**JOÃO CARLOS FERNANDES BARREIRA**

# MÚLTIPLAS SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão

**VIÇOSA - MINAS GERAIS**
**2020**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T
B271m
2020

Barreira, João Carlos Fernandes, 1995-
Múltiplas soluções para uma classe de problemas elípticos / João Carlos Fernandes Barreira. – Viçosa, MG, 2020.
90f. ; 29 cm.

Inclui apêndices.
Orientador: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.75-76.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Categoria de Lusternik-Schnirelman. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 514.21

JOÃO CARLOS FERNANDES BARREIRA

# MÚLTIPLAS SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 20 de fevereiro de 2020.

Assentimento:

João Carlos Fernandes Barreira
Autor

Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão
Orientadora

*Dedico este trabalho aos meus pais,*
*Walter e Marisa e a minha avó Nedina.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar saúde, sabedoria, confiança e força para sempre continuar e concluir meus objetivos.

A minha família, por sempre estarem presentes, por me apoirem em todas as fases, por me ajudarem a superar as dificuldades, pelas conversas, pelo carinho e amor de sempre, o meu muito obrigado! Também a minha namorada Yasmin, por estar comigo desde o início, pelo companherismo de sempre, por fazer dos dias difíceis dias mais leves.

A professora Jéssyca pela orientação, paciência, dedicação, pelos ensinamentos que foram de muita importância para minha formação e elaboração deste trabalho, levarei estes comigo. Agradeço também a banca examinadora, por avaliarem e ajudarem no enriquecimento deste trabalho. Obrigado!

Aos professores, funcionários e colegas do DMA-UFV, em especial aos amigos Ray e Maiara, por me ajudarem desde do início e por fazerem o ambiente de estudos um lugar produtivo e descontraído. A UFV, por me propocionar a realização de um sonho.

Aos meus amigos, praticamente irmãos, em que mesmo com a distância não deixaram de me apoiar, de estarem comigo. Que nossas amizades durem pela eternidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

O coração do homem planeja o seu caminho, mas é o Senhor que firma seus passos.

Provérbio 16:9

# Resumo

BARREIRA, João Carlos Fernandes M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2020. **Múltiplas soluções para uma classe de problemas elípticos**. Orientadora: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão.

Nesta dissertação estudamos a existência e a multiplicidade de soluções não triviais para o problema elíptico crítico

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu u^{q-1} + u^{p^*-1}, \ x \in \Omega, \\ u(x) > 0, x \in \Omega, \\ u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_\mu$}$$

em que $\Omega$ é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq p^2$, $2 \leq p < q < p^*$, $p^* = pN/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev, e $\mu$ um parâmetro positivo. Seguindo Azorero & Alonso [13], [14] e Alves & Ding [1], mostraremos a existência de, pelo menos, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais para o problema $(P_\mu)$.

Palavras-chave: Métodos Variacionais. Crescimento Crítico. Categoria de Lusternik-Schnirelman.

# Abstract

BARREIRA, João Carlos Fernandes M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February of 2020. **Multiple solutions for a class of elliptical problems**. Adviser: Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão.

In this dissertation we study the existence and multiplicity of nontrivial solutions for the critical elliptical problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu u^{q-1} + u^{p^*-1}, \ x \in \Omega, \\ u(x) > 0, x \in \Omega, \\ u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_\mu$}$$

where $\Omega$ is a bounded and smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq p^2$, $2 \leq p < q < p^*$, $p^* = pN/(N-p)$ is Sobolev's the critical exponent and $\mu$ a positive parameter. Following Azorero & Alonso [13], [14] and Alves & Ding [1], we show the existence of, at least, $\text{cat}_\Omega(\Omega)$ nontrivial solutions for the problem $(P_\mu)$.

Keywords: Variational Methods. Critical Growth. Lusternik-Schnirelman Category.

# Lista de Símbolos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}^N$ | Espaço euclidiano $N$-dimensional; |
| $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ | Espaço de medidas em $\mathbb{R}^N$; |
| $\Omega$ | Domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^N$; |
| $\overline{\Omega}$ | Fecho de $\Omega$; |
| $\partial\Omega$ | Fronteira do conjunto $\Omega$; |
| $\text{med}(\Omega)$ | Medida do conjunto $\Omega$; |
| $B(x,r)$ | Bola aberta de centro em $x$ e raio $r$; |
| $B_r$ | Bola aberta de centro em 0 e raio $r$; |
| $\text{cat}_X(A)$ | Categoria de $A$ em $X$; |
| $\text{cat}_{X,Y}(A)$ | Categoria de $A$ em $X$ relativa a $Y$; |
| $L^p(\Omega)$ | Funções mensuráveis cuja potência de $p$, $\|.\|^p$, são integráveis no sentido de Lebesgue em $\Omega$; |
| $\|.\|_r$ | Norma no espaço $L^r$; |
| $\|.\|_\infty$ | Norma no espaço $L^\infty$; |
| $W^{1,p}(\Omega)$ | Espaço das funções em $L^p(\Omega)$ com derivadas parcias em $L^p(\Omega)$; |
| $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ | Espaço das funções em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ com suporte compacto; |
| $W_0^{1,p}(\Omega)$ | Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$ ; |
| $\|.\|$ | Norma no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$; |
| $p^* = pN/(N-p)$ | Expoente crítico de Sobolev, $N \geq 3$; |
| $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ | Espaço das funções em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ com derivadas parcias em $L^p(\mathbb{R}^N)$; |
| $\|.\|_*$ | Norma no espaço $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$; |
| $o_n(1)$ | Ordem pequena; |
| $O(\varepsilon)$ | Ordem grande; |
| $X'$ | Dual do espaço $X$; |
| $S = \inf_{\substack{u\in\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)\\ \|u\|_{p^*}=1}} \|\nabla u\|_p^p$ | Constante ótima de Sobolev; |
| $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ | Gradiente de $u$; |
| $\Delta_p u = \text{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$ | Operador $p$-Laplaciano de $u$; |
| $\text{supp}\, u$ | Suporte de $u$; |
| $u^+$, $u^-$ | Parte positiva de $u$, parte negativa de $u$, respectivamente. |

# Sumário

**Introdução** **10**

**1 A constante de Sobolev S** **12**

**2 Existência de solução para** $(P_\mu)$ **22**

2.1 Resultados Importantes . . . . . 22

2.2 Demonstração do Teorema principal . . . . . 36

**3 Categoria de Lusternik-Schnirelman** **37**

**4 Multiplicidade de soluções para** $(P_\mu)$ **45**

4.1 Preliminares . . . . . 45

4.2 Teoremas Minimax . . . . . 55

4.3 Lemas Técnicos . . . . . 61

4.4 Demonstração do Teorema principal . . . . . 70

**Referências Bibliográficas** **75**

**A Espaços de Sobolev** **77**

**B Resultados de teoria da Medida** **81**

**C Resultados utilizados na dissertação** **83**

# Introdução

Nesta dissertação estudamos a existência e a multiplicidade de soluções não triviais para o problema elíptico crítico

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu u^{q-1} + u^{p^*-1}, \ x \in \Omega, \\ u(x) > 0, x \in \Omega, \\ u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_\mu$}$$

em que $\Omega$ é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq p^2$, $2 \leq p < q < p^*$, $p^* = pN/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev, e $\mu$ um parâmetro positivo.

A dificuldade em mostrar a existência de solução não trivial para esse problema crítico deve-se a falta de compacidade da imersão de Sobolev de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$, e com isso, em geral, o funcional energia associado a tal problema elíptico não satisfaz a condição de Palais-Smale (ou condição PS). Além disso, tal espaço, para $p \neq 2$, não possui a norma usual proveniente de um produto interno. Associaremos a multiplicidade de soluções de $(P_\mu)$ à topologia do domínio $\Omega$, mais precisamente, usando a categoria de Lusternik-Schnirelman.

O Capítulo 1 foi dedicado ao estudo da constante de Sobolev

$$S = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ |u|_{p^*}=1}} |\nabla u|_p^p > 0,$$

que será utilizada ao longo dos próximos capítulos da dissertação. Neste, vimos também as consequências de um Lema de Concentração e Compacidade, Lema 1.1, que caracteriza a falta de compacidade da imersão de $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, e a existência de $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u|_{p^*} = 1 \ \text{ e } \ |\nabla u|_p^p = S,$$

ou seja, que a constante de Sobolev é atingida. O Lema 1.2 apresentado nesse capítulo será útil na demonstração de resultados do próximo capítulo.

No Capítulo 2, estudamos a existência de solução para o problema $(P_\mu)$ seguindo [13]

e [14]. Trabalhando com o funcional associado ao problema $(P_\mu)$, dado por

$$I_\mu(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\mu}{q}\int_\Omega (u^+)^q dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega (u^+)^{p^*} dx, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

e usando o Teorema do Passo da Montanha, Teorema 2.3, provamos o resultado principal deste capítulo que segue devido a [13] e é dado da seguinte forma:

**Teorema 0.1.** *Se $\Omega$ é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $p^2 \leq N$ e $p < q < p^*$, então para cada $\mu > 0$ o problema $(P_\mu)$ possui solução não trivial.*

O Capítulo 3 foi voltado para definições e resultados da teoria de categoria, seguindo Lusternik-Schnirelman [19], os quais serão utilizados no capítulo seguinte.

No Capítulo 4, estudamos a multiplicidade de soluções para o problema $(P_\mu)$, com o mesmo funcional $I_\mu$ do Capítulo 2, juntamente com a variedade de Nehari associada a este funcional,

$$\mathcal{N}_\mu = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : I'_\mu(u)u = 0\}.$$

Segundo Alves & Ding [1], relacionamos a quantidade de pontos críticos do funcional $I_\mu$, que são as soluções fracas para o problema $(P_\mu)$, à topologia do domínio $\Omega$, obtendo o resultado principal deste capítulo:

**Teorema 0.2.** *Seja $\Omega$ um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq p^2$ e $2 \leq p < q < p^*$. Então existe $\mu^* > 0$ tal que, para cada $\mu \in (0, \mu^*)$, o problema $(P_\mu)$ possui, pelo menos, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.*

No Apêndice A, descrevemos uma introdução sobre os espaços de Sobolev, apresentando algumas definições e resultados.

O Apêndice B é formado por uma definição e três resultados que foram úteis para o enunciado dos Lemas 1.1 e 1.2.

Finalmente, no Apêndice C, enunciamos algumas definições e importantes resultados que foram utilizados ao longo da dissertação.

# Capítulo 1

# A constante de Sobolev S

Neste capítulo estudaremos a constante de Sobolev $S$, dada por

$$S = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ |u|_{p^*}=1}} |\nabla u|_p^p > 0, \tag{1.1}$$

ou

$$S = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{|\nabla u|_p^p}{|u|_{p^*}^p}, \tag{1.2}$$

em que $N \geq p^2$, $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev e

$$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall i = 1, \ldots, N \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_* = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

De (1.2) obtemos a *desigualdade de Sobolev*

$$|u|_{p^*}^p \leq S^{-1} |\nabla u|_p^p, \ \forall u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, o espaço $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)} = |\nabla u|_{p,\Omega}.$$

Pela desigualdade de Sobolev, $\|.\|_*$ e $\|.\|_{\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)}$ são equivalentes em $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$. Para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ temos a inclusão $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, se $\text{med}(\Omega) < \infty$ então $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$ e o espaço $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ para cada

$q \in [1, p^*]$ e compactamente se $q < p^*$. No caso de $\text{med}(\Omega) < \infty$, $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ para cada $q \in [1, p^*]$ e esta imersão é compacta se $q < p^*$.

Veremos alguns resultados sobre $S$, dentre eles, que existe $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u|_{p^*} = 1 \text{ e } |\nabla u|_p^p = S,$$

ou seja, $S$ é atingido em $\mathbb{R}^N$. Para tal, usaremos alguns resultados de Teoria da Medida (Apêndice B) e seguiremos [4], [17], [18] e [23].

As demonstrações dos próximos dois lemas podem ser encontradas em [17] e [18].

**Lema 1.1** (**Concentração e Compacidade**). *Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \tag{1.3}$$

$$|\nabla(u_n - u)|^p \rightharpoonup \lambda \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \tag{1.4}$$

$$|u_n - u|^{p^*} \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \tag{1.5}$$

$$u_n \to u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{1.6}$$

*Defina*

$$\lambda_\infty = \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |\nabla u_n|^p \, dx,$$

$$\nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |u_n|^{p^*} \, dx.$$

*Então,*

$$\|\nu\|^{p/p^*} \leq S^{-1}\|\lambda\|, \tag{1.7}$$

$$\nu_\infty^{p/p^*} \leq S^{-1}\lambda_\infty, \tag{1.8}$$

$$\limsup_{n\to\infty} |\nabla u_n|_p^p = |\nabla u|_p^p + \|\lambda\| + \lambda_\infty, \tag{1.9}$$

$$\limsup_{n\to\infty} |u_n|_{p^*}^{p^*} = |u|_{p^*}^{p^*} + \|\nu\| + \nu_\infty. \tag{1.10}$$

*Mais ainda, se $u = 0$ e $\|\nu\|^{p/p^*} = S^{-1}\|\lambda\|$, então $\lambda$ e $\nu$ são medidas singulares e estão concentradas em um único ponto.*

**Lema 1.2.** *[14, Lema 2.2] Seja $(u_n)$ uma sequência fracamente convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para $u$, tal que temos as seguintes convergências:*

*(i)* $|\nabla u_n|^p \rightharpoonup \lambda$ *em* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$;

*(ii)* $|u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu$ *em* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$.

*Então para um conjunto de índices $J$, no máximo enumerável, temos*

$$\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j},\ \nu_j > 0,$$

$$\lambda \geq |\nabla u|^p + \sum_{j\in J} \lambda_j \delta_{x_j},\ \lambda_j > 0,$$

$$\nu_j^{p/p^*} \leq \frac{\lambda_j}{S},$$

*em que $x_j \in \overline{\Omega}$, $S$ é a constante de Sobolev e $\delta_{x_j}$ é a massa de Dirac em $x_j$, definida por*

$$\delta_{x_j}(A) = \begin{cases} 0,\ se\ x_j \notin A, \\ 1,\ se\ x_j \in A, \end{cases}$$

*para todo $A$ subconjunto de $\mathbb{R}^N$ mensurável.*

Agora, vamos estabelecer a seguinte notação. Dados $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$, definimos

$$v^{y,\lambda}(x) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} v(\lambda x + y).$$

Note que $v^{y,\lambda}$ satisfaz

$$|\nabla v^{y,\lambda}|_p = |\nabla v|_p \text{ e } |v^{y,\lambda}|_{p^*} = |v|_{p^*}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |\nabla v^{y,\lambda}|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\lambda^{\frac{N-p}{p}} v(\lambda x + y))|^p \, dx = \lambda^{N-p} \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda \nabla v(\lambda x + y)|^p \, dx \\ &= \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(\lambda x + y)|^p \, dx, \end{aligned}$$

usando mudança de variáveis,

$$|\nabla v^{y,\lambda}|_p^p = \lambda^N \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |(\nabla v)(z)|^p \, dz = |\nabla v|_p^p;$$

e

$$\begin{aligned} |v^{y,\lambda}|_{p^*}^{p^*} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda^{\frac{N-p}{p}} v(\lambda x + y)|^{p^*} \, dx = \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} |v(\lambda x + y)|^{p^*} \, dx = \lambda^N \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |v(z)|^{p^*} \, dz \\ &= |v|_{p^*}^{p^*}. \end{aligned}$$

**Teorema 1.3.** *Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência satisfazendo*

$$|u_n|_{p^*} = 1,\ |\nabla u_n|_p^p \to S.$$

*Então existe uma sequência* $(y_n, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ *tal que* $(u_n^{y_n,\lambda_n})$ *admite uma subsequência convergente em* $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. *Em particular, existe um minimizante para* $S$.

*Demonstração.* Defina as funções de concentração de Lévy,

$$Q_n(\lambda) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,\lambda)} |u_n|^{p^*}\, dx,\ \lambda > 0.$$

Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\lambda\to 0^+} Q_n(\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda\to\infty} Q_n(\lambda) = 1.$$

Sendo $Q_n$ contínua, existe $\lambda_n > 0$ tal que $Q_n(\lambda_n) = 1/2$. Mais ainda, existe $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$Q_n(\lambda_n) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,\lambda_n)} |u_n|^{p^*} dx = \int_{B(y_n,\lambda_n)} |u_n|^{p^*} dx = \frac{1}{2},$$

pois

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_{B(y,\lambda_n)} |u_n|^{p^*} dx = 0.$$

Definindo $v_n = u_n^{y_n,\lambda_n}$, temos

$$|v_n|_{p^*} = |u_n^{y_n,\lambda_n}|_{p^*} = |u_n|_{p^*} = 1,\ \|v_n\|_*^p = |\nabla v_n|_p^p = |\nabla u_n^{y_n,\lambda_n}|_p^p = |\nabla u_n|_p^p \to S,$$

e

$$\frac{1}{2} = \int_{B(y_n,\lambda_n)} |u_n|^{p^*} dx = \int_{B(0,1)} |u_n^{y_n,\lambda_n}|^{p^*} dx = \int_{B(0,1)} |v_n|^{p^*} dx = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^{p^*} dx \quad (1.11)$$

Como $(v_n)$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, podemos supor, passando a uma subsequência se necessário, que

$$\begin{gathered} v_n \rightharpoonup v \text{ em } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ |\nabla(v_n - v)|^p \rightharpoonup \eta \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\ |v_n - v|^{p^*} \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\ v_n \to v \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{gathered}$$

Pelo Lema 1.1 temos

$$S = \lim |\nabla v_n|_p^p = \limsup |\nabla v_n|_p^p = |\nabla v|_p^p + \|\eta\| + \eta_\infty \quad (1.12)$$

e

$$1 = \lim |v_n|_{p^*}^{p^*} = \limsup |v_n|_{p^*}^{p^*} = |v|_{p^*}^{p^*} + \|\nu\| + \nu_\infty, \tag{1.13}$$

com

$$\begin{aligned} \eta_\infty &= \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |\nabla v_n|^p dx, \\ \nu_\infty &= \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |v_n|^{p^*} dx. \end{aligned}$$

Logo, de (1.7), (1.8), (1.12) e da desigualdade de Sobolev, obtemos

$$S \geq S[(|v|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*} + \|\nu\|^{p/p^*} + \nu_\infty^{p/p^*}],$$

e portanto, de (1.13), $|v|_{p^*}^{p^*}$, $\|\nu\|$ e $\nu_\infty$ devem ser iguais a 0 ou 1, pois

$$S \geq S[(|v|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*} + \|\nu\|^{p/p^*} + \nu_\infty^{p/p^*}] \Rightarrow 0 \leq (|v|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*} + \|\nu\|^{p/p^*} + \nu_\infty^{p/p^*} \leq 1.$$

Daí, supondo que $0 < |v|_{p^*}^{p^*} < 1$, como $p/p^* < 1$ temos

$$(|v|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*} > |v|_{p^*}^{p^*}.$$

Analogamente, obtemos

$$\|\nu\|^{p/p^*} > \|\nu\| \quad \text{e} \quad \nu_\infty^{p/p^*} > \nu_\infty,$$

e consequentemente,

$$|v|_{p^*}^{p^*} + \|\nu\| + \nu_\infty < (|v|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*} + \|\nu\|^{p/p^*} + \nu_\infty^{p/p^*} \leq 1,$$

o que contradiz (1.13).

Da igualdade (1.11), $\nu_\infty \leq \dfrac{1}{2}$. De fato, pelo Lema de Brezis-Lieb (Lema C.12) temos

$$\int_{B(0,1)} |v|^{p^*} dx + \int_{B(0,1)} |v_n - v|^{p^*} dx = \int_{B(0,1)} |v_n|^{p^*} dx + o_n(1),$$

e definindo $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ da forma

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, x \in B(0,1), \\ 0, x \in B(0,2)^c, \\ \phi(x) \in [0,1], \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

temos

$$\int_{B(0,1)} |v|^{p^*}\phi\,dx + \int_{B(0,1)} |v_n - v|^{p^*}\phi\,dx = \int_{B(0,1)} |v_n|^{p^*}dx + o_n(1),$$

e como

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*}\phi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v|^{p^*}\phi\,dx \geq \int_{B(0,1)} |v|^{p^*}\phi\,dx + \int_{B(0,1)} |v_n - v|^{p^*}\phi\,dx,$$

segue por (1.11),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*}\phi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v|^{p^*}\phi\,dx \geq \int_{B(0,1)} |v_n|^{p^*}dx + o_n(1) = \frac{1}{2} + o_n(1).$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*}\phi\,dx + \langle \nu, \phi\rangle \geq \frac{1}{2}.$$

Como $\|\phi\|_\infty = 1$ e $\langle \nu, \phi\rangle \leq \|\nu\|\|\phi\|$ então $\langle \nu, \phi\rangle \leq \|\nu\|$ e sendo $0 \leq \phi \leq 1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*}\,dx + \|\nu\| \geq \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*}\phi\,dx + \langle \nu, \phi\rangle \geq \frac{1}{2},$$

isto é,

$$|v|_{p^*}^{p^*} + \|\nu\| \geq \frac{1}{2}.$$

Logo, de (1.13)

$$1 = |v|_{p^*}^{p^*} + \|\nu\| + \nu_\infty \geq \frac{1}{2} + \nu_\infty \Rightarrow \nu_\infty \leq \frac{1}{2},$$

donde podemos concluir que $\nu_\infty = 0$. Agora, observe que, se $\|\nu\| = 1$ teríamos $|v|_{p^*}^{p^*} = 0$ implicando em $v = 0$ e, de (1.12),

$$S = \|\eta\| + \eta_\infty \geq \|\eta\| \Rightarrow S^{-1}\|\eta\| \leq 1 = \|\nu\|^{p/p^*}.$$

Assim, $v = 0$ e de (1.7), $\|\nu\|^{p/p^*} = S^{-1}\|\eta\|$ implicando, pelo Lema 1.1, que a medida de $\nu$ está concentrada em um único ponto $z$. Note que, considerando $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1,\ x \in B(z, 1/2), \\ 0,\ x \in B(z,1)^c, \\ \varphi(x) \in [0,1],\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

temos

$$\int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*}\,dx \geq \int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*}\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}\varphi\,dx \to \langle \nu, \varphi\rangle = \|\nu\|\varphi(z) = \|\nu\|. \quad (1.14)$$

Definindo agora $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \ x \in B(z,1), \\ 0, \ x \in B(z,2)^c, \\ \psi(x) \in [0,1], \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

obtemos

$$\int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*} \, dx = \int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*} \psi \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} \psi \, dx \to \langle \nu, \psi \rangle = \|\nu\| \psi(z) = \|\nu\|. \quad (1.15)$$

De (1.14) e (1.15) concluímos que

$$\int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*} dx \to \|\nu\|,$$

donde, por (1.11),

$$\frac{1}{2} = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |v_n|^{p^*} dx \geq \int_{B(z,1)} |v_n|^{p^*} dx \to \|\nu\| = 1,$$

o que é um absurdo. Dessa forma, $\|\nu\| = 0$ e de (1.13) podemos concluir que

$$|v|_{p^*}^{p^*} = 1.$$

Pela desigualdade de Sobolev, $S \leq |\nabla v|_p^p$, e usando a Proposição C.21 temos

$$S = \lim |\nabla v_n|_p^p = \liminf |\nabla v_n|_p^p \geq |\nabla v|_p^p,$$

pois $v_n \rightharpoonup v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$S = \|v\|_*^p = |\nabla v|_p^p = \lim |\nabla v_n|_p^p = \lim \|v_n\|_*^p.$$

Portanto, como $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é uniformemente convexo (Proposição C.15), concluímos, pela Proposição C.18, que $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

**Lema 1.4.** $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subsetneq \mathcal{D}_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

*Demonstração.* Veja [4]. ■

**Proposição 1.5.** *Seja $N \geq p^2$. A função*

$$U(x) = C_N (1 + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-N}{p}} \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad (1.16)$$

*é um minimizante para $S$, isto é, $|U|_{p^*} = 1$ e $|\nabla U|_p^p = S$, em que* $C_N = \left[N\left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p-1}\right]^{(N-p)/p^2}$.

*Demonstração.* Veja [2] e [23]. ∎

**Proposição 1.6.** *Para todo subconjunto aberto $\Omega$ de $\mathbb{R}^N$,*

$$S(\Omega) = \inf_{\substack{u\in\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)\\ |u|_{p^*}=1}} |\nabla u|_p^p = S = \inf_{\substack{u\in\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)\\ |u|_{p^*}=1}} |\nabla u|_p^p,$$

*e $S(\Omega)$ nunca é atingido, exceto quando $\Omega = \mathbb{R}^N$.*

*Demonstração.* De $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{D}_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos $S \leq S(\Omega)$. Dados $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\Omega$ aberto de $\mathbb{R}^N$, mostraremos que existem $y \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$ tais que $u^{y,\lambda} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, ou seja, $\operatorname{supp} u^{y,\lambda} \subset \Omega$. Suponha inicialmente que $0 \in \Omega$. Escolhendo $y = 0$ obtemos

$$u^{0,\lambda}(x) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(\lambda x),$$

em que $\lambda > 0$ será determinado. Note que se $x \in \operatorname{supp} u^{0,\lambda}$ então existe $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ com $x_n \to x$ e $u^{0,\lambda}(x_n) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(\lambda x_n) \neq 0$ implicando $u(\lambda x_n) \neq 0$, ou seja, $\lambda x_n \in \operatorname{supp} u$ donde $\lambda x \in \operatorname{supp} u$ e consequentemente $x \in (1/\lambda)\operatorname{supp} u$; portanto

$$\operatorname{supp} u^{0,\lambda} \subset \frac{1}{\lambda}\operatorname{supp} u.$$

Reciprocamente, se $x \in (1/\lambda)\operatorname{supp} u$, isto é, se $\lambda x \in \operatorname{supp} u$, então existe $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $x_n \to \lambda x$ e $u(x_n) \neq 0$, ou seja, $x_n/\lambda \to x$ e $u^{0,\lambda}(x_n/\lambda) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(\lambda x_n/\lambda) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(x_n) \neq 0$ o que implica $x_n/\lambda \in \operatorname{supp} u^{0,\lambda}$ e consequentemente $x \in \operatorname{supp} u^{0,\lambda}$; assim

$$\frac{1}{\lambda}\operatorname{supp} u \subset \operatorname{supp} u^{0,\lambda}.$$

Logo, $(1/\lambda)\operatorname{supp} u = \operatorname{supp} u^{0,\lambda}$ e para $\lambda$ suficientemente grande podemos concluir que

$$\operatorname{supp} u^{0,\lambda} = \frac{1}{\lambda}\operatorname{supp} u \subset \Omega,$$

donde $u^{0,\lambda} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Se $0 \notin \Omega$, fixe $y_0 \in \Omega$ arbitrário e considere a translação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\longmapsto T(x) = x - y_0. \end{aligned}$$

Observe que, sendo $T$ um difeomorfismo, temos $T(\Omega)$ um aberto com $0 \in T(\Omega)$. Pelo estudo anterior, existe $\lambda$ suficientemente grande tal que

$$\operatorname{supp} u^{0,\lambda} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{supp} u \subset T(\Omega).$$

Daí, se $x \in \operatorname{supp} u^{-\lambda y_0,\lambda}$ então existe $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ com $x_n \to x$ e $u^{-\lambda y_0,\lambda}(x_n) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(\lambda x_n - \lambda y_0) \neq 0$, ou seja, $\lambda x - \lambda y_0 \in \operatorname{supp} u$ donde $x - y_0 \in (1/\lambda) \operatorname{supp} u \subset T(\Omega)$ e consequentmente $x = T^{-1}(x - y_0) \in \Omega$. Logo,

$$\operatorname{supp} u^{-\lambda y_0,\lambda} \subset \Omega.$$

Fazendo $y = -\lambda y_0$, obtemos

$$\operatorname{supp} u^{y,\lambda} \subset \Omega$$

donde $u^{y,\lambda} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Com isso, considere $(u_n) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante para $S$. Escolhendo $(y_n, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ tal que $v_n = u_n^{y_n \lambda_n} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ temos $|v_n|_{p^*} = 1$ e $S(\Omega) \leq |\nabla v_n|_p^p$, donde

$$S(\Omega) \leq \lim_{n\to\infty} |\nabla v_n|_p^p = \lim_{n\to\infty} |\nabla u_n|_p^p = S.$$

Portanto, $S(\Omega) = S$.

Suponha agora que $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ e que $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ seja um minimizante para $S(\Omega)$, então da inclusão $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e da igualdade $S(\Omega) = S$ concluimos que $u$ também é um minimizante para $S$. Assumindo que $u \geq 0$ (o que é possível, pois $|u|_{p^*} = ||u||_{p^*}$ e $|\nabla u|_p^p = |\nabla |u||_p^p$), pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema C.23) existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx = \beta \int_\Omega |u|^{p^*-2} u \, v \, dx, \ \forall v \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.17}$$

ou seja, $u$ é solução fraca para o problema

$$-\Delta_p u = \beta \, u^{p^*-1}, \mathbb{R}^N.$$

Fazendo $v = u$ em (1.17), obtemos

$$S = \int_\Omega |\nabla u|^p dx = \beta \int_\Omega |u|^{p^*} \, dx = \beta$$

e consequentemente $u$ é solução fraca para o problema

$$-\Delta_p u = S \, u^{p^*-1}, \mathbb{R}^N.$$

Pelo Princípio do Máximo (Teorema C.28), $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$, o que é um absurdo, pois $u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$, o que implica $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Logo, $S(\Omega)$ não é atingido quando $\Omega \neq \mathbb{R}^N$.

■

# Capítulo 2

# Existência de solução para $(P_\mu)$

Neste capítulo, seguindo [13] e [14] estudaremos a existência de solução para o problema elíptico crítico

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu u^{q-1} + u^{p^*-1}, \ x \in \Omega, \\ u(x) > 0, x \in \Omega, \\ u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_\mu$}$$

com $\Omega$ sendo um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq p^2$, $2 \leq p < q < p^*$, em que $p^* = pN/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev, e $\mu$ um parâmetro positivo. Em $W_0^{1,p}(\Omega)$ usaremos a norma usual $\|u\| = |\nabla u|_p$.

O resultado principal deste capítulo é dado pelo seguinte:

**Teorema 2.1.** *Se $\Omega$ é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $p^2 \leq N$ e $2 \leq p < q < p^*$, então para cada $\mu > 0$ o problema $(P_\mu)$ possui solução não trivial.*

## 2.1 Resultados Importantes

Nesta seção veremos alguns resultados que serão utilizados para a demonstração do Teorema principal deste capítulo.

**Definição 2.2.** *Dizemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca para o problema $(P_\mu)$ se*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx = \mu \int_\Omega |u|^{q-2} u \, v \, dx + \int_\Omega |u|^{p^*-2} u \, v \, dx, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

$I_\mu : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é o funcional energia associado ao problema $(P_\mu)$ dado por

$$I_\mu(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\mu}{q}\int_\Omega (u^+)^q dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega (u^+)^{p^*} dx, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.1}$$

O funcional $I_\mu$ é de classe $\mathcal{C}^2(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ (veja [10] e [11]), e para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$I'_\mu(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\, \nabla v dx - \mu\int_\Omega (u^+)^{q-2}u\, v dx - \int_\Omega (u^+)^{p^*-2}u\, v\, dx. \tag{2.2}$$

Afirmamos que todo ponto crítico para o funcional $I_\mu$ é não negativo. De fato, se $u$ é ponto crítico de $I_\mu$, então $I'_\mu(u)v = 0$ para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, em particular, fazendo $v = u^- = \max\{0, -u\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (Proposição C.6), obtemos

$$I'_\mu(u)u^- = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\, \nabla u^- dx - \mu\int_\Omega (u^+)^{q-2}u\, u^- dx - \int_\Omega (u^+)^{p^*-2}u\, u^- dx = 0.$$

Observe que:

(i) $\mu\displaystyle\int_\Omega (u^+)^{q-2}u\, u^- dx = \mu\int_{[u>0]} (u^+)^{q-2}u\, u^- dx + \mu\int_{[u\le 0]} (u^+)^{q-2}u\, u^- dx = 0$, pois $u^+ = 0$ em $[u \le 0]$ e $u^- = 0$ em $[u > 0]$, uma vez que $u^+ = \max\{0, u\}$.

(ii) Seguindo da mesma forma que o item (i), obtemos

$$\int_\Omega (u^+)^{p^*-2}u\, u^- dx = 0.$$

(iii) $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\, \nabla u^- dx = \int_{[u>0]} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\, \nabla u^- dx + \int_{[u\le 0]} -|\nabla u^-|^{p-2}\nabla u^-\, \nabla u^- dx$, visto que $\nabla u = \nabla(u^+ - u^-) = \nabla u^+ - \nabla u^- = -\nabla u^-$ em $[u \le 0]$. E sendo $\nabla u^- = 0$ em $[u > 0]$, então

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\, \nabla u^- dx = -\int_{[u\le 0]} |\nabla u^-|^{p-2}|\nabla u^-|^2 dx = -\int_{[u\le 0]} |\nabla u^-|^p dx.$$

Logo, dos itens (i), (ii) e (iii),

$$-\int_{[u\le 0]} |\nabla u^-|^p dx = I'_\mu(u)u^- = 0,$$

assim,

$$\|u^-\|^p = \|u^-\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u^-|^p dx = \int_{[u>0]} |\nabla u^-|^p dx + \int_{[u\le 0]} |\nabla u^-|^p dx = 0,$$

donde $u^- = 0$ q.t.p. em $\Omega$ e, portanto, $u = u^+$ q.t.p. em $\Omega$. Logo, de acordo com a

Definição 2.2, os pontos críticos do funcional $I_\mu$ são soluções fracas para o problema $(P_\mu)$.

**Teorema 2.3** (**Teorema do Passo da Montanha**). *Sejam $X$ um espaço de Banach, $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ e $r > 0$ tais que $\|e\| > r$ e*

$$b = \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e).$$

*Defina*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

*com*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = e\}.$$

*Então existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que*

$$\varphi(u_n) \to c \quad e \quad \varphi'(u_n) \to 0 \ em \ X'.$$

*O número $c$ é conhecido como o nível do passo da montanha.*

*Demonstração.* Tomando no Teorema C.26 $M = [0,1]$, $M_0 = \{0,1\}$, $\Gamma_0 = \{\gamma_0\}$, $\gamma_0(0) = 0$ e $\gamma_0(1) = e$ temos, para $t \in M$, $\gamma \in \Gamma$, $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$ e $\delta > 0$,

$$\varphi(\gamma(t)) \leq \max_{t \in M} \varphi(\gamma(t))$$

implicando, pela definição de $c$, que

$$\varphi(\gamma(t)) \leq c < c + \varepsilon.$$

Portanto,

$$\sup_M (\varphi \circ \gamma) \leq c + \varepsilon,$$

donde existe $u \in X$ verificando os itens $(a)$, $(b)$, $(c)$ do Teorema C.26. Considerando então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 1/n$ existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$c - \frac{2}{n} \leq \varphi(u_n) \leq c + \frac{2}{n} \quad \text{e} \quad \|\varphi'(u_n)\| \leq \frac{8}{\delta n},$$

e assim, fazendo $n \to \infty$,

$$\varphi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \varphi'(u_n) \to 0 \text{ em } X',$$

como queríamos. ∎

**Definição 2.4.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $(u_n)$ é uma sequência $(PS)_d$ com $d \in \mathbb{R}$ quando*

$$\varphi(u_n) \to d \text{ em } \mathbb{R} \quad e \quad \varphi'(u_n) \to 0 \text{ em } X'.$$

**Corolário 2.5.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.3, $\varphi$ admite uma sequência $(PS)_c$ em $X$.*

**Definição 2.6.** *Sejam $X$ um espaço de Banach, $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. A função $\varphi$ satisfaz a condição $(PS)_c$ quando toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que*

$$\varphi(u_n) \to c, \ \varphi'(u_n) \to 0$$

*admite uma subsequência convergente em $X$.*

**Definição 2.7.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $\varphi$ verifica a condição de Palais-Smale ou simplesmente, a condição $(PS)$, quando toda sequência $(PS)_d$ admite uma subsequência que converge forte em $X$.*

**Definição 2.8.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de $\varphi$ se existe $u \in X$ tal que $\varphi(u) = c$ e $\varphi'(u) = 0$.*

**Corolário 2.9.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.3, se $\varphi$ verifica a condição $(PS)_c$, então $c$ é um valor crítico de $\varphi$.*

*Demonstração.* Do Corolário 2.5, existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$\varphi(u_n) \to c \text{ em } \mathbb{R} \ \text{ e } \ \varphi'(u_n) \to 0 \text{ em } X'. \tag{2.3}$$

Da condição $(PS)_c$ existe $u \in X$ tal que, a menos de uma subsequência,

$$u_n \to u \ \text{ em } X.$$

Como $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ temos

$$\varphi(u_n) \to \varphi(u) \text{ em } \mathbb{R} \ \text{ e } \ \varphi'(u_n) \to \varphi'(u) \text{ em } X'. \tag{2.4}$$

Logo, de (2.3), (2.4) e da unicidade do limite temos

$$\varphi(u) = c \ \text{ e } \ \varphi'(u) = 0,$$

mostrando que $c$ é um valor crítico de $\varphi$. ∎

**Lema 2.10.** *O funcional $I_\mu$ satisfaz a geometria do passo da montanha.*

*Demonstração.* De (2.1), temos $I_\mu(0) = 0$. Além disso, como $p < q < p^*$ temos as imersões contínuas, ver Teorema C.8 e Teorema C.9, de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$ e $L^q(\Omega)$, donde existem $\alpha_1$,$\alpha_2 > 0$, tais que

$$|u|_{p^*} \leq \alpha_1 \|u\| \text{ e } |u|_q \leq \alpha_2 \|u\|.$$

Daí,

$$|u^+|_{p^*}^{p^*} \leq |u|_{p^*}^{p^*} \leq \alpha_1 \|u\|^{p^*} \text{ e } |u^+|_q^q \leq |u|_q^q \leq \alpha_2 \|u\|^q,$$

logo

$$I_\mu(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\mu}{q}|u^+|_q^q - \frac{1}{p^*}|u^+|_{p^*}^{p^*} \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\mu}{q}\alpha_2\|u\|^q - \frac{1}{p^*}\alpha_1\|u\|^{p^*}.$$

Escolhendo então $r > 0$ e considerando $\|u\| = r$ temos

$$I_\mu(u) \geq \frac{1}{p}r^p - \frac{\mu}{q}\alpha_2 r^q - \frac{1}{p^*}\alpha_1 r^{p^*} = r^p\left(\frac{1}{p} - \frac{\mu}{q}\alpha_2 r^{q-p} - \frac{1}{p^*}\alpha_1 r^{p^*-p}\right)$$

e para $r \approx 0$ temos

$$I_\mu(u) \geq \frac{1}{2p}r^p \text{ se } \|u\| = r.$$

Assim, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\| = r$ temos $I_\mu(u)$ limitado inferiormente, e pelo postulado de Dedekind, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$\rho = \inf_{\|u\|=r} I_\mu(u) \geq \frac{1}{2p}r^p > 0.$$

Agora, fixe $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, e observe que para $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} I_\mu(tu) &= \frac{t^p}{p}\|u\|^p - \frac{\mu t^q}{q}|u^+|_q^q - \frac{t^{p*}}{p^*}|u^+|_{p^*}^{p^*} \\ &\leq \frac{t^p}{p}\|u\|^p - \frac{t^{p*}}{p^*}|u^+|_{p^*}^{p^*} \longrightarrow -\infty, \text{ quando } t \to +\infty. \end{aligned}$$

Logo, para $t_1 \approx +\infty$ temos $\|t_1 u\| > r$ e $I_\mu(t_1 u) < 0$. Tomando $e = t_1 u$ obtemos $e \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus B_r(0)$ com $I_\mu(e) < 0 = I_\mu(0)$ e, desta forma, $I_\mu$ satisfaz a geometria do passo da montanha. ■

Visto que o funcional $I_\mu$ satisfaz a geometria do passo da montanha, denotemos por

$\widetilde{c}_\mu$ o nível do passo da montanha associado a este funcional, ou seja,

$$\widetilde{c}_\mu = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_\mu(tv) > 0. \tag{2.5}$$

(veja Observação C.27)

**Lema 2.11.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $\mu > 0$ e $q > p$. Toda sequência $(PS)_c$ para $I_\mu$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

*Demonstração.* Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_c$ para $I_\mu$, isto é,

$$I_\mu(u_n) \to c \text{ em } \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

e

$$I'_\mu(u_n) \to 0 \text{ em } W^{-1,p'}(\Omega), \text{ em que } W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))', \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{2.7}$$

Observe que, de (2.6) e (2.7) temos, respectivamente,

$$I_\mu(u_n) = c + o_n(1) \ \text{ e } \ \|I'_\mu(u_n)\| \to 0,$$

e sendo

$$0 < \left|I'_\mu(u_n)\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)\right| = \left|\frac{1}{\|u_n\|}I'_\mu(u_n)(u_n)\right| \leq \frac{1}{\|u_n\|}\|I'_\mu(u_n)\|\|u_n\| = \|I'_\mu(u_n)\|,$$

consequentemente, $o_n(1) = \dfrac{1}{\|u_n\|}I'_\mu(u_n)(u_n)$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\| &= I_\mu(u_n) - \frac{1}{q}I'_\mu(u_n)(u_n) \\ &= \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{\mu}{q}|u_n^+|_q^q - \frac{1}{p^*}|u_n^+|_{p^*}^{p^*} - \frac{1}{q}\|u_n\|^p + \frac{\mu}{q}|u_n^+|_q^q + \frac{1}{q}|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|^p + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right)|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|^p, \end{aligned}$$

donde $(\|u_n\|)$ é limitada em $\mathbb{R}$ e $(u_n)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ pois, caso contrário, a menos de uma subsequência, teríamos

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \leq \frac{c + o_n(1)}{\|u_n\|^p} + \frac{o_n(1)}{\|u_n\|^{p-1}} \to 0,$$

o que seria um absurdo. Além disso, sem perda de generalidade, podemos supor $u_n \geq 0$,

para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que

$$I'_\mu(u_n)(u_n^-) = \|u_n^-\|^p \to 0.$$

■

**Lema 2.12.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $\mu > 0$ e $q > p$. Se $(u_n)$ é uma sequência $(PS)_c$ para $I_\mu$, então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Mais ainda, se $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p. em $\Omega$ então $u$ é solução fraca para o problema $(P_\mu)$.*

*Demonstração.* Do Lema 2.11 temos $(u_n)$ limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, donde existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, uma vez que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo. Mostremos agora que, se $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p. em $\Omega$ então $u$ é solução fraca para $(P_\mu)$. Note que, da imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p^*}(\Omega)$ temos $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{p^*}(\Omega)$ donde, usando o Lema C.11, $|u_n|^{p^*-2}u_n \rightharpoonup |u|^{p^*-2}u$ em $L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\Omega)$, ou seja,

$$\int_\Omega |u_n|^{p^*-2}u_n\,\varphi\,dx \to \int_\Omega |u|^{p^*-2}u\,\varphi\,dx,\ \forall \varphi \in L^{p^*}(\Omega),$$

em particular,

$$\int_\Omega |u_n|^{p^*-2}u_n\,\varphi\,dx \to \int_\Omega |u|^{p^*-2}u\,\varphi\,dx,\ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.8}$$

Seguindo de forma análoga, mostra-se que

$$\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n\,\varphi\,dx \to \int_\Omega |u|^{q-2}u\,\varphi\,dx,\ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.9}$$

A sequência $(u_n)$ ser limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ implica $(\nabla u_n)$ limitada em $L^p(\Omega)$ e de $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p. em $\Omega$ temos, pelo Lema C.11, $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ em $L^p(\Omega)$. Logo, novamente usando o Lema C.11, $|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\,\varphi\,dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\,\varphi\,dx,\ \forall \varphi \in L^p(\Omega)$$

e consequentemente,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v\,dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\,dx,\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{2.10}$$

já que $\nabla v \in L^p(\Omega)$ para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Por fim, como visto no Lema 2.11, podemos

supor, $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e por $(u_n)$ ser uma sequência $(PS)_c$ para $I_\mu$, temos

$$I'_\mu(u_n)v = \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v \, dx - \mu \int_\Omega (u_n)^{q-2}u_n v \, dx - \int_\Omega (u_n)^{p^*-2}u_n v \, dx = o_n(1),$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e fazendo $n \to \infty$ concluímos por (2.8), (2.9) e (2.10) que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx - \mu \int_\Omega (u)^{q-2}uv \, dx - \int_\Omega (u)^{p^*-2}uv \, dx = 0, \, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou seja, $u$ é solução fraca para o problema $(P_\mu)$. ■

**Lema 2.13.** *Seja $N \geq p^2$. Então $I_\mu$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \left(0, S^{N/p}/N\right)$. Além disso, $\widetilde{c}_\mu \in \left(0, S^{N/p}/N\right)$ para $\mu > 0$ e $q > p$.*

*Demonstração.* Seja $(u_n)$ uma sequência $(PS)_c$ para $I_\mu$ então, do Lema 2.11, podemos supor $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $(u_n)$ uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, portanto, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, se tomarmos a subsequência apropriada, se necessário, pelo Lema 1.2 podemos assumir os casos

$$\begin{gathered}
u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), \\
u_n \to u \text{ em } L^r(\Omega), \ 1 < r < p^*, \\
u_n \to u \text{ q.t.p. em } \Omega, \\
|\nabla u_n|^p \rightharpoonup \lambda \geq |\nabla u|^p + \sum_{j \in J} \lambda_j \delta_{x_j}, \\
|u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu = |u|^{p^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}.
\end{gathered}$$

Tome $x_k \in \overline{\Omega}$ para algum $k \in J$, e dado $\varepsilon > 0$ considere $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\varphi \equiv 1 \text{ em } B(x_k, \varepsilon), \ \varphi \equiv 0 \text{ em } B(x_k, 2\varepsilon)^c \text{ e } |\nabla \varphi| \leq \frac{2}{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

A sequência $(\varphi u_n)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ donde $I'_\mu(u_n)(\varphi u_n)$ converge para 0 e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
I'_\mu(u_n)(\varphi u_n) &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n . \nabla(\varphi u_n) \, dx - \mu \int_\Omega (u_n)^{q-2}(u_n).(\varphi u_n) \, dx + \\
&\quad - \int_\Omega (u_n)^{p^*-2}(u_n).(\varphi u_n) \, dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}u_n \nabla u_n . \nabla \varphi dx + \int_\Omega \varphi |\nabla u_n|^p \, dx - \mu \int_\Omega (u_n)^q \varphi \, dx + \\
&\quad - \int_\Omega (u_n)^{p^*} \varphi \, dx \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n.\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega \varphi|\nabla u_n|^p\,dx - \mu\int_\Omega (u_n)^q\varphi\,dx - \int_\Omega (u_n)^{p^*}\varphi\,dx\right] = 0.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.19) e pelas conclusões do Lema 1.2 temos a existência do limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \varphi|\nabla u_n|^p\,dx - \mu\int_\Omega (u_n)^q\varphi\,dx - \int_\Omega (u_n)^{p^*}\varphi\,dx\right) = \int_\Omega \varphi\,d\lambda - \mu\int_\Omega \varphi u^q dx - \int_\Omega \varphi\,d\nu,$$

portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n.\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega \varphi\,d\nu + \mu\int_\Omega \varphi u^q dx - \int_\Omega \varphi\,d\lambda. \tag{2.12}$$

Dito isso, sendo

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n.\nabla\varphi\,dx\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_{B(x_k,2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u.\nabla\varphi\,dx\right|,$$

usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Hölder (Teorema C.20) e de (2.11) obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{B(x_k,2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n.\nabla\varphi\,dx\right| &\le \int_{B(x_k,2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2}|u_n||\nabla u_n.\nabla\varphi|\,dx \\
&\le \int_{B(x_k,2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2}|u_n||\nabla u_n||\nabla\varphi|\,dx \\
&\le \frac{2}{\varepsilon}\int_{B(x_k,2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-1}|u_n|\,dx \\
&\le \frac{2}{\varepsilon}\,|\nabla u_n|^{p-1}_{p,B(x_k,2\varepsilon)}|u_n|_{p,B(x_k,2\varepsilon)} \\
&\le \frac{2}{\varepsilon}M|u_n|_{p,B(x_k,2\varepsilon)},
\end{aligned}$$

uma vez que $|\nabla u_n|_{p,B(x_k,2\varepsilon)} = \|u_n\| \le M$, já que $(u_n)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como o limite dos extremos da desigualdade anterior existem, então

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\left|\int_{B(x_k,2\varepsilon)} |\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n.\nabla\varphi\,dx\right| \le \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\varepsilon}M|u_n|_{p,B(x_k,2\varepsilon)} = \frac{2}{\varepsilon}M|u|_{p,B(x_k,2\varepsilon)}.$$

Agora, note que, usando novamente a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
|u|_{p,B(x_k,2\varepsilon)} = \left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)} |u|^p\,dx\right)^{1/p} &= \left(\int_{B(x_k2\varepsilon)} 1^N\,dx\right)^{1/N}\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)} |u|^{p^*}dx\right)^{1/p^*} \\
&\le \left[(2\varepsilon)^N w_N\right]^{1/N}|u|_{p^*,B(x_k,2\varepsilon)},
\end{aligned}$$

pois $\dfrac{1}{p^*}+\dfrac{1}{N}=\dfrac{1}{p}$ e com $w_N$ denotando o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Daí,

$$\frac{2}{\varepsilon}M|u|_{p,B(x_k,2\varepsilon)} \leq \frac{2}{\varepsilon}M(2\varepsilon)w_N^{1/N}|u|_{p^*,B(x_k,2\varepsilon)} = C|u|_{p^*,B(x_k,2\varepsilon)},$$

com $C=4Mw_N^{1/N}$. Assim,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n.\nabla\varphi\,dx\right| \leq C|u|_{p^*,B(x_k,2\varepsilon)} = C\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)}|u|^{p^*}dx\right)^{1/p^*} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0. \tag{2.13}$$

Por (2.12), (2.13) e pelo Lema 1.2 obtemos,

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{B(x_k,2\varepsilon)}\varphi\,d\nu+\mu\int_{B(x_k,2\varepsilon)}u^q\varphi\,dx-\int_{B(x_k,2\varepsilon)}\varphi\,d\lambda\right]\leq \nu_k-\lambda_k,$$

donde $\nu_k\geq\lambda_k$. Pelo Lema 1.2, $\nu_k^{p/p^*}\leq\lambda_k/S$, donde $\nu_k\geq\lambda_k\geq S\nu_k^{p/p^*}$ e assim $\nu_k=0$ ou $\nu_k\geq S^{N/p}$. Suponha que exista $k_0\in J$ com $\nu_{k_0}\neq 0$, isto é, $\nu_{k_0}\geq S^{N/p}$ então

$$\begin{aligned}
c=\lim_{n\to\infty}I_\mu(u_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(I_\mu(u_n)-\frac{1}{p}I'_\mu(u_n)(u_n)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\mu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega(u_n)^q\,dx+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega(u_n)^{p^*}\,dx\right]\\
&= \mu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)|u|_q^q+\frac{1}{N}\lim_{n\to\infty}|u_n|_{p^*}^{p^*}.
\end{aligned}$$

Fixando $\psi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi\equiv 1$ em $\overline{\Omega}$ e $\psi\equiv 0$ fora de uma vizinhança de $\overline{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(u_n)^{p^*}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega(u_n)^{p^*}\psi\,dx=\int_\Omega u^{p^*}\psi dx+\int_\Omega\left(\sum_{k\in J}\nu_k\delta_{x_k}\right)\psi\,dx\\
&= \int_\Omega u^{p^*}\,dx+\sum_{k\in J}\nu_k.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
c=\lim_{n\to\infty}I_\mu(u_n) &= \mu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega u^q dx+\frac{1}{N}\int_\Omega u^{p^*}dx+\frac{1}{N}\sum_{k\in J}\nu_k\\
&\geq \mu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega u^q dx+\frac{1}{N}\int_\Omega u^{p^*}dx+\frac{1}{N}S^{N/p}\\
&\geq \frac{1}{N}S^{N/p},
\end{aligned}$$

pois $\nu_{k_0}\geq S^{N/p}$, o que contradiz o fato de $c\in\left(0,S^{N/p}/N\right)$. Logo, $\nu_k=0$ para todo $k\in J$

e assim, por (2.14),

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (u_n)^{p^*}dx = \int_\Omega u^{p^*}dx.$$

Por $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e pela imersão contínua temos $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{p^*}(\Omega)$, daí, juntamente com o fato de $|u_n|_{p^*}^{p^*} \to |u|_{p^*}^{p^*}$ podemos concluir, usando o Teorema C.17 e a Proposição C.18, que $u_n \to u$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Agora, demonstremos que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sendo $(u_n)$ limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ concluímos que $(\nabla u_n)$ é limitada em $L^p(\Omega)$ e seguindo as ideias de [17] e [22] obtemos $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p. em $\Omega$, logo, pelo Lema de Brezis-Lieb (Lema C.12),

$$|\nabla u_n|_p^p = |\nabla u_n - \nabla u|_p^p + |\nabla u|_p^p + o_n(1). \tag{2.15}$$

Tomando $v_n = u_n - u$ temos, de (2.15),

$$|\nabla u_n|_p^p = |\nabla v_n|_p^p + |\nabla u|_p^p + o_n(1). \tag{2.16}$$

Observe que, $(u_n)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $I'_\mu(u_n) \to 0$ logo, pela imersão compacta de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ mais a convergência $|u_n|_{p^*}^{p^*} \to |u|_{p^*}^{p^*}$ e a equação (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} o_n(1) = I'_\mu(u_n)(u_n) &= \|u_n\|^p - \mu|u_n|_q^q - |u_n|_{p^*}^{p^*} = |\nabla u_n|_p^p - \mu|u_n|_q^q - |u_n|_{p^*}^{p^*} \\ &= |\nabla v_n|_p^p + |\nabla u|_p^p - \mu|u_n|_q^q - |u_n|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) \\ &= |\nabla v_n|_p^p + \|u\|^p - \mu|u|_q^q - |u|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) \\ &= |\nabla v_n|_p^p + I'_\mu(u)(u) + o_n(1), \end{aligned} \tag{2.17}$$

quando $n \to \infty$. Pelo Lema 2.12 $u$ é solução fraca para o problema $(P_\mu)$ donde, em particular, $I'_\mu(u)(u) = 0$ e assim, de (2.17),

$$o_n(1) = |\nabla v_n|_p^p + o_n(1),$$

implicando que $|\nabla v_n|_p^p \to 0$. Logo, de (2.16), $|\nabla u_n|_p^p \to |\nabla u|_p^p$ e, consequentemente, $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Mostremos agora que o nível do passo da montanha $\widetilde{c}_\mu$ pertence ao intervalo $\big(0, S^{N/p}/N\big)$. Para $\varepsilon > 0$, considere a função

$$U_\varepsilon(x) = \big(\varepsilon + |x - x_0|^{p/(p-1)}\big)^{(p-N)/p}, \tag{2.18}$$

em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, em que $U$ é dada por (1.16). Podemos assumir que $0 \in \Omega$, e considerar $x_0 = 0$ em (2.18). Seja agora $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança da origem e $\operatorname{supp}\phi \subset \Omega$. Defina $u_\varepsilon(x) = \phi(x)U_\varepsilon(x)$ e

$$v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|_{p^*}}.$$

Daí, obtemos as seguintes estimativas (ver [7] e [13]):

$$|\nabla v_\varepsilon|_p^p = S + O(\varepsilon^{(N-p)/p}), \tag{2.19}$$

$$c_1\varepsilon^{[(p-1)/p][N-q(N-p)/p]} \leq |v_\varepsilon|_q^q \leq c_2\varepsilon^{[(p-1)/p][N-q(N-p)/p]}, \tag{2.20}$$

donde

$$|v_\varepsilon|_q^q \to 0,\ \varepsilon \to 0. \tag{2.21}$$

Mostremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\max_{t\geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon) < \frac{S^{N/p}}{N},$$

pois com isso teremos

$$\widetilde{c}_\mu = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_\mu(tv) \leq \max_{t\geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon) < \frac{S^{N/p}}{N}.$$

Considere as funções de $[0,+\infty)$ em $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(t) = I_\mu(tv_\varepsilon) &= \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p\,dx - \mu\frac{t^q}{q}\int_\Omega v_\varepsilon^q\,dx - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int_\Omega v_\varepsilon^{p^*}\,dx \\ &= \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p\,dx - \mu\frac{t^q}{q}\int_\Omega v_\varepsilon^q\,dx - \frac{t^{p^*}}{p^*}, \end{aligned}$$

e

$$\overline{g}(t) = \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p\,dx - \frac{t^{p^*}}{p^*}.$$

Observe que

$$g(t) \to -\infty \text{ quando } t \to \infty,$$

então $\max\limits_{t\geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon)$ é atingido para algum $t_\varepsilon > 0$, e dessa forma

$$\begin{aligned} 0 = g'(t_\varepsilon) &= t_\varepsilon^{p-1}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p\,dx - \mu t_\varepsilon^{q-1}\int_\Omega v_\varepsilon^q\,dx - t_\varepsilon^{p^*-1} \\ &= t_\varepsilon^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p\,dx - \mu t_\varepsilon^{q-p}\int_\Omega v_\varepsilon^q\,dx - t_\varepsilon^{p^*-p}\right), \end{aligned}$$

portanto

$$\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p\,dx = \mu t_\varepsilon^{q-p}\int_\Omega v_\varepsilon^q\,dx + t_\varepsilon^{p^*-p} \geq t_\varepsilon^{p^*-p},$$

isto é,

$$t_\varepsilon \leq \left( \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p dx \right)^{1/p^*-p}. \tag{2.22}$$

Esta desigualdade implica que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p \, dx &= t_\varepsilon^{p^*-p} + \mu t_\varepsilon^{q-p} \int_\Omega v_\varepsilon^q \, dx \leq t_\varepsilon^{p^*-p} + \mu \left( \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p \, dx \right)^{\frac{q-p}{p^*-p}} \int_\Omega v_\varepsilon^q \, dx \\ &= t_\varepsilon^{p^*-p} + \mu \|v_\varepsilon\|^{\frac{p(q-p)}{p^*-p}} |v_\varepsilon|_q^q, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} t_\varepsilon^{p^*-p} &\geq \|v_\varepsilon\|^p - \mu \|v_\varepsilon\|^{\frac{p(q-p)}{p^*-p}} |v_\varepsilon|_q^q \\ &= \|v_\varepsilon\|^p [1 - \mu \|v_\varepsilon\|^{\frac{p(q-p)}{p^*-p} - p} |v_\varepsilon|_q^q]. \end{aligned}$$

De (2.19) e (2.21) podemos escolher $\varepsilon$ suficientemente pequeno de modo que

$$t_\varepsilon^{p^*-p} \geq \frac{S}{2}. \tag{2.23}$$

De forma análoga ao estudo da função $g$, podemos observar que a função $\overline{g}$ atinge máximo e com isso existe $t > 0$ tal que $\overline{g}'(t) = 0$ implicando que

$$t = \left( \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p^*-p}},$$

e que $\overline{g}$ é crescente no intervalo $[0, (\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p \, dx)^{\frac{1}{p^*-p}}]$. Logo, por (2.22),

$$\begin{aligned} g(t_\varepsilon) &= \overline{g}(t_\varepsilon) - \mu \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega v_\varepsilon^q \, dx \\ &\leq \overline{g} \left( \left( \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p^*-p}} \right) - \mu \frac{t_\varepsilon^q}{q} \int_\Omega v_\varepsilon^q \, dx. \end{aligned}$$

Note que, usando (2.19),

$$\begin{aligned} \overline{g} \left( \left( \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p^*-p}} \right) &= \frac{1}{p} \left( \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p \, dx \right)^{\frac{p}{p^*-p}} \|v_\varepsilon\|^p - \frac{1}{p^*} \left( \int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^p \, dx \right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\ &= \frac{1}{p} (\|v_\varepsilon\|^p)^{\frac{p}{p^*-p}} \|v_\varepsilon\|^p - \frac{1}{p^*} (\|v_\varepsilon\|^p)^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\ &= \frac{1}{p} \|v_\varepsilon\|^{N-p} \|v_\varepsilon\|^p - \frac{1}{p^*} \|v_\varepsilon\|^N \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p}\|v_\varepsilon\|^N - \frac{1}{p^*}\|v_\varepsilon\|^N = \frac{1}{N}\|v_\varepsilon\|^N = \frac{1}{N}(\|v_\varepsilon\|^p)^{N/p} = \frac{1}{N}[S + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})]^{N/p} \\
&= \frac{1}{N}\left[S\left(1 + \frac{O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})}{S}\right)\right]^{N/p} = \frac{1}{N}S^{N/p}[1 + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})]^{N/p}.
\end{aligned}
$$

Assim, de (2.23)

$$
g(t_\varepsilon) \leq \frac{1}{N}S^{N/p}[1 + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})]^{N/p} - \frac{\mu}{q}\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{q}{p^*-p}}\int_\Omega v_\varepsilon^q\,dx.
$$

Escrevendo $f(t) = (1+t)^{N/p}$, do Teorema no Valor Médio, obtemos

$$
[1 + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})]^{N/p} = \frac{N}{p}(1+\theta)^{\frac{N}{p}-1}O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) + 1 = O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) + 1,\ \theta \in (0, O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}})),
$$

donde

$$
\begin{aligned}
g(t_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N}S^{N/p} + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) - \frac{\mu}{q}\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{q}{p^*-p}}\int_\Omega v_\varepsilon^q\,dx \\
&\leq \frac{1}{N}S^{N/p} + c_3\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - \frac{\mu}{q}\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{q}{p^*-p}}\int_\Omega v_\varepsilon^q\,dx.
\end{aligned}
$$

Logo, de (2.20) obtemos

$$
\begin{aligned}
g(t_\varepsilon) &\leq \frac{1}{N}S^{N/p} + c_3\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - \frac{\mu}{q}\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{q}{p^*-p}} c_1\varepsilon^{\{[(p-1)/p][N-q(N-p)/p]\}} \\
&\leq \frac{1}{N}S^{N/p} + c_3\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - \mu c_4\varepsilon^{\{[(p-1)/p][N-q(N-p)/p]\}},
\end{aligned}
$$

sendo $N \geq p^2$ então

$$
\frac{N-p}{p} > \frac{p-1}{p}\left(N - \frac{q(N-p)}{p}\right).
$$

De fato, caso contrário, por $p < q$ teríamos

$$
\frac{N-p}{p} \leq \frac{p-1}{p}\left(N - \frac{q(N-p)}{p}\right) < \frac{p-1}{p}(N - (N-p)) = \frac{(p-1)}{p}p,
$$

donde $N < p^2$, o que é uma contradição. Assim, para $\varepsilon \approx 0$ temos

$$
c_3\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - \mu c_4\varepsilon^{\{[(p-1)/p][N-q(N-p)/p]\}} < 0.
$$

Portanto,

$$
\max_{t\geq 0} I_\mu(tv_\varepsilon) = \max_{t\geq 0} g(t) = g(t_\varepsilon) < \frac{S^{N/p}}{N},
$$

e temos o resultado desejado. ■

## 2.2 Demonstração do Teorema principal

*Demonstração do Teorema 2.1.*

Pelo Lema 2.10, o funcional $I_\mu$ satisfaz a geometria do passo da montanha, então existe uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I_\mu(u_n) \to \widetilde{c}_\mu \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } I'_\mu(u_n) \to 0 \text{ em } W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))'.$$

Além disso, o Lema 2.13 nos garante a existência de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de uma subsequência,

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dessa convergência e da continuidade dos funcionais $I_\mu$ e $I'_\mu$ temos

$$I_\mu(u_n) \to I_\mu(u) \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } I'_\mu(u_n) \to I'_\mu(u) \text{ em } W^{-1,p'}(\Omega),$$

implicando, pela unicidade do limite,

$$I_\mu(u) = \widetilde{c}_\mu \text{ e } I'_\mu(u) = 0.$$

Portanto, $u$ é um ponto crítico do funcional $I_\mu$ e, consequentemente, uma solução não trivial para o problema $(P_\mu)$, visto que $\widetilde{c}_\mu > 0$.

■

# Capítulo 3

# Categoria de Lusternik-Schnirelman

Neste capítulo apresentaremos definições e provaremos alguns resultados sobre a teoria de categoria, ferramenta essencial deste trabalho. A definição de categoria a seguir foi dada por Lusternik-Schnirelman (veja [19]).

**Definição 3.1.** *Um subconjunto fechado $A$ é contrátil em um espaço topológico $X$ se existem uma aplicação $h : [0,1] \times A \to X$ contínua e $w \in X$ tais que*

$$h(0,u) = u,\ h(1,u) = w,\ \forall u \in A.$$

**Proposição 3.2.** *[16, Corolário, p.12] Seja $X$ um espaço topológico. Se $X$ é contrátil em $X$, então $X$ é conexo por caminhos.*

**Definição 3.3.** *Sejam $A, B$ e $Y$ subconjuntos fechados de um espaço topológico $X$. Dizemos que $A$ é deformado em $B$ preservando $Y$, e denotamos por $A \prec_Y B$ em $X$, se $Y \subset A \cap B$ e se existe $h : [0,1] \times A \to X$ contínua tal que*

*(a)* $h(0,u) = u,\ h(1,u) \in B,\ \forall u \in A$;

*(b)* $h(t,Y) \subset Y,\ \forall t \in [0,1]$.

**Definição 3.4.** *Sejam $Y \subset A$ subconjuntos fechados de um espaço topológico $X$. A categoria de $A$ em $X$ relativa a $Y$ é o menor inteiro $n$ tal que existem $n+1$ subconjuntos fechados $A_0, A_1, \ldots, A_n$ em $X$ satisfazendo:*

*(a)* $A = \bigcup_{j=0}^{n} A_j$;

*(b)* $A_1, \ldots, A_n$ *são contráteis em* $X$;

*(c)* $A_0 \prec_Y Y$ *em* $X$.

*A categoria de $A$ em $X$ relativa a $Y$ é denotada por $cat_{X,Y}(A)$.*

**Definição 3.5.** *Seja $A$ um subconjunto fechado de um espaço topológico $X$. A categoria de $A$ em $X$ é o menor inteiro $n$ tal que existem $n$ subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ fechados e contráteis em $X$ tais que $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Usamos a notação $cat_X(A)$.*

Observe que

$$\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_{X,\emptyset}(A),$$

e

$$\mathrm{cat}_X(A) = +\infty, \text{ se } A \text{ não admite cobertura finita.}$$

**Exemplo 3.6.** *(a) Sendo $B$ uma bola fechada do $\mathbb{R}^N$, então $cat_B(B) = cat_{\mathbb{R}^N}(B) = 1$;*

*(b) Sendo $A$ um anel em $\mathbb{R}^2$, então $cat_A(A) = 2$;*

*(c) Sendo $\mathbb{T}^2$ o toro em $\mathbb{R}^3$, então $cat_{\mathbb{T}^2}(\mathbb{T}^2) = 3$.*

**Proposição 3.7.** *Seja $A$ um subconjunto finito e não vazio de um espaço topológico $X$. Se $cat_X(A) = n$ então $A$ possui, pelo menos, $n$ elementos.*

*Demonstração.* Se $\mathrm{cat}_X(A) = 2$ então $A$ não é unitário, pois a categoria de um conjunto unitário em $X$ é igual a 1. Com isso, $A$ possui, pelo menos, 2 elementos.

Suponha, por indução, que a proposição seja verdadeira para o inteiro $n$. Provaremos que o resultado é válido para $n+1$. Se $\mathrm{cat}_X(A) = n+1$ então

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1},$$

em que $A_j$, $j = 1 \ldots, n, n+1$ são fechados e contráteis em $X$. Considere $Z = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, e como $A = Z \cup A_{n+1}$ temos $\mathrm{cat}_X(Z) = n$, pois caso contrário teríamos uma contradição em $\mathrm{cat}_X(A) = n+1$. Logo, por hipótese, $Z$ possui, pelo menos, $n$ elementos. Agora, se $A_{n+1} \subset Z$ temos $Z = Z \cup A_{n+1} = A$ e assim $\mathrm{cat}_X(A) = n$, o que também é uma contradição. Portanto, existe $y \in A_{n+1}$ tal que $y \notin Z$ donde $A$ possui, pelo menos, $n+1$ elementos. Dessa forma, o resultado é válido para $n+1$ e, consequentemente, temos o desejado. ■

**Lema 3.8.** *Sejam $A$, $B$, $C$ e $Y$ subconjuntos fechados de $X$ tais que $Y \subset A \cap B \cap C$. Se $A \prec_Y B$ e $B \prec_Y C$ em $X$, então $A \prec_Y C$ em $X$.*

*Demonstração.* Por hipótese, existem as deformações

$h : [0,1] \times A \to X$ contínua tal que

$$h(0,u) = u, h(1,u) \in B, \forall u \in A;$$
$$h(t,Y) \subset Y, \forall t \in [0,1],$$

e $g : [0,1] \times B \to X$ contínua tal que

$$g(0,u) = u, g(1,u) \in C, \forall u \in B;$$
$$g(t,Y) \subset Y, \forall t \in [0,1].$$

Com isso, considere a deformação $f : [0,1] \times A \to X$ dada por

$$f(t,u) = \begin{cases} h(2t,u), \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \ u \in A, \\ g(2t-1, h(1,u)), \ \frac{1}{2} < t \leq 1, \ u \in A. \end{cases}$$

Observe que $f$ é contínua, uma vez que os limites laterais quando $t$ tende a $1/2$ são iguais à $h(1,u)$, e que

$$f(0,u) = h(0,u) = u, \forall u \in A;$$
$$f(1,u) = g(2.1-1, h(1,u)) = g(1, h(1,u)) \in C, \ \forall u \in A, \ \text{pois } h(1,u) \in B.$$

Para $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e $u \in Y$,

$$f(t,u) = h(2t,u) \in Y,$$

e para $\frac{1}{2} < t \leq 1$ e $u \in Y$,

$$f(t,u) = g(2t-1, h(1,u)) \in Y, \ \text{pois } h(1,u) \in Y \text{ uma vez que } u \in Y.$$

Portanto $f(t,Y) \subset Y$, para todo $t \in [0,1]$, provando assim que $A \prec_Y C$ em $X$. ■

**Proposição 3.9.** *Sejam $A, B, Y$ subconjuntos fechados de $X$ tais que $Y \subset A$. A categoria relativa satisfaz as seguintes propriedades:*

*(a) Normalização: $cat_{X,Y}(Y) = 0$;*

*(b) Subaditividade: $cat_{X,Y}(A \cup B) \leq cat_{X,Y}(A) + cat_X(B)$;*

*(c) Monotonicidade: $A \prec_Y B \Rightarrow cat_{X,Y}(A) \leq cat_{X,Y}(B)$.*

*Demonstração.*

(a) Considerando $A_0 = Y$, temos $A_0 \prec_Y Y$ em $X$, pois $Y \subset A_0 \cap Y$,

$$\begin{aligned} h : [0,1] \times A_0 &\longrightarrow X \\ (t,u) &\longmapsto h(t,u) = u \end{aligned}$$

é contínua e satisfaz

$$h(0,u) = u,\ h(1,u) \in Y,\ \forall u \in A_0;\ \text{e } h(t,Y) \subset Y\ \forall t \in [0,1].$$

Logo, $\text{cat}_{X,Y}(Y) = 0$.

(b) Suponha $\text{cat}_{X,Y}(A) = n$ e $\text{cat}_X(B) = m$, ou seja, existem $A_0, A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos fechados em $X$ tais que

$$A = \bigcup_{j=0}^{n} A_j,\ A_1, \ldots, A_n \text{ são contráteis em } X,\ A_0 \prec_Y Y \text{ em } X,$$

e existem também $B_1, \ldots, B_m$ fechados e contráteis em $X$ tais que

$$B = \bigcup_{k=1}^{m} B_k.$$

Assim,

$$A \cup B = A_0 \cup [A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m],$$

em que $n + m$ é uma cota superior para a quantidade de elementos na união entre colchetes de conjuntos contráteis em $X$, e como $A_0 \prec_Y Y$ concluímos que $\text{cat}_{X,Y}(A \cup B) \leq n + m = \text{cat}_{X,Y}(A) + \text{cat}_X(B)$.

(c) Suponha $A \prec_Y B$ pela deformação $h$, isto é, $Y \subset A \cap B$ e $h : [0,1] \times A \to X$ é contínua satisfazendo

$$h(0,u) = u,\ h(1,u) \in B,\ \forall u \in A \text{ e } h(t,Y) \subset Y,\ \forall t \in [0,1].$$

Se $\text{cat}_{X,Y}(B) = \infty$, o resultado é imediato. Agora, se $\text{cat}_{X,Y}(B) = n$, seja $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ a cobertura fechada de $B$ correspondente. Defina

$$A_j = \{u \in A :\ h(1,u) \in B_j\}, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Com isso, temos:

(i) $A = \bigcup_{j=0}^{n} A_j$. De fato, que $A_j \subset A$ é imediato. Por outro lado, dado $u \in A$ temos $h(1,u) \in B$, e sabendo que $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ é uma cobertura fechada de $B$ obtemos

$B = \bigcup_{j=0}^{n} B_j$. Daí, $h(1,u) \in B_j$ para algum $j = 0,1,2,\ldots,n$, e assim $u \in A_j$. Portanto, $A \subset A_j$ para algum $j = 0,1,2,\ldots,n$ e, consequentemente, temos a igualdade desejada.

(ii) Afirmamos que $A_0 \prec_Y B_0$. De fato, a cobertura $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ satisfaz $B_0 \prec_Y Y$ em $X$, o que nos da que $Y \subset B_0$. Note que, $Y \subset B_0$ implica, pela definição de $A_j$ e por $Y \subset A$, que $Y \subset A_0$, pois

$$u \in Y \Rightarrow h(1,u) \in Y \subset B_0 \Rightarrow u \in A_0.$$

Portanto, $Y \subset A_0 \cap B_0$ . Agora, definindo

$$\begin{array}{rcl} h_0 : [0,1] \times A_0 & \longrightarrow & X \\ (t,u) & \longmapsto & h_0(t,u) = h(t,u) \end{array}$$

obtemos, $h_0$ contínua;

$$h_0(0,u) = h(0,u) = u,\ h_0(1,u) = h(1,u) \in B_0,\ \forall u \in A_0;$$
$$h_0(t,Y) \subset Y, \forall t \in [0,1],$$

justificando assim a afirmação. Logo, de $B_0 \prec_Y Y$, segue do Lema 3.8 que $A_0 \prec_Y Y$.

(iii) $A_j \prec_\emptyset B_j$, $j = 1,\ldots,n$. De fato, defina

$$\begin{array}{rcl} h_j : [0,1] \times A_j & \longrightarrow & X \\ (t,u) & \longmapsto & h_j(t,u) = h(t,u). \end{array}$$

Sendo $B_j$ contrátil, considere $g_j : [0,1] \times B_j \to X$ a respectiva deformação e também $f_j : [0,1] \times A_j \to X$ dada por

$$f_j(t,u) = \begin{cases} h_j(2t,u),\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2},\ u \in A_j, \\ g_j(2t-1, h_j(1,u)),\ \frac{1}{2} < t \leq 1,\ u \in A_j. \end{cases}$$

Observe que $f_j$ é contínua, uma vez que seus limites laterais com $t$ tendendo a $1/2$ coincidem. Além disso, essas funções implicam que os conjuntos $A_j$ são contráteis em $X$, pois

$$f_j(0,u) = h_j(0,u) = h(0,u) = u, \forall u \in A_j, j = 1,\ldots,n,$$

e dados $u, v \in A_j,\ j = 1,\ldots,n$, temos:

$$f_j(1,u) = g_j(1, h_j(1,u)) = g_j(1, h(1,u)),$$

$$f_j(1,v) = g_j(1, h_j(1,v)) = g_j(1, h(1,v)),$$

como cada $B_j$ é contrátil, então $g_j(1, h(1,u)) = g_j(1, h(1,v))$. Daí, $f_j(1,u) = f_j(1,v)$, para todo $u, v \in A_j, j = 1, \ldots, n$. Portanto, cada $A_j$ com $j = 1, \ldots, n$ é contrátil em $X$. Finalmente, definindo a função

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & X \\ & u & \longmapsto & f(u) = h(1,u), \end{array}$$

obtemos que a mesma é contínua e que $A_j = f^{-1}(B_j)$, donde cada $A_j$, $j = 0, \ldots, n$ é fechado em $X$. Logo, dos itens (i), (ii) e (iii), concluímos que $\mathrm{cat}_{X,Y}(A) \leq n = \mathrm{cat}_{X,Y}(B)$.

■

**Proposição 3.10.** *[25, Proposição 5.7] Seja $\phi_{X,Y}$ uma função definida na classe de subconjuntos fechados de $X$ que contém $Y$. Se $\phi_{X,Y}$ satisfaz as propriedades $(a)$, $(b)$, $(c)$ da Proposição 3.9, então $\phi_{X,Y} \leq cat_{X,Y}$.*

Podemos concluir da proposição anterior que, dentre as funções que satisfazem as três propriedades da Proposição 3.9, a $\mathrm{cat}_{X,Y}$ é a que possui maior valor e, portanto, será a melhor função para buscarmos a multiplicidade de soluções, como veremos no Capítulo 4.

**Definição 3.11.** *Um espaço métrico $X$ é um extensor absoluto de vizinhança (EAV), se para todo espaço métrico $E$, para todo subconjunto fechado $F$ de $E$ e toda aplicação contínua $f : F \to X$, existe uma extensão contínua de $f$ definida em uma vizinhança de $F$ em $E$.*

**Definição 3.12.** *Um espaço topológico $X$ é normal se para todo par de conjuntos disjuntos fechados $A$ e $B$ de $X$ existe $f : X \to [0,1]$ contínua tal que $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$.*

**Observação 3.13.** *Todo espaço métrico $X$ é normal. De fato, dados $A$ e $B$ fechados e disjuntos em $X$ basta considerar a função de Urysohn $f : X \to [0,1]$ dada por*

$$f(x) = \frac{dist(x, A)}{dist(x, A) + dist(x, B)}.$$

**Proposição 3.14.** *Seja $A$ um subconjunto fechado de um EAV $X$. Então existe uma vizinhança fechada $B$ de $A$ em $X$ tal que $cat_X(B) = cat_X(A)$.*

*Demonstração.* Suponha inicialmente que $\mathrm{cat}_X(A) = 1$, ou seja, que $A$ é fechado e contrátil, e considere $h : [0,1] \times A \to X$ a deformação correspondente. O conjunto

$$N = ([0,1] \times A) \cup (\{0,1\} \times X)$$

é fechado em $M = [0,1] \times X$. A aplicação $f : N \to X$ dada por

$$f(t,u) = \begin{cases} h(t,u),\ t \in [0,1],\ u \in A, \\ u, t = 0,\ u \in X, \\ h(1,u_0),\ t = 1, u \in X, \end{cases}$$

onde $u_0 \in A$ é fixo, é contínua. Por hipótese, $X$ é um EAV donde existe uma extensão contínua $g$ de $f$ definida em uma vizinhança $U$ de $N$ em $M$. Como $M$ é um espaço métrico, segue da Observação 3.13 que o mesmo é normal. Logo, podemos supor $U$ fechado. De fato, sendo $N$ e $U^c$ fechados disjuntos de $M$, existe $\tilde{f} : M \to [0,1]$ contínua tal que $\tilde{f}(N) = \{0\}$ e $\tilde{f}(U^c) = \{1\}$; considerando então $\widetilde{U} = \{x \in M : \tilde{f}(x) \leq \frac{1}{2}\}$, temos $\widetilde{U}$ fechado com $N \subset \widetilde{U} \subset U$, pois

$$x \in N \Rightarrow \tilde{f}(x) = 0 < \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \widetilde{U} \Rightarrow N \subset \widetilde{U}$$

e

$$x \in U^c \Rightarrow \tilde{f}(x) = 1 > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \widetilde{U}^c \Rightarrow U^c \subset \widetilde{U}^c \Rightarrow \widetilde{U} \subset U.$$

Além disso, de $([0,1] \times A) \subset N \subset U$, temos $([0,1] \times A) \cap \partial U = \emptyset$. Considerando a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \ [0,1] \times X &\longrightarrow X \\ (t,u) &\longmapsto \pi(t,u) = u, \end{aligned}$$

afirmamos que $\pi(\partial U) \cap A = \emptyset$. Com efeito, suponha por absurdo que exista $v \in \pi(\partial U) \cap A$, então existe $(t,v) \in [0,1] \times \partial U$ tal que $\pi(t,v) = v$, mas como $v \in A$ e $t \in [0,1]$ temos um absurdo, pois $([0,1] \times A) \cap \partial U = \emptyset$. Assim, fazendo $B = \pi(U) \setminus \text{int}(\pi(\partial U))$ temos $B$ fechado, $A \subset B$ e $([0,1] \times B) \subset U$. Com isso, $B$ é contrátil em $X$, visto que $g : U \to X$ é contínua e como $([0,1] \times B) \subset U$ tome

$$\phi = g\,|_{[0,1]\times B} \colon [0,1] \times B \to X,$$

que é contínua e, se $u \in B$ então $u \in A$ ou $u \in (B \setminus A)$. Se $u \in A$, então $(0,u), (1,u) \in N$ e

$$\phi(0,u) = g(0,u) = f(0,u) = u;$$

$$\phi(1,u) = g(1,u) = f(1,u) = h(1,u_0),$$

e se $u \in (B \setminus A)$, então $u \in X$ de modo que $(0,u), (1,u) \in N$, assim

$$\phi(0,u) = g(0,u) = f(0,u) = u,$$

e

$$\phi(1,u) = g(1,u) = f(1,u) = h(1,u_0).$$

Em vista disso,

$$\phi(0,u) = u \text{ e } \phi(1,u) = h(1,u_0),\ \forall u \in B,$$

logo $B$ é contrátil, donde

$$\mathrm{cat}_X(B) = 1 = \mathrm{cat}_X(A).$$

Se $\mathrm{cat}_X(A) = n$, então $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, em que cada $A_i$ é fechado e contrátil, isto é, $\mathrm{cat}_X(A_i) = 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Como visto anteriormente, existe $B_i$ vizinhança fechada de $A_i$ tal que $\mathrm{cat}_X(B_i) = \mathrm{cat}_X(A_i)$. Definindo $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, temos $B$ vizinhaça fechada de $A$ com cada $B_i,\ i = 1, 2, \ldots n$, contrátil, donde

$$\mathrm{cat}_X(B) \leq n = \mathrm{cat}_X(A). \tag{3.1}$$

Por outro lado, $A \subset B$ implica $A \prec_{\emptyset} B$. De fato, tomando

$$\begin{aligned} \psi: \ [0,1] \times A &\longrightarrow X \\ (t,u) &\longmapsto \psi(t,u) = u, \end{aligned}$$

temos $\psi$ contínua e,

$$\psi(0,u) = u,\ \psi(1,u) = u \in B,\ \forall u \in A.$$

Logo, do item (c) da Proposição 3.9,

$$\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_{X,\emptyset}(A) \leq \mathrm{cat}_{X,\emptyset}(B) = \mathrm{cat}_X(B). \tag{3.2}$$

Pelas desigualdades (3.1) e (3.2) obtemos

$$\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_X(B).$$

■

# Capítulo 4

# Multiplicidade de soluções para $(P_\mu)$

Neste capítulo, seguindo [1] estudaremos a multiplicidade de soluções para o problema elíptico crítico $(P_\mu)$, enunciado no Capítulo 2, fazendo uso da teoria de categoria desenvolvida no Capítulo 3.

O resultado principal deste capítulo é dado pelo seguinte:

**Teorema 4.1.** *Seja $\Omega$ um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq p^2$ e $2 \leq p < q < p^*$. Então existe $\mu^* > 0$ tal que, para cada $\mu \in (0, \mu^*)$, o problema $(P_\mu)$ possui, pelo menos, $cat_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.*

## 4.1 Preliminares

Considere a variedade de Nehari associada ao funcional $I_\mu$,

$$\mathcal{N}_\mu = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : I'_\mu(u)u = 0\}.$$

**Proposição 4.2.** *O número $c_\mu = \inf\{I_\mu(u) : u \in \mathcal{N}_\mu\}$ está bem definido.*

*Demonstração.* Basta mostrarmos que $I_\mu(u)$ é limitado inferiormente na variedade $\mathcal{N}_\mu$. Dado $u \in \mathcal{N}_\mu$ temos $u \neq 0$ e

$$I'_\mu(u)u = \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \mu \int_\Omega (u^+)^q dx - \int_\Omega (u^+)^{p^*} dx = 0,$$

ou seja,

$$\|u\|^p = \mu |u^+|_q^q + |u^+|_{p^*}^{p^*}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\mu}{q}|u^+|_q^q - \frac{1}{p^*}|u^+|_{p^*}^{p^*} = \frac{1}{p}\left(\mu|u^+|_q^q + |u^+|_{p^*}^{p^*}\right) - \frac{\mu}{q}|u^+|_q^q - \frac{1}{p^*}|u^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \mu|u^+|_q^q\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) + |u^+|_{p^*}^{p^*}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right), \end{aligned}$$

e sendo $2 \leq p < q < p^*$ temos $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) > 0$ e $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right) > 0$, assim $I_\mu(u) > 0$. Portanto, 0 é cota inferior para o conjunto $\{I_\mu(u) : u \in \mathcal{N}_\mu\}$ donde $c_\mu$ está bem definido. ■

**Lema 4.3.** *Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ existe único $t_u \in (0, +\infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_\mu$ e*

$$\max_{t\geq 0} I_\mu(tu) = I_\mu(t_u u).$$

*Demonstração.* Dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, defina

$$\begin{aligned} f \quad : [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) = I_\mu(tu) = \frac{t^p}{p}\|u\|^p - \frac{\mu t^q}{q}|u^+|_q^q - \frac{t^{p^*}}{p^*}|u^+|_{p^*}^{p^*}. \end{aligned}$$

A função $f$ admite um ponto de máximo, ou seja, existe $t_u \in (0,\infty)$ tal que

$$\max_{t\geq 0} I_\mu(tu) = I_\mu(t_u u).$$

Observe que $t_u u \in \mathcal{N}_\mu$, pois $t_u u \neq 0$ e pelo fato de $I_\mu$, em particular, pertencer a $\mathcal{C}^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$ temos

$$f'(t_u) = 0 \Leftrightarrow I'_\mu(t_u u)u = 0 \Leftrightarrow t_u I'_\mu(t_u u)u = 0 \Leftrightarrow I'_\mu(t_u u)(t_u u) = 0.$$

Agora, $t_u$ é único pois

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^{p-1}\|u\|^p - \mu t^{q-1}|u^+|_q^q - t^{p^*-1}|u^+|_{p^*}^{p^*} = 0 \Leftrightarrow \|u\|^p = \mu t^{q-p}|u^+|_q^q + t^{p^*-p}|u^+|_{p^*}^{p^*},$$

assim, se existissem $t_1$ e $t_2$ distintos tais que $f'(t_1) = f'(t_2) = 0$, teríamos

$$\|u\|^p = \mu t_1^{q-p}|u^+|_q^q + t_1^{p^*-p}|u^+|_{p^*}^{p^*} \quad \text{e} \quad \|u\|^p = \mu t_2^{q-p}|u^+|_q^q + t_2^{p^*-p}|u^+|_{p^*}^{p^*},$$

que seria um absurdo. Logo, $f$ possui único ponto de máximo e assim $t_u$ é único. ■

**Corolário 4.4.** *Se $u \in \mathcal{N}_\mu$ então*

$$I_\mu(u) = \max_{t\geq 0} I_\mu(tu).$$

**Lema 4.5.** *Se $N \geq p^2$ e $p < q < p^*$, temos $c_\mu = \widetilde{c}_\mu$ para $\mu > 0$, em que $\widetilde{c}_\mu$ é o nível do passo da montanha de $I_\mu$ dado em (2.5).*

*Demonstração.* Do Teorema do Passo da Montanha, Teorema 2.3, existe $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I_\mu(u_n) \to \widetilde{c}_\mu \text{ e } I'_\mu(u_n) \to 0.$$

E, do Lema 2.13, $I_\mu$ satisfaz a condição $(PS)_{\widetilde{c}_\mu}$, daí existe $u_\mu \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de uma subsequência,

$$u_n \to u_\mu \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Pela continuidade de $I_\mu$ e $I'_\mu$ obtemos

$$I_\mu(u_n) \to I_\mu(u_\mu) \text{ e } I'_\mu(u_n) \to I'_\mu(u_\mu),$$

respectivamente, implicando, pela unicidade do limite, que

$$I_\mu(u_\mu) = \widetilde{c}_\mu \text{ e } I'_\mu(u_\mu) = 0.$$

Agora, observando que $I_\mu(0) = 0$ e $\widetilde{c}_\mu > 0$, temos $u_\mu \neq 0$ e assim $u_\mu \in \mathcal{N}_\mu$. Como $u_\mu \in \mathcal{N}_\mu$ e $I_\mu(u_\mu) = \widetilde{c}_\mu$, então

$$c_\mu = \inf_{u\in\mathcal{N}_\mu} I_\mu(u) \leq I_\mu(u_\mu) = \widetilde{c}_\mu. \tag{4.1}$$

Por outro lado, dado $v \in \mathcal{N}_\mu$ temos, pelo Corolário 4.4,

$$I_\mu(v) = \max_{t\geq 0} I_\mu(tv) \geq \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_\mu(tu) = \widetilde{c}_\mu,$$

ou seja, $\widetilde{c}_\mu$ é uma cota inferior para o conjunto $\{I_\mu(u) : u \in \mathcal{N}_\mu\}$ e como $c_\mu$ é a maior das cotas inferiores deste conjunto, segue

$$c_\mu = \inf_{u\in\mathcal{N}_\mu} I_\mu(u) \geq \widetilde{c}_\mu. \tag{4.2}$$

Logo, de (4.1) e (4.2) concluímos que

$$c_\mu = \widetilde{c}_\mu.$$

■

**Lema 4.6.** *Se $\mu_2 \leq \mu_1$ então $c_{\mu_1} \leq c_{\mu_2}$, isto é, $c_\mu$ é não-crescente em $\mu$.*

*Demonstração.* O funcional $I_\mu$ nos dá que, se $\mu_2 \leq \mu_1$ então para quaisquer $t \in [0, \infty)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ temos

$$I_{\mu_1}(tu) \leq I_{\mu_2}(tu),$$

logo

$$\max_{t\geq 0} I_{\mu_2}(tu) \geq \max_{t\geq 0} I_{\mu_1}(tu) \geq \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_{\mu_1}(tu) = \widetilde{c}_{\mu_1},$$

e pelo Lema 4.5 obtemos

$$c_{\mu_2} = \widetilde{c}_{\mu_2} = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_{\mu_2}(tu) \geq \widetilde{c}_{\mu_1} = c_{\mu_1},$$

como queríamos demonstrar. ■

**Proposição 4.7.** *O funcional*

$$I_0(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p^*}\int_\Omega (u^+)^{p^*} dx,$$

*satisfaz a geometria do passo da montanha.*

*Demonstração.* Análoga à demonstração do Lema 2.10. ■

**Proposição 4.8.** *Para qualquer $\Lambda > 0$ existe $\rho = \rho(\Lambda)$, relacionado a geometria do passo da montanha, tal que*

$$0 < \rho \leq c_\mu \leq c_0, \ \forall \mu \in [0, \Lambda],$$

*em que $c_0$ é o nível do passo da montanha associado ao funcional $I_0$.*

*Demonstração.* Dado $t \in [0, \infty)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, como $\mu > 0$ temos

$$I_\mu(tu) \leq I_0(tu),$$

donde

$$\max_{t\geq 0} I_0(tu) \geq \max_{t\geq 0} I_\mu(tu) \geq \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_\mu(tu) = \widetilde{c}_\mu,$$

ou seja, $\widetilde{c_\mu}$ é uma cota inferior para o conjunto $\{\max_{t\geq 0} I_0(tu) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}\}$. Usando o Lema 4.5 e a definição de ínfimo, temos

$$c_0 = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_0(tu) \geq \widetilde{c}_\mu = c_\mu. \tag{4.3}$$

Agora, se $\mu \in [0, \Lambda]$, então $\mu \leq \Lambda$ e, pelo Lema 4.6,

$$c_\Lambda \leq c_\mu. \tag{4.4}$$

Como $I_\Lambda$ satisfaz a geometria do passo da montanha, sejam $\rho > 0$ e $r > 0$ tais que

$$\rho = \inf_{\|u\|=r} I_\Lambda(u),$$

logo, $I_\Lambda(u) \geq \rho$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\| = r$. Observe que $\rho$ é cota inferior para o conjunto $\{\max_{t\geq 0} I_\Lambda(tu) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}\}$. De fato, dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, existe $t_0 > 0$ em $\mathbb{R}$ tal que $\|t_0 u\| = r$, daí

$$I_\Lambda(t_0 u) \geq \rho,$$

então

$$\max_{t\geq 0} I_\Lambda(tu) \geq I_\Lambda(t_0 u) \geq \rho.$$

Portanto, novamente pelo Lema 4.5,

$$c_\Lambda = \widetilde{c}_\Lambda = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_\Lambda(tu) \geq \rho. \tag{4.5}$$

Por (4.3), (4.4) e (4.5) obtemos

$$0 < \rho \leq c_\Lambda \leq c_\mu \leq c_0.$$

■

Apresentemos agora as seguintes funções. Dado $r > 0$, seja $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função não negativa que satisfaça $\operatorname{supp}\psi \subset B_r(0)$ e $\psi \equiv 1$ em $B_{r/2}(0)$. Para $\varepsilon > 0$ seja

$$u_\varepsilon(x) = \frac{C_N \psi(x) \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)}}{\left[\varepsilon^{p/(p-1)} + |x|^{p/(p-1)}\right]^{(N-p)/p}},$$

com

$$C_N = \left[N\left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p-1}\right]^{(N-p)/p^2}.$$

Segundo [14] ou [21] temos as seguintes estimativas:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^p \, dx = S^{N/p} + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^{p^*}\,dx = S^{N/p} + O(\varepsilon^{N/(p-1)}).$$

Seja

$$v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{|u_\varepsilon|_{p^*}}, \tag{4.6}$$

então $v_\varepsilon$ é radial, não negativa e satisfaz

$$\|v_\varepsilon\|^p \leq S + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}). \tag{4.7}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon\|^p = \frac{\|u_\varepsilon\|^p}{|u_\varepsilon|^p_{p^*}} &= \frac{S^{N/p} + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{[S^{N/p} + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} = \frac{S^{N/p} + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{\left[S^{N/p}\left(1 + \dfrac{O(\varepsilon^{N/(p-1)})}{S^{N/p}}\right)\right]^{p/p^*}} \\
&= \frac{S^{N/p} + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{S^{(N-p)/p}[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} \\
&= \frac{S^{N/p}}{S^{(N-p)/p}[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} + \frac{O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{S^{(N-p)/p}[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} \\
&= \frac{S}{[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} + \frac{O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} \\
&= \frac{S + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}},
\end{aligned}$$

e fazendo $f(t) = (1+t)^{-p/p^*}$ obtemos, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}
f(O(\varepsilon^{N/(p-1)})) = \frac{1}{[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} &= 1 - \frac{p}{p^*}(1+\theta)^{(-p/p^*)-1}O(\varepsilon^{N/(p-1)}) \\
&= 1 - O(\varepsilon^{N/(p-1)}),\ \theta \in \left(0, O(\varepsilon^{N/(p-1)})\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon\|^p &= \frac{S + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})}{[1 + O(\varepsilon^{N/(p-1)})]^{p/p^*}} = [S + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})][1 - O(\varepsilon^{N/(p-1)})] \\
&= S - O(\varepsilon^{N/(p-1)}) + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}) - O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)})O(\varepsilon^{N/(p-1)}) \\
&\leq S + O(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}).
\end{aligned}$$

**Lema 4.9.** $c_0 = \dfrac{S^{N/p}}{N}$.

*Demonstração.* Seja $v_\varepsilon$ definida em (4.6). Sendo $|v_\varepsilon|_{p^*} = 1$ obtemos, pelas

desigualdades $S \leq \|v_\varepsilon\|^p$ e (4.7), que

$$\|v_\varepsilon\|^p \to S, \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{4.8}$$

Defina

$$\begin{aligned} g : [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) = I_0(tv_\varepsilon) = \frac{t^p}{p}\|v_\varepsilon\|^p - \frac{t^{p^*}}{p^*}|v_\varepsilon|_{p^*}^{p^*}, \end{aligned}$$

e note que $g$ assume máximo, donde existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$g'(t_\varepsilon) = t_\varepsilon^{p-1}\|v_\varepsilon\|^p - t_\varepsilon^{p^*-1}|v_\varepsilon|_{p^*}^{p^*} = I_0'(t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon = 0.$$

Daí,

$$t_\varepsilon^{p-1}(\|v_\varepsilon\|^p - t_\varepsilon^{p^*-p}) = 0 \Rightarrow t_\varepsilon^{p^*-p} = \|v_\varepsilon\|^p \Rightarrow t_\varepsilon = \|v_\varepsilon\|^{p/(p^*-p)},$$

logo,

$$\frac{1}{N}t_\varepsilon^{p^*} = \frac{1}{N}(\|v_\varepsilon\|^{p/(p^*-p)})^{p^*} = \frac{1}{N}\|v_\varepsilon\|^{pp^*/(p^*-p)} = \frac{1}{N}(\|v_\varepsilon\|^p)^{N/p}$$

e com isso,

$$\begin{aligned} c_0 &= \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_0(tu) \leq \max_{t\geq 0} I_0(tv_\varepsilon) = I_0(t_\varepsilon v_\varepsilon) = \frac{t_\varepsilon^p}{p}\|v_\varepsilon\|^p - \frac{t_\varepsilon^{p^*}}{p^*}|v_\varepsilon|_{p^*}^{p^*} \\ &= \frac{t_\varepsilon^{p+(p^*-p)}}{p} - \frac{t_\varepsilon^{p^*}}{p^*} = \frac{1}{N}t_\varepsilon^{p^*} = \frac{1}{N}(\|v_\varepsilon\|^p)^{N/p}. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, de (4.8), obtemos

$$\frac{1}{N}(\|v_\varepsilon\|^p)^{N/p} \to \frac{1}{N}S^{N/p},$$

ou seja, tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$ temos

$$c_0 \leq \frac{1}{N}S^{N/p}. \tag{4.9}$$

Por outro lado, pela Proposição 4.7, o funcional $I_0$ satisfaz a geometria do passo da montanha, logo existe $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ verificando

$$I_0(u_n) \to c_0 \text{ e } I_0'(u_n) \to 0.$$

Afirmamos que a sequência $(u_n)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, para $n$ suficientemente

grande, temos

$$I_0(u_n) \leq c_0 + 1,$$

e como

$$-\frac{1}{p^*}I_0'(u_n)(u_n) \leq \left|-\frac{1}{p^*}I_0'(u_n)(u_n)\right| \leq \frac{1}{p^*}\|I_0'(u_n)\|\|u_n\|$$

e $\|I_0'(u_n)\| \to 0$, para $n$ suficientemente grande, temos $\frac{1}{p^*}\|I_0'(u)\| \ll 1$ donde

$$-\frac{1}{p^*}I_0'(u_n)(u_n) \leq \|u_n\|.$$

Logo, para $n$ suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned} c_0 + 1 + \|u_n\| &\geq I_0(u_n) - \frac{1}{p^*}I_0'(u_n)(u_n) = \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{1}{p^*}|{u_n}^+|_{p^*}^{p^*} - \frac{1}{p^*}\|u_n\|^p + \frac{1}{p^*}|{u_n}^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\|u_n\|^p. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que $(u_n)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ pois, caso contrário, a menos de uma subsequência, teríamos $\|u_n\| \to \infty$ e daí

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \leq \frac{c_0 + 1}{\|u_n\|^p} + \frac{1}{\|u_n\|^{p-1}} \to 0,$$

o que seria um absurdo. Desse modo, a menos de uma subsequência, podemos assumir $\|u_n\|^p \to l$ para algum $l \in (0, +\infty)$, visto que, de

$$\|{u_n}^-\|^p = I_0'(u_n)({u_n}^-) \to 0$$

podemos assumir $u_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e ainda, se tivéssemos $\|u_n\|^p \to 0$ então pela imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ teríamos a existência de $\alpha_1 > 0$ tal que

$$|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \leq |u_n|_{p^*}^{p^*} \leq \alpha_1\|u_n\|^{p^*} = \alpha_1(\|u_n\|^p)^{p^*/p} \to 0 \Rightarrow |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \to 0,$$

donde,

$$I_0(u_n) = \frac{1}{p}\|u_n\|^p + \frac{1}{p^*}|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \to 0,$$

nos dando um absurdo, já que $c_0 > 0$. Logo, de

$$I_0'(u_n)u_n = \|u_n\|^p - |u_n|_{p^*}^{p^*} \to 0 \ \text{ e } \ \|u_n\|^p \to l \text{ com } l > 0,$$

obtemos

$$|u_n|_{p^*}^{p^*} \to l. \tag{4.10}$$

Considerando $v_n = \dfrac{u_n}{|u_n|_{p^*}}$, temos $|v_n|_{p^*} = 1$ e

$$S \leq \|v_n\|^p = \frac{\|u_n\|^p}{|u_n|_{p^*}^p} \to l^{p/N},$$

isto é,

$$S \leq l^{p/N}. \tag{4.11}$$

Agora, sabemos que

$$I_0(u_n) = \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{1}{p^*}|u_n|_{p*}^{p^*} \to c_0$$

mas, de (4.10), temos

$$\frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{1}{p^*}|u_n|_{p*}^{p^*} \to \frac{l}{p} - \frac{l}{p^*} = \frac{l}{N},$$

e assim $l = c_0 N$, donde concluímos por (4.11) que

$$(Nc_0)^{p/N} \geq S \Rightarrow c_0 \geq \frac{S^{N/p}}{N}. \tag{4.12}$$

Portanto, das desigualdades (4.9) e (4.12) obtemos

$$c_0 = \frac{S^{N/p}}{N}.$$

■

**Observação 4.10.** *a) Se $G$ é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, o nível do passo da montanha relacionado aos funcionais*

$$I_{0,G}(u) = \frac{1}{p}\int_G |\nabla u|^p\,dx - \frac{1}{p^*}\int_G (u^+)^{p^*}\,dx$$

*e*

$$\widetilde{I}_{0,G}(u) = \frac{1}{p}\int_G |\nabla u|^p\,dx - \frac{1}{p^*}\int_G |u|^{p^*}\,dx$$

*é $\dfrac{S^{N/p}}{N}$, isto é, o nível do passo da montanha de $I_{0,G}$ independe do domínio $G$.*

*b) Vimos na demonstração do Lema 2.11 que podemos assumir que todas as sequências de Palais-Smale de $I_\mu$ são não negativas.*

**Lema 4.11.** *Se $\mu_n \to 0$, então $c_{\mu_n} \to c_0$.*

*Demonstração.* Sabemos que

$$c_{\mu_n} \leq c_0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $c_{\mu_n} = c_0$, o resultado segue. Para $n$ suficientemente grande, $c_{\mu_n} < c_0$, então pelos Lemas 2.13 e 4.9 $I_\mu$ satisfaz a condição $(PS)_{c_{\mu_n}}$. Logo, pelo Lema 4.5, para cada $n$ natural, existe uma sequência $(u_k) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \geq 0$ ,

$$I_{\mu_n}(u_k) \to c_{\mu_n} \ \text{ e } \ I'_{\mu_n}(u_k) \to 0, \ \text{quando } k \to +\infty.$$

Além disso, a menos de uma subsequência, para cada $n$ existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \to u_n$, quando $k \to +\infty$, em $W_0^{1,p}(\Omega)$, daí,

$$I_{\mu_n}(u_k) \to I_{\mu_n}(u_n) \text{ e } I'_{\mu_n}(u_k) \to I'_{\mu_n}(u_n), \ \text{quando } k \to +\infty.$$

Portanto, a sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é tal que $u_n \geq 0$ e satisfaz

$$I_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n} \text{ e } I'_{\mu_n}(u_n) = 0$$

e, adaptando a demonstração do Lema 4.3, existe $(t_n) \subset (0, +\infty)$ tal que $t_n u_n \in \mathcal{N}_0 = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : I'_0(u)u = 0\}$ e $I_0$ atinge máximo em $t_n u_n$. Note que,

$$\begin{aligned} c_0 &= \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} I_0(tu) \leq \max_{t \geq 0} I_0(tu_n) = I_0(t_n u_n) = I_{\mu_n}(t_n u_n) + \frac{\mu_n}{q} \int_\Omega [(t_n u_n)^+]^q \, dx \\ &= I_{\mu_n}(t_n u_n) + \frac{\mu_n {t_n}^q}{q} \int_\Omega (u_n)^q \, dx = I_{\mu_n}(t_n u_n) + \frac{\mu_n {t_n}^q}{q} |u_n|_q^q. \end{aligned}$$

Como $I'_{\mu_n}(u_n) = 0$ então $I'_{\mu_n}(u_n)u_n = 0$ e, consequentemente, $u_n \in \mathcal{N}_{\mu_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, logo

$$I_{\mu_n}(t_n u_n) \leq \max_{t \geq 0} I_{\mu_n}(tu_n) = I_{\mu_n}(u_n) = c_{\mu_n},$$

e com isso,

$$c_0 \leq c_{\mu_n} + \frac{\mu_n {t_n}^q}{q} |u_n|_q^q. \tag{4.13}$$

A sequência $(t_n)$ é limitada. De fato, suponha por contradição que, a menos de uma subsequência, $t_n \to \infty$. Sendo $c_{\mu_n} \leq c_0$ então $(u_n)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ pois,

$$\begin{aligned} c_{\mu_n} &= I_{\mu_n}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\mu_n}(u_n)u_n \\ &= \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{\mu_n}{q}|u_n^+|_q^q - \frac{1}{p^*}|u_n^+|_{p^*}^{p^*} - \frac{1}{q}\|u_n\|^p + \frac{\mu_n}{q}|u_n^+|_q^q + \frac{1}{q}|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|^p + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right)|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \leq c_0. \end{aligned}$$

E, como $t_n u_n \in \mathcal{N}_0$ temos $\max_{t\geq 0} I_0(tu_n) = I_0(t_n u_n)$, ou seja,

$$\left.\frac{d}{dt} I_0(tu_n)\right|_{t=t_n} = 0 \Rightarrow \|u_n\|^p = {t_n}^{p^*-p}|u_n|_{p^*}^{p^*},$$

donde $|u_n|_{p^*}^{p^*} \to 0$, quando $n \to \infty$. Daí, pela desigualdade de interpolação (Proposição A.8), $|u_n|_q^q \to 0$. Além disso, de $I'_{\mu_n}(u_n)u_n = 0$, obtemos

$$\|u_n\|^p = \mu_n |u_n|_q^q + |u_n|_{p^*}^{p^*},$$

implicando que $\|u_n\|^p \to 0$ e, consequentemente, da igualdade

$$c_{\mu_n} = I_{\mu_n}(u_n) = \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{\mu_n}{q}|u_n|_q^q - \frac{1}{p^*}|u_n|_{p^*}^{p^*}$$

temos $c_{\mu_n} \to 0$, o que é um absurdo pois, sendo $(\mu_n)$ decrescente, $\mu_n < \mu_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto

$$0 < c_{\mu_1} \leq c_{\mu_n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, $(t_n)$ é limitada e por (4.13),

$$c_0 \leq \liminf_{n\to\infty}\left(c_{\mu_n} + \frac{\mu_n {t_n}^q}{q}|u_n|_q^q\right) = \liminf_{n\to\infty} c_{\mu_n} \leq \limsup_{n\to\infty} c_{\mu_n} \leq c_0,$$

e concluimos que $\lim_{n\to\infty} c_{\mu_n} = c_0$. ■

## 4.2 Teoremas Minimax

Nesta seção considere o funcional $J_\mu \in \mathcal{C}^2(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ dado por

$$J_\mu(u) = \|u\|^p - \mu\int_\Omega (u^+)^q dx - \int_\Omega (u^+)^{p^*} dx,\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.14}$$

Considere também $Y$ um subconjunto fechado de $I_\mu^d = \{u \in \mathcal{N}_\mu : I_\mu(u) \leq d\}$ com $d \in \mathbb{R}$ fixo, em que $I_\mu$ é o funcional energia associado ao problema $(P_\mu)$ e, para cada $j \geq 1$, defina

$$\mathcal{A}_j = \{A : A \subset I_\mu^d,\ A \text{ é fechado},\ Y \subset A,\ \text{cat}_{I_\mu^d, Y}(A) \geq j\},$$

e

$$c_j = \inf_{A \in \mathcal{A}_j} \sup_{u \in A} I_\mu(u).$$

**Observação 4.12.** *O numéro $c_j$ está bem definido para todo $j \geq 1$. Com efeito,*

$$I_\mu(u) \leq d,\ \forall u \in A \Rightarrow \sup_{u \in A} I_\mu(u) \leq d,$$

*e*

$$\sup_{u \in A} I_\mu(u) \geq \sup_{u \in Y} I_\mu(u),\ \forall A \in \mathcal{A}_j,$$

*donde*

$$c_j = \inf_{A \in \mathcal{A}_j} \sup_{u \in A} I_\mu(u) \geq \sup_{u \in Y} I_\mu(u).$$

**Observação 4.13.** *Se $cat_{I_\mu^d, Y}(I_\mu^d) \geq n$ então $\sup_Y I_\mu \leq c_1 \leq \ldots \leq c_n \leq d$, para todo $n \geq 1$. De fato, $cat_{I_\mu^d, Y}(I_\mu^d) \geq n$ implica $I_\mu^d \in \mathcal{A}_n$ e daí,*

$$\sup_Y I_\mu \leq c_n = \inf_{A \in \mathcal{A}_n} \sup_{u \in I_\mu^d} I_\mu(u) \leq \sup_{u \in I_\mu^d} I_\mu(u) \leq d.$$

*E sendo $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n-1} \subset \ldots \subset \mathcal{A}_1$ temos*

$$c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n,$$

*donde segue a afirmação.*

**Observação 4.14.** *Seja $P_\mu = J_\mu + 1$. Note que $\mathcal{N}_\mu = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : P_\mu(u) = 1\}$, pois $I'_\mu(u)u = J_\mu(u) = 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$. Mais ainda, $P'_\mu(u) = J'_\mu(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$. De fato, se $u \in \mathcal{N}_\mu$ então*

$$0 = I'_\mu(u)u = J_\mu(u) = \|u\|^p - \mu|u^+|_q^q - |u^+|_{p^*}^{p^*},$$

*portanto,*

$$\|u\|^p = \mu|u^+|_q^q + |u^+|_{p^*}^{p^*}.$$

*De*

$$J'_\mu(u)u = p\|u\|^p - q\mu|u^+|_q^q - p^*|u^+|_{p^*}^{p^*},$$

*obtemos*

$$\begin{aligned} J'_\mu(u)u &= p(\mu|u^+|_q^q + |u^+|_{p^*}^{p^*}) - q\mu|u^+|_q^q - p^*|u^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \mu(p-q)|u^+|_q^q + (p-p^*)|u^+|_{p^*}^{p^*} < 0, \end{aligned}$$

*donde temos o desejado.*

**Teorema 4.15.** *Se*

$$a = \sup_Y I_\mu < c = c_k = \ldots = c_{k+m} \leq d,$$

*então para todos* $\varepsilon \in (0, (c-a)/2),\ \delta > 0,\ A \in \mathcal{A}_{k+m}$ *e* $B \subset I_\mu^d$ *fechado tais que*

$$\sup_A I_\mu \leq c + \varepsilon, \quad cat_{I_\mu^d}(B) \leq m,$$

*existe* $u \in \mathcal{N}_\mu$ *tal que*

*(a)* $c - 2\varepsilon \leq I_\mu(u) \leq c + 2\varepsilon$;

*(b)* $dist(u, A \setminus int(B)) \leq 2\delta$;

*(c)* $\|I'_\mu(u)\|_* \leq \dfrac{8\varepsilon}{\delta}$,

*em que a norma do item (c) é a norma da derivada da restrição do funcional* $I_\mu$ *a* $\mathcal{N}_\mu$, *(ver Definição C.22).*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que existem $\varepsilon \in (0, (c-a)/2),\ \delta > 0,\ A \in \mathcal{A}_{k+m}$ e $B \subset I_\mu^d$ fechado tais que

$$\sup_A I_\mu \leq c + \varepsilon, \quad \mathrm{cat}_{I_\mu^d}(B) \leq m$$

tais que, para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$ com $c - 2\varepsilon \leq I_\mu(u) \leq c + 2\varepsilon$ e $\mathrm{dist}(u, A \setminus \mathrm{int}(B)) \leq 2\delta$, temos $\|I'_\mu(u)\|_* > 8\varepsilon/\delta$. Por simplicidade, façamos $S = A \setminus \mathrm{int}(B)$. Daí, podemos escrever

$$\forall u \in I_\mu^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta},\ \text{temos}\ \|I'_\mu(u)\|_* > \frac{8\varepsilon}{\delta},$$

com

$$S_{2\delta} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \mathrm{dist}(u, S) \leq 2\delta\}.$$

Temos $S \subset \mathcal{N}_\mu$, pois

$$u \in S \Rightarrow u \in A \text{ e como } A \in \mathcal{A}_{k+m} \Rightarrow A \subset I_\mu^d \subset \mathcal{N}_\mu \Rightarrow u \in \mathcal{N}_\mu.$$

Logo, pelo Lema C.24, existe $\eta \in C([0,1] \times \mathcal{N}_\mu, \mathcal{N}_\mu)$ tal que $\eta(t,u) = u$, se $t = 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$ ou se $u \notin I_\mu^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, para todo $t \in [0,1]$, e também $\eta(1, I_\mu^{c+\varepsilon} \cap S) \subset I_\mu^{c-\varepsilon}$. Dito isso, observe que:

(i) $Y \subset I_\mu^{c-\varepsilon}$:

$$u \in Y \Rightarrow I_\mu(u) \leq c - 2\varepsilon, \text{ pois } \sup_Y I_\mu = a < c - 2\varepsilon \Rightarrow I_\mu(u) \leq c - \varepsilon \Rightarrow u \in I_\mu^{c-\varepsilon}.$$

(ii) $Y \subset S = A \setminus \text{int}(B)$:
$Y \subset A$, pois $A \in \mathcal{A}_{k+m}$. Se $Y \cap \text{int}(B) = \emptyset$, segue o desejado. Caso contrário, tome $\widetilde{B} = (B \setminus Y_\alpha)$ em que $\alpha > 0$ suficientemente pequeno e $Y_\alpha = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \text{dist}(u, Y) < \alpha\}$. O conjunto $\widetilde{B}$ é fechado, está contido em $I_\mu^d$ e $\text{cat}_{I_\mu^d}(\widetilde{B}) \leq m$, pois, pela Proposição 3.9, item (c),

$$\widetilde{B} \subset B \Rightarrow \widetilde{B} \prec_\emptyset B \Rightarrow \text{cat}_{I_\mu^d}(\widetilde{B}) \leq \text{cat}_{I_\mu^d}(B) \leq m.$$

Mostremos que $Y \cap \text{int}(\widetilde{B}) = \emptyset$. Note que, $Y \subset Y_\alpha \subset \overline{Y_\alpha}$ e como

$$(\text{int}(\widetilde{B}))^c = \overline{(\widetilde{B})^c} = \overline{(B \setminus Y_\alpha)^c} = \overline{(B \cap Y_\alpha^c)^c} = \overline{B^c \cup Y_\alpha} = \overline{B^c} \cup \overline{Y_\alpha},$$

então $Y \subset (\overline{B^c} \cup \overline{Y_\alpha}) = (\text{int}(\widetilde{B}))^c$, implicando que $Y \cap \text{int}(\widetilde{B}) = \emptyset$, como queríamos. De $(i)$ e $(ii)$ concluímos que $Y \subset S \cap I_\mu^{c-\varepsilon}$.

(iii) $I_\mu^{c+\varepsilon} \cap S = S$:
Se $u \in S$ então $u \in A$, daí $I_\mu(u) \leq c + \varepsilon$, pois $\sup_A I_\mu \leq c + \varepsilon$, implicando $u \in I_\mu^{c+\varepsilon}$, ou seja, $S \subset I_\mu^{c+\varepsilon}$ e assim $S = S \cap I_\mu^{c+\varepsilon}$.

(iv) $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$, em particular, $\eta(0,u) = u$, para todo $u \in S$.

(v) $u \in S = S \cap I_\mu^{c+\varepsilon} \Rightarrow \eta(1,u) \in I_\mu^{c-\varepsilon}$.

(vi) $\eta(t,Y) \subset Y$, $\forall t \in [0,1]$:
Com efeito, se $u \in Y$ então $I_\mu(u) < c - 2\varepsilon$, daí, $u \notin I_\mu^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$, e assim, $u \notin I_\mu^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ donde $\eta(t,u) = u$ para todo $t \in [0,1]$. Portanto,

$$\eta(t,Y) \subset Y, \ \forall t \in [0,1].$$

Definindo $\tau = \eta\,|_{[0,1]\times S} : [0,1] \times S \to \mathcal{N}_\mu$, concluímos que $A \setminus \text{int}(B) = S \prec_Y I_\mu^{c-\varepsilon}$. Deste modo, usando os itens (b) e (c) da Proposição 3.9, obtemos

$$A \in \mathcal{A}_{k+m} \Rightarrow k + m \ \leq \ \text{cat}_{I_\mu^d, Y}(A) = \text{cat}_{I_\mu^d, Y}([(A \setminus \text{int}(B)) \cup (A \cap B)])$$

$$\begin{aligned} &\leq \operatorname{cat}_{I_\mu^d,Y}(A \setminus \operatorname{int}(B)) + \operatorname{cat}_{I_\mu^d}(A \cap B) \\ &\leq \operatorname{cat}_{I_\mu^d,Y}(A \setminus \operatorname{int}(B)) + \operatorname{cat}_{I_\mu^d}(B) \leq \operatorname{cat}_{I_\mu^d,Y}(I_\mu^{c-\varepsilon}) + m, \end{aligned}$$

e portanto, $\operatorname{cat}_{I_\mu^d,Y}(I_\mu^{c-\varepsilon}) \geq k$. Sendo $Y \subset I_\mu^{c-\varepsilon} \subset I_\mu^d$ e $I_\mu^{c-\varepsilon}$ é fechado, então $I_\mu^{c-\varepsilon} \in \mathcal{A}_k$, e assim

$$c = c_k = \inf_{A \in \mathcal{A}_k} \sup_{u \in A} I_\mu(u) \leq \sup_{u \in I_\mu^{c-\varepsilon}} I_\mu(u) \leq c - \varepsilon,$$

o que é um absurdo. Logo, o Teorema fica provado. ■

**Definição 4.16.** *A função $I_\mu\big|_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ se toda sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que*

$$I_\mu(u_n) \to c, \quad \|I'_\mu(u_n)\|_* \to 0,$$

*admite uma subsequência convergente em $\mathcal{N}_\mu$.*

**Teorema 4.17.** *Sob a hipótese*

$$a = \sup_Y I_\mu < c = c_k = \ldots = c_{k+m} \leq d,$$

*se $I_\mu\big|_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$, então $cat_{I_\mu^d}(K_c) \geq m+1$, em que $K_c = \{u \in \mathcal{N}_\mu : I_\mu(u) = c \text{ e } \|I'_\mu(u)\|_* = 0\}$.*

*Demonstração.* Suponha que $\operatorname{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \leq m$. Pela Proposição 3.14, existe uma vizinhaça fechada $B$ de $K_c$ em $I_\mu^d$ tal que $\operatorname{cat}_{I_\mu^d}(K_c) = \operatorname{cat}_{I_\mu^d}(B) \leq m$. Pelo Teorema 4.15, existe $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que

$$I_\mu(u_n) \to c, \quad dist(u_n, A_n \setminus \operatorname{int}(B)) \to 0 \quad \text{e} \quad \|I'_\mu(u_n)\|_* \to 0,$$

em que $A_n \in \mathcal{A}_{k+m}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, existe $u \in \mathcal{N}_\mu$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_n \to u$ em $\mathcal{N}_\mu$. Em particular, $I_\mu \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ então

$$I_\mu(u_n) \to I_\mu(u), \ \ \|I'_\mu(u_n)\|_* \to \|I'_\mu(u)\|_* \,\text{em}\, \mathbb{R}.$$

Da unicidade do limite, $I_\mu(u) = c$ e $\|I'_\mu(u)\|_* = 0$ implicando que $u \in K_c$. Além disso,

$$A_n \subset I_\mu^d \Rightarrow A_n \setminus \operatorname{int}(B) \subset I_\mu^d \setminus \operatorname{int}(B)$$

daí,

$$\operatorname{dist}(u_n, A_n \setminus \operatorname{int}(B)) \to 0 \Rightarrow \operatorname{dist}(u_n, I_\mu^d \setminus \operatorname{int}(B)) \to 0 \Rightarrow \operatorname{dist}(u, I_\mu^d \setminus \operatorname{int}(B)) = 0$$

e, sendo $(I_\mu^d \setminus \text{int}(B))$ fechado, temos $u \in (I_\mu^d \setminus \text{int}(B))$. Logo, $u \in K_c$ e $u \in (I_\mu^d \setminus \text{int}(B))$ implicando que $u \in K_c$ e $u \notin \text{int}(B)$, o que é um absurdo, pois $K_c \subset \text{int}(B)$. Portanto, $\text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \geq m+1$, como queríamos. ■

**Teorema 4.18.** *Se* $\sup_Y I_\mu < c_1$ *e* $I_\mu\big|_{\mathcal{N}_\mu}$ *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *para todo* $c \in [c_1, d]$, *então* $I_\mu^{-1}([c_1,d])$ *contém, pelo menos,* $cat_{I_\mu^d,Y}(I_\mu^d)$ *pontos críticos de* $I_\mu\big|_{\mathcal{N}_\mu}$ *.(ver item (c), Definição C.22).*

*Demonstração.* Se $\text{cat}_{I_\mu^d,Y}(I_\mu^d) = n$, pela Observação 4.13, obtemos

$$\sup_Y I_\mu < c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n \leq d.$$

Pelo Teorema 4.17, $\text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \geq m+1 = n-1+1 = n$. Se $c \in [c_1,d]$, então $K_c \subset I_\mu^{-1}([c_1,d])$, daí, $K_c \prec_\emptyset I_\mu^{-1}([c_1,d])$ e com isso

$$\text{cat}_{I_\mu^d}(I_\mu^{-1}([c_1,d])) \geq \text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \geq n = \text{cat}_{I_\mu^d,Y}(I_\mu^d).$$

Se $K_c$ é infinito, então $I_\mu^{-1}([c_1,d])$ contém infinitos pontos críticos. E, se $K_c$ é finito e $\text{cat}_{I_\mu^d}(K_c) \geq n$ então, pela Proposição 3.7, $K_c$ possui, pelo menos, $n$ pontos críticos. Logo, de $K_c \subset I_\mu^{-1}([c_1,d])$ concluímos que $I_\mu^{-1}([c_1,d])$ contém, no mínimo, $n$ pontos críticos de $I_\mu\big|_{\mathcal{N}_\mu}$. ■

**Teorema 4.19.** *Se* $I_\mu\big|_{\mathcal{N}_\mu}$ *é limitado inferiormente e satisfaz a condição* $(PS)_c$, *para todo* $c \in [\inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu, d]$, *então* $I_\mu\big|_{\mathcal{N}_\mu}$ *tem um mínimo e* $I_\mu^d$ *possui, pelo menos,* $cat_{I_\mu^d}(I_\mu^d)$ *pontos críticos de* $I_\mu\big|_{\mathcal{N}_\mu}$.

*Demonstração.* Mostremos que $c_1 = \inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu$. Fazendo $Y = \emptyset$, observe que

$$\mathcal{A}_1 = \{A : A \subset I_\mu^d, A \text{ é fechado}, \text{cat}_{I_\mu^d}(A) \geq 1\} = \{A : A \subset I_\mu^d, A \text{ é fechado e não vazio}\}.$$

Note que, dado $u \in I_\mu^d$ temos $I_\mu(u) \geq c_1$ pois, fazendo $A = \{u\}$ então $A \subset I_\mu^d$ e

$$c_1 = \inf_{A \in \mathcal{A}_1} \sup_{u \in A} I_\mu(u) \leq \sup_{v \in \{u\}} I_\mu(v) = I_\mu(u).$$

Logo, $\alpha := \inf_{I_\mu^d} I_\mu \geq c_1$. Por outro lado, tomando $(u_n) \subset I_\mu^d$ tal que $I_\mu(u_n) \to c_1$ temos

$$c_1 \geq \inf_{u \in \{u_n\}} I_\mu(u) \geq \inf_{I_\mu^d} I_\mu = \alpha,$$

e portanto, $c_1 = \alpha$. Escreva agora, $\beta = \inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu$. Como $I_\mu^d \subset \mathcal{N}_\mu$ então $\beta \leq \alpha$ e também $d \geq c_1 = \alpha \geq \beta$ implica que $\beta \leq d$. Observe que, se $\beta = d$ então

$$\alpha = \inf_{I_\mu^d} I_\mu \leq \sup_{I_\mu^d} I_\mu \leq d = \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta.$$

Se $\beta < d$, seja $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que $I_\mu(u_n) \to \beta$. Para $n$ suficientemente grande, $I_\mu(u_n) \leq d$, ou seja, $(u_n) \subset I_\mu^d$ e assim, para $n$ suficientemente grande,

$$\beta = \inf_{u \in \{u_n\}} I_\mu(u) \geq \inf_{I_\mu^d} I_\mu = \alpha.$$

Desta forma, em ambos os casos, temos $\beta \geq \alpha$ donde $\beta = \alpha$. Com isso, concluímos que

$$c_1 = \alpha = \beta = \inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu.$$

Como $I_\mu \big|_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in [\inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu, d] = [c_1, d]$ então, pelo Teorema 4.18, $I_\mu^{-1}([c_1, d]) = I_\mu^{-1}((-\infty, d]) = I_\mu^d$ contém, pelo menos, $\mathrm{cat}_{I_\mu^d, \emptyset}(I_\mu^d) = \mathrm{cat}_{I_\mu^d}(I_\mu^d)$ pontos críticos de $I_\mu \big|_{\mathcal{N}_\mu}$. E, pelo Teorema 4.17, como $I_\mu \big|_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_{c_1}$ temos $\mathrm{cat}_{I_\mu^d}(K_{c_1}) \geq 1$, ou seja, existe $u \in K_{c_1}$ tal que $I_\mu(u) = c_1 = \inf_{\mathcal{N}_\mu} I_\mu$ e $\|I'_\mu(u)\|_* = 0$, donde $u$ é ponto de mínimo de $I_\mu \big|_{\mathcal{N}_\mu}$. ∎

## 4.3 Lemas Técnicos

Nesta seção, exibiremos e provaremos lemas cruciais para a prova do Teorema principal, enunciado no início deste capítulo.

**Lema 4.20.** *Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência de funções não negativas tal que $|u_n|_{p^*} = 1$ e $\|u_n\|^p \to S$. Então existe uma sequência $(y_n, \lambda_n) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ tal que*

$$v_n(x) = \lambda_n^{(N-p)/p} u_n(\lambda_n x + y_n)$$

*admite uma subsequência convergente, denotada novamente por $(v_n)$, tal que $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $v(x) > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Além disso,*

$$\lambda_n \to 0 \text{ e } y_n \to y \in \overline{\Omega}.$$

*Demonstração.* Como $W_0^{1,p}(\Omega) = \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, a demonstração da primeira parte segue de forma análoga à demonstração do Teorema 1.3. Mostremos

a segunda parte. Suponha, por contradição, que $\lambda_n \to \infty$. Escrevendo $\Omega_n = \dfrac{(\Omega - y_n)}{\lambda_n}$, note que

$$\int_{\Omega_n} |v_n|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda^{(N-p)/p} u_n(\lambda_n x + y_n)|^p dx = \lambda_n^{N-p} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(\lambda_n x + y_n)|^p dx.$$

Usando mudança de variáveis, obtemos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = \frac{\lambda_n^{N-p}}{\lambda_n^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(z)|^p dz = \frac{1}{\lambda_n^p} |u_n|_p^p \leq \frac{M}{\lambda_n^p} \to 0,$$

pois $(u_n)$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^N)$. A menos de uma subsequência, $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ então da Proposição C.21 obtemos

$$0 = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \geq 0,$$

implicando que $v = 0$, o que nos da um absurdo, visto que $|v_n|_{p^*} = 1$, $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e pela imersão de Sobolev, $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$|v_n|_{p^*} \to |v|_{p^*}.$$

Logo, $\lambda_n \to \lambda_0 \geq 0$. Agora, se, a menos de uma subsequência, $|y_n| \to \infty$ então

$$|\lambda_n x + y_n| \geq |y_n| - \lambda_n |x| \to \infty \ \forall x \in \Omega,$$

donde, para $n$ suficientemente grande, $u_n(\lambda_n x - y_n) = 0$ implicando que $|u_n|_{p^*} = 0$, o que é um absurdo, assim $y_n \to y \in \mathbb{R}^N$. Suponha agora que $\lambda_n \to \lambda_0 > 0$, daí,

$$\Omega_n = \frac{\Omega - y_n}{\lambda_n} \to \frac{\Omega - y}{\lambda_0} = \widetilde{\Omega} \neq \mathbb{R}^N.$$

Com isso, $|v|_{p^*,\widetilde{\Omega}} = 1$ e $\|v\|^p = S$, ou seja, $v$ assume a melhor constante de Sobolev em $\widetilde{\Omega}$, o que, pela Proposição 1.6, não é possível. Portanto, $\lambda_n \to 0$. Supondo que $y \notin \overline{\Omega}$, como

$$\lambda_n x + y_n \to y, \ \forall x \in \Omega,$$

para $n$ suficientemente grande $\lambda_n x + y_n \notin \overline{\Omega}$, donde $u_n(\lambda_n x + y_n) = 0$ e daí $|u_n|_{p^*} = 0$, o que é um absurdo. Desta maneira, $y \in \overline{\Omega}$, como queríamos demonstrar. ■

Desde que $\Omega$ é um domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^N$, podemos escolher $r > 0$

suficientemente pequeno tal que

$$\Omega_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \Omega) \leq r\}$$

e

$$\Omega_r^- = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

sejam homotopicamente equivalentes a $\Omega$ (ver Definição C.2) e, sem perda de generalidade, podemos assumir $B_r = B(0, r) \subset \Omega$.

Seja agora

$$W_{0,rad}^{1,p}(B_r) = \{u \in W_0^{1,p}(B_r) : u \text{ é radial}\}$$

e defina

$$m(\mu) = \inf\{I_{\mu,B_r}(u) : u \in \mathcal{N}_{\mu,B_r}\}$$

em que

$$I_{\mu,B_r}(u) = \frac{1}{p}\int_{B_r} |\nabla u|^p \, dx - \frac{\mu}{q}\int_{B_r} (u^+)^q \, dx - \frac{1}{p^*}\int_{B_r} (u^+)^{p^*} \, dx$$

e

$$\mathcal{N}_{\mu,B_r} = \{u \in W_{0,rad}^{1,p}(B_r) \setminus \{0\} : I'_{\mu,B_r}(u)u = 0\}.$$

Como na Proposição 4.2, o número $m(\mu)$ está bem definido. Além disso, $m(\mu)$ é não crescente em $\mu$. Denote por $\widetilde{m}(\mu)$ o nível do passo da montanha associado ao funcional $I_{\mu,B_r}$ em $W_{0,rad}^{1,p}(B_r)$. Note que, $\widetilde{m}(\mu) > 0$ para todo $\mu \geq 0$.

**Lema 4.21.** *Suponha $N \geq p^2$ e $p < q < p^*$. Temos:*

*(a) $I_{\mu,B_r}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, S^{N/p}/N)$ em $W_{0,rad}^{1,p}(B_r)$. Mais ainda, $\widetilde{m}(\mu) \in (0, S^{N/p}/N)$ para $\mu > 0$;*

*(b) $m(\mu) = \widetilde{m}(\mu)$;*

*(c) $m(\mu) \to S^{N/p}/N$ quando $\mu \to 0$.*

*Demonstração.* Seguindo de forma análoga as demonstrações dos Lemas 2.13, 4.5 e 4.11 temos, respectivamente, os itens (a), (b) e (c). ■

Defina agora a aplicação

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{N}_\mu &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ u &\longmapsto \beta(u) = \frac{1}{S^{N/p}}\int_\Omega (u^+)^{p^*} x \, dx, \end{aligned} \tag{4.15}$$

e o conjunto

$$I_\mu^{m(\mu)} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : I_\mu(u) \leq m(\mu)\}.$$

Observe que a aplicação $\beta$ é contínua. De fato, como

$$\beta(u) = \left( \frac{1}{S^{N/p}} \int_\Omega (u^+)^{p^*} x_i dx \right)_{i=1}^N = (\beta_i(u))_{i=1}^N,$$

basta mostrarmos que $\beta_i$ é contínua para cada $i = 1, \ldots, N$. Seja $u_n \to u$ em $\mathcal{N}_\mu$, note que, para $i = 1, \ldots, N$, temos

$$\begin{aligned} |\beta_i(u_n) - \beta_i(u)| &= \frac{1}{S^{N/p}} \left| \int_\Omega (u_n^+)^{p^*} x_i \, dx - \int_\Omega (u^+)^{p^*} x_i \, dx \right| \\ &= \frac{1}{S^{N/p}} \left| \int_\Omega [(u_n^+)^{p^*} - (u^+)^{p^*}] x_i \, dx \right| \\ &\leq \frac{1}{S^{N/p}} \int_\Omega |(u_n^+)^{p^*} - (u^+)^{p^*}||x_i| dx \leq \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{S^{N/p}} \int_\Omega |(u_n^+)^{p^*} - (u^+)^{p^*}| dx, \end{aligned}$$

pois $0 \in \Omega$. Como $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pela imersão de Sobolev, $u_n \to u$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Logo, $u_n^+ \to u^+$ em $L^{p^*}(\Omega)$ implicando $(u_n^+)^{p^*} \to (u^+)^{p^*}$ em $L^1(\Omega)$ e, consequentemente $(u_n^+)^{p^*}$ é limitada em $L^1(\Omega)$. Além disso, a menos de uma subsequência, $(u_n^+)^{p^*} \to (u^+)^{p^*}$ q.t.p. em $\Omega$. Daí, aplicando o Lema C.12, obtemos $|(u_n^+)^{p^*} - (u^+)^{p^*}|_1 \to 0$ donde

$$|\beta_i(u_n) - \beta_i(u)| \leq \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{S^{N/p}} |(u_n^+)^{p^*} - (u^+)^{p^*}|_1 \to 0,$$

e assim $\beta$ é contínua.

**Lema 4.22.** *Existe $\mu^* > 0$ tal que, se $\mu \in (0, \mu^*)$ e $u \in \mathcal{N}_\mu \cap I_\mu^{m(\mu)}$, então $\beta(u) \in \Omega_r^+$.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que para todo $\mu > 0$, existem $\overline{\mu} \in (0, \mu)$ e $\overline{u} \in \mathcal{N}_{\overline{\mu}} \cap I_{\overline{\mu}}{}^{m(\overline{\mu})}$ tal que $\beta(\overline{u}) \notin \Omega_r^+$. Em termos de sequência, existem $\mu_n \to 0$, $u_n \in \mathcal{N}_{\mu_n} \cap I_{\mu_n}^{m(\mu_n)}$ tal que $\beta(u_n) \notin \Omega_r^+$. Veja que

$$\begin{aligned} c_{\mu_n} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\mu_n}} I_{\mu_n}(u) &\leq I_{\mu_n}(u_n) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx - \frac{\mu_n}{q} \int_\Omega (u_n^+)^q \, dx - \frac{1}{p^*} \int_\Omega (u_n^+)^{p^*} \, dx \\ &\leq m(\mu_n), \end{aligned} \tag{4.16}$$

e

$$0 = I'_{\mu_n}(u_n) u_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx - \mu_n \int_\Omega (u_n^+)^q \, dx - \int_\Omega (u_n^+)^{p^*} \, dx. \tag{4.17}$$

Note que, do item (c) do Lema 4.21, temos $m(\mu_n) \to S^{N/p}/N$. E, sendo $(u_n)$ limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois

$$m(\mu_n) \geq I_{\mu_n}(u) - \frac{1}{q} I'_{\mu_n}(u_n) u_n = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) \int_\Omega (u_n^+)^{p^*} dx$$

$$\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|^p,$$

então pela imersão de Sobolev, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, temos $(u_n)$ limitada em $L^q(\Omega)$, e portanto, $\mu_n |u_n^+|_q^q \to 0$. Além disso, de $c_0 = S^{N/p}/N$ (Lema 4.9) e $c_{\mu_n} \to c_0$ quando $\mu_n \to 0$ (Lema 4.11), obtemos

$$c_{\mu_n} \to \frac{S^{N/p}}{N},$$

portanto, de (4.16),

$$\frac{S^{N/p}}{N} + o_n(1) \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega (u_n^+)^{p^*} dx \leq \frac{S^{N/p}}{N} + o_n(1), \tag{4.18}$$

e, por (4.17),

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx - \int_\Omega (u_n^+)^{p^*} dx = o_n(1). \tag{4.19}$$

De (4.18) e (4.19), a sequência $w_n = \dfrac{u_n}{|u_n^+|_{p^*}}$ verifica

$$|w_n^+|_{p^*} = 1 \ \text{ e } \ \int_\Omega |\nabla w_n|^p dx \to S.$$

De fato, por (4.19)

$$\|u_n\|^p - |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \to 0, \tag{4.20}$$

e sendo $(u_n)$ limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ então $\|u_n\|^p$ é limitada em $\mathbb{R}$, daí, a menos de uma subsequência, $\|u_n\|^p \to l$ para $l \in \mathbb{R}$. Assim, de (4.20),

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (u_n^+)^{p^*} dx = l$$

e, por (4.18),

$$\frac{S^{N/p}}{N} \leq \frac{l}{p} - \frac{l}{p^*} \leq \frac{S^{N/p}}{N} \Rightarrow \frac{l}{N} = \frac{S^{N/p}}{N} \Rightarrow l = S^{N/p}$$

e com isso,

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p dx = \|w_n\|^p = \frac{\|u_n\|^p}{|u_n^+|_{p^*}^p} = \frac{\|u_n\|^p}{(|u_n|_{p^*}^{p^*})^{p/p^*}} \to \frac{S^{N/p}}{(S^{N/p})^{p/p^*}} = S.$$

Dessa forma, a sequência $\widetilde{w}_n = w_n^+$ satisfaz

$$|\widetilde{w}_n|_{p^*} = 1 \ \text{ e } \ \|\widetilde{w}_n\|^p = \int_\Omega |\nabla \widetilde{w}_n|^p dx \to S,$$

já que

$$S \leq \|\widetilde{w}_n\|^p = \|w_n^+\|^p \leq \|w_n\|^p \to S.$$

Portanto, do Lema 4.20, existe $(\lambda_n, y_n) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ tal que a sequência $v_n(x) = \lambda_n^{(N-p)/p}\widetilde{w}_n(\lambda_n x + y_n)$ admite uma subsequência que converge forte para $v$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De

$$\beta(u_n) = \frac{1}{S^{N/p}}\int_\Omega (u_n^+)^{p^*} x\,dx = \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}}\int_\Omega (\widetilde{w}_n)^{p^*}(x)x\,dx,$$

e fixando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\varphi(x) = x$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos

$$\begin{aligned}
\beta(u_n) &= \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}}\int_\Omega (\widetilde{w}_n)^{p^*}(z)z\,dz = \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}}\int_\Omega (\widetilde{w}_n)^{p^*}(z)\varphi(z)\,dz \\
&= \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}}\int_{\mathbb{R}^N} (\widetilde{w}_n)^{p^*}(z)\varphi(z)\,dz \\
&= \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}}\int_{\mathbb{R}^N} (\widetilde{w}_n)^{p^*}(\lambda_n x + y_n)\varphi(\lambda_n x + y_n)\lambda_n^N\,dx \\
&= \frac{|u_n^+|_{p^*}^{p^*}}{S^{N/p}}\int_{\mathbb{R}^N} (v_n)^{p^*}(x)\varphi(\lambda_n x + y_n)\,dx. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Observe que $|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \to S^{N/p}$ e sendo $|v_n|_{p^*} = |\widetilde{w}_n|_{p^*} = 1$ com $|v_n|_{p^*} \to |v|_{p^*}$ então $|v|_{p^*} = 1$. Daí, aplicando o Lema 4.20, $\lambda_n \to 0$ e $y_n \to y$ em $\overline{\Omega}$. Além disso, pela continuidade de $\varphi$, temos

$$\varphi(\lambda_n x + y_n) \to \varphi(y) = y \in \overline{\Omega}.$$

Logo, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema C.19),

$$\lim_{n\to\infty}\beta(u_n) = \frac{S^{N/p}}{S^{N/p}}\int_\Omega \lim(v_n)^{p^*}(x)\varphi(\lambda_n x + y_n)dx = \int_\Omega v^{p^*}(x)\varphi(y)dx = y\int_\Omega v^{p^*}(x)dx = y,$$

ou seja, para $n$ suficientemente grande temos $\beta(u_n) \in \Omega_r^+$, o que é uma contradição. Assim, o lema fica provado. ■

Agora, pelo Lema 4.21, existe $v_\mu \in \mathcal{N}_{\mu,B_r}$ tal que

$$I_{\mu,B_r}(v_\mu) = \widetilde{m}(\mu) = m(\mu),$$

e $v_\mu$ é não negativa, pois

$$I'_{\mu,B_r}(v_\mu) = 0 \Rightarrow I'_{\mu,B_r}(v_\mu)v_\mu^- = \|v_\mu^-\|^p = 0.$$

Defina então a aplicação $\gamma : \Omega_r^- \to I_\mu^{m(\mu)}$ por

$$\begin{aligned} \gamma(y) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \gamma(y)(x) = \begin{cases} v_\mu(x-y), & x \in B(y,r) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Veja que, para cada $y \in \Omega_r^-$ temos $\gamma(y) \in I_\mu^{m(\mu)}$. De fato,

$$\begin{aligned} I_\mu(\gamma(y)) &= \frac{1}{p}\|\gamma(y)\|^p - \frac{\mu}{q}|\gamma(y)|_q^q - \frac{1}{p^*}|\gamma(y)|_{p^*}^{p^*} \\ &= \frac{1}{p}\int_{B(y,r)} |\nabla(v_\mu(x-y))|^p dx + \frac{1}{p}\int_{B(y,r)^c} |\nabla(v_\mu(x-y))|^p dx \\ &\quad -\frac{\mu}{q}\int_{B(y,r)} v_\mu(x-y)^q dx - \frac{\mu}{q}\int_{B(y,r)^c} v_\mu(x-y)^q dx \\ &\quad -\frac{1}{p^*}\int_{B(y,r)} v_\mu(x-y)^{p^*} dx - \frac{1}{p^*}\int_{B(y,r)^c} v_\mu(x-y)^{p^*} dx \\ &= \frac{1}{p}\int_{B_r} |\nabla v_\mu(z)|^p dz - \frac{\mu}{q}\int_{B_r} v_\mu(z)^q dz - \frac{1}{p^*}\int_{B_r} v_\mu(z)^{p^*} dz \\ &= I_{\mu,B_r}(v_\mu) = m(\mu), \end{aligned}$$

em que $B(y,r)^c = \Omega \setminus B(y,r)$. Mais ainda, $\gamma(y) \in \mathcal{N}_\mu$ pois para $\gamma(y) \neq 0$, seguindo de modo análogo ao raciocínio anterior, obtemos

$$\begin{aligned} I'_\mu(\gamma(y))\gamma(y) &= \|\gamma(y)\|^p - \mu|\gamma(y)|_q^q - |\gamma(y)|_{p^*}^{p^*} \\ &= \int_{B_r} |\nabla v_\mu(z)|^p dz - \mu\int_{B_r} v_\mu(z)^q dz - \int_{B_r} v_\mu(z)^{p^*} dz \\ &= I'_{\mu,B_r}(v_\mu)v_\mu = 0. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $y \in \Omega_r^-$, a composta $(\beta \circ \gamma)(y)$ está bem definida e

$$\begin{aligned} (\beta \circ \gamma)(y) &= \frac{1}{S^{N/p}}\int_\Omega x v_\mu(x-y)^{p^*} dx = \frac{1}{S^{N/p}}\int_{B(y,r)} x v_\mu(x-y)^{p^*} dx \\ &= \frac{1}{S^{N/p}}\int_{B_r} (z+y) v_\mu(z)^{p^*} dz \\ &= \frac{1}{S^{N/p}}\int_{B_r} z v_\mu(z)^{p^*} dz + \frac{1}{S^{N/p}}\int_{B_r} y v_\mu(z)^{p^*} dz, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(\beta \circ \gamma)(y) = \frac{1}{S^{N/p}}\int_{B_r} y v_\mu(z)^{p^*} dz = \alpha(\mu) y, \tag{4.23}$$

pois $v_\mu$ é radial, com

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{S^{N/p}} \int_{B_r} v_\mu(z)^{p^*}\, dz.$$

Note agora que a aplicação $\gamma$ é contínua. Com efeito, seja $y_n \to y$ em $\Omega_r^-$ e usando a norma $|.|_{**}$ de $\mathbb{R}^N$, dada por $|x|_{**} = (|x_1|^p + \ldots + |x_N|^p)^{1/p}$ para $x \in \mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$, a qual é equivalente a norma usual de $\mathbb{R}^N$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\gamma(y_n) - \gamma(y)\|^p &= \int_\Omega |\nabla(\gamma(y_n) - \gamma(y))|_{**}^p\, dx = \int_\Omega |\nabla(v_\mu(x - y_n) - v_\mu(x - y))|_{**}^p\, dx \\
&= \int_\Omega \left[ \left( \sum_{i=1}^N |\partial_i(v_\mu(x - y_n) - v_\mu(x - y))|^p\, dx \right)^{1/p} \right]^p \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^N |\partial_i(v_\mu(x - y_n) - v_\mu(x - y))|^p\, dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^N |\partial_i(v_\mu(x - y_n)) - \partial_i(v_\mu(x - y))|^p\, dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i(v_\mu(x - y_n)) - \partial_i(v_\mu(x - y))|^p\, dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega |T_{y_n}(\partial_i v_\mu)(x) - T_y(\partial_i v_\mu)(x)|^p\, dx \\
&= \sum_{i=1}^N |T_{y_n}(\partial_i v_\mu)(x) - T_y(\partial_i v_\mu)(x)|_p^p \to 0,
\end{aligned}$$

pois, fixado $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, a aplicação

$$\begin{aligned}
T : \mathbb{R}^N &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \\
y &\longmapsto T_y f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad x \longmapsto T_y f(x) = f(x - y),
\end{aligned}$$

é contínua (Proposição A.9), implicando que $\gamma$ é contínua.

**Lema 4.23.** *Se $\mu \to 0$, então $\alpha(\mu) \to 1$.*

*Demonstração.* Observe que,

$$m(\mu) = I_{\mu,B_r}(v_\mu) = \frac{1}{p} \int_{B_r} |\nabla v_\mu|^p\, dx - \frac{\mu}{q} \int_{B_r} v_\mu^q\, dx - \frac{1}{p^*} \int_{B_r} v_\mu^{p^*}\, dx < \frac{S^{N/p}}{N} \tag{4.24}$$

e

$$\frac{1}{q} I'_{\mu,B_r}(v_\mu) v_\mu = \frac{1}{q} \int_{B_r} |\nabla v_\mu|^p\, dx - \frac{\mu}{q} \int_{B_r} v_\mu^q\, dx - \frac{1}{q} \int_{B_r} v_\mu^{p^*}\, dx = 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} I_{\mu,B_r}(v_\mu) - \frac{1}{q} I'_{\mu,B_r}(v_\mu)v_\mu &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_{B_r} |\nabla v_\mu|^p \, dx + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right)\int_{B_r} v_\mu^{p^*} \, dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_{B_r} |\nabla v_\mu|^p \, dx, \end{aligned}$$

donde

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_{B_r} |\nabla v_\mu|^p \, dx < \frac{S^{N/p}}{N},$$

mostrando que a sequência $(v_\mu)$ é limitada em $W^{1,p}_{0,rad}(B_r)$ e, portanto, $\|v_\mu\|^p$ é limitada em $\mathbb{R}$. Logo, a menos de uma subsequência, podemos supor que $\|v_\mu\|^p \to l$, para $l \in \mathbb{R}$. De

$$\|v_\mu\|^p - \mu|v_\mu|_q^q - |v_\mu|_{p^*}^{p^*} = 0 \ \text{ e } \ \mu \to 0,$$

temos $|v_\mu|_{p^*}^{p^*} \to l$. De (4.24) e do item (c) do Lema 4.21, obtemos $l = S^{N/p}$, ou seja, $|v_\mu|_{p^*}^{p^*} \to S^{N/p}$ e assim

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{S^{N/p}}\int_{B_r} v_\mu^{p^*} \, dx = \frac{1}{S^{N/p}}|v_\mu|_{p^*}^{p^*} \to \frac{S^{N/p}}{S^{N/p}} = 1, \text{ quando } \mu \to 0,$$

como queríamos. ■

Pelo Lema 4.23, para $\mu$ suficientemente pequeno, fica bem definido a aplicação

$$\begin{aligned} H_\mu : [0,1] \times (\mathcal{N}_\mu \cap I_\mu^{m(\mu)}) &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (t,u) &\longmapsto H_\mu(t,u) = \left(t + \frac{1-t}{\alpha(\mu)}\right)\beta(u). \end{aligned} \tag{4.25}$$

**Lema 4.24.** *Existe $\mu^* > 0$ tal que se $\mu \in (0, \mu^*)$ então*

$$H_\mu([0,1] \times (\mathcal{N}_\mu \cap I_\mu^{m(\mu)})) \subset \Omega_r^+.$$

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que existem $t_n \in [0,1]$, $\mu_n \to 0$ e $u_n \in (\mathcal{N}_{\mu_n} \cap I_{\mu_n}^{m(\mu_n)})$, tais que $H_{\mu_n}(t_n, u_n) \notin \Omega_r^+$. Sem perda de generalidade, podemos supor $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Pelo Lema 4.23 e como visto na demonstração do Lema 4.22, temos

$$\alpha(\mu_n) \to 1 \ \text{ e } \ \beta(u_n) \to y \in \overline{\Omega},$$

portanto,

$$H_{\mu_n}(t_n, u_n) = \left(t_n + \frac{1-t_n}{\alpha(\mu_n)}\right)\beta(u_n) \to y \in \overline{\Omega},$$

consequentemente, para $n$ suficientemente grande, $H_{\mu_n}(t_n, u_n) \in \Omega_r^+$, o que é uma contradição. Assim, o lema fica provado. ■

## 4.4 Demonstração do Teorema principal

Provemos alguns lemas antes.

**Lema 4.25.** *Se $u_\mu$ é um ponto crítico de $I_\mu$ em $\mathcal{N}_\mu$, isto é, $I'_\mu(u_\mu)v = 0$ para todo $v \in \mathcal{N}_\mu$, então o mesmo é um ponto crítico de $I_\mu$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

*Demonstração.* Se $u_\mu \in \mathcal{N}_\mu$ então $I'_\mu(u_\mu)u_\mu = 0$. Por outro lado, pelo Teorema C.23, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'_\mu(u_\mu) = \theta J'_\mu(u_\mu), \tag{4.26}$$

em que $J_\mu$ é o funcional dado em (4.14). A Observação 4.14 nos diz que

$$\begin{aligned} J'_\mu(u_\mu)u_\mu &= p(\mu|u_\mu^+|_q^q + |u_\mu^+|_{p^*}^{p^*}) - q\mu|u_\mu^+|_q^q - p^*|u_\mu^+|_{p^*}^{p^*} \\ &= \mu(p-q)|u_\mu^+|_q^q + (p-p^*)|u_\mu^+|_{p^*}^{p^*} < 0. \end{aligned}$$

De (4.26),

$$0 = I'_\mu(u_\mu)u_\mu = \theta J'_\mu(u_\mu)u_\mu$$

e portanto, $\theta = 0$ , consequentemente, $I'_\mu(u_\mu) = 0$, ou seja, $I'_\mu(u_\mu)v = 0$ para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, mostrando que $u_\mu$ é ponto crítico de $I_\mu$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

A seguir, denotaremos por $I_{\mathcal{N}_\mu}$ a restrição de $I_\mu$ em $\mathcal{N}_\mu$.

**Lema 4.26.** *Toda sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ tal que $I_\mu(u_n) = I_{\mathcal{N}_\mu}(u_n) \to c < S^{N/p}/N$ e $I'_{\mathcal{N}_\mu}(u_n) \to 0$ admite uma subsequência convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, para $\mu > 0$ e $p < q < p^*$.*

*Demonstração.* Tomando o funcional $J_\mu$ como na demonstração do Lema 4.25 então, pelo Teorema C.23, dado $u \in \mathcal{N}_\mu$, temos

$$\|I'_{\mathcal{N}_\mu}(u)\|_* = \min_{\theta\in\mathbb{R}} \|I'_\mu(u) - \theta J'_\mu(u)\|.$$

Logo, por hipótese, existe $(\theta_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\|I'_{\mathcal{N}_\mu}(u_n)\|_* = \|I'_\mu(u_n) - \theta_n J'(u_n)\| \to 0,$$

ou seja,

$$I'_\mu(u_n) = \theta_n J'_\mu(u_n) + o_n(1). \tag{4.27}$$

Na Observação 4.14, vimos que $J'_\mu(u)u < 0$, para todo $u \in \mathcal{N}_\mu$. Temos $(u_n)$ limitada, pois

$$c + o_n(1) = I_\mu(u_n) - \frac{1}{q} I'_\mu(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|^p.$$

Suponha então $J'_\mu(u_n)u_n \to 0$. Da igualdade

$$0 = I'_\mu(u_n)u_n = \|u_n\|^p - \mu|u_n^+|_q^q - |u_n^+|_{p^*}^{p^*}$$

temos

$$\|u_n\|^p = \mu|u_n^+|_q^q + |u_n^+|_{p^*}^{p^*},$$

e assim,

$$J'_\mu(u_n)u_n = p\|u_n\|^p - q\mu|u_n^+|_q^q - p^*|u_n^+|_{p^*}^{p^*} = \mu(p-q)|u_n^+|_q^q + (p-p^*)|u_n^+|_{p^*}^{p^*} \to 0.$$

Portanto,

$$|u_n^+|_q^q \to 0, \ |u_n^+|_{p^*}^{p^*} \to 0,$$

e, consequentemente, $\|u_n\|^p \to 0$, implicando que $\|u_n\| \to 0$. Além disso, da igualdade $\|u_n\|^p = \mu|u_n^+|_q^q + |u_n^+|_{p^*}^{p^*}$ e das imersões de Sobolev, obtemos

$$\|u_n\|^p \leq \mu|u_n|_q^q + |u_n|_{p^*}^{p^*} \leq \mu c_1\|u_n\|^q + c_2\|u_n\|^{p^*} \leq c_3(\mu\|u_n\|^q + \|u_n\|^{p^*}),$$

sendo $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$, e com isso,

$$1 \leq c_3(\mu\|u_n\|^{q-p} + \|u_n\|^{p^*-p}) \to 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, podemos assumir que $J'_\mu(u_n)u_n \to l < 0$. De (4.27), temos

$$0 = I'_\mu(u_n)u_n = \theta_n J'_\mu(u_n)u_n + o_n(1),$$

donde $\theta_n \to 0$, e portanto, $I'_\mu(u_n) \to 0$. Logo,

$$I_\mu(u_n) \to c < S^{N/p}/N \ \text{ e } \ I'_\mu(u_n) \to 0,$$

e aplicando o Lema 2.13, $I_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ e assim $(u_n) \subset \mathcal{N}_\mu$ admite uma subsequência convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

**Lema 4.27.** *Se $N \geq p^2$ e $\mu \in (0, \mu^*)$ ($\mu^*$ dado pelo Lema 4.24) então*

$$cat_{I^{m(\mu)}_{\mathcal{N}_\mu}}(I^{m(\mu)}_{\mathcal{N}_\mu}) \geq cat_\Omega(\Omega).$$

*Demonstração.* Se $\mathrm{cat}_{I^{m(\mu)}_{\mathcal{N}_\mu}}(I^{m(\mu)}_{\mathcal{N}_\mu}) = \infty$, o resultado segue. Suponha que

$$\mathrm{cat}_{I^{m(\mu)}_{\mathcal{N}_\mu}}(I^{m(\mu)}_{\mathcal{N}_\mu}) = n,$$

isto é,

$$I^{m(\mu)}_{\mathcal{N}_\mu} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

com $A_j, j = 1, \ldots, n$ subconjuntos fechados e contráteis em $I^{m(\mu)}_{\mathcal{N}_\mu}$, ou seja, existem $h_j : [0,1] \times A_j \to I^{m(\mu)}_{\mathcal{N}_\mu}$ contínuas tais que

$$h_j(0,u) = u,\ h_j(1,u) = w_j,\ \forall u \in A_j,$$

onde $w_j \in I^{m(\mu)}_{\mathcal{N}_\mu}$ é fixo, para cada $j = 1, \ldots, n$. Considere $B_j = \gamma^{-1}(A_j), j = 1, \ldots, n$, onde $\gamma$ é dada em (4.22). Como vimos na Seção 4.3, a aplicação $\gamma$ é contínua, donde os conjuntos $B_j$ são fechados e satisfazem

$$\Omega_r^- = B_1 \cup \ldots \cup B_n.$$

Defina agora a deformação

$$\begin{array}{rcl} g_j : [0,1] \times B_j & \longrightarrow & \Omega_r^+ \\ (t,y) & \longmapsto & g_j(t,y) = H_\mu(t, h_j(t, \gamma(y))), \end{array}$$

onde $H_\mu$ é a aplicação dada em (4.25), para $\mu \in (0, \mu^*)$(o Lema 4.24 garante que a função $g_j$ está bem definida). Como também visto na Seção 4.3, a aplicação $\beta$, dada em (4.15), é contínua, donde a aplicação $H_\mu$ é contínua e, consequentemente, $g_j$ é contínua para todo $j = 1, \ldots, n$. Agora, dado $y \in B_j$ temos, usando (4.23),

$$\begin{array}{rcl} g_j(0,y) & = & H_\mu(0, h_j(0, \gamma(y))) = H_\mu(0, \gamma(y)) = \left(0 + \dfrac{1-0}{\alpha(\mu)}\right)\beta(\gamma(y)) \\ & = & \dfrac{\beta(\gamma(y))}{\alpha(\mu)} = \dfrac{\alpha(\mu)y}{\alpha(\mu)} = y, \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} g_j(1,y) & = & H_\mu(1, h_j(1, \gamma(y))) = H_\mu(1, w_j) = \left(1 + \dfrac{1-1}{\alpha(\mu)}\right)\beta(w_j) \\ & = & \beta(w_j) \in \Omega_r^+. \end{array}$$

Assim, os conjuntos $B_j$ são contráteis em $\Omega_r^+$ donde

$$\mathrm{cat}_\Omega(\Omega) = \mathrm{cat}_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n = \mathrm{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}).$$

■

*Demonstração do Teorema 4.1.*

Pelos Lemas 2.13 e 4.21, sabemos que

$$c_\mu, m(\mu) < \frac{S^{N/p}}{N},$$

para $\mu > 0$ se $p^* > q > p$. Além disso, pelo Lema 4.26, $I_{\mathcal{N}_\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, S^{N/p}/N)$, e para todo $u \in I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ temos

$$c_\mu = \inf_{u \in \mathcal{N}_\mu} I_\mu(u) \leq I_\mu(u) \leq m(\mu).$$

Logo, pelo Teorema 4.19, concluímos que $I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ contém, pelo menos, $\mathrm{cat}_{I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}}(I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)})$ pontos críticos de $I_{\mathcal{N}_\mu}$ e, pelo Lema 4.27, para $\mu \in (0, \mu^*)$, $I_{\mathcal{N}_\mu}^{m(\mu)}$ contém, pelo menos, $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos da restrição de $I_\mu$ em $\mathcal{N}_\mu$. Agora, pelo Lema 4.25, como todo ponto crítico de $I_{\mathcal{N}_\mu}$ é ponto crítico de $I_\mu$, então $I_\mu$ contém, pelo menos, $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ pontos críticos. Como tais pontos críticos estão em $\mathcal{N}_\mu$, os mesmos são não nulos e são soluções para o problema $(P_\mu)$. Dessa forma, $(P_\mu)$ possui, pelos menos, $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções não triviais.

■

# Considerações Finais

Nesta dissertação estudamos essencialmente a multiplicidade de soluções positivas para o problema elíptico crítico $(P_\mu)$. Garantimos no Capítulo 2 a existência de solução não trivial para cada $\mu > 0$ e posteriormente, no Capítulo 4, vimos que para $\mu$ positivo e suficientemente pequeno o problema em questão possui, pelo menos, $\mathrm{cat}_\Omega(\Omega)$ soluções positivas.

Uma perspectiva futura é investigar outras ferramentas que possam assegurar a multiplicidade de soluções no estudo de problemas elípticos, a fim de verificar se é possível ampliar a quantidade de soluções positivas quando comparado, por exemplo, com a teoria de categoria utilizada neste trabalho.

# Referências Bibliográficas


[1] ALVES, C. O.; DING, Y. H. *Multiplicity of Positive Solutions to a p-Laplacian Equation Involving Critical Nonlinearity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 279 (2003), 508-521.

[2] AUBIN, Th., *Problèmes isopèrimétriques et espaces de Sobolev*. J. Diff. Geom. 11 (1976) 573-598.

[3] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley e Sons, Inc., New York, 1995.

[4] BEN-NAOUM, A. K.; TROESTLER, C.;WILLEM, M. *Extrema Problems With Critical Sobolev Exponents on Unbouded Domains*. Nonlinear Analysis, TMA 26 (1996), 823-833.

[5] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. 2ª edição, SBM, Coleção de Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2015.

[6] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer N. Y.: Universitex, 2010.

[7] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[8] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. *Introdução à teoria das distribuções e aos Espaços de Sobolev*. Universidade Estadual de Maringá, DMA, 2011.

[9] CAZENAVE, T. *An Introcuction to Semilinear Elliptic Equations*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2018.

[10] CINGOLANI, S.; VANNELLA, G. *Multiple positive solutions for a critical quasilinear equation via Morse theory.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26(2009), 397-413.

[11] CINGOLANI, S.; VANNELLA, G. *The Brezis-Nirenberg type problem for the p-Laplacian* $(1 < p < 2)$*: Multiple positive solutions*. Journal of Differential Equations 266(8), 2019, 4510-4532.

[12] CLARKSON, JAMES A. *Uniformly convex spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.

[13] GARCIA AZORERO, J.;PERAL ALONSO, I. *Existence and Non-uniqueness for the p-Laplacian: Nonlinear Eigenvalues*. Coom. Partial Differential Equations 12,(1987) 1389-1430.

[14] GARCIA AZORERO, J.; PERAL ALONSO, I. *Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems with Critical Exponent with a Nonsymmetric Term*. Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 877-895.

[15] KAVIAN, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*. Springer, Heidelberg, 1993.

[16] LIMA, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Rio de Janeiro. IMPA, 2006.

[17] LIONS, P. L. *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 1*. Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. 1, N.º 1, (1985), 145-201.

[18] LIONS, P. L. *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Limit Case, Part 2*. Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. 1, N.º 2, (1985), 45-121.

[19] LUSTERNIK, L.; SCHNIRELMAN, L. *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934.

[20] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos problemas Elíticos não Homogêneos)*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.

[21] MELO, J. L. F. *Sobre a multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos de quarta-ordem via categoria de Lusternik- Schnirelman*. Tese de Doutorado, ICMC-USP, São Carlos-SP, 2014.

[22] SILVA, E. A. de B.; SOARES, S. H. M. *Quasilinear Dirichlet problems in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*. Nonlinear Analysis 43 (2001), 1-20.

[23] TALENTI, G. *Best Constant in Sobolev Inequality*. Ann. Mat. 110 (1976), 353-372.

[24] WILLEM, M. *Analyse Harmonique Réelle*. Hermann, Paris, 1995.

[25] WILLEM, M. *Minimax Theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, 1996.

# Apêndice A

# Espaços de Sobolev

Apresentaremos uma introdução sobre Espaços de Sobolev e alguns resultados importantes.

Por $\Omega$ representa-se um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e por $\partial\Omega$ sua fronteira. Será fixada em $\Omega$ a medida de Lebesgue $dx$.

**Definição A.1.** *Sejam $u$ uma função numérica definida em $\Omega$, $u$ mensurável, e $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos de $\Omega$ tais que $u = 0$ quase sempre em $(\mathcal{O}_i)$. Considerando o subconjunto aberto $\mathcal{O} = \cup_{i\in I}\mathcal{O}_i$, temos $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}$. Como consequência deste fato, o suporte de $u$, o qual é denotado por suppu, é definido como sendo o subconjunto fechado de $\Omega$,*

$$\operatorname{supp} u = \Omega \setminus \mathcal{O}.$$

*Observe que se $u$ é contínua em $\Omega$ então*

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

*Se este conjunto for compacto, dizemos que $u$ possui suporte compacto.*

**Definição A.2.** *Representamos por $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções numéricas em $\Omega$, com suporte compacto, possuindo em $\Omega$ derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções teste em $\Omega$.*

Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, define-se $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N$. Por $D^\alpha$ denota-se o operador de derivação de ordem $\alpha$ definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_N}^{\alpha_N}}$$

e para $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ define $D^0 u = u$ para toda função $u$. Por $D_i$, para $i = 1, 2, \ldots, N$, representa-se a derivação parcial $\frac{\partial}{\partial_{x_i}}$.

**Definição A.3.** *Diz-se que uma sequência $(\varphi_n)$ de funções de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

*(a) Os suportes de todas as funções teste $(\varphi_n)$, da sequência dada, estão contidos num compacto fixo $K$;*

*(b) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $(D^\alpha \varphi_n)$ converge para zero uniformemente em $K$.*

*Se $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, diz-se que a sequência $(\varphi_n)$ de elementos de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi$ em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, quando a sequência $(\varphi_n - \varphi)$ converge para zero no sentido dado acima. O espaço vetorial $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções teste em $\Omega$.*

**Definição A.4.** *Representamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das funções mensuráveis em $\Omega$, cuja potência $p$, $|u|^p$, é integrável no sentido de Lebesgue em $\Omega$, equipado com a norma*

$$|u|_p = |u|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

**Definição A.5.** *Denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach das funções numérica $u$, mensuráveis em $\Omega$ que são essencialmente limitadas em $\Omega$, equipado com a norma*

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \operatorname{ess}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

**Definição A.6.** *Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço localmente convexo das funções numéricas $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K$ de $\Omega$.*

*Sejam $(u_n)$ uma sequência em $L^p_{loc}(\Omega)$ e $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. Dizemos que*

$$u_n \to u \text{ em } L^p_{loc}(\Omega)$$

*se para cada compacto $K$ de $\Omega$ tem-se*

$$\rho_K(u_n - u) = \left( \int_K |u_n(x) - u(x)|^p dx \right)^{1/p} \to 0.$$

*Notemos que $L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$ com $\hookrightarrow$ denotando a injeção contínua. Além disso, prova-se que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$.*

**Proposição A.7.** *[20, Corolário 1] $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

**Proposição A.8** (**Desigualdade de Interpolação**). *[20, Proposição 1.2.1] Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e tem-se a desigualdade*

$$|u|_r \leq |u|_p^\theta |u|_q^{1-\theta},$$

*onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.*

**Proposição A.9.** *[20, Proposição 1.2.2] Seja $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. Então a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^N & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R}^N) \\ y & \longmapsto & T_y u : \ \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \qquad x \ \longmapsto \ T_y u(x) = u(x-y), \end{array}$$

*é contínua.*

**Definição A.10.** *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Dizemos que $u$ tem derivada fraca de ordem $\alpha$, se existe $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle = \int_\Omega v_\alpha \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Denotamos, $D^\alpha u = v_\alpha$.*

**Definição A.11.** *O espaço de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial de todas as funções $u$ de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada fraca de $u$. Ou seja,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u = v_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ para } |\alpha| \leq m\}$$

*munido da norma*

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty,$$
$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup \operatorname{ess}_{x \in \Omega} |D^\alpha u|.$$

*Por equivalência, para $1 \leq p < \infty$ a norma de $W^{p,m}(\Omega)$ também pode ser dada por*

$$\|u\|_{m,p} = |u|_p + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|_p.$$

**Proposição A.12.** *[20, Proposição 2.2.1] O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

**Teorema A.13.** *[8, Teorema 2.14] Se* $1 < p < +\infty$ *então* $W^{m,p}(\Omega)$ *é um espaço reflexivo.*

**Definição A.14.** *O espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *é o fecho de* $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$*, ou seja,*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

**Proposição A.15.** *[8, Proposição 2.6] Se* $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$*, então o complementar de* $\Omega$ *em* $\mathbb{R}^N$ *possui medida de Lebesgue igual a zero.*

**Proposição A.16.** *[20, Proposição 2.2.4] Se* $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *e possui suporte compacto, então* $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$*.*

**Definição A.17.** *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $1 < q \leq \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. O espaço* $W^{-m,q}(\Omega)$ *é o dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$*. Quando se diz que* $T$ *pertence a* $W^{-m,q}(\Omega)$*, significa dizer que* $T$*, definida em* $\mathcal{D}(\Omega)$*, pode ser estendida como um funcional linear contínuo ao espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$*. Esta extensão contínua é ainda representada por* $T$*. Para uma caracterização das funções de* $W^{-m,q}(\Omega)$ *veja o Lema 2.2.1 de [20].*

Dito isso, quando $m = 1$, $W^{1,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções $u$ em $L^p(\Omega)$ tais que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ pertence a $L^p(\Omega)$, isto é,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \ldots, N \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{1,p} = |u|_p + |\nabla u|_p;$$

e

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)},$$

equipado com a norma usual

$$\|u\| = \left( \int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{1/p}.$$

Em virtude da Desigualdade de Poincaré, Teorema C.10, as normas $\|.\|$ e $\|.\|_{1,p}$ são equivalentes.

# Apêndice B

# Resultados de teoria da Medida

Enunciaremos uma definição e três resultados que foram usados nos Lemas 1.1 e 1.2.

**Definição B.1.** *Seja $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e defina*

$$\mathcal{K}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega) : \operatorname{supp} u \subset\subset \Omega\}$$

*e*

$$\mathcal{BC}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{C}(\Omega) : \|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty \right\}.$$

*O espaço $\mathcal{C}_0(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{K}(\Omega)$ em $\mathcal{BC}(\Omega)$ com respeito a norma uniforme. Uma medida finita em $\Omega$ é um funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0(\Omega)$. A norma de uma medida finita $\mu$ é dada por*

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{u\in\mathcal{C}_0(\Omega)\\ \|u\|_\infty=1}} |\langle \mu, u\rangle|.$$

*Denotemos por $\mathcal{M}(\Omega)$ (respectivamente, $\mathcal{M}^+(\Omega)$) o espaço de medidas finitas (respectivamente, espaço de medidas finitas positivas, isto é, as medidas $\mu$ tais que $\langle \mu, u\rangle \geq 0,\ \forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ com $u \geq 0$) em $\Omega$. Uma sequência $(\mu_n)$ converge fraco para $\mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, e escrevemos*

$$\mu_n \rightharpoonup \mu,$$

*se*

$$\langle \mu_n, u\rangle \to \langle \mu, u\rangle,\ \forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega),$$

*isto é,*

$$\int_\Omega u\, d\mu_n \to \int_\Omega u\, d\mu,\ \forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

**Teorema B.2.** *[24, Teorema 10.8] Toda sequência limitada de medidas finitas em $\Omega$ admite uma subsequência fracamente convergente.*

**Proposição B.3.** *[24, Proposição 10.9] Se $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, então*

$$\|\mu\| = \langle \mu, 1 \rangle = \sup_{\substack{u \in \mathcal{BC}(\Omega) \\ \|u\|_\infty = 1}} \langle \mu, u \rangle.$$

**Proposição B.4.** *[24, Proposição 10.11] Se $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$ então $(\mu_n)$ é limitada e*

$$\|\mu\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|\mu_n\|.$$

# Apêndice C

# Resultados utilizados na dissertação

Apresentaremos definições, teoria e resultados importantes que foram utilizados ao longo desta dissertação.

**Definição C.1.** *Sejam $X$ e $Y$ dois espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas. Dizemos que $f$ e $g$ são homotópicas quando existe uma aplicação contínua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação $H$ chama-se então uma homotopia entre $f$ e $g$.*

**Definição C.2.** *Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ chama-se uma equivalência homotópica quando existe $g : Y \to X$ contínua tal que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$. Diz-se então que $g$ é um inverso homotópico de $f$ e que os espaços topológicos $X$ e $Y$ têm o mesmo tipo de homotopia.*

**Definição C.3.** *(a) (Notação O grande de Landau)Escrevemos*

$$f = O(g) \text{ quando } x \to x_0,$$

*se existe uma constante $C$ tal que*

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

*para todo $x$ suficientemente próximo de $x_0$.*

*(b) (Notação de o pequeno de Landau) Escremos*

$$f = o(g) \text{ quando } x \to x_0,$$

*se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

**Definição C.4.** *Dados $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados, diremos que $(X, \|.\|_X)$ está imerso continuamente em $(Y, \|.\|_Y)$, e denotamos $(X, \|.\|_X) \overset{cont.}{\hookrightarrow} (Y, \|.\|_Y)$, quando:*

*(a) $X$ é subespaço vetorial de $Y$;*

*(b) A identidade id:$(X, \|.\|_X) \longrightarrow (Y, \|.\|_Y)$ é um operador contínuo.*

**Definição C.5.** *Dados $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados, diremos que $(X, \|.\|_X)$ está imerso compactamente em $(Y, \|.\|_Y)$, e denotamos $(X, \|.\|_X) \overset{comp.}{\hookrightarrow} (Y, \|.\|_Y)$, quando:*

*(a) $X$ é subespaço vetorial de $Y$;*

*(b) A identidade id:$(X, \|.\|_X) \longrightarrow (Y, \|.\|_Y)$ é um operador compacto.*

**Proposição C.6.** *[9, Proposição 5.3.3 e Observação 5.3.4] Considere $u^+ = \max\{0, u\}$, $u^- = \max\{0, -u\}$ e suponha $1 \leq p \leq \infty$.*

*(i) Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $u^+$ e $u^-$ pertencem a $W^{1,p}(\Omega)$. Mais ainda,*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, \ \text{se } u \geq 0 \\ 0, \ \text{se } u \leq 0 \end{cases}, \ \nabla u^- = \begin{cases} -\nabla u, \ \text{se } u < 0 \\ 0, \ \text{se } u \geq 0 \end{cases}, \ \text{quase sempre em } \Omega.$$

*(ii) Se $p < \infty$, então as aplicações $u \mapsto u^+$ e $u \mapsto u^-$ pertencem a $W^{1,p}(\Omega)$ e são contínuas em $W^{1,p}(\Omega)$.*

*(iii) Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $u^+$ e $u^-$ pertencem a $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

**Teorema C.7** (**Sobolev, Gagliardo, Nirenberg**). *[6, Teorema 9.9] Seja $1 \leq p < N$. Então $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, com $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$, e existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de $p$ e $N$, tal que*

$$|u|_{p^*} \leq C|\nabla u|_p, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

**Teorema C.8.** *[6, Corolário 9.14] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto de classe $\mathcal{C}^1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Temos as seguintes imersões contínuas*

*(a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall q \in [p, p^*]$ com $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$, se $p < N$;*

*(b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall q \in [p, +\infty)$, se $p = N$;*

*(c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, se $p > N$.*

**Teorema C.9** (**Rellich-Kondrachov**). *[6, Teorema 9.16] Sejam $\Omega$ um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^N$ e $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$. Então as seguintes imersões são compactas:*

*(a)* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [1, p^*),\ onde\ \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}\ se\ p < N;$

*(b)* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall q \in [p, +\infty),\ se\ p = N;$

*(c)* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}),\ se\ p > N.$

*Em particular, a imersão de* $W^{1,p}(\Omega)$ *em* $L^p(\Omega)$ *é compacta para todo* $p$*.*

**Teorema C.10** (**Desigualde de Poincaré**)**.** *[6, Corolário 9.19] Suponha que* $1 \leq p < \infty$ *e* $\Omega$ *um subconjunto limitado do* $\mathbb{R}^N$*. Então existe uma constante* $C$ *(dependente de* $\Omega$ *e* $p$*) tal que*

$$|u|_p \leq C|\nabla u|_p,\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Lema C.11.** *[15, Lema 4.8] Sejam* $\Omega$ *um subconjunto de* $\mathbb{R}^N$ *e* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$*,* $1 < p < \infty$*. Se*

*(a)* $(u_n)$ *é limitada em* $L^p(\Omega)$*;*

*(b)* $u_n \to u$ *q.t.p. em* $\Omega$*,*

*então,*

$$u_n \rightharpoonup u\ em\ L^p(\Omega).$$

**Lema C.12** (**Brezis-Lieb**)**.** *[25, Lema 1.32] Sejam* $\Omega$ *um subconjunto de* $\mathbb{R}^N$ *e* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$*,* $1 \leq p < \infty$*. Se*

*(a)* $(u_n)$ *é limitada em* $L^p(\Omega)$*;*

*(b)* $u_n \to u$ *q.t.p. em* $\Omega$*,*

*então,*

$$\lim_{n\to\infty} (|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p) = |u|_p^p.$$

**Definição C.13.** *Um espaço de Banach* $(E, \|.\|)$ *é dito uniformemente convexo se, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$x, y \in E,\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1\ e\ \|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

**Teorema C.14** (**Desigualdade de Clarkson**)**.** *[12, Teorema 2] Se* $p \in [2, +\infty)$*, então*

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|_p^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|_p^p \leq \frac{1}{2}(|f|_p^p + |g|_p^p),\ \forall f, g \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

**Proposição C.15.** *O espaço $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \|.\|_*)$ é uniformemente convexo, em que*

$$\|u\|_* = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

*Demonstração.* Dado $\varepsilon > 0$, sejam $u, v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\|u\|_* \leq 1$, $\|v\|_* \leq 1$ e $\|u - v\|_* > \varepsilon$. Pelo Teorema C.14, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_*^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_*^p &= \int_{\mathbb{R}^N} \left( \left| \frac{\nabla u + \nabla v}{2} \right|^p + \left| \frac{\nabla u - \nabla v}{2} \right|^p \right) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |\nabla v|^p) dx \\ &= \frac{1}{2} (\|u\|_*^p + \|v\|_*^p) \leq 1. \end{aligned}$$

Daí,

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_*^p \leq 1 - \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_*^p < 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p.$$

Logo,

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_* < \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p} = 1 - \left[ 1 - \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p} \right],$$

e tomando $\delta(\varepsilon) = 1 - \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p} > 0$, temos o resultado. ∎

**Teorema C.16** (**Milman–Pettis**). *[6, Teorema 3.31] Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

**Teorema C.17.** *[6, Teorema 4.10, Passo 2] O espaço $L^p$ é uniformemente convexo, e portanto, reflexivo para $2 \leq p < \infty$.*

**Proposição C.18.** *[6, Proposição 3.32] Seja $(E, \|.\|)$ um espaço e Banach uniformemente convexo e seja $(x_n)$ uma sequência em $E$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ em $E$ e $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. Então $x_n \to x$ em $E$.*

**Teorema C.19** (**Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue**). *[3, Teorema 5.6] Sejam $(X, \Sigma, \mu)$ um espaço de medida e $(f_n)$ uma sequência de funções mensuráveis em $X$ tal que $(f_n)$ converge q.t.p. em $X$ para uma função mensurável $f$. Se existe uma função não negativa $g$ integrável em $X$ tal que*

$$|f_n| \leq g \text{ q.t.p. em } X \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

*então*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

**Teorema C.20** (**Desigualdade de Hölder**). *[3, Teorema 6.9] Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $(X, \Sigma, \mu)$ um espaço de medida. Se $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ e $g \in L^q(X, \Sigma, \mu)$, então $fg \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$|fg|_1 \leq |f|_p |g|_q.$$

**Proposição C.21.** *[5, Proposição 6.2.5, item (a)] Sejam $E$ um espaço vetorial normado e uma sequência $(x_n) \subset E$, então*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E \Rightarrow (\|x_n\|)_{n=1}^{\infty} \text{ é limitada e } \|x\| \leq \liminf \|x_n\|.$$

Consideremos $X$ um espaço de Banach, $\psi \in \mathcal{C}^2(X, \mathbb{R})$, $V = \{v \in X : \psi(v) = 1\}$, e suponha que para todo $v \in V$ tenhamos $\psi'(v) \neq 0$.

**Definição C.22.** *(a) O espaço tangente de $V$ no ponto $v$ é dado por*

$$T_v V = \{y \in X : \langle \psi'(v), y \rangle = 0\}.$$

*(b) Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e $v \in V$. A norma da derivada da restrição de $\varphi$ a $V$ em $v$ é definida por*

$$\|\varphi'(v)\|_* = \sup_{\substack{y \in T_v V \\ \|y\|=1}} \langle \varphi'(v), y \rangle.$$

*(c) O ponto $v$ é um ponto crítico da restrição de $\varphi$ a $V$ se a restrição de $\varphi'(v)$ a $T_v V$ é igual a zero, isto é, se $\|\varphi'(v)\|_* = 0$.*

**Teorema C.23** (**Multiplicadores de Lagrange**). *[25, Proposição 5.12] Se $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e $u \in V$ então*

$$\|\varphi'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda \psi'(u)\|.$$

*Em particular, $u$ é ponto crítico de $\varphi|_V$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi'(u) = \lambda \psi'(u).$$

A seguir, enunciaremos dois lemas de deformação. O Lema C.24 trata-se de um lema de deformação para variedades e o Lema C.25 é aplicado em espaços de Banach.

**Lema C.24.** *[25, Lema 5.15] Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset V$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ tais que*

$$(\forall u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon] \cap S_{2\delta})) : \|\varphi'(u)\|_* \geq 8\varepsilon/\delta. \tag{C.1}$$

*Então existe $\eta \in \mathcal{C}([0, 1] \times V, V)$ tal que*

*(a)* $\eta(t,u) = u$, *se* $t = 0$ *ou se* $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;

*(b)* $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$;

*(c)* $\varphi(\eta(.,u))$ *é não crescente,* $\forall u \in V$.

**Lema C.25** (**Lema de Deformação**). *[25, Lema 2.3] Sejam* $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ *tais que*

$$(\forall u \in \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \cap S_{2\delta})) : \|\varphi'(u)\|_* \geq 8\varepsilon/\delta, \tag{C.2}$$

*com*

$$S_{2\delta} = \{u \in X : dist(u, S) \leq 2\delta\}.$$

*Então existe* $\eta \in \mathcal{C}([0,1] \times X, X)$ *tal que*

*(i)* $\eta(t,u) = u$, *se* $t = 0$ *ou se* $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;

*(ii)* $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$;

*(iii)* $\eta(t,.)$ *é um homeomorfismo de* $X$, $\forall t \in [0,1]$;

*(iv)* $\|\eta(t,u) - u\| \leq \delta$, $\forall u \in X$, $\forall t \in [0,1]$;

*(v)* $\varphi(\eta(.,u))$ *é não crescente,* $\forall u \in X$;

*(vi)* $\varphi(\eta(t,u)) < c$, $\forall u \in \varphi^c \cap S_\delta$, $\forall t \in [0,1]$.

**Teorema C.26.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach,* $M_0$ *um subespaço fechado de um espaço métrico* $M$ *e* $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. *Defina*

$$\Gamma = \{\gamma \in C(M, X) : \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

*Se* $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ *satisfaz*

$$\infty > c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) > a = \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u)) \tag{C.3}$$

*então, para cada* $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$, $\delta > 0$ *e* $\gamma \in \Gamma$ *tais que*

$$\sup_M (\varphi \circ \gamma) \leq c + \varepsilon, \tag{C.4}$$

*existe* $u \in X$ *verificando*

*(a)* $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$;

*(b)* $dist(u, \gamma(M)) \leq 2\delta$;

*(c)* $\|\varphi'(u)\| \leq 8\varepsilon/\delta$.

*Demonstração.* Suponha que o teorema seja falso, isto é, existem $\varepsilon \in (0, (c-a)/2)$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \Gamma$ tais que

$$\sup_M(\varphi \circ \gamma) \leq c + \varepsilon, \tag{C.5}$$

e para todo $u \in X$ satisfazendo os itens $(a)$ e $(b)$, temos

$$\|\varphi'(u)\| > 8\varepsilon/\delta.$$

Aplicaremos o Lema da Deformação (Lema C.25) fazendo $S = \gamma(M)$. Note que $\varepsilon$ satisfaz $a < c - 2\varepsilon$. Como $\gamma \in \Gamma$ então $\gamma_0 = \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0$ e daí, para todo $u \in M_0$, $\gamma_0(u) \in \Gamma_0$ e $\gamma_0(u) \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$, pois $\varphi(\gamma_0(u)) \leq a < c - 2\varepsilon$. Defina então $\beta : M \to X$ por $\beta(u) = \eta(1, \gamma(u))$, e assim, pelo item $(i)$ do Lema C.25,

$$\beta(u) = \eta(1, \gamma_0(u)) = \gamma_0(u), \, \forall u \in M_0,$$

mostrando que $\beta \in \Gamma$. De (C.5) temos $\varphi(\gamma(u)) \leq c + \varepsilon$ para todo $u \in M$, implicando que $\gamma(u) \in \varphi^{c+\varepsilon}$, para todo $u \in M$. Logo, do item $(ii)$ do Lema C.25,

$$\eta(1, \gamma(u)) \in \varphi^{c-\varepsilon}, \, \forall u \in M,$$

ou seja,

$$\varphi(\eta(1, \gamma(u))) \leq c - \varepsilon, \, \forall u \in M.$$

Com isso,

$$c \leq \sup_{u \in M} \varphi(\beta(u)) = \sup_{u \in M} \varphi\left(\eta(1, \gamma(u))\right) \leq c - \varepsilon,$$

o que é uma contradição. Portanto, o teorema é verdadeiro. ■

**Observação C.27.** *Os números*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\mu(\gamma(t)) \;\; e \;\; \widetilde{c}_\mu = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_\mu(tv)$$

*são iguais, em que* $\Gamma$ *é o conjunto definido no Teorema 2.3 e* $I_\mu$*, dado em 2.1, o funcional energia associado ao problema* $(P_\mu)$.

*Demonstração.* Sejam $r > 0$ e $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dados pelo Lema 2.10, ou seja, $\|e\| > r$ e $I_\mu(e) < I_\mu(0) = 0$. Definindo $\gamma_0 : [0,1] \to W_0^{1,p}(\Omega)$ por $\gamma_0(t) = te$, obtemos $\gamma_0(0) = 0$ e $\gamma_0(1) = e$ donde $\gamma_0 \in \Gamma$. Logo,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_\mu(\gamma_0(t)) \leq \max_{t\geq 0} I_\mu(\gamma_0(t)) = \max_{t\geq 0} I_\mu(te) = \max_{t\geq 0} I_\mu(tu),$$

em que $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, ou seja, $c$ é uma cota inferior para o conjunto $\{\max_{t\geq 0} I_\mu(tu) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}\}$ e portanto

$$c \leq \widetilde{c}_\mu. \tag{C.6}$$

Por outro lado, novamente pelo Lema 2.10, existe uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I_\mu(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'_\mu(u_n) \to 0.$$

Além disso, pela desigualdade (C.6) e pelo Lema 2.13 obtemos $c \leq \widetilde{c}_\mu < S^{N/p}/N$ e, consequentemente, $I_\mu$ satisfaz a condição $(PS)_c$. Portanto, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, donde

$$I_\mu(u_n) \to I_\mu(u) \ \text{ e } \ I'_\mu(u_n) \to I'_\mu(u).$$

Pela unicidade do limite, $I_\mu(u) = c$ e $I'_\mu(u) = 0$, isto é, $u$ é um ponto crítico para o funcional $I_\mu$ e $u \in \mathcal{N}_\mu$, já que $c > 0$. Com isso, e pelo Lema 4.5, temos

$$c = I_\mu(u) \geq c_\mu = \widetilde{c}_\mu. \tag{C.7}$$

Por $(C.6)$ e $(C.7)$ concluímos que $c = \widetilde{c}_\mu$. ∎

O próximo teorema pode ser visto em [15].

**Teorema C.28** (Princípio do Máximo)**.** *Se $u$ é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), \\ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

*com $f \geq 0$, então $u \geq 0$; e se $u$ atinge mínimo, então $u \equiv 0$.*