \infty} \mu\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} Z_{1/i}\right)$$

Sendo que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mu\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} Z_{1/i}\right) \geq \mu(X) - 1/k$. Daí:

$$\mu(X) \geq \mu(J) = \lim_{k \to \infty} \mu(X) - 1/k \geq \mu(X).$$

Portanto, $\mu(X) = \mu(J)$ e isso termina a prova da desigualdade de Barreira-Saussol.

3.3 Desigualdade de Galatolo

A seguinte desigualdade (Proposição 216) foi provada por Stefano Galatolo em [11]. Assim como a desigualdade de Barreira-Saussol, a desigualdade de Galatolo relaciona recorrência e dimensão pontual. É um outro exemplo de como as duas noções estáo relacionadas. A desigualdade dada por ela "é no sentido contrário" da dada pela desigualdade de Barreira-Saussol e, além disso, se aplica em situações mais gerais. Esta seção se dedica a dar uma prova detalhada do resultado.

Proposição 216. (Desigualdade de Galatolo) Seja (X, ρ) um espaço métrico, μ uma medida boreliana sobre X e $f : X \to X$ uma função mensurável μ-invariante. Então, dado $y \in X$, para μ-quase todo $x \in X$, $\underline{R}(x, y) \geq \underline{d}_\mu(y)$ e $\overline{R}(x, y) \geq \overline{d}_\mu(y)$.

Antes de dar uma prova desta desigualdade, precisaremos do seguinte lema, que é enunciado e provado em [4].

Lema 217. Seja (X, ρ) um espaço métrico, $f : X \to X$ Borel mensurável, μ uma medida boreliana sobre X f-invariante e $y \in X$. Suponha que $0 < \underline{d}_\mu(y)$. Então, para todo $\alpha > \underline{d}_\mu(y)^{-1}$, vale que para μ-quase todo $x \in X$:

$$\liminf_{n \to \infty, n \in \mathbb{N}} n^\alpha \rho(y, f^n(x)) = \infty.$$

Prova. Seja $y \in X$ e suponha que $\underline{d}_\mu(y) > 0$. Seja $\alpha > \underline{d}_\mu(y)^{-1}$. Escolha $d \in \mathbb{R}$ com $d^{-1} \in (\underline{d}_\mu(y)^{-1}, \alpha)$ e assim: $0 < \frac{1}{\alpha} < d < \underline{d}_\mu(y)$. Como

$$\underline{d}_\mu(y) = \liminf_{r \to 0^+} \frac{\log(\mu(B(y, r)))}{\log(r)} > d$$

existe $\overline{r} \in (0,1)$ tal que $\forall r \in (0,\overline{r})$:

$$\begin{aligned} &\frac{\log(\mu(B(y,r))}{\log(r)} > d \\ \Longrightarrow\ &\log(\mu(B(y,r)) < \log(r^d) \\ \Longrightarrow\ &\mu(B(y,r)) < r^d \end{aligned}$$

Para cada $k, n \in \mathbb{N}$, defina $I_n^k = f^{-n}(B(y, kn^{-\alpha}))$. Fixe $k \in \mathbb{N}$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$, tem-se $kn^{-\alpha} < \overline{r}$. Assim, $\mu(B(y, kn^{-\alpha})) < k^d n^{-d\alpha}$. Note que $\alpha > \frac{1}{d}$ dá $\alpha d > 1$ e então $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{-\alpha d}$ converge. Pelo teste da comparação, temos então que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(I_n^k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B(y, kn^{-\alpha}))$ converge. Pelo Teorema de Borel-Cantelli, $\mu\left(\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n^k\right) = 0$. Assim, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(B(y, km^{-\alpha}))\right) = 0$$

Seja agora $x \in X$ tal que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} n^\alpha \rho(y, f^n(x)) < \infty$. Existe então $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} n^\alpha \rho(y, f^n(x)) < k_0$. Existem então infinitos índices n_j ($j \in \mathbb{N}$) com $n_j \to \infty$ (para $j \to \infty$) e com $n_j^\alpha \rho(y, f^{n_j}(x)) < k_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí $\rho(y, f^{n_j}(x)) < k_0 n_j^{-\alpha}$ e logo $x \in f^{-n_j}(B(y, k_0 n_j^{-\alpha}))$. Assim, $\forall a \in \mathbb{N}$,

$$x \in \bigcup_{m=a}^{\infty} f^{-m}(B(y, k_0 m^{-\alpha})),$$

o que dá

$$x \in \bigcap_{a=1}^{\infty} \bigcup_{m=a}^{\infty} f^{-m}(B(y, k_0 m^{-\alpha})).$$

Ponha

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{a=1}^{\infty} \bigcup_{m=a}^{\infty} f^{-m}(B(y, km^{-\alpha}))\right).$$

Temos então $x \in I$. Sendo que $\mu(I) = 0$ pois cada $\bigcap\limits_{a=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=a}^{\infty} f^{-m}(B(y, km^{-\alpha}))$ tem medida nula.

Portanto, mostramos que $\forall x \in I^c$, tem-se

$$\liminf_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}} n^\alpha \rho(y, f^n(x)) = \infty.$$

■

Observação 218. O Lema 217 acima nos dá um certo "limitante" para um certo tipo de recorrência. Dado $\alpha > 0$, $y, x \in X$ de modo que valha

$$\liminf_{n\to\infty} n^\alpha \rho(y, f^n(x)) = \infty$$

temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural n tal que $n > n_0$, tem-se $\rho(y, f^n(x)) > \frac{1}{n^\alpha}$. E assim, mesmo que possa ocorrer

$$\liminf_{n\to\infty} \rho(y, f^n(x)) = 0,$$

esta proximidade entre y e a órbita positiva de x por f, pontualmente, é limitada de modo a ter que superar, no n-ésimo passo, $\frac{1}{n^\alpha}$ para todo n suficientemente grande.

Prova da Desigualdade de Galatolo

Sejam (X, ρ) um espaço métrico, $f : X \to X$ Borel mensurável, μ uma medida boreliana sobre X f-invariante e $y \in X$. Queremos ver que para quase todo $x \in X$, tem-se: $\underline{R}(x, y) \geq \underline{d}_\mu(y)$ e $\overline{R}(x, y) \geq \overline{d}_\mu(y)$. Defina $N_y = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-i}(\{y\}) = \{x \in X : y \in \mathrm{orb}_+(x)\}$. O teorema é consequência direta dos três seguintes fatos. Daremos uma prova dos três fatos abaixo e depois, em um parágrafo (o último desta seção) conclui-se a prova da desigualdade de Galatolo.

1. Se $\underline{d}_\mu(y) > 0$, então existe $Z \subset X$ mensurável de medida total tal que para todo $x \in Z \cap N_y^c$, vale que $\underline{R}(x, y) \geq \underline{d}_\mu(y)$.

2. Se $\underline{d}_\mu(y) > 0$, então $\mu(N_y) = 0$.

3. Se $\overline{d}_\mu(y) > 0$, existe $\hat{A} \subset X$ mensurável tal que $\mu(\hat{A}^c) = 0$ e, para todo $x \in \hat{A}$, tem-se $\overline{R}(x, y) \geq \overline{d}_\mu(y)$.

Prova de (1)

Seja $y \in X$ e suponha que $\underline{d}_\mu(y) > 0$. Inicialmente, considere $x \in X$ e $\alpha > 0$ arbitrários. Assim, a sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dada por $a_n = n^{-\alpha}$, satisfaz ser estritamente decrescente, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $\frac{\log(a_n)}{\log(a_{n+1})} = \frac{\log(n)}{\log(n+1)} \to 1$ (para $n \to \infty$). Podemos assim aplicar o Lema 199 sobre $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $f : (0, \infty) \to [1, \infty)$ dada por $f(r) = \tau_r(x, y)$. Com isso, obtemos

$$\liminf_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}} \frac{\log(\tau_{n^{-\alpha}}(x, y))}{-\log(n^{-\alpha})} = \liminf_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_r(x, y))}{-\log(r)} = \underline{R}(x, y).$$

Ponha agora $a = \frac{1}{\underline{d}_\mu(y)}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\alpha_n = \frac{1}{n} + a > a$. Aplicando o Lema 217 acima, tem-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $Z_n \subset X$ mensurável de medida total com

$$\forall x \in Z_n, \liminf_{k\in\mathbb{N}, k\to\infty} k^{\alpha_n} \rho(y, f^k(x)) = \infty$$

Defina $Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$. Temos Z mensurável de medida total. Além disso, temos

$$\forall x \in Z, \forall n \in \mathbb{N} \liminf_{k\in\mathbb{N}, k\to\infty} k^{\alpha_n} \rho(y, f^k(x)) = \infty$$

Seja então $x \in Z \cap N_y^c$. Seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, existe $k_0^n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$ com $k \geq k_0^n$, $k^{\alpha_n} \rho(y, f^k(x)) \geq 1$ e logo $\rho(y, f^k(x)) \geq k^{-\alpha_n}$. Afirmamos que existe $K_n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$ com $k \geq K_n$, tem-se $\tau_{k^{-\alpha_n}}(x, y) \geq k$. De fato, como $x \in N_y^c$, pondo $\sigma_n = \min_{i=1,2,\ldots,k_0^n} \rho(y, f^i(x))$, temos $\sigma_n > 0$. Ponha $K_n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n > k_0^n$ e ${K_n}^{-\alpha_n} < \sigma_n$. Seja $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq K_n$. Vamos ver que $\tau_{k^{-\alpha_n}}(x, y) \geq k$. Considere $i \in \mathbb{N}$. Temos:

i. Se $i \in \{1, 2, \ldots, k_0^n\}$, temos $\rho(y, f^i(x)) \geq \sigma_n > {K_n}^{-\alpha_n} \geq k^{-\alpha_n}$. Daí, $f^i(x) \notin B(y, k^{-\alpha_n})$. Então $\tau_{k^{-\alpha_n}}(x, y) > k_0^n$.

ii. Se $i \in \{k_0^n, k_0^n + 1, \ldots, k - 1\}$, temos $\rho(y, f^i(x)) \geq i^{-\alpha_n} > k^{-\alpha_n}$ (pois $k > i$) e logo $f^i(x) \notin B(y, k^{-\alpha_n})$. Então $\tau_{k^{-\alpha_n}}(x, y) \geq k$.

Assim:

$$\underline{R}(x,y) = \liminf_{j\in\mathbb{N}, j\to\infty} \frac{\log(\tau_{j^{-\alpha_n}}(x,y))}{-\log(j^{-\alpha_n})} \geq \liminf_{j\in\mathbb{N}, j\to\infty} \frac{\log(j)}{-\log(j^{-\alpha_n})} = \frac{1}{\alpha_n}.$$

Sendo $n \in \mathbb{N}$ qualquer: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{R}(x,y) \geq \frac{1}{\alpha_n}$. Além disso, $\lim_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} \alpha_n = a = \frac{1}{\underline{d}_\mu(y)}$. Segue então que $\underline{R}(x,y) \geq \underline{d}_\mu(y)$.

Isso termina a prova do primeiro fato: tomamos $y \in X$ qualquer e mostramos que se $\underline{d}_\mu(y) > 0$, existe $Z \subset X$ mensurável de medida total tal que $\forall x \in Z \cap N_y^c$, tem-se $\underline{R}(x,y) \geq \underline{d}_\mu(y)$.

Prova de (2) e (3).

Vamos agora provar os dois últimos fatos juntamente. Temos que $\forall x \in N_y$, $\underline{R}(x,y) = \overline{R}(x,y) = 0$. De fato, seja $x \in N_y$. Existe então $i \in \mathbb{N}$ tal que $f^i(x) = y$. Logo $\tau_r(x,y) \in \{1,2,...,i\}$ qualquer que seja $r > 0$. Assim $\log(\tau_r(x,y)) \in [0, \log(i)]$, o que dá que:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\log(\tau_r(x,y))}{-\log(r)} = 0.$$

Observe que é consequência imediata de qualquer uma das hipóteses de qualquer um dos dois últimos fatos que $\overline{d}_\mu(y) > 0$. Assim, para cada $d' \in (0, \overline{d}_\mu(y))$, defina

$$A(d',y) = \{x \in X : \overline{R}(x,y) < d'\}.$$

Pelo que foi visto logo acima $N_y \subset A(d',y)$ para todo $d' \in (0, \overline{d}_\mu(y))$. Com isso, os dois últimos fatos decorrem quase que diretamente da seguinte afirmação.

Afirmação. $A(d',y)$ é mensurável e $\mu(A(d',y)) = 0$.

Prova. Primeiro, lembre-se do seguinte (Proposição 200 para $b = 1$):

$$\overline{R}(x,y) = \limsup_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}} \frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x,y))}{n}$$

Ponha $\gamma_n(x) = \frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x,y))}{n}$ e $F(x) = \overline{R}(x,y) = \limsup_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}} \gamma_n(x)$. Sendo $x \mapsto \tau_{e^{-n}}(x,y)$ mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$ e para qualquer que seja o $y \in X$, temos γ_n mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim F é mensurável. Como $A(d',y) = F^{-1}([0,d'))$, segue que $A(d',y)$ é mensurável. Vamos agora ver que $\mu(A(d',y)) = 0$. Seja $d'' \in (d', \overline{d}_\mu(y))$. Pela Proposição 204, temos:

$$\overline{d}_\mu(y) = \limsup_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} \frac{\log(\mu(B(y,e^{-n})))}{-n} > d''$$

Logo, existe uma sequência $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ e com:

$$\frac{\log(\mu(B(y,e^{-n_k})))}{-n_k} > d'',$$

o que implica em $\mu(B(y,e^{-n_k})) < e^{-n_k d''}$ qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, defina $C_m = C_m(d',y) = \{x \in A(d',y) : \forall n \in \mathbb{N} \text{ com } n \geq m, \tau_{e^{-n}}(x,y) < e^{d'n}\}$. Vamos ver que as seguintes afirmações sobre C_m são verdadeiras.

i. C_m é mensurável para cada $m \in \mathbb{N}$.

ii. $C_m \subset C_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

iii. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = A(d',y)$.

De fato, da definição de C_m, é fácil ver que

$$C_m = A(d', y) \cap \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} \sigma_n^{-1}((-\infty, 0)) \right)$$

sendo $\sigma_n(x) = \tau_{e^{-n}}(x, y) - e^{d'n}$. Isso prova (i) e (ii).

Por definição $C_m \subset A(d', y)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Seja agora $x \in A(d', y)$. Vamos ver que existe m_0 tal que $x \in C_{m_0}$. Sendo $x \in A(d', y)$, temos $\overline{R}(x, y) < d'$ e logo

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}, n \to \infty} \frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x, y))}{n} < d'$$

Assim, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq m_0$:

$$\frac{\log(\tau_{e^{-m}}(x, y))}{m} < d'$$

e, assim, $\tau_{e^{-m}}(x, y) < e^{md'}$ donde $x \in C_{m_0} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Isso termina a prova de (iii).

De (i), (ii) e (iii), tem-se $\mu(A(d', y)) = \lim_{m \to \infty} \mu(C_m)$. Se mostrarmos que $\liminf_{m \to \infty} \mu(C_m) = 0$, teremos que $\mu(A(d', y)) = 0$. Lembrando que acima concluímos que existe uma sequência $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\lim_{k \to \infty} n_k = \infty$ e com $\mu(B(y, e^{-n_k})) < e^{-n_k d''}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado $x \in C_{n_k}$, para algum $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, tem-se que $\forall m \in \mathbb{N}$ com $m \geq n_k$, vale $\tau_{e^{-m}}(x, y) < e^{md'}$ e, em particular, também vale que $\tau_{e^{-n_k}}(x, y) < e^{n_k d'}$. Assim, existe $j \in \mathbb{N} \cap [1, e^{n_k d'}]$ tal que $f^j(x) \in B(y, e^{-nk})$, ou seja, $x \in f^{-j}(B(y, e^{-n_k}))$.

Assim

$$C_{n_k} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N} \cap [1, e^{d' n_k}]} f^{-j}(B(y, e^{-n_k})$$

e logo

$$\begin{aligned}
\mu(C_{n_k}) &\leq \sum_{j \in \mathbb{N} \cap [1, e^{d' n_k}]} \mu(f^{-j}(B(y, e^{-n_k})) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N} \cap [1, e^{d' n_k}]} \mu(B(y, e^{-n_k}) \\
&\leq \sum_{j \in \mathbb{N} \cap [1, e^{d' n_k}]} e^{-n_k d''} \\
&= \#(\mathbb{N} \cap [1, e^{d' n_k}]) e^{-n_k d''} \\
&= \left\lfloor e^{d' n_k} \right\rfloor e^{-n_k d''} \leq e^{d' n_k} e^{-n_k d''} = e^{(d' - d'') n_k}
\end{aligned}$$

Perceba que $d' - d'' < 0$ e daí $e^{d' - d''} \in (0, 1)$. Assim, $\lim_{k \to \infty} e^{(d' - d'') n_k} = 0$, o que dá $\lim_{k \to \infty} \mu(C_{n_k}) = 0$. Logo $\liminf_{m \to \infty} \mu(C_m) = 0$ e então $\mu(A(d', y)) = 0$.

(Fim da prova da afirmação.)

Como já mencionamos antes, $N_y \subset A(d', y)$ qualquer que seja $d' \in (0, \overline{d}_\mu(y))$. Aqui concluímos o fato (2) pois se $\underline{d}_\mu(y) > 0$, temos, em particular, que $\overline{d}_\mu(y) > 0$, e assim $\mu\left(A\left(\frac{\overline{d}_\mu(y)}{2}, y\right)\right) = 0$ com $N_y \subset A\left(\frac{\overline{d}_\mu(y)}{2}, y\right)$, o que implica em $\mu(N_y) = 0$. O fato (3) também decorre imediatamente da afirmação acima. Suponha $\overline{d}_\mu(y) > 0$ e defina $\hat{A} = \{x \in X : \overline{R}(x, y) < \overline{d}_\mu(y))\}$. Temos

$$\hat{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{n}{n+1} \overline{d}_\mu(y), y\right)$$

e logo $\hat{A}$ é mensurável com medida nula. Além disso, para todo $x \in \hat{A}^c$, tem-se $\overline{R}(x,y) \geq \overline{d}_\mu(y)$.

Fim da prova de (1), (2) e (3).

Com os três fatos provados, a prova do teorema é uma pequena análise de casos. Seja $y \in X$. Se $\underline{d}_\mu(y) = 0$, então $\forall x \in X$, $\underline{R}(x,y) \geq 0 = \underline{d}_\mu(y)$. Caso $\underline{d}_\mu(y) > 0$, então existe $Z \subset X$ mensurável de medida total tal que $\forall x \in Z \cap N_y^c$, $\underline{R}(x,y) \geq \underline{d}_\mu(y)$. Além disso, $\underline{d}_\mu(y) > 0$ dá $\mu(N_y) = 0$. Assim $Z \cap N_y^c$ tem medida total. De todo modo, vale que para μ-quase todo $x \in X$, tem-se $\underline{R}(x,y) \geq \underline{d}_\mu(y)$. Se $\overline{d}_\mu(y) = 0$, então $\forall x \in X$, $\overline{R}(x,y) \geq 0 = \overline{d}_\mu(y)$. Caso $\overline{d}_\mu(y) > 0$, então existe $\hat{A} \subset X$ mensurável de medida total tal que $\forall x \in \hat{A}$, tem-se $\overline{R}(x,y) \geq \overline{d}_\mu(y)$. De todo modo, vale que para quase todo $x \in X$, tem-se $\overline{R}(x,y) \geq \overline{d}_\mu(y)$. Isso termina a prova da desigualdade de Galatolo.

■

3.4 Recorrência e Dimensão no Círculo

Nesta seção veremos uma realização concreta das noções de dimensão pontual no círculo e de recorrência de acordo com a dinâmica de rotações irracionais. Daqui pra frente, convencionaremos que α é um número irracional com expansão em frações contínuas tendo quocientes inteiros $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$, convergentes $\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ já na forma simplificada. Além disso, D_k denota sempre a k-ésima diferença $\alpha q_k - p_k$, para $k \in \mathbb{N}$. μ denota sempre a medida de Lebesgue na reta e μ^1 a medida de Lebesgue no círculo (ver as Definições 63 e 155). Quando usarmos a função d, estamos nos referindo à distância euclidiana usual de $\mathbb{R}$. Definimos nas preliminares o que entendemos pelo tipo de α (ver Definição 105). Nesta seção $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sempre denotará o tipo de α. Finalmente, denotaremos $\tau_{e^{-n}}(x)$ aqui nesta seção por $R_n(x)$.

Observação 219. Como feito na seção sobre Frações Contínuas no capítulo das preliminares, dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $||x||_{\mathbb{Z}}$ como $\mathrm{d}(x,\mathbb{Z}) = \inf_{z\in\mathbb{Z}} |x-z|$.

Proposição 220. Para todo $x \in S^1$, $\underline{d}_\mu(x) = \overline{d}_\mu(x) = 1$.

Prova. De fato, se $x \neq \pi(0)$, seja $a \in (0,1)$ tal que $x = \pi(a)$. Para todo $r > 0$ suficientemente pequeno, temos $(a-r, a+r) \subset (0,1)$ e $\pi((a-r,a+r)) = B(x,r)$. Assim,

$$\mu^1(B(x,r)) = \mu(\pi^{-1}(B(x,r)) \cap [0,1)) = \mu((a-r,a+r)) = 2r.$$

Temos $\lim \frac{\log(2r)}{\log(r)} = 1$ pois, para todo $r > 0$ suficientemente pequeno.

$$\frac{\log(2r)}{\log(r)} = \frac{\log(2)+\log(r)}{\log(r)} = 1 + \frac{\log(2)}{\log(r)}.$$

Assim, $\underline{d}_\mu(x) = \overline{d}_\mu(x) = 1$.

Se $x = \pi(0)$, temos, similarmente que, para todo $r > 0$ suficientemente pequeno, $(-r,r) \subset [-1/2, 1/2)$ e $\pi((-r,r)) = B(x,r)$. Pela Proposição 163, temos

$$\mu^1(B(x,r)) = \mu(\pi^{-1}(B(x,r)) \cap [-1/2,1/2)) = \mu((a-r,a+r)) = 2r.$$

Como antes, $\underline{d}_\mu(x) = \overline{d}_\mu(x) = 1$.

■

O objetivo desta seção é provar a proposição que segue. A prova apresentada aqui é devido aos matemáticos Alexander Arbieto, Jairo Bochi, Artur Ávila e Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira. Além disso, este resultado já foi previamente enunciado e provado por Kim em [14] e por Kim e Seo em [16].

Proposição 221. Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Suponha que α é do tipo $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Assim, com relação às taxas de recorrência associadas à Rot_α, tem-se que para todo $x \in S^1$ e para μ^1-quase todo $y \in S^1$:

$$\frac{1}{\beta} = \underline{R}(x) \leq \overline{R}(x) = 1 = \underline{R}(x,y) \leq \overline{R}(x,y) = \beta.$$

Essa proposição tem o seguinte corolário, que é por causa da Proposição 109.

Corolário 222. Para μ-quase todo $\alpha \in \mathbb{R}$, com relação às taxas de recorrência associadas à rotação Rot_α, tem-se para todo $x \in S^1$ e para μ^1-quase todo $y \in S^1$, $1 = R(x) = R(x,y)$.

Observação 223. Pela definição do tempo de primeiro retorno $R_n(x) = \min\{j \in \mathbb{N} : \mathrm{d}_\mathbb{Z}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), x) < e^{-n}\}$. Dado $j \in \mathbb{N}$, temos $\mathrm{Rot}_\alpha^j(x) = \pi(a + j\alpha)$, sendo $x = \pi(a)$, e assim $\mathrm{d}_\mathbb{Z}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), x) = \mathrm{d}_\mathbb{Z}(a+j\alpha-a, \mathbb{Z}) = ||j\alpha||_\mathbb{Z}$. Por isso, $R_n(x) = \min\{j \in \mathbb{N} : ||j\alpha||_\mathbb{Z} < e^{-n}\}$ para todo $x \in S^1$. Assim, dados $x_1, x_2 \in S^1$, temos $R_n(x_1) = R_n(x_2)$. Daqui pra frente, então, usaremos a notação R_n e não $R_n(x)$ já que este valor independe do $x \in S^1$ escolhido.

A demonstração da proposição principal desta seção (i.e. a Proposição 221) se dá em vários passos. Primeiro provaremos que $\frac{1}{\beta} = \underline{R}(x) \leq \overline{R}(x) = 1$ para todo $x \in S^1$. Depois mostraremos que para todo $x \in S^1$, para μ^1-quase todo $y \in S^1$, vale $1 = \underline{R}(x,y) \leq \overline{R}(x,y) = \beta$.

Lema 224. Dado $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq -\log(||q_1\alpha||_\mathbb{Z})$, então existe um único $i \in \mathbb{N}$ tal que $||q_i\alpha||_\mathbb{Z} < e^{-n} \leq ||q_{i-1}\alpha||_\mathbb{Z}$ e $R_n = q_i$.

Prova. Seja $n \in \mathbb{N}$. Ponha $\hat{R}_n = \{j \in \mathbb{N} : ||j\alpha||_\mathbb{Z} < e^{-n}\}$. Temos $R_n = \min \hat{R}_n$. Suponha que $n \geq -\log(||q_1\alpha||_\mathbb{Z})$. Em particular, $n > -\log(||\alpha||_\mathbb{Z})$. Sendo $\{||q_i\alpha||_\mathbb{Z}\}_{i\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente e convergindo para 0, existe um único i tal que:

$$||q_i\alpha||_\mathbb{Z} < e^{-n} \leq ||q_{i-1}\alpha||_\mathbb{Z}.$$

Sendo $n \geq -\log(||q_1\alpha||_\mathbb{Z})$, temos $e^{-n} \leq ||q_1\alpha||_\mathbb{Z}$, e assim $i \geq 2$. Dado $j \in \{1, 2, ..., q_i - 1\}$, temos $||j\alpha||_\mathbb{Z} \geq ||q_{i-1}\alpha||_\mathbb{Z} \geq e^{-n}$ (ver Proposição 104). Isso implica em $j \notin \hat{R}_n$ e logo $R_n \geq q_i$. Sendo $||q_i\alpha||_\mathbb{Z} < e^{-n}$, temos $R_n = q_i$. Dado $i' \in \mathbb{N}$ com $||q_{i'}\alpha||_\mathbb{Z} < e^{-n} \leq ||q_{i'-1}\alpha||_\mathbb{Z}$, então, devemos ter $i' = i$. De fato, se $i' < i$, então

$$||q_{i'}\alpha||_\mathbb{Z} < e^{-n} \leq ||q_{i'-1}\alpha||_\mathbb{Z} \leq ||q_i\alpha||_\mathbb{Z} < e^{-n},$$

uma contradição. De modo análogo, não podemos ter $i' > i$ também. Assim $i' = i$.

■

Proposição 225. $\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} = 1$.

Prova. Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq -\log(||q_1\alpha||_\mathbb{Z})$. Seja $i \in \mathbb{N}$ como no Lema 224 acima. Temos então $R_n = q_i$ e $||q_i\alpha||_\mathbb{Z} < e^{-n} \leq ||q_{i-1}\alpha||_\mathbb{Z}$. Sendo assim (usando a Proposição 100),

$$e^{-n} \leq ||q_{i-1}\alpha||_\mathbb{Z} < \frac{1}{q_i}$$

o que implica em $q_i < e^n$. Daí:

$$\log(R_n) = \log(q_i) < \log(e^n) = n$$

donde

$$\frac{\log(R_n)}{n} \leq 1.$$

Mostramos então que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq -\log(||q_1\alpha||_{\mathbb{Z}})$, tem-se $\frac{\log(R_n)}{n} \leq 1$. Isso implica em

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} \leq 1.$$

Por outro lado, dado $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq 2$, seja $n_i \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$e^{-n_i} < ||q_{i-1}\alpha||_{\mathbb{Z}} \leq e^{-n_i+1}.$$

Temos, usando a Proposição 100,

$$\frac{1}{e^{n_i-1}} \geq ||q_{i-1}\alpha||_{\mathbb{Z}} \geq \frac{1}{q_i + q_{i-1}} > \frac{1}{2q_i} > \frac{1}{eq_i}.$$

Isso implica em $q_i > e^{n_i-2}$. Além disso, para todo $j \in \{1, 2, ..., q_i - 1\}$, $||j\alpha||_{\mathbb{Z}} \geq ||q_{i-1}\alpha||_{\mathbb{Z}} > e^{-n_i}$, donde $R_{n_i} \geq q_i$. Então:

$$R_{n_i} \geq q_i \geq e^{n_i-2}$$

e logo

$$\frac{\log(R_{n_i})}{n_i} \geq 1 - \frac{2}{n_i}$$

Note que $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não descente, pois $\{||q_{i-1}\alpha||_{\mathbb{Z}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência estritamente decrescente, com $\lim_{i\to\infty} n_i = \infty$ e assim $\frac{\log(R_{n_i})}{n_i} \geq 1 - \frac{2}{n_i}$ valer para todo $i \in \mathbb{N}$ implica em

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} \geq 1.$$

■

Corolário 226. $\overline{R}(x) = 1$ para todo $x \in S^1$.

Prova. Usando a Proposição 225 acima também a Proposição 200, temos

$$\overline{R}(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x))}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} = 1.$$

■

Lema 227. Se $\gamma > 0$ satisfaz $\liminf_{n\to\infty} n^\gamma \, ||n\alpha||_{\mathbb{Z}} < \infty$, então

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Prova. Ponha

$$L = \liminf_{n\to\infty} n^{\gamma} \left|\left|n\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}}$$

e suponha $L < \infty$. Existe $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ estritamente crescente tal que $n_j^{\gamma} \left|\left|n_j\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}} \leq L+1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Seja $t > 0$ tal que $L+1 \leq e^t$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, escolha $m_j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$e^{m_j+t} \leq n_j^{\gamma} < e^{m_j+t+1}.$$

Perceba primeiramente que $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não decrescente com $\lim\limits_{j\to\infty} m_j = \infty$. Vamos ver que para todo $j \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade

$$\frac{\log(R_{m_j})}{m_j} \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{\frac{t+1}{\gamma}}{m_j}.$$

Isso então implica na conclusão do lema:

$$\liminf_{n\to n} \frac{\log(R_n)}{n} \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Dado $j \in \mathbb{N}$ qualquer, temos $n_j^{\gamma} \left|\left|n_j\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}} \leq L+1$, o que implica em

$$\left|\left|n_j\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}} \leq \frac{L+1}{n_j^{\gamma}} \leq \frac{L+1}{e^{m_j+t}} \leq \frac{e^t}{e^{m_j+t}} = \frac{1}{e^{m_j}} = e^{-m_j}.$$

Com isso, $R_{m_j} \leq n_j$ (lembrando que $R_k = \min\{p \in \mathbb{N} : \left|\left|p\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}} < e^{-k}\}$). Assim, pela arbitrariedade de $j \in \mathbb{N}$, tem-se que para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$R_{m_j} \leq n_j \leq e^{\frac{m_j+t+1}{\gamma}},$$

o que implica em

$$\frac{\log(R_{m_j})}{m_j} \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{\frac{t+1}{\gamma}}{m_j}.$$

Como observado acima, isso termina a prova deste lema.

■

Proposição 228. $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} = \frac{1}{\beta}$.

Prova. Como $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, vamos considerar aqui os dois seguintes casos: primeiro o que $\beta \in \mathbb{R}$ e, segundo, o que $\beta = \infty$. Suponha então que $\beta \in \mathbb{R}$.

Lembre-se de que, pela Proposição 107, $\beta \geq 1$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\beta - \varepsilon > 0$. Sendo α do tipo β, a Proposição 106 nos dá $\liminf\limits_{n\to\infty} n^{\beta-\varepsilon} \left|\left|n\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}} = 0$. Aplicando então o Lema 227 acima, segue-se que $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} \leq \frac{1}{\beta-\varepsilon}$. Sendo $\varepsilon \in (0,\beta)$ qualquer, tem-se $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} \leq \frac{1}{\beta}$.

Vamos agora ver que $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} \geq \frac{1}{\beta}$. Seja $\varepsilon > 0$. Por α ser do tipo β, a Proposição 106 nos dá $\liminf\limits_{n\to\infty} n^{\beta+\varepsilon} \left|\left|n\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}} > 0$. Existe então $C_\varepsilon > 0$ tal que $j^{\beta+\varepsilon} \left|\left|j\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}} > C_\varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Assim, para cada $i \in \mathbb{N}_0$, temos $q_i^{\beta+\varepsilon} > \frac{C_\varepsilon}{\left|\left|q_i\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}}}$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq -\log(\left|\left|q_1\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}})$ e $i \in \mathbb{N}$ como na conclusão do Lema 224, ou seja, vale $\left|\left|q_i\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}} < e^{-n} \leq \left|\left|q_{i-1}\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}}$ e $R_n = q_i$. Temos:

$$q_i^{\beta+\varepsilon} > \frac{C_\varepsilon}{\left|\left|q_i\alpha\right|\right|_{\mathbb{Z}}} > C_\varepsilon e^n$$

e logo

$$(\beta+\varepsilon)\frac{\log(R_n)}{n} = (\beta+\varepsilon)\frac{\log(q_i)}{n} > \frac{\log(C_\varepsilon)}{n} + 1$$

o que implica em

$$\frac{\log(R_n)}{n} > \frac{\frac{\log(C_\varepsilon)}{n} + 1}{\beta+\varepsilon}$$

donde $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} \geq \frac{1}{\beta+\varepsilon}$. Sendo $\varepsilon \in (0,\beta)$ arbitrário, temos $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} \geq \frac{1}{\beta}$. Fica então tratado o caso em que β é um número real.

No caso em que $\beta = \infty$, a Proposição 106 nos dá que $\liminf_{n\to\infty} n^t \, ||n\alpha||_{\mathbb{Z}} = 0$ para todo $t > 0$. Aplicando o Lema 227 acima, temos $0 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} \leq \frac{1}{t}$. Sendo $t > 0$ qualquer, segue-se $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} = 0 = \frac{1}{\beta}$.

■

Corolário 229. $\underline{R}(x) = \frac{1}{\beta}$ para todo $x \in S^1$.

Prova. Pela Proposição 200 e pela Proposição 228 acima, temos:

$$\underline{R}(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x))}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(R_n)}{n} = \frac{1}{\beta}.$$

■

Observação 230. Corolário 226 e Corolário 229, juntamente, provam então que $\frac{1}{\beta} = \underline{R}(x) \leq \overline{R}(x) = 1$ para todo $x \in S^1$.

Observação 231. Sendo α irracional, sabemos pela Proposição 171, que Rot_α não possui órbitas periódicas. Assim, dado $x \in S^1$ e $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{\mathrm{Rot}_\alpha^k(x) : k \in \{0,1,...,k-1\}\}$ tem k elementos. Uma outra forma de dizer isso é que x, $\mathrm{Rot}_\alpha(x)$, $\mathrm{Rot}_\alpha^2(x)$, ..., $\mathrm{Rot}_\alpha^{k-1}(x)$ são dois-a-dois distintos. Pondo $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ a projeção de $\mathbb{R}$ ao quociente $\mathbb{R}/\sim$, sabemos que π leva $[0,1)$ bijetivamente sobre S^1. Assim, o conjunto $A = \{\pi^{-1}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x)) : j \in \{0,1,...,k-1\}\}$ pode ser ordenado e posto como $A = \{a_0 < a_1 < ... < a_{k-1}\}$. Concluímos que existem $a_0 < a_1 < ... < a_{k-1}$ reais em $[0,1)$ tais que $\pi(A) = \{\mathrm{Rot}_\alpha^j(x)\}_{j=0}^{k-1}$. Se $B \subset [0,1)$ é tal que $\pi(B) = \{\mathrm{Rot}_\alpha^j(x)\}_{j=0}^{k-1}$, então $B = A$ pois π leva $[0,1)$ bijetivamente sobre S^1.

Observação 232. Em [8], desenvolve-se uma série de resultados que serão usados para provar este seguinte lema. A grosso modo, este lema é uma consequência quase que direta da construção feita neste livro. Este desenvolvimento está presente já no capítulo inicial de [8], dentro da seção *The Combinatorial Theory of Poincaré.*

Lema 233. Sejam $x \in S^1$, $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq 3$. Sendo α irracional, sejan $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{q_i-1}$ os q_i números reais em $[0,1)$ tais que $\{\pi(a_j)\}_{j=0}^{q_i-1} = \{Rot_\alpha^j(x)\}_{j=0}^{q_i-1}$. Sobre estes números, as seguintes afirmações são verdadeiras.

1. Para todo $y \in [0,1]$, existe $k \in \{0,1,...,q_i-1\}$ tal que $|a_k - y| \leq \frac{1}{q_i}$.

2. Para todo $j \in \{1,2,...,q_i-1\}$, $\frac{1}{2q_i} \leq a_j - a_{j-1} \leq \frac{2}{q_i}$. Além disso, $a_0 \leq \frac{1}{q_i}$, $a_{q_i-1} \geq 1 - \frac{1}{q_i}$ e $\frac{1}{2q_i} \leq a_0 + 1 - a_{q_i-1} \leq \frac{2}{q_i}$.

Além disso, pondo $D = \{\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^k(x), \mathrm{Rot}_\alpha^l(x)) : k, j \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}, k \neq j\}$, tem-se

$$\min D = \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^{q_{i-1}}(0), 0) = ||q_{i-1}\alpha||_{\mathbb{Z}}.$$

Prova. Defina $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(t) = t + \alpha \mod 1$. Ponha $c = 1 - \alpha$ e denote por $(a,b)^\times$ o intervalo aberto de $\mathbb{R}$ de extremos a e b (i.e. $(a,b)^\times = (a,b)$ se $a \leq b$ e $(a,b)^\times = (b,a)$ se $b < a$). Fixe $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq 3$, $x \in S^1$ e $a \in [0,1)$ tal que $\pi(a) = x$. Usaremos aqui a notação para a expansão de α em frações contínuas introduzida no início desta seção. Defina $J' = (c, f^{q_i}(c))^\times$ e $J'' = (c, f^{q_{i-1}}(c))^\times$. Em [8] é provado que:

1. $J', f(J'), ..., f^{q_{i-1}-1}(J'), J'', f(J''), ..., f^{q_i-1}(J'')$ são intervalos abertos dois-a-dois disjuntos e o fecho da união dos intervalos $J', f(J'), ..., f^{q_{i-1}-1}(J'), J'', f(J''), ..., f^{q_i-1}(J'')$ é o próprio $[0,1]$.

2. O comprimento de $J' = |f^{q_i}(c) - c|$ é igual ao de $f^j(J')$ para todo $j \in \{0, 1, ..., q_{i-1} - 1\}$. Além disso, este comprimento é igual a $|D_i|$. O comprimento de $J'' = |f^{q_{i-1}}(c) - c|$ é igual ao de $f^j(J'')$ para todo $j \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$. Além disso, este comprimento é igual a $|D_{i-1}|$.

3. Em cada intervalo I da forma $f^j(J')$, para $j \in \{0, 1, ..., q_{i-1} - 1\}$, ou da forma $f^j(J'')$, para $j \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$, tem-se $f^j(c)$ como um dos extremos de $\overline{I}$.

Com isso, vamos provar o primeiro item do lema. Os outros seguem essencialmente deste. Primeiramente, observe que como temos finitos intervalos abertos

$$J', f(J'), ..., f^{q_{i-1}-1}(J'), J'', f(J''), ..., f^{q_i-1}(J''),$$

é fácil ver que o fecho da união destes intervalos é igual à união dos fechos dos mesmos. Esta afirmação não tem exatamente a ver com o fato destes conjuntos serem intervalos abertos, mas sim tem a ver com a união ser finita. De fato, tome uma sequência $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos na união dos intervalos convergindo para um certo elemento l do fecho da união dos intervalos. Observe que há um certo intervalo I (dentre os acima) tal que há infinitos índices $n \in \mathbb{N}$ com $b_n \in I$. Assim $l \in \overline{I}$. Isso justifica o fecho da união ser subconjunto da união dos fechos (pela arbitrariedade do l tomado). Que a união dos fechos é subconjunto do fecho da união é trivial pois, é claro o fecho de cada um dos intervalos é subconjunto do fecho da união dos intervalos.

Dado $y \in [0,1)$, ponha $y' = (y + c - a) \mod 1 \in [0,1)$. existe $j \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$ tal que $y' \in \overline{I}$, sendo $I = f^j(J')$ ou $I = f^j(J'')$. Temos $|y' - f^j(c)| \leq |I|$, sendo que $|I|$ denota o comprimento de I. Como $|I| \in \{|D_i|, |D_{i-1}|\}$, temos $|y' - f^j(c)| \leq |D_{i-1}| < \frac{1}{q_i}$ (estamos usando aqui a Proposição 100). Como $f^j(c) = c + j\alpha \mod 1$, segue-se que

$$\begin{aligned} y' - f^j(c) &= ((y + c - a) \mod 1) - ((c + j\alpha) \mod 1) \\ &= (y + c - a - c - j\alpha) \mod 1 \\ &= (y - a - j\alpha) \mod 1 \\ &= (y \mod 1) - ((a + j\alpha) \mod 1) \\ &= y - f^j(a) \end{aligned}$$

e logo $|y' - f^j(c)| = |y - f^j(a)|$. É fácil ver que $\{a_0, a_1, ..., a_{q_i-1}\} = \{f^j(a) : j \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}\}$ pois cada $f^j(a) \in [0,1)$ e $\pi(f^j(a)) = \mathrm{Rot}_\alpha^j(x)$. Isso prova a primeira afirmação para o caso $y \in [0,1)$. No caso $y = 1$, ponha $y_n = 1 - \frac{1}{2n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

existe k_n tal que $|y - a_{k_n}| \leq \frac{1}{q_i}$. Como $\{a_0, a_1, ..., a_{q_i-1}\}$ é finito, certamente há um certo índice k^* tal que é infinito o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : k^* = k_n\}$. Assim $|y_n - a_{k^*}| \leq \frac{1}{q_i}$ para infinitos índices n. Isso implica em $|y - a_{k^*}| \leq \frac{1}{q_i}$. Fica então provado o primeiro item do lema.

O segundo item é uma consequência imediata do primeiro. Há $j \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$ tal que $|0 - a_j| \leq \frac{1}{q_i}$. Sendo $a_0 \leq |0 - a_j|$, temos $a_0 \leq \frac{1}{q_i}$. De modo análogo, há também um certo $j \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$ talque $|1 - a_j| \leq \frac{1}{q_i}$. Sendo $1 - a_{q_i-1} \leq |1 - a_j|$, temos $1 - a_{q_i-1} \leq \frac{1}{q_i}$. Isso implica em $a_0 + 1 - a_{q_i-1} \leq \frac{2}{q_i}$. Seja $j \in \{1, 2, ..., q_i - 1\}$. Caso não valha que $a_j - a_{j-1} \leq 2q_i$, existe então $y \in (a_{j-1}, a_j)$ tal que $|y - a_j|, |y - a_{j-1}| > \frac{1}{q_i}$ e, assim $|y - a_k| > \frac{1}{q_i}$ para todo $k \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$ (tome y como o ponto médio entre a_j e a_{j-1} por exemplo), o que contradiz o primeiro item. Sejam agora $k, j \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$ com $k \neq j$ e suponha que $|a_j - a_k| < \frac{1}{2q_i}$. Sejam $k_1, j_1 \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$ tais que $a_j = f^{j_1}(a)$ e $a_k = f^{k_1}(a)$. Temos, claro, $k_1 \neq j_1$. Assim, usando a Proposição 104 e 100 temos, por $|k_1 - j_1| \in \{1, 2, ..., q_i - 1\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2q_i} &> |f^{k_1}(a) - f^{j_1}(a)| \\
&\geq \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^{k_1}(x), \mathrm{Rot}_\alpha^{j_1}(x)) = \mathrm{d}(|k_1 - j_1|\alpha, \mathbb{Z}) \\
&= |||k_1 - j_1|\alpha||_{\mathbb{Z}} \geq |D_{i-1}| > \frac{1}{q_i + q_{i-1}} > \frac{1}{2q_i},
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo fica provado o item 2 do lema.

Para provar a última conclusão do lema, sejam $k, j \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$. temos

$$\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^k(x), \mathrm{Rot}_\alpha^j(x)) \geq |D_{i-1}| = ||q_{i-1}\alpha||_{\mathbb{Z}}$$

(por uma argumentação feita como acima). Assim, basta ver que o mínimo é atingido de fato para algum par $k, j \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$ com $k \neq j$. De fato, Ponha $k = 0$ e $j = q_{i-1}$. ■

Observação 234. Como parte das hipóteses do Lema 233 acima, pede-se $i \geq 3$, porém este fato não aparece diretamente hora alguma na prova. O que ocorre é que para que consigamos garantir que os conjuntos J' e J'', assim como definidos na demonstração acima, se encaixem nas hipóteses dos resultados em [8], precisamos de $i \geq 3$.

Observação 235. Sejam $x, y \in S^1$, a Proposição 200 nos dá

$$\underline{R}(x, y) = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x, y))}{n}.$$

Lembre-se de que $\tau_{e^{-n}}(x, y) = \min\{j \in \mathbb{N} : \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), y) < e^{-n}\}$. Ponha τ' o tempo de primeiro entrada relacionado à dinâmica de $\mathrm{Rot}_{-\alpha}$. Sendo $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_{-\alpha}^j(y), x) = \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), y)$ por $\mathrm{Rot}_\alpha^{-1} = \mathrm{Rot}_\alpha$ e por Rot_α ser isometria (Proposição 168), temos $\tau_{e^{-n}}(x, y) = \tau'_{e^{-n}}(y, x)$. Assim, pondo $\underline{R}'$ a taxa de recorrência inferior com relação à dinâmica de $\mathrm{Rot}_{-\alpha}$, temos $\underline{R}'(y, x) = \underline{R}(x, y)$. De modo inteiramente análogo, $\overline{R}'(y, x) = \overline{R}(x, y)$ sendo $\overline{R}'$ a taxa de recorrência superior com relação à dinâmica de $\mathrm{Rot}_{-\alpha}$.

Proposição 236. Dado $x \in S^1$, vale que para μ^1-quase todo $y \in S^1$, $\underline{R}(x, y) = 1$.

Prova. Com a discussão feita na Observação 235 acima em mente, seja $x \in S^1$. Usando a Proposição 220 e a Desigualdade de Galatolo (Proposição 216) sobre a dinâmica de $\mathrm{Rot}_{-\alpha}$, obtemos que existe $Z \subset S^1$ mensurável de medida total tal que para todo $y \in Z$, $\underline{R}'(y,x) \geq 1$. Assim para μ^1-quase todo $y \in S^1$ (i.e. paro todo $y \in Z$), tem-se $\underline{R}(x,y) \geq 1$.

Dado $y \in Z$, seja $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq 3$. Aplicando o Lema 233 sobre $\mathrm{Rot}_\alpha(x)$, obtemos que existe $j \in \{1,2,...,q_i\}$ tal que $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x),y) \leq \frac{1}{q_i}$ e então $\tau_{q_i^{-1}}(x,y) \leq q_i$. Existe $n_i \in \mathbb{N}_0$ tal que $e^{n_i} \leq q_i < e^{n_i+1}$, o que implica em $q_i^{-1} \leq e^{-n_1}$ e logo $\tau_{e^{-n_i}}(x,y) \leq e^{n_i+1}$. Assim

$$\frac{\log(\tau_{e^{-n_i}}(x,y))}{n_i} \leq \frac{n_i+1}{n_i}$$

e então

$$1 \leq \underline{R}(x,y) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x,y))}{n} \leq \liminf_{i\to\infty} \frac{\log(\tau_{e^{-n_i}}(x,y))}{n_i} \leq \lim_{i\to\infty} \frac{n_i+1}{n_i} = 1.$$

■

Proposição 237. Dado $x \in S^1$, vale que para μ^1-quase todo $y \in S^1$, tem-se $\overline{R}(x,y) \leq \beta$.

Prova. Se $\beta = \infty$, então para todo $x,y \in S^1$, $\overline{R}(x,y) \leq \beta$. Suponha $\beta \in \mathbb{R}$. Considere $y \in S^1$ fora da órbita semi-positiva de x, ou seja $y \notin \{\mathrm{Rot}_\alpha^j(x) : j \in \mathbb{N}_0\}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, ponha $O_i = \{\mathrm{Rot}_\alpha^j(x) : j \in \{0,1,...,q_i-1\}\}$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{q_i} < e^{-n}$, pois $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência estritamente crescente de naturais, e logo o Lema 233 nos garante que $O_i \cap B(y,e^{-n}) \neq \emptyset$. Neste caso, para todo $i' \geq i$, $O_{i'} \cap B(y,e^{-n}) \neq \emptyset$ pois $O_i \subset O_{i'}$. Assim, se $O_1 \cap B(y,e^{-n}) = \emptyset$, podemos falar do maior inteiro positivo $i = i(n) \in \mathbb{N}$ tal que $O_i \cap B(y,e^{-n}) = \emptyset$. Este inteiro $i(n)$ também depende de x,y e não só de n, mas $x \in S^1$ e y fora da semi-órbita posiiva de x estão fixados e assim usaremos a notação $i(n)$ e não $i(n,x,y)$. No caso em que $O_1 \cap B(y,e^{-n}) \neq \emptyset$, ponha $i(n) = 0$. De todo modo, para todo $j \geq i+1$, temos $O_j \cap B(y,e^{-n}) \neq \emptyset$. Por y não estar na semi-órbita positiva de x, a função $n \in \mathbb{N} \mapsto i(n) \in \mathbb{N}_0$ de acordo com o que foi definido acima é ilimitada monótona não decrescente. Em particular, $\lim_{n\to\infty} i(n) = \infty$.

Considere $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente de modo que $i = i(n) \geq 3$. Vale que $e^{-n} \leq \frac{1}{q_i}$, que é consequência de $O_i \cap B(y,e^{-n}) = \emptyset$. De fato, o Lema 233, nos dá que existe $k \in \{0,1,...,q_i-1\}$ tal que $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^k(x),y) \leq \frac{1}{q_i}$. Se $\frac{1}{q_i} < e^{-n}$, teríamos $\mathrm{Rot}_\alpha^k(x) \in O_i$ e $\mathrm{Rot}_\alpha^k(x) \in B(y,e^{-n})$, ou seja, $O_i \cap B(y,e^{-n}) \neq \emptyset$, uma contradição.

Pela discussão acima, existe $k \in \{0,1,...,q_{i+1}-1\}$ tal que $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^k(x),y) < e^{-n}$ e, assim, $\tau_{e^{-n}}(x,y) < q_{i+1}$. Além disso, $e^{-n} < q_i^{-1}$ implica em $\frac{1}{\log(q_i)} > \frac{1}{n}$. Assim:

$$\frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x,y))}{n} \leq \frac{\log(q_{i+1})}{n} \leq \frac{\log(q_{i+1})}{\log(q_i)}.$$

Lembre-se de que a Proposição 110 nos dá

$$\frac{1}{\beta} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(q_n)}{\log(q_{n+1})}$$

pois β é o tipo de α. Ponha $\gamma = \frac{1}{\beta}$ e seja $\hat{\gamma} \in (0,\gamma)$ arbitrário. Temos $\hat{\gamma} < \gamma$ e logo, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq j_0$, tem-se $\frac{1}{\hat{\gamma}} > \frac{\log(q_{j+1})}{\log(q_j)}$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$, tem-se $i(n) \geq j_0$ e $i(n) \geq 3$, donde

$$\frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x,y))}{n} \leq \frac{\log(q_{i+1})}{\log(q_i)} \leq \frac{1}{\hat{\gamma}}$$

e logo

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x,y))}{n} \leq \frac{1}{\hat{\gamma}}.$$

Sendo $\hat{\gamma} \in (0,\gamma)$ arbitrário, tem-se:

$$\overline{R}(x,y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\tau_{e^{-n}}(x,y))}{n} \leq \frac{1}{\gamma} = \beta.$$

Assim, foi mostrado que $\overline{R}(x,y) \leq \beta$ para todo $x \in S^1$ e para todo $y \in S^1$ fora da órbita semi-positiva de x. Sendo de medida-μ^1 nula a órbita semi-positiva de x por Rot_α, fica provada então a proposição.

■

Proposição 238. Dado $x \in S^1$, vale que para μ^1-quase todo $y \in S^1$, tem-se $\overline{R}(x,y) \geq \beta$.

Prova. Com a discussão feita na Observação 235 em mente, seja $x \in S^1$. Usando a Proposição 220 e a Desigualdade de Galatolo (Proposição 216) sobre a dinâmica de $\mathrm{Rot}_{-\alpha}$, obtemos que existe $Z \subset S^1$ mensurável de medida total tal que $\overline{R}'(y,x) \geq 1$ para todo $y \in Z$, sendo que $\overline{R}'$ denota a taxa de recorrência superior para a dinâmica de $\mathrm{Rot}_{-\alpha}$. Assim paro todo $y \in Z$, tem-se $\overline{R}(x,y) \geq 1$. Esta observação resolve o caso em que $\beta = 1$. Vamos supor de agora em diante que $\beta > 1$.

Ponha $\gamma = \frac{1}{\beta}$ (no caso de $\beta = \infty$, temos $\gamma = 0$). De todo modo, $\gamma \in [0,1)$. Seja $\hat{\gamma} \in (\gamma, 1)$ arbitrário. Seja $\varepsilon > 0$. Do Lema 110, temos

$$\gamma = \frac{1}{\beta} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(q_n)}{\log(q_{n+1})}.$$

Existe então $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que para todo $i \in J$, tem-se:

$$\frac{\log(q_i)}{\log(q_{i+1})} < \hat{\gamma},$$

e assim $q_{i+1} > q_i^{1/\hat{\gamma}}$. Ainda para $i \in J$, defina $\delta_i = \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^{q_i}(x), x)$. Note que $\delta_i = ||\alpha q_i||_{\mathbb{Z}}$. Temos, da Proposição 100, $\delta_i < q_{i+1}^{-1}$ e logo $\delta_i \leq 2q_{i+1}^{-1}$. Assim $\delta_i < 2q_i^{-1/\hat{\gamma}}$.

Dado $j \in \mathbb{N}$ qualquer, temos $j = nq_i + m$ com $n, m \in \mathbb{N}_0$ e $m \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}$. Pondo $O_i = \{\mathrm{Rot}_\alpha^k(x) : k \in \{0, 1, ..., q_i - 1\}\}$, temos $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), O_i) \leq \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^{nq_i+m}, \mathrm{Rot}_\alpha^m(x)) = \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^{nq_i}(\mathrm{Rot}_\alpha^m(x)), \mathrm{Rot}_\alpha^m(x)) = \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^{nq_i}(x), x)$, sendo que a última igualdade vem de ser Rot_α ser uma isometria (Proposição 168). Além disso, pela desigualdade triangular e, de novo, por Rot_α ser isometria, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), O_i) &\leq \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^{nq_i}(x), x) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^{kq_i}(x), \mathrm{Rot}_\alpha^{(k-1)q_i}(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^{(k-1)q_i}(\mathrm{Rot}_\alpha^{q_i}(x)), \mathrm{Rot}_\alpha^{(k-1)q_i}(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^{q_i}(x), x) \\
&= n\delta_i < n2q_i^{-1/\hat{\gamma}} = \frac{j-m}{q_i} 2q_i^{-1/\hat{\gamma}} \leq \frac{2jq_i^{-1/\hat{\gamma}}}{q_i} = \frac{2j}{q_i^{1+(1/\hat{\gamma})}}
\end{aligned}$$

Se, além disso, $j \leq q_i^{(1/\hat{\gamma})-\varepsilon}$, tem-se $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), O_i) \leq 2q_i^{-1-\varepsilon}$. Defina $r_i = 2q_i^{-1-\varepsilon}$. Defina também

$$X_i = \bigcup_{j \in A_i} B(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), r_i),$$

sendo $A_i = \mathbb{N}_0 \cap [0, q_i^{(1/\hat{\gamma})-\varepsilon}]$. Com isso, temos

$$X_i \subset \bigcup_{z \in O_i} B(z, 2r_i).$$

De fato, dado $w \in X_i$, existe $j \in A_i$ tal que $w \in B(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), r_i)$. Sendo $j \leq q_i^{(1/\hat{\gamma})-\varepsilon}$, temos $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), O_i) \leq r_i$. Como O_i é um subconjunto fechado de S^1, existe $z \in O_i$ tal que $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), z) = \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), O_i)$ e, assim, $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(z, w) \leq \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(z, \mathrm{Rot}_\alpha^j(x)) + \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), w) \leq 2r_i$, o que implica em $w \in B(z, 2r_i)$ com $z \in O_i$.

Seja $y \in S^1 \setminus \limsup_{i \in J, i \to \infty} X_i$. Assim, $\{i \in J : y \in X_i\}$ é finito. Existe então $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq i_0$ com $i \in J$, tem-se $y \in X_i^c$. Seja então $i \in J$ com $i \geq i_0$. Para todo $j \in A_i$, temos $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rot}_\alpha^j(y), y) \geq r_i$ por $y \in X_i^c$ e, assim, $\tau_{r_i}(x, y) > q_i^{1/(\hat{\gamma}-\varepsilon)}$. Daí:

$$\frac{\log(\tau_{r_i}(x, y))}{-\log(r_i)} > \frac{\left(\frac{1}{\hat{\gamma}} - \varepsilon\right)\log(q_i)}{(1+\varepsilon)\log(q_i) - \log(2)}.$$

Então, pela arbitrariedade do $i \in J$ com $i \geq i_0$,

$$\limsup_{i \to \infty} \frac{\log(\tau_{r_i}(x, y))}{-\log(r_i)} \geq \frac{\frac{1}{\hat{\gamma}} - \varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Sendo válido para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue-se que $\overline{R}(x, y) \geq \frac{1}{\hat{\gamma}}$. Sendo $\hat{\gamma} \in (\gamma, 1)$, tem-se $\overline{R}(x, y) \geq \frac{1}{\gamma} = \beta$.

Vamos ver agora que $\limsup_{i \in J, i \to \infty} X_i$ tem medida nula. Para tal fim, ponha $J = \{i_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $i_k < i_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. O Lema de Borel-Cantelli, Proposição 84, nos dá que se mostrarmos que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_{i_k}) < \infty$, podemos concluir $\mu\left(\limsup_{k \to \infty} X_{i_k}\right) = 0$. De fato é isso que iremos fazer e assim finalizar a prova.

Temos $X_{i_k} = \bigcup_{j \in A_{i_k}} B(\mathrm{Rot}_\alpha^j(x), r_{i_k})$ com $A_{i_k} = \left\{0, 1, ..., \left\lfloor q_{i_k}^{(1/\hat{\gamma})-\varepsilon} \right\rfloor\right\}$. Assim

$$X_{i_k} \subset \bigcup_{z \in O_{i_k}} B(z, 2r_{i_k})$$

e então $\mu^1(X_{i_k}) \leq 4r_{i_k} \# O_{i_k} = 4r_{i_k} q_{i_k} = 8/q_{i_k}^{\varepsilon}$. Estamos usando acima que $\mu^1(B(z, r)) \leq 2r$ para quaisquer que sejam $z \in S^1$ e $r \geq 0$ (ver Proposição 164). Lembrando que dado $k \in \mathbb{N}$, $i_k \in J$ e logo $q_{i_k+1} > q_{i_k}^{1/\hat{\gamma}}$. Então

$$q_{i_{k+1}} \geq q_{i_k+1} > q_{i_k}^{1/\hat{\gamma}}.$$

Segue-se por um argumento de indução que, para $k \in \mathbb{N}$:

$$q_{i_k} > q_{i_{k-1}}{}^{(1/\hat{\gamma})} > q_{i_{k-2}}{}^{(1/\hat{\gamma})^2} > ... > q_{i_1}{}^{(1/\hat{\gamma})^{k-1}}.$$

Logo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^1(X_{i_k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{q_{i_k}^{\varepsilon}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{q_{i_1}{}^{\varepsilon(1/\hat{\gamma})^{k-1}}} = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_{i_1}^{\varepsilon}}\right)^{\left((1/\hat{\gamma})^{k-1}\right)} < \infty.$$

Assim, pelo lema de Borel-Cantelli, segue-se que $\limsup_{i\in J, i\to\infty} X_i$ tem medida nula.

O conjunto $\limsup_{i\in J, i\to\infty} X_i$ depende tanto de ε quanto de $\hat{\gamma}$. Denote por $Z(\varepsilon, \hat{\gamma})$ tal conjunto. Ponha $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $\hat{\gamma}_n = \gamma + \frac{1-\gamma}{n}$ e

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} Z(\varepsilon_n, \hat{\gamma}_n).$$

Y é de medida μ^1 nula e dado $y \in S^1 \setminus Y$, temos $\overline{R}(x, y) \geq \frac{\frac{1}{\hat{\gamma}_n} - \varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite para $n \to +\infty$, temos $\overline{R}(x, y) \geq \frac{1}{\gamma} = \beta$.

■

Referências Bibliográficas

[1] BARREIRA, Luis; SAUSSOL, Benoît. Hausdorff Dimension of Measures¶ via Poincaré Recurrence. Communications in Mathematical Physics, v. 219, n. 2, p. 443-463, 2001.

[2] BARREIRA, Luis. Dimension and recurrence in hyperbolic dynamics. Basel: Birkhäuser, 2008.

[3] BARTLE, Robert G. The elements of integration and Lebesgue measure. John Wiley & Sons, 2014.

[4] BONANNO, Claudio; GALATOLO, Stefano; ISOLA, Stefano. Recurrence and algorithmic information. Nonlinearity, v. 17, n. 3, p. 1057, 2004.

[5] BOSHERNITZAN, Michael D. Quantitative recurrence results. Inventiones mathematicae, v. 113, n. 1, p. 617-631, 1993.

[6] CASSELS, John William Scott. An introduction to Diophantine approximation. CUP Archive, 1957.

[7] CONWAY, John B. A course in point set topology. Springer, 2014.

[8] DE MELO, Welington; VAN STRIEN, Sebastian. One-dimensional dynamics. Springer Science & Business Media, 2012.

[9] DUMMIT, David Steven; FOOTE, Richard M. Abstract algebra. Hoboken: Wiley, 2004.

[10] FOLLAND, Gerald B. Real analysis: modern techniques and their applications. John Wiley & Sons, 2013.

[11] GALATOLO, Stefano. Dimension via waiting time and recurrence. arXiv preprint math/0309223, 2003.

[12] KATOK, A. B. Modern dynamical systems and applications. Cambridge University Press, 2004.

[13] KHINCHIN, Aleksandr Iakovlevich. Continued fractions. P. Noordhoff, 1963.

[14] KIM, Dong Han. The recurrence time for irrational rotations. Osaka Journal of Mathematics, v. 43, n. 2, p. 351-364, 2006.

[15] KIM, Dong Han. The shrinking target property of irrational rotations. Nonlinearity, v. 20, n. 7, p. 1637, 2007.

[16] KIM, Dong Han; SEO, Byoung Ki. The waiting time for irrational rotations. Nonlinearity, v. 16, n. 5, p. 1861, 2003.

[17] LIMA, Elon L.; MÉTRICOS, Espaços. Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro, 2003.

[18] MUNKRES, James. Topology. Pearson Education, 2014.

[19] OXTOBY, John C. Measure and category: A survey of the analogies between topological and measure spaces. Springer Science & Business Media, 2013.

[20] PARTHASARATHY, Kalyanapuram Rangachari. Introduction to probability and measure. Springer, 2005.

[21] ROBINSON, Clark. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. CRC press, 1998.

[22] ROCKETT, Andrew M.; SZÜSZ, Peter. Continued fractions. World Scientific Publishing Company, 1992.

[23] VIANA, Marcelo; OLIVEIRA, Krerley. Foundations of ergodic theory. Cambridge University Press, 2016.