JEFFERSON BARBOSA AMORIM SILVA

FÓRMULAS RESIDUAIS PARA FOLHEAÇÕES LOGARÍTMICAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Diogo da Silva Machado

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T

S586f
2020

Silva, Jefferson Barbosa Amorim, 1990-
Fórmulas residuais para folheações logarítmicas e aplicações / Jefferson Barbosa Amorim Silva. – Viçosa, MG, 2020.
136 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Diogo da Silva Machado.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.135-136.

1. Folheações (Matemática). 2. Espaços fibrados (Matemática). 3. Geometria algébrica. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 514.72

JEFFERSON BARBOSA AMORIM SILVA

FÓRMULAS RESIDUAIS PARA FOLHEAÇÕES LOGARÍTMICAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de fevereiro de 2020.

Assentimento:

Jefferson Barbosa Amorim Silva

Jefferson Barbosa Amorim Silva
Autor

Diogo da Silva Machado

Diogo da Silva Machado
Orientador

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a todos que participaram de maneira direta ou indireta da minha vida durante essa etapa. Essa vitória não é só minha, mas também de todos vocês. Eu sou quem sou e cheguei onde cheguei graças a vocês.

Agradeço a minha família, por acreditarem junto comigo nos meus sonhos e me apoiarem. Em especial, Mãe, obrigado por ser um exemplo de força e resiliência, por não medir esforços para que eu pudesse me dedicar aos meus estudos e compreender a minha ausência.

À Bruna, pelo apoio em todos os momentos dessa caminhada, pelo companheirismo, paciência, carinho e pelas incontáveis vezes que leu esse texto em busca de vírgulas. Agora só faltam mais duas defesas!

À família Natação LUVE, por serem minha família durante esse último ano. Sem vocês nada disso seria possível. Vocês foram mais do que amigos, vocês me deram força pra continuar. Em especial, agradeço ao Felipe por me transformar em um medalhista mineiro e à Sara por ser uma amiga tão especial. Jamille, você também é da família natação, obrigado por tudo.

Aos amigos de OP, Ana Paula, Fabi, Rep. Moranguinho e Lab. de Psicofisiologia, que mesmo longe sempre me apoiaram. Aos geogébricos, que estarão sempre unidos seja na UFOP, UFV ou UFMG.

Obrigado Viçosa, por ter sido uma cidade tão receptiva e me deixar mal acostumado com o melhor requeijão que existe. Agradeço à todos os estabelecimentos que forneceram comidas gostosas durante todo esse tempo. A vida foi mais feliz (e menos saudável) graças à vocês.

Por todo tempo investido na internet, agradeço à todos os canais do Youtube, streamers da Twitch, pessoas aleatórias do lolzinho e do CS que me distraíram e fizeram esquecer dos problemas da vida, mesmo que por um momento.

Agradeço ao DMA-UFV pela oportunidade, pelo conhecimento e experiência adquirida durante esse tempo. Em especial, aos professores Ady Cambraia, Alexandre Miranda e Sônia Fernandes pelas disciplinas lecionadas e à Rosiane pelo excelente trabalho na secretaria do programa. Agradeço também ao Prof. Diogo Machado pela orientação. Sua paciência e dedicação foram essenciais para que eu pudesse concluir o trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"Continuous effort – not strenght or intelligence –
is the key to unlocking our potential."
Winston Churchill

Resumo

SILVA, Jefferson Barbosa Amorim, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2020. **Fórmulas residuais para folheações logarítmicas e aplicações**. Orientador: Diogo da Silva Machado.

Nesta dissertação, seguindo o trabalho de M. Corrêa e D. Machado (CORRÊA; MACHADO, 2019), vamos abordar o problema de encontrar versões do Teorema Baum-Bott para folheações logarítmicas ao longo de um divisor. Vamos considerar os casos em que a hipersuperfície D, que compactifica a variedade ambiente, seja uma hipersuperfície suave e também o caso tenha singularidades do tipo cruzamento normal. Também consideraremos o estudo das folheações projetivas logarítmicas.

Palavras-chave: Folheações logarítmicas. Teorema Baum-Bott. Teorema de Poincaré-Hopf.

Abstract

SILVA, Jefferson Barbosa Amorim, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2020. **Residue formulas for logarithmic foliations and applications**. Advisor: Diogo da Silva Machado.

In this work, following the work done by M. Corrêa e D. Machado (CORRÊA; MACHADO, 2019), we address the problem of finding versions of the Baum-Bott Theorem for logarithmic foliations along a divisor. We'll consider the cases in which the divisor D is an smooth hypersurface and also when D has normal crossing singularities. The study of projective foliations is also considered.

Keywords: logarithmic foliations. Baum-Bott theorem. Poincaré-Hopf theorem.

Sumário

Introdução **8**

I Preliminares **11**

1 O índice de Poincaré-Hopf, o número de Milnor e o resíduo de Grothendieck **12**

1.1 Índice de Poincaré-Hopf 12

1.2 Número de Milnor 26

1.3 Relação entre o índice de Poincaré-Hopf e o número de Milnor 32

1.4 Resíduo de Grothendieck 43

2 Teoria Chern-Weil de classes características **52**

2.1 Fibrados vetoriais 52

2.2 Classes de Chern 73

II Resultados Principais **99**

3 Introdução **100**

3.1 Folheações holomorfas de dimensão 1 100

3.2 O teorema Baum-Bott 101

3.3 Formas logarítmicas e campos vetoriais logarítmicos 102

3.4 Índice GSV 102

3.5 Índice Logarítmico 103

4 Hipersuperfície suave **105**

4.1 Resultados preliminares 105

4.2 Teorema 1 110

5 Folheação logarítmica ao longo hipersuperfície do tipo cruzamento normal **112**

5.1 Resultados preliminares 112

5.2 Teorema 2 120

5.3 Corolário 1 - Um teorema do tipo Poincaré-Hopf 121

6 Aplicação - Folheações projetivas de dimensão 1 . . . . . **123**

6.1 Resultados preliminares 123

6.2 Teorema 3 - Aplicação em folheações projetivas 130

Referências **133**

Introdução

Na literatura matemática, dentre os resultados clássicos de topologia e geometria, os teoremas Gauss-Bonnet e de Poincaré-Hopf, juntamente com suas aplicações e seus desdobramentos figuram entre os resultados mais destacados nessas áreas.

Dado uma variedade complexa compacta X de dimensão n, a fórmula Gauss-Bonnet provada por S.S Chern em (CHERN, 1944) estabelece a seguinte relação entre o número top de Chern do fibrado tangente TX e a característica de Euler da variedade X:

$$\int_X c_n(TX) = \chi(X). \qquad \text{(Gauss-Bonnet)}$$

Atualmente, são conhecidas versões desta fórmula para alguns casos em que a variedade X não é compacta. Y. Norimatsu (NORIMATSU et al., 1978), R. Silvotti (SILVOTTI, 1995) e P. Aluffi (ALUFFI, 1999) obtiveram versões da fórmula Gauss-Bonnet para variedade não compacta, cuja compactificação é dada por um divisor analítico do tipo cruzamento normal. Mais recentemente, M. Correa e colaboradores (CORRÊA et al., 2) provaram uma versão desta fórmula para o caso em que a compactificação é determinada por um divisor analítico com singularidades isoladas.

Por outro lado, um dos conceitos mais elementares na teoria de campos de vetores é o de índice do campo. Neste contexto, o Teorema de Poincaré-Hopf estabelece que a soma total dos índices de um campo sobre uma variedade compacta é independente deste campo e coincide com a característica de Euler da variedade. Mais especificamente, dado um campo de vetores holomorfo v, com singularidades isoladas, sobre uma variedade complexa compacta X, a fórmula de Poincaré-Hopf estabelece a seguinte relação:

$$\chi(X) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(v)} \mathrm{Ind}(v, p) \qquad \text{(Poincaré-Hopf)}$$

onde $\mathrm{Ind}(v, p)$ denota o índice do campo v no ponto p e $\mathrm{Sing}(v)$ denota o conjunto dos pontos singulares do campo v. Também são conhecidas algumas versões do Teorema de Poincaré-Hopf para o caso de variedades não compactas (ver (CORRÊA; MACHADO, 2019),(CORRÊA et al., 2)).

Num contexto mais geral, com folheações holomorfas de dimensão 1 no lugar dos campos de vetores, P. Baum e R. Bott (BAUM; BOTT, 1972) realizaram um trabalho pioneiro para a teoria de resíduos de singularidades de uma folheação holomorfa definida em uma variedade complexa compacta. Neste trabalho, encontraram uma relação entre a soma dos resíduos das singularidades de uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$, definida sobre uma variedade complexa X, compacta e as classes características do feixe normal de $\mathcal{F}$.

Mais precisamente, dada uma variedade compacta X de dimensão n e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa sobre X de dimensão 1, com singularidades isoladas, temos:

$$\int_X c_n\left(TX - T\mathcal{F}\right) = \sum_{p\in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p\left(\mathcal{F}\right) \tag{Baum-Bott}$$

onde $T\mathcal{F}$ e $\mu_p\left(\mathcal{F}\right)$ denotam, respectivamente, o fibrado tangente de $\mathcal{F}$ e o número de Milnor de $\mathcal{F}$ em p.

Mais recentemente, M. Corrêa e D. Machado (CORRÊA; MACHADO, 2019) estudaram o problema de encontrar versões do teorema Baum-Bott para variedades complexas não compactas. Especificamente, consideraram a seguinte questão: *considerando-se variedades complexas não compactas, como expressar a soma dos resíduos de Baum-Bott em termos das classes características do feixe normal da folheação?* Tomando variedades não compactas no sentido de Iitaka (IITAKA, 1976), isto é, variedades complexas que podem ser compactificadas com a adição de um divisor D, estes autores obtiveram versões do Teorema de Baum-Bott para o caso em que D tem singularidades do tipo cruzamentos normais. Também mostraram que a soma dos resíduos de Baum-Bott são dados em termos das classes características do feixe tangente de $\mathcal{F}$ e do feixe tangente logarítmico de D. Neste caso, temos por hipótese que a folheação $\mathcal{F}$ é logarítmica ao longo de D.

Estas versões do Teorema de Baum-Bott foram aplicadas ao estudo de folheações logarítmicas em espaços projetivos complexos. Neste contexto, estes autores obtiveram as condições necessárias e suficientes para que todas as singularidades de tais folheações ocorram na hipersuperfície analítica invariante. Estas condições foram dadas em termos do grau da folheação $\mathcal{F}$ e do grau da hipersuperfície D.

Nesta dissertação, seguindo o trabalho de M. Corrêa e D. Machado (CORRÊA; MACHADO, 2019), vamos abordar o problema de encontrar versões do Teorema Baum-Bott para folheações logarítmicas ao longo de um divisor. Vamos considerar os casos em que o divisor D que compactifica a variedade ambiente, seja uma hipersuperfície suave e também o caso tenha singularidades do tipo cruzamento normal. Também consideraremos o estudo das folheações projetivas logarítmicas.

Este trabalho de dissertação é subdividido em duas partes. Na primeira parte (Parte I), que visa o desenvolvimento de um conteúdo preliminar, vamos discorrer sobre alguns tópicos iniciais que serão necessários para compreensão do presente trabalho. Nesta primeira parte, iremos dar definições e apresentar algumas propriedades importantes da teoria, que julgamos ser necessárias considerar. Em resumo, abordaremos os seguintes tópicos: o índice de Poincaré-Hopf, o número de Milnor, o resíduo de Grothendieck e a relação entre estes três importantes conceitos. Finalizando esta primeira parte da dissertação, faremos uma introdução da Teoria Chern-Weil de Classes Características, sendo que para tal consideraremos um estudo introdutório sobre fibrados vetoriais e também sobre as classes de Chern. Lembrando que esta primeira parte da dissertação,

visa fornecer os pré-requisitos e a devida contextualização para o desenvolvimento geral do trabalho.

Na segunda parte da dissertação (Parte II), apresentaremos com detalhes os resultados demonstrados por M. Corrêa e D. Machado (CORRÊA; MACHADO, 2019). Inicialmente apresentaremos algumas definições e resultados adicionais, tais como: O índice GSV, que é uma generalização do índice Poincaré-Hopf; formas e campos vetoriais logarítmicos; folheações holomorfas de dimensão 1. Enunciaremos também o Teorema Baum-Bott, que é tema central desta dissertação. Em seguida, passaremos à demonstração de três teoremas, em todos os casos, estes serão acompanhados de definições e resultados necessários. O Teorema 4.2 , considera o caso em que o divisor D, que compactifica a variedade ambiente, é uma hipersuperfície suave. Já o Teorema 5.1, considera o caso em que D é uma hipersuperfície do tipo cruzamento normal. Além disso, como consequência do Teorema 5.1, será apresentado um teorema do tipo Poincaré-Hopf para variedades não compactas, que relaciona a característica de Euler da variedade com a soma do número de Milnor das singularidades de uma folheação de dimensão 1 (definida globalmente por um único campo de vetores). Aplicando os resultados anteriores, o Teorema 6.1 apresenta uma caracterização para que uma hipersuperfície D contenha todas as singularidades de uma folheação projetiva logarítmica ao longo de D.

Parte I

Preliminares

1 O índice de Poincaré-Hopf, o número de Milnor e o resíduo de Grothendieck

O objetivo deste capítulo é apresentar e demonstrar algumas propriedades de três conceitos matemáticos que, apesar de aparentemente não estarem relacionados, por serem definidos de maneiras distintas, são iguais. Estes são o *índice de Poincaré-Hopf*, o *número de Milnor* e o *resíduo de Grothendieck*.

Primeiramente, falaremos sobre o *índice de Poincaré-Hopf* de uma aplicação. Para defini-lo, inicialmente falaremos do Teorema de Sard, que garante a abundância de valores regulares de uma aplicação diferenciável, o que permite o cálculo do grau de uma aplicação diferenciável em um ponto regular. Como o grau independe do ponto regular tomado, pode-se definir o grau de uma função como sendo o grau desta em um ponto regular qualquer. De posse do conceito de grau de uma aplicação passamos à definição do *índice de Poincaré-Hopf* e à demonstração de algumas propriedades que este índice satisfaz. Também trataremos de uma caracterização para o cálculo do índice em termos do número de raízes desta função em uma dada vizinhança.

Em seguida, voltaremos nosso foco para o *número de Milnor* de uma aplicação em um ponto, o qual é definido algebricamente, como a dimensão de uma álgebra quociente. Uma vez devidamente introduzido este conceito, apresentaremos as *Aplicações Pham*, que são de extrema importância na demonstração da igualdade entre o número de Milnor e o índice de Poincaré-Hopf. Feito isso, apresentaremos a demonstração da igualdade entre o índice de Poincaré-Hopf e o número de Milnor.

Finalmente, discutiremos sobre o *resíduo de Grothendieck*. Este pode ser visto como uma generalização, para dimensões maiores, do resíduo de Abel de funções meromorfas. Além de defini-lo, apresentaremos uma caracterização para o cálculo assim como algumas propriedades interessantes do resíduo. A principal delas nos diz que para uma aplicação f, o resíduo de Grothendieck do determinante jacobiano, $\det(Jf)$ relativo à f coincide com o número de Milnor de f e, consequentemente, com o índice de Poincaré-Hopf.

1.1 Índice de Poincaré-Hopf

Esta seção é dedicada à definição e estudo do *índice de Poincaré-Hopf* de uma aplicação holomorfa em um ponto p. Definido como o grau da aplicação de Gauss desta aplicação em p, este conceito aparece no *Teorema de Poincaré-Hopf* o qual relaciona a característica de Euler de uma variedade compacta com a soma do índice de Poincaré-Hopf das singularidades isoladas de um campo de vetores sobre esta variedade.

O Teorema de Sard e o grau de uma aplicação

Começamos falando sobre o Teorema de Sard. De maneira informal, este teorema nos diz que, dada f uma aplicação de classe C^1, o "tamanho" conjunto de valores singulares de f é "muito pequeno". Devido à esse fato, é garantida a abundância de pontos regulares no domínio de f.

Teorema 1.1 (Sard). *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1. Denote por Σ o conjunto dos pontos singulares de f, ou seja,*

$$\Sigma = \{p \in U : \ posto(f'(p)) < n\}$$

Então, a imagem $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula.

Demonstração. Ver em (JUDICE, 2012) □

Corolário 1.1.1 (Teorema de Brown). *Sejam X e Y variedades de classe C^1 e $f : X \to Y$ uma aplicação de classe C^1. Então, o conjunto de valores regulares de f, $Y \setminus f(\Sigma)$ é denso em Y.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.1, temos que $f(\Sigma)$ tem interior vazio em Y. Deste modo, dados $y \in Y$ e $\varepsilon > 0$, temos que $B(y, \varepsilon) \not\subset f(\Sigma)$, ou seja, existe $y_0 \in Y \setminus f(\Sigma)$ tal que $y_0 \in B(y, \varepsilon)$. Portanto, $\overline{Y \setminus f(\Sigma)} = Y$ e está demonstrado o resultado. □

Falaremos agora sobre variedades orientáveis.

Seja E um espaço vetorial real de dimensão finita. Dadas duas bases orientadas de E

$$\alpha = \{a_1, \ldots, a_n\} \ \text{ e } \ \beta = \{b_1, \ldots, b_n\}$$

definimos a seguinte relação de equivalência:

$$\alpha \sim \beta \iff \det\left([I]_\alpha^\beta\right) > 0,$$

onde $[I]_\alpha^\beta$ é a matriz de mudança de base de β para α. Considerando o conjunto

$$\mathcal{B} = \{\beta : \beta \text{ é uma base orientada de E}\}$$

, então, tem-se o quociente $\mathcal{B}/\sim$. Este quociente possui apenas duas classes de equivalência, chamadas de *orientação*.

Fixada uma base β, diremos que as bases $\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $\alpha \sim \beta$ definem a *mesma orientação* que β. Já as bases $\gamma \in \mathcal{B}$ tais que $\gamma \not\sim \beta$ definem a *orientação oposta* à orientação de β. Denota-se uma orientação por $\mathbb{O}$.

Definição 1.1.1. Um *espaço vetorial orientado* é um par $(E, \mathbb{O})$ onde $\mathbb{O}$ é uma orientação em E. Neste caso, as bases pertencentes à $\mathbb{O}$ serão chamadas de *bases positivas*.

Observação 1.1.1. Para o espaço $\mathbb{R}^n$, consideraremos a *orientação positiva*, sendo a orientação definida pela base canônica

$$\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

onde $e_1 = (1, 0 \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Definição 1.1.2. Sejam E, F espaços vetoriais de mesma dimensão, orientados. Dizemos que um isomorfismo $T : E \to F$ *preserva orientação* quando T leva bases positivas de E em bases positivas de F, ou seja, quando $\det\left([T]_\beta^\alpha\right) > 0$, onde α e β são bases positivas de E e F, respectivamente. Caso contrário, dizemos que T *inverte orientação*.

A definição de um isomorfismo preservar orientação, induz a definição de quando um difeomorfismo preserva orientação. Sejam X e Y variedades diferenciáveis com atlas maximais $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ e $\{V_\beta, \theta_\beta\}$, respectivamente. Para cada $p \in U_\alpha$, consideraremos a orientação positiva em T_pX a orientação determinada pela base $\{\psi'_\alpha(p) \cdot e_1, \ldots, \psi'_\alpha(p) \cdot e_n\}$. Da mesma maneira, para $q \in V_\beta$ a orientação positiva tem T_qY será a orientação determinada pela base $\left\{\theta'_\beta(q) \cdot e_1, \ldots, \theta'_\beta(q) \cdot e_n\right\}$.

Definição 1.1.3. Sejam X e Y variedades diferenciáveis. Um difeomorfismo $\varphi : X \to Y$ é dito *preservar orientação* quando para todo $p \in X$ o isomorfismo $\varphi'(p) : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ preserva orientação, onde as orientações positivas em T_pX e $T_{\varphi(p)}Y$ são as tomadas acima.

A orientação de uma variedade X é induzida pela orientação do espaço vetorial tangente, T_pX em cada ponto $p \in X$ e pelo isomorfismo induzido pela derivada das cartas locais conforme veremos a seguir.

Definição 1.1.4. Seja X uma variedade conexa. Dizemos que X é *orientável* quando para cada $p \in X$, pode-se tomar uma orientação para o espaço tangente T_pX de modo que exista uma vizinhança U de p em X e um difeomorfismo $\varphi : U \to V$, onde $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ que preserva orientação.

Definição 1.1.5. Sejam X e Y variedades. Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é dita *própria* quando $f^{-1}(K) \subset X$ é compacto sempre que $K \subset Y$ for compacto.

Definição 1.1.6. Sejam X e Y variedades orientáveis, ambas de dimensão n, Y conexa e $f : X \to Y$ uma aplicação de classe C^1 própria. Dado $a \in X$ ponto regular de f, o *sinal* de $f'(a)$, denotado por $\operatorname{sgn}(f'(a))$ é definido por:

$$\operatorname{sgn}\left(f'(a)\right) = \begin{cases} +1, & \text{quando } f'(a) \text{ preserva orientação} \\ -1, & \text{quando } f'(a) \text{ inverte orientação} \end{cases}$$

Dado $q \in Y$ valor regular de f, definimos o *grau de f em q*, denotado por $\deg(f, q)$ como sendo:

$$\deg(f; q) = \sum_{a \in f^{-1}(q)} \operatorname{sgn}\left(f'(a)\right)$$

Observação 1.1.2. O grau de uma aplicação f em um valor regular q está bem definido e é um número inteiro. De fato, sendo f uma aplicação própria e $\{q\}$ um subconjunto compacto de Y, temos que $f^{-1}(q)$ é finito.

A pergunta que surge imediatamente após esta definição é: *O grau de f varia quando variamos o valor regular q?* O próximo teorema nos garante que o grau independe do valor regular tomado.

Teorema 1.2. *Sejam X, Y variedades orientáveis de mesma dimensão, sendo Y conexa e $f : X \to Y$ uma aplicação de classe C^1, própria. Então, o grau de f é o mesmo, qualquer que seja o valor regular $q \in Y$.*

Demonstração. Ver em (LIMA, 1999) □

Em virtude do Teorema 1.2, pode-se fazer a seguinte definição:

Definição 1.1.7. O *grau* de uma aplicação $f : X \to Y$ é dado por

$$\deg(f) = \deg(f; q)$$

onde $q \in Y$ é um valor regular de f.

Com o objetivo de demonstrar alguns propriedades do índice de Poincaré-Hopf, definiremos o que conceito de homotopia entre aplicações e enunciaremos dois resultados (Teorema 1.3 e Proposição 1.1.1) que serão úteis para demonstrar que o índice de Poincaré-Hopf está bem definido, assim como uma caracterização para seu calculo.

Definição 1.1.8. Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações entre variedades. Uma aplicação $F : [0,1] \times X \to Y$ é *homotopia de classe C^1 entre f e g* quando F é classe C^1 e valem:

$$F(0,x) = f(x) \quad \forall x \in X$$
$$F(1,x) = g(x) \quad \forall x \in X.$$

Quando existe uma homotopia de classe C^1 entre f e g, dizemos que *f é suavemente homotópica à g.*

Teorema 1.3. *Se f é suavemente homotópica à g, então*

$$\deg(f) = \deg(g).$$

Demonstração. Ver em (MILNOR; WEAVER, 1997) □

Proposição 1.1.1. *Seja X uma variedade de dimensão $n+1$ compacta, orientável com bordo, denotado por ∂X e Y uma variedade compacta orientável. Considere $f : \partial X \to Y$ uma aplicação de classe C^1 própria. Se f admite uma extensão $F : X \to Y$ de classe C^1, então,* $\deg(f) = 0$.

Demonstração. Ver em (MILNOR; WEAVER, 1997) □

O índice de Poincaré-Hopf

Partiremos agora para a definição do índice de Poincaré-Hopf. Para o que segue, considere a seguinte norma em $\mathbb{C}^n$ para cada $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$$|z| := \sqrt{\sum_{j=i}^{n} z_j \overline{z_j}}.$$

Definição 1.1.9. Seja $p \in \mathbb{C}^n$. Um *germe (suave, holomorfo) em p* é uma classe de equivalência de aplicações (suaves, holomorfas) definida pela relação:

$$f \sim g \iff \exists\, U \subset \mathbb{C}^n, U \text{ aberto }, p \in U \text{ tal que } \mathrm{f}|_U = \mathrm{g}|_U$$

ou seja, $f \sim g$ quando existe uma vizinhança de U de p tal que f, g coincidem quando restritas à esta vizinhança. Denotaremos o germe de f em p por:

$$f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^m, q)$$

onde $q = f(p)$.

Observação 1.1.3. Dado um germe $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, q)$, pode-se, sem perda de generalidade, considerar $f(p) = q = 0 \in \mathbb{C}^n$. Neste caso, diremos que *p é uma raiz de f.*

Definição 1.1.10. Seja $f : (\mathbb{C}^n; p) \to (\mathbb{C}^n; 0)$ o germe de uma aplicação holomorfa com $f^{-1}(0) = \{p\}$. O *índice de Poincaré-Hopf de f em p*, denotado por $\mathcal{I}_p(f)$, é o grau da aplicação

$$\frac{f}{|f|} : S_\varepsilon^{2n-1}(p) \to S_1^{2n-1} \tag{1.1}$$

onde $S_\varepsilon^{2n-1}(p)$ é a esfera de raio $\varepsilon > 0$ e centro p e S_1^{2n-1} a esfera unitária centrada na origem.

Observação 1.1.4. Na definição acima, como $f^{-1}(p) = \{0\}$, temos que existe um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que a definição do índice faça sentido, ou seja

$$|f(x)| \neq 0, \quad \forall x \in S_\varepsilon^{2n-1}(p).$$

A proposição abaixo garante que o índice de Poincaré Hopf independe do ε tomado, desde que o índice esteja bem definido.

Proposição 1.1.2. *O índice de Poincaré-Hopf independe do $\varepsilon > 0$ tomado.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ dois valores para os quais $\deg\left(\frac{f}{|f|}\right)$ esteja definido e considere as aplicações:

$$\alpha = \frac{f}{|f|} : S^{2n-1}_{\varepsilon_1}(p) \to S^{2n-1}_1$$
$$\beta = \frac{f}{|f|} : S^{2n-1}_{\varepsilon_2}(p) \to S^{2n-1}_1.$$

Mostremos que $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$.

Sejam $B[p, \varepsilon_1]$ e $B[p, \varepsilon_2]$ as bolas fechadas centradas em p de raio ε_1 e ε_2 respectivamente. Estas bolas são variedades orientáveis. Consideraremos como orientação positiva para as bolas, a orientação em que o vetor normal aponta para fora.

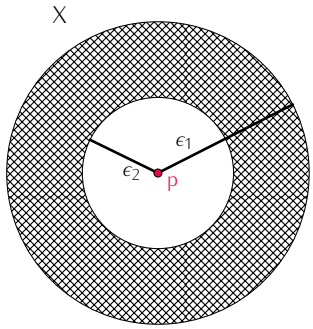

Figura 1 – Variedade $X = B[p, \varepsilon_1] \setminus B[p, \varepsilon_2]$.

Considere a variedade X dada por $X = B[p, \varepsilon_1] \setminus B[p, \varepsilon_2]$, representada na Figura 1.1. Neste caso, X é uma variedade compacta orientável, uma vez que ambas $B[p, \varepsilon_1]$ e $B[p, \varepsilon_2]$ o são.

Agora, olhando para a fronteira de X, tem-se que, $\partial X = S^{2n-1}_{\varepsilon_1}(p) \cup S^{2n-1}_{\varepsilon_2}(p)$ também é uma variedade orientável, com a orientação induzida das bolas fechadas em questão. Tal orientação é definida como sendo a orientação positiva em $S^{2n-1}_{\varepsilon_1}(p)$ e a orientação negativa em $S^{2n-1}_{\varepsilon_1}(p)$, ou seja, estas orientações são opostas.

Assim, a aplicação:

$$g = \frac{f}{|f|} : \partial X \to {S_1}^{2n-1}$$

está bem definida e além disso, pode ser estendida de maneira natural à X,

$$G = \frac{f}{|f|} : X \to {S_1}^{2n-1}.$$

Deste modo, pela Proposição 1.1.1, tem-se que $\deg(g) = 0$. Porém, por um lado, para $y \in {S_1}^{2n-1}$ valor regular de g, tem-se $\deg(g, y) = \deg(g) = 0$. Por outro lado, pela definição de grau de uma aplicação,

$$\deg(g, y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(g'(x)).$$

Decompondo $g^{-1}(y) \cap \partial X$ como segue

$$g^{-1}(y) \cap \partial X = \left[g^{-1}(y) \cap S^{2n-1}_{\varepsilon_1}(p)\right] \cup \left[g^{-1}(y) \cap S^{2n-1}_{\varepsilon_2}(p)\right].$$

e denotando

$$\begin{aligned} M &= \left[g^{-1}(y) \cap S^{2n-1}_{\varepsilon_1}(p)\right] \\ N &= \left[g^{-1}(y) \cap S^{2n-1}_{\varepsilon_2}(p)\right] \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \deg(g, y) &= \sum_{x \in M} \operatorname{sgn}(g'(x)) + \sum_{x \in N} \operatorname{sgn}(g'(x)) \\ &= \sum_{x \in M} \operatorname{sgn}(\alpha'(x)) - \sum_{x \in N} \operatorname{sgn}(\beta'(x)) \end{aligned}$$

onde o sinal negativo segue das orientações opostas de $S^{2n-1}_{\varepsilon_1}(p)$ e $S^{2n-1}_{\varepsilon_2}(p)$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \alpha^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(\alpha'(x)) &= \sum_{x \in \beta^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(\beta'(x)) \\ \deg(\alpha, y) &= \deg(\beta, y) \\ \deg(\alpha) &= \deg(\beta) \end{aligned}$$

ou seja, o índice independe do ε tomado. □

A primeira propriedade que o índice de Poincaré-Hopf satisfaz, que será demonstrada diz que se f é o germe de um biholomorfismo, então, $\mathcal{I}_p(f) = 1$. Lembrando que uma aplicação é um *biholomorfismo* quando ela é holomorfa e possui inversa também holomorfa. Antes de demonstramos esta propriedade, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.1. *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto convexo, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U$ e $\phi : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então, existem funções holomorfas $g_1, \ldots, g_n : U \to \mathbb{C}$ tais que:*

$$\phi(z) = \phi(p) + \sum_{j=1}^{n} g_j(z)(z_j - p_j).$$

Além disso, $g_j(p) = \dfrac{\partial \phi}{\partial z_j}(p)$.

Demonstração. Fixado $z \in U$, como U é convexo, tem-se que a aplicação

$$\begin{aligned} h : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow h(t) = \phi(p + t(z-p)) \end{aligned}$$

está bem definida e pela regra da cadeia:

$$h'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(p + t(z-p))(z_j - p_j)$$

Além disso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se que:

$$\phi(z) - \phi(p) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)\mathrm{d}t$$

e assim, segue que:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi(p) + \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(p + t(z-p))(z_j - p_j)\mathrm{d}t \right) \\ \phi(z) &= \phi(p) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z_j}(p + t(z-p))\mathrm{d}t \right) (z_j - p_j) \\ \phi(z) &= \phi(p) + \sum_{j=1}^{n} g_j(z)(z_j - p_j) \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue fazendo:

$$g_j(z) = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(p + t(z-p))\mathrm{d}t.$$

Finalmente, tem-se:

$$g_j(p) = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(p + t(p-p))\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(p)\mathrm{d}t = \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(p).$$

□

Proposição 1.1.3. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ o germe de um biholomorfismo. Então,*

$$\mathcal{I}_p(f) = 1.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos considerar $p = 0 \in \mathbb{C}^n$. Neste caso, a derivada de f em 0 é dada por:

$$f'(0) \cdot z = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + tz) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tz)}{t}.$$

Agora, defina

$$F(z, t) = \begin{cases} \dfrac{f(tz)}{t} & \text{, para } 0 < t \leqslant 1 \\ f'(0) \cdot z & \text{, para } t = 0. \end{cases}$$

Cada função coordenada de $F(z, t)$ é dada por

$$F_i(z, t) = \begin{cases} \dfrac{f_i(tz)}{t} & \text{, para } 0 < t \leqslant 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_i}(0) \cdot z_j & \text{, para } t = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Vamos aplicar o Lema 1.1 em cada função coordenada $F_i(z, t)$ para encontrar a expressão

$$F(z, t) = \left(\sum_{j=1}^{n} g_{1j}(tz) z_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} g_{nj}(tz) z_j \right) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

ou, equivalentemente, encontrar para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$F_i(z, t) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(tz) z_j \qquad \forall t \in [0, 1]. \tag{1.3}$$

Com efeito, para $t_0 = 0$, a igualdade 1.3 é equivalente à

$$F_i(z, t_0) = F_i(z, t) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(tz) z_j \iff F_i(z, 0) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(0) z_j \tag{1.4}$$

e pelo Lema 1.1,

$$F_i(z, 0) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(0) z_j \iff F_i(z, 0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0) z_j.$$

Logo, para $t_0 = 0$, temos que 1.3 é válida, ou seja,

$$F_i(z, 0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0) z_j.$$

Agora, para $t_0 \neq 0$ $(0 < t_0 \leqslant 1)$. Vejamos que 1.3 é válida, ou seja, vejamos que $F_i(z, t_0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t_0 z) z_j$. De fato, considerando a aplicação auxiliar $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, dada por

$$\alpha(t, z) = (\alpha_1(t, z), \ldots, \alpha_n(t, z)) = (t_0 t z_1, \ldots, t_0 t z_n).$$

Podemos tomar a composta

$$H_i(t,z) := (f_i \circ \alpha)(t,z).$$

Pela Regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(H_i(t,z)\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}\left(\alpha(t,z)\right)\frac{\partial \alpha_j}{\partial t}(t,z)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}\left(t_0 t z_1, \ldots, t_0 t z_n\right) t_0 z_j\\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}\left(t t_0 z\right) t_0 z_j\end{aligned} \tag{1.5}$$

Por outro lado, como $t_0 \neq 0$, segue da definição 1.4 que

$$\begin{aligned}F_i(z,t_0) &= \frac{f_i(t_0 z)}{t_0}\\ &= \frac{[f_i(t_0 z) - f_i(0)]}{t_0}\\ &= \frac{[H_i(1,z) - H_i(0,z)]}{t_0}\\ &= \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial H_i}{\partial t}(t,z)\mathrm{d}t}{t_0}\end{aligned}$$

utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo. Agora, usando 1.5, obtemos:

$$\begin{aligned}F_i(z,t_0) &= \frac{\displaystyle\int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(t t_0 z) t_0 z_j \mathrm{d}t}{t_0}\\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(t t_0 z) z_j \mathrm{d}t\\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(t t_0 z)\mathrm{d}t\right] z_j\\ &= \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t_0 z) z_j.\end{aligned}$$

Logo,

$$F_i(z,t_0) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t_0 z) z_j.$$

Assim, como $F(z,t) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$, a aplicação

$$\frac{F(z,t)}{|F(z,t)|}$$

é uma homotopia suave entre $\dfrac{f}{|f|}$ e $\dfrac{f'(0)}{|f'(0)|}$. Assim,

$$1 = \mathcal{I}_0\left(f'(0)\right) = \mathcal{I}_0\left(f\right).$$

□

Apesar de ser possível calcular o grau de uma aplicação, isto nem sempre é um trabalho simples. A próxima proposição fornece uma maneira alternativa para calcular o índice de Poincaré-Hopf.

Proposição 1.1.4. *Dado $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ o germe de uma aplicação holomorfa, seja $\varepsilon > 0$ tal que na bola $B_\varepsilon(p)$, o ponto p seja a única raiz de f. Então, o índice de Poincaré-Hopf de f em p, é o número de pontos do conjunto*

$$f^{-1}(\alpha) \cap B_\varepsilon(p)$$

onde α é um valor regular de f, suficientemente próximo de 0. Consequentemente, o índice de Poincaré-Hopf é um número inteiro positivo.

Demonstração. Denotando $S = S_\varepsilon^{2n-1}(p)$, seja $\delta = \inf\limits_S |f| > 0$. Tem-se que $\delta > 0$, pois p é uma raiz isolada. Assim, para $t \in [0,1]$, $z \in S$ e α valor regular de f suficientemente próximo de zero, vale

$$|f(z) - t\alpha| \geqslant |f(z)| - |t\alpha| \geqslant \delta - t|\alpha| > 0.$$

Deste modo, segue que $f^{-1}(t\alpha) \cap S = \emptyset$. De fato, suponha $z \in f^{-1}(t\alpha) \cap S$, então, $f(z) = t\alpha$ de modo que $|f(z) - t\alpha| = 0$, o que contradiz a inequação acima. Portanto, tem-se $|f(z) - t\alpha| \neq 0$.

Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} F : S \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (z,t) &\longrightarrow F(z,t) = \frac{f(z) - t\alpha}{|f(z) - t\alpha|} \end{aligned}$$

é uma homotopia de classe C^1 entre as aplicações $\dfrac{f(z) - \alpha}{|f(z) - \alpha|}$ e $\dfrac{f(z)}{|f(z)|}$ e pelo Teorema 1.3, tem-se que

$$\mathcal{I}_p\left(f\right) = \deg \frac{f}{|f|} = \deg \frac{f - \alpha}{|f - \alpha|} = \mathcal{I}_p\left(f - \alpha\right) \tag{1.6}$$

Considere agora $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} = f^{-1}(\alpha) \cap B_\varepsilon(p)$. Pode-se tomar esferas pequenas o suficiente, centradas em cada α_i, denotadas por $S_{\delta_i}^{2n-1}(\alpha_i)$, de modo que sejam duas a duas disjuntas e tais que $S_{\delta_i}^{2n-1}(\alpha_i) \cap S_\varepsilon^{2n-1}(p) = \emptyset$.

Sendo $\overline{B}_\varepsilon(p)$ uma bola centrada em p de raio suficientemente pequeno de modo que a única solução para $f(z) = 0$ em $\overline{B}_\varepsilon(p)$ seja p, considere a seguinte variedade orientável

$$X = \overline{B}_\varepsilon(p) \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B_{\delta_j}(\alpha_j)$$

cujo bordo é a união disjunta

$$\partial X = S_\varepsilon^{2n-1}(p) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} S_{\delta_j}^{2n-1}(\alpha_j) \right).$$

Deste modo, a aplicação $\dfrac{f-\alpha}{|f-\alpha|}$ está bem definida em ∂X e admite extensão trivial (ela própria) para X. Assim, pelo Teorema 1.1.1, $\deg\left(\dfrac{f-\alpha}{|f-\alpha|}\right) = 0$. Porém, pela maneira que ∂X foi tomado e considerando a orientação positiva, segue que

$$\deg\left(\frac{f-\alpha}{|f-\alpha|}\right) = \mathcal{I}_p(f-\alpha) - \mathcal{I}_{\alpha_1}(f-\alpha) - \ldots - \mathcal{I}_{\alpha_k}(f-\alpha)$$

e assim

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_p(f-\alpha) =& \mathcal{I}_{\alpha_1}(f-\alpha) + \ldots + \mathcal{I}_{\alpha_k}(f-\alpha) \\ \mathcal{I}_p(f-\alpha) =& k \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde a última igualdade segue do fato de que $f-\alpha$ é um biholomorfismo na vizinhança de α_i para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ e, consequentemente, $\mathcal{I}_{\alpha_i}(f-\alpha) = 1$. Finalmente, substituindo 1.6 em 1.7, tem-se:

$$\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_p(f-\alpha) = k$$

□

Exemplo 1. Seja $f(z_1, z_2) = (z_1^2, z_1 + z_2^3)$. Primeiramente note que $f^{-1}(0) = \{0\}$, uma vez que $f(z_1, z_2) = (0, 0)$ implica em

$$\begin{cases} z_1^2 = 0 \\ z_1 + z_2^3 = 0 \end{cases} \implies z_1 = z_2 = 0.$$

Deste modo, dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ valor regular de f, suficientemente próximo de $(0, 0)$, tem-se que $\mathcal{I}_0(f)$ é dado pelo número de soluções do sistema

$$\begin{cases} z_1^2 = \alpha_1 \\ z_1 + z_2^3 = \alpha_2. \end{cases}$$

Assim, tem-se $\mathcal{I}_0(f) = 6$, uma vez que a primeira equação do sistema possui 2 soluções distintas e a segunda possui 3 soluções distintas.

Teorema 1.4. *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade complexa suave, compacta, conexa e com bordo tal que $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$. Considere $f : U \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa, onde U é um domínio contendo X. Dado $p \in X \setminus \partial X$ tal que, $f(p) = 0$ e $f^{-1}(0) \cap \partial X = \emptyset$, suponha que o grau da aplicação*

$$\varphi = \frac{f}{|f|} : \partial X \longrightarrow S_1^{2n-1}(0)$$

seja k. Então, a equação $f = 0$ tem um número finito de soluções no interior de X e além disso a soma dos índices de f nesses pontos é exatamente k.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existam $k+1$ pontos distintos no interior de X, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ satisfazendo $f(\alpha_i) = 0$. Pode-se tomar esferas suficientemente pequenas, de raio $\delta_i > 0$ centradas em cada α_i, duas a duas disjuntas tais que $S_{\delta_i}^{2n-1}(\alpha_i) \cap \partial(X) = \emptyset$. Considere a variedade orientável

$$\widetilde{X} = X \setminus \bigcup_{j=1}^{k+1} B_{\delta_j}(\alpha_j)$$

sua fronteira é a seguinte união disjunta

$$\partial\widetilde{X} = \partial X \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} S_{\delta_j}^{2n-1}(\alpha_j) \right)$$

A aplicação $\widetilde{\varphi} : \partial\widetilde{X} \to S_1^{2n-1}(0)$ dada por $\widetilde{\varphi} = \dfrac{f}{|f|}$ pode ser estendida suavemente a todo $\widetilde{X}$ tomando como extensão a função $\dfrac{f}{|f|} : \widetilde{X} \to S_1^{2n-1}(0)$. De fato, esta extensão ocorre pois os únicos pontos onde $\dfrac{f}{|f|}$ poderia não estar definida, onde $|f(z)| = 0$, são os α_i's tomados inicialmente, os quais não pertencem à $\widetilde{X}$. Assim, pela Proposição 1.1.1, $\deg(\widetilde{\varphi}) = 0$. Porém, considerando a orientação em $\widetilde{X}$,

$$\begin{aligned} \deg(\widetilde{\varphi}) &= \deg(\varphi) - \mathcal{I}_{\alpha_1}(f) - \ldots \mathcal{I}_{\alpha_{k+1}}(f) \\ \deg(\varphi) &= \mathcal{I}_{\alpha_1}(f) + \ldots \mathcal{I}_{\alpha_{k+1}}(f) \end{aligned}$$

Deste modo, tem-se que $\deg(\varphi) \geqslant k+1$, o que é um absurdo. Portanto, existem no máximo k soluções para a equação $f = 0$ e, além disso, a soma dos índices de f nesses pontos é exatamente k. □

Com isto, obtemos o seguinte teorema, que será muito importante mais adiante, o qual apresenta a aditividade do índice de Poincaré-Hopf.

Teorema 1.5. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe holomorfo e p uma raiz isolada de $f = 0$. Considere a deformação holomorfa f_λ do germe $f = f_0$ dependendo do parâmetro*

complexo λ. Então, a medida que λ varia em uma pequena vizinhança de 0, a raiz p se decompõe em um número finito de raízes de f_λ e a soma dos índices de f_λ nestas raízes é igual ao índice de f_0 em p.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, $p = 0$ e tome uma bola $B_\delta(0)$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que f não possua raízes na esfera $\partial B_\delta(0)$. Seja $\delta_1 > 0$ tal que se $|\lambda| \leqslant \delta_1$, então, f_λ não possui raízes na esfera $\partial B_\delta(0)$. Defina

$$\inf_{\substack{|\lambda|\leqslant\delta_1 \\ z\in\partial B_\delta(0)}} |f_\lambda(z)| = K > 0. \tag{1.8}$$

Dado $\varepsilon < K$, existe $\delta_2 > 0$ tal que quando $|\lambda| \leqslant \delta_2$, então

$$\sup_{\partial B_\delta(0)} |f(z) - f_\lambda(z)| < \varepsilon. \tag{1.9}$$

Seja $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Neste caso, tem-se que, para $|\lambda| < \delta_3$, as aplicações

$$\frac{f_\lambda}{|f_\lambda|} : \partial B_\delta(0) \to S_1^{2n-1}(0).$$

são homotópicas. Porém, basta mostrar que elas são homotópicas à $\frac{f}{|f|} = \frac{f_0}{|f_0|}$. Para isto, considere:

$$\begin{aligned} \varphi(t,z) : [0,1] \times \partial B_\delta(0) &\longrightarrow S_1^{2n-1}(0) \\ (t,z) &\longmapsto \varphi(t,z) = (1-t)f + tf_\lambda. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Mostremos agora que $\varphi(t,z) = \varphi_t(z) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$ e $z \in \partial B_\delta(0)$. Suponha que existam $t_0 \in [0,1]$ e $z_0 \in \partial B_\delta(0)$ tais que $\varphi_{t_0}(z_0) = 0$. Deste modo

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0}(z_0) &= 0 \\ (1-t_0)f(z_0) + t_0 f_\lambda(z_0) &= 0 \\ f(z_0) &= -\frac{t_0}{1-t_0} f_\lambda(z_0) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Porém, neste caso, segue de 1.8, 1.9 e 1.11

$$\begin{aligned} \varepsilon > |f(z_0) - f_\lambda(z_0)| &= \left| -\frac{t_0}{1-t_0} f_\lambda(z_0) - f_\lambda(z_0) \right| \\ &= \left| \frac{t_0}{1-t_0} + 1 \right| |f_\lambda(z_0)| \\ &= \left| \frac{1}{1-t_0} \right| |f_\lambda(z_0)| \\ &> \frac{K}{1-t_0} > K \end{aligned} \tag{1.12}$$

o que é um absurdo. Portanto, $\varphi(t,z) = \varphi_t(z) \neq 0$ e $\dfrac{\varphi_t(z)}{|\varphi_t(z)|}$ é uma homotopia suave entre $\dfrac{f}{|f|}$ e $\dfrac{f_\lambda}{|f_\lambda|}$. Consequentemente

$$\mathcal{I}_0(f) = \deg \frac{f}{|f|} = \deg \frac{f_\lambda}{|f_\lambda|} = \sum_{\alpha\in f_\lambda^{-1}(0)} \mathcal{I}_{\alpha_i}(f_\lambda) \tag{1.13}$$

onde a última igualdade segue do Teorema 1.4. □

A seguir, definiremos quando dois germes de aplicações são *A-equivalentes*. Germes A-equivalentes serão importantes para a demonstração da igualdade entre o entre o índice de Poincaré-Hopf e o número de Milnor. Mostraremos que tanto o índice de Poincaré-Hopf e o número de Milnor são invariantes por A-equivalência.

Definição 1.1.11. Sejam $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ dois germes holomorfos. Dizemos que f e g são *A-equivalentes* quando existe um germe holomorfo $A : (\mathbb{C}^n, p) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que

$$f(z) = A(z)g(z).$$

Proposição 1.1.5. *Se $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ são A-equivalentes e $f^{-1}(f(p)) = \{p\}$, então,*

$$\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_p(g).$$

.

Demonstração. Utilizando o fato de que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é um subconjunto aberto, denso e conexo de $\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$, tome $V \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ uma vizinhança de $A(p)$. Assim, existe uma homotopia suave $G(z, t)$ tal que $G(z, 0) = A(z)$ e $G(z, 1) = A(p)$. Deste modo,

$$\frac{G(z,t)g(z)}{G(z,t)g(z)}$$

é uma homotopia suave entre $\dfrac{f(z)}{|f(z)|} = \dfrac{A(z)g(z)}{|A(z)g(z)|}$ e $\dfrac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|}$. Agora, como a aplicação identidade I é um elemento de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, pode-se tomar um caminho suave em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\gamma(t)$ tal que $\gamma(0) = A(p)$ e $\gamma(1) = I$. Portanto, $\dfrac{\gamma(t)g(z)}{|\gamma(t)g(z)|}$ é uma homotopia suave entre $\dfrac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|}$ e $\dfrac{g(z)}{|g(z)|}$ e, finalmente, como a composição de homotopias é uma homotopia, tem-se que existe uma homotopia suave entre $\dfrac{f(z)}{|f(z)|}$ e $\dfrac{g(z)}{|g(z)|}$ e, consequentemente, $\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_p(g)$. □

1.2 Número de Milnor

Falaremos agora sobre o *número de Milnor*. O número de Milnor é um invariante algébrico do germe de uma função, muito importante na geometria algébrica.

Primeiros resultados

Antes de começarmos, introduziremos algumas notações:

- Denotaremos por $\mathcal{O}_{p,n}$ o anel de germes holomorfos em $p \in \mathbb{C}^n$. Uma propriedade importante deste anel é que ele é um *anel local*. Além disso, este conjunto também tem estrutura de $\mathbb{C}$-álgebra;

- O (único) ideal maximal de $\mathcal{O}_{p,n}$ será denotado por $\mathfrak{M}_p$ e este pode ser descrito por:

$$\mathfrak{M}_p = \{h \in \mathcal{O}_{p,n} : h(p) = 0\}$$

- Dado um germe $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^k, 0)$, $f = (f_1, \ldots, f_k)$, denotaremos por $\mathfrak{i}_f$ o ideal em $\mathcal{O}_{p,n}$ gerado por $f_1, \ldots, f_k$, ou seja:

$$\mathfrak{i}_f = \{h_1 f_1 + \ldots + h_k f_k : h_i \in \mathcal{O}_{p,n}\} = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle_{\mathcal{O}_{p,n}}$$

Definição 1.2.1. Seja $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe holomorfo. A *álgebra local de f em p* é a $\mathbb{C}$-álgebra quociente:

$$\mathcal{Q}_f = \frac{\mathcal{O}_{p,n}}{\mathfrak{i}_f}$$

Definição 1.2.2. Seja $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, p)$ um germe holomorfo. O *número de Milnor de f em p* ou *multiplicidade de f em p*, denotado por $\mu_p(f)$, é a dimensão de $\mathcal{Q}_f$ como um espaço vetorial complexo.

Observação 1.2.1. Ao se tratar de germes holomorfos e o cálculo do número de Milnor em $p = (p_1, \ldots, p_n)$, podemos no preocupar apenas com os produtos das potências de $z_1 - p_1, \ldots, z_n - p_n$. De fato, sendo f uma aplicação holomorfa, a mesma possui uma representação sem séries de potência centrada em p. Assim, basta procurarmos quais potências de $z_1 - p_1, \ldots, z_n - p_n$ não pertencem ao ideal $\mathfrak{i}_f$ e determinam classes de equivalência distintas.

Exemplo 2. Considere $f = (z_1^2, z_1 + z_2^3)$, a mesma função considerada do exemplo 1. Calculemos agora o número de f Milnor no ponto 0. Com efeito, neste caso, tem-se

$$f_1 = z_1^2, f_2 = z_1 + z_2^3$$

e assim:

$$\mathfrak{i}_f = \left\langle z_1^2, z_1 + z_2^3 \right\rangle.$$

Como $\{z_1^{n_1} z_2^{n_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$ é uma base para $\mathcal{O}_{0,2}$, basta verificar quais são os elementos desta base não pertencem à $\mathfrak{i}_f$, pois esta será uma base para $\mathcal{Q}_f$. Com isso em mente, tem-se

- $z_1^2 \in \mathfrak{i}_f$. Deste modo, todos os elementos que possuírem fator z_1 com potência maior ou igual à 2, pertencerão à $\mathfrak{i}_f$;

- $z_1 z_2^3 = z_1(z_1 + z_2^3) - z_1^2 = z_1 f_2 - f_1 \in \mathfrak{i}_f$. Do mesmo modo que o caso anterior, elementos que forem múltiplos de $z_1 z_2^3$ serão elementos de $\mathfrak{i}_f$.;

- $z_2^6 = z_2^3(z_1 + z_2^3) - z_1 z_2^3 \in \mathfrak{i}_f$.

Feito isto, basta verificar, dentre os elementos $\left\{1, z_1, z_2, z_1^2, z_1z_2, z_2^3, z_1z_2^2, z_2^4, z_2^5\right\}$, quais destes possuem a mesma classe de equivalência. Note que

- $z_2^3 + z_1 \in \mathfrak{i}_f \implies \overline{z_2^3} = \overline{z_1}$;
- $z_2^4 = z_2(z_1 + z_2^3) = z_1z_2 + z_2^4 \in \mathfrak{i}_f \implies \overline{z_2^4} = \overline{z_1z_2}$;
- $z_2^5 = z_2^2(z_1 + z_2^3) = z_1z_2^2 + z_2^5 \in \mathfrak{i}_f \implies \overline{z_2^5} = \overline{z_1z_2^2}$

e assim, o conjunto

$$\beta = \left\{\overline{1}, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_1z_2}, \overline{z_1z_2^2}\right\}$$

é uma base para $\mathcal{Q}_f$. Portanto, $\mu_0(f) = 6$, o qual coincide com o $\mathcal{I}_0(f)$.

Como dito anteriormente, o índice de Poincaré-Hopf, o número de Milnor também é invariante por A-equivalência.

Proposição 1.2.1. *Sejam f, g germes de funções holomorfos A-equivalentes, então, eles têm o mesmo número de Milnor em p.*

Demonstração. Como f, g são A-equivalentes, tem-se $f = Ag$ onde $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

segue que

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

ou seja, podemos escrever $f_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} g_j$. Isto implica que $f_k \in \mathfrak{i}_g$, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ ou seja, $\mathfrak{i}_f \subset \mathfrak{i}_g$. Como A é inversível, pode-se escrever $g = A^{-1}f$. Denotando por

$$A^{-1}(z) = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

obtém-se $g_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} f_j$, ou seja, $g_k \in \mathfrak{i}_f$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Assim, conclui-se que $\mathfrak{i}_f = \mathfrak{i}_g$.

Portanto, $\mathcal{Q}_f = \mathcal{Q}_g$ e, consequentemente, $\mu_p(f) = \mu_p(g)$. $\square$

A Proposição 1.2.2 abaixo, nos dá uma condição suficiente para que dois germes sejam A-equivalentes e, portanto, tenham o mesmo número de Milnor. Essa propriedade será útil para demonstrarmos um resultado mais a frente.

Lema 1.2. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe holomorfo com número de Milnor μ em p. Dada qualquer coleção de μ germes de funções em $\mathfrak{M}_p$, digamos, $h_1, \ldots, h_\mu$, o produto delas pertence à $\mathfrak{i}_f$.*

Demonstração. Considere os seguintes $\mu + 1$ germes:

$$H_1 = 1, H_2 = h_1, H_2 = h_1 h_2, \ldots H_{\mu+1} = h_1 \ldots h_\mu.$$

Como $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f = \mu$, o conjunto formado pelas classes dos H_i é linearmente dependente em $\mathcal{Q}_f$, ou seja, existe uma combinação linear, não nula, resultando em $\overline{0} \in \mathcal{Q}_f$. Logo, tem-se que tal combinação linear pertence à $\mathfrak{i}_f$, isto significa que existem $a_i \in \mathbb{C}$ tais que:

$$a_1 H_1 + a_2 H_2 + \ldots + a_{\mu+1} H_{\mu+1} \in \mathfrak{i}_f.$$

Se apenas um a_k for diferente de zero, então diretamente que $h_k \in \mathfrak{i}_f$ e o resultado segue. Caso contrário, seja k o menor inteiro tal que $a_k \neq 0$, então:

$$a_k H_k + a_{k+1} H_{k+1} + \ldots + a_{\mu+1} H_{\mu+1} \in \mathfrak{i}_f$$

e segue que

$$\begin{aligned} a_k H_k + a_{k+1} H_{k+1} + \ldots + a_{\mu+1} H_{\mu+1} =& H_K \left(a_k + a_{k+1} \frac{H_{k+1}}{H_k} + \ldots a_{\mu+1} \frac{H_{\mu+1}}{H_k} \right) \\ =& H_K \left(a_k + a_{k+1} h_k + \ldots a_{\mu+1} h_{k+1} \ldots h_{\mu+1} \right). \end{aligned}$$

Colocando $F = a_k + a_{k+1} h_k + \ldots a_{\mu+1} h_{k+1} \ldots h_{\mu+1}$, tem-se

$$F(p) = a_k + a_{k+1} h_k(p) + \ldots a_{\mu+1} h_{k+1} \ldots h(p)_{\mu+1}(p) = a_k \neq 0$$

pois $h_i \in \mathfrak{M}_p$.

Assim, F é um elemento inversível em $\mathcal{O}_{p,n}$, ou seja, existe $F^{-1} \in \mathcal{O}_{p,n}$. Como $H_k F \in \mathfrak{i}_f$, pela propriedade de ideal, tem-se que $H_k F F^{-1} = H_k \in \mathfrak{i}_f$, ou de outra forma, $h_1 h_2 \ldots h_{k-1} \in \mathfrak{i}_f$. Multiplicando pelos fatores h_i restantes, obtém-se

$$h_1 h_2 \ldots h_{\mu+1} \in \mathfrak{i}_f$$

□

Observação 1.2.2. Uma característica importante de funções holomorfas $F(z_1, \ldots, z_n)$ definidas em uma vizinhança de um ponto $p = (p_1, \ldots, p_n)$ é que, usando a expansão em série de Taylor ela sempre pode ser escrita como uma soma infinita

$$F = F_m + F_{m+1} \ldots + F_{m+k} + \ldots$$

com $F_m \not\equiv 0$ e onde cada F_j é um polinômio de grau j nas variáveis $z_1 - p_1, \ldots, z_n - p_n$.

Chamamos o número m de *ordem de F em p*.

Proposição 1.2.2. *Sejam $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ germes holomorfos com f tendo número de Milnor μ em p. Suponha que cada componente da diferença $g - f$ tenha expansão da forma*

$$g_i - f_i = F_{i_{\mu+r_i}} + F_{i_{\mu+r_i+1}} + \ldots +$$

com $r_i \geqslant 1$. Então, f e g são A-equivalentes.

Demonstração. Para $l \geqslant 1$, escreva:

$$F_{i_{\mu+l}} = \sum_J a_{iJ}(z_1 - p_1)^{j_1} \ldots (z_n - p_n)^{j_n}$$

com $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, $|J| = j_1 + \ldots + j_n = \mu + l$.

Note que $z_i - p_i$ é uma função tal que $(z_i - p_i)(p) = 0$, ou seja, $z_i - p_i \in \mathfrak{M}_p$ e, consequentemente, cada termo de $F_{i_{\mu+r_i+l}}$ é o produto de $\mu + l \geqslant \mu$ funções de $\mathfrak{M}_p$. Assim, pelo Lema 1.2, cada termo de $F_{i_{\mu+r_i+l}}$ pertence à $\mathfrak{i}_f$ e pode ser escrito como

$$a_{iJ}(z_1 - p_1)^{j_1} \ldots (z_n - p_n)^{j_n} = g_{J1}f_1 + g_{J2}f_2 + \ldots + g_{Jn}f_n$$

onde cada $g_{Jk} \in \mathfrak{M}_p$, uma vez que do lado esquerdo, tem-se uma expressão de grau $\mu + l > \mu$ e do lado esquerdo um elemento de $\mathfrak{i}_f$. Assim, temos:

$$F_{i_{\mu+l}} = \sum_j^n b_{ij}^{(\mu+l)} f_j$$

com $b_{ij}^{(\mu+l)} \in \mathfrak{M}_p$. Agora, somando em l, para $i \in \{1, \ldots, n\}$ tem-se:

$$g_i - f_i = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_j^n b_{ij}^{(\mu+l)} f_j \quad \Longrightarrow$$

$$g_i = \sum_j^n c_{ij} f_i + f_i. \tag{1.14}$$

Escrevendo da forma matricial, temos a seguinte relação entre f e g:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} + 1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} + 1 & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

ou seja, $g = (I+C)f$ onde $[I]$ é a matriz identidade $n \times n$ e $[C] = [c_{ij}]$. Como $C(p) = 0$, em uma vizinhança de p, a matriz $I + C$ é invertível e, assim, f e g são A-equivalente. □

A seguir, verificaremos que o número de Milnor de um biholomorfismo é 1. Para isso, primeiramente mostraremos que este fato ocorre para transformações lineares inversíveis.

Proposição 1.2.3. *Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma transformação linear inversível. Então,*

$$\mu_0(T) = 1.$$

Demonstração. Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma transformação linear inversível. Então, existe $T^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que $TT^{-1} = I$, ou seja, T é A-equivalente à transformação linear identidade. Com isso, basta mostrar que $\mu_0(I) = 1$.

Neste caso, temos que $\mathfrak{i}_I = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$. Mostremos que $\beta = \{\overline{1}\}$ é uma base para $\mathcal{Q}_I$ como espaço vetorial complexo. De fato, primeiramente, pela igualdade de polinômios, a equação

$$1 = h_1 z_1 + \ldots + h_n z_n$$

não possui solução para $h_i \in \mathcal{O}_{p.n}$. O que implica que $1 \notin \mathfrak{i}_I$. Por outro lado, vejamos que para $\overline{f} \in \mathcal{Q}_I$ qualquer, este pode ser escrito como um múltiplo de $\overline{1}$. Com efeito, tomando $f \in \mathcal{O}_{p.n}$, pela Observação 1.2.2, tem-se:

$$f = F_0 + \ldots + F_n + \ldots$$

onde os F_i são formado por monômios de grau i nas variáveis z_j. Mais especificamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
F_0 &= f(0) \\
F_1 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(0) z_i \\
F_2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i z_j}(0) z_i z_j \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Porém, note que para todo $k \geqslant 1$, $F_k \in \mathfrak{i}_I$ e, consequentemente, $\overline{F_k} = \overline{0}$. Deste modo, segue que

$$\overline{f} = \overline{F_0} = \overline{f(0)1} = f(0)\overline{1}$$

sendo que na última igualdade, utilizamos o fato de que 1 é a função constante igual à 1, $f(0) \in \mathbb{C}$ é uma constante. □

Proposição 1.2.4. *Se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ é o germe de um biholomorfismo, então,*

$$\mu_0(f) = 1.$$

.

Demonstração. Primeiramente, utilizando o fato de que $f(0) = 0$, pode-se escrever f como

$$f(z) = f'(0)z + F_2(z) + \dots F_n(z) + \dots$$

o que implica em

$$f(z) - f'(0)z = F_2(z) + \dots F_n(z) + \dots$$

Assim, pela Proposição 1.2.2, considerando $f' = g$ e $f = f$, temos que $f'(0)$ e f são A-equivalentes. Como $f'(0)$ é um isomorfismo, pela proposição 1.2.3, temos que $\mu_0(f'(0)) = 1$ e pela relação de A-equivalência $\mu_0(f) = \mu_0(f'(0)) = 1$. □

1.3 Relação entre o índice de Poincaré-Hopf e o número de Milnor

Dedicamos esta seção do trabalho para apresentar a demonstração da igualidade entre o índice de Poincaré-Hopf e o número de Milnor de um germe holomorfo. Mais precisamente, apresentaremos a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 1.6. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe holomorfo. Se $\mu_0(f)$ é finito, então,*

$$\mu_0(f) = \mathcal{I}_0(f).$$

O primeiro passo para a demonstração deste resultado envolve o estudo das *aplicações Pham*. Estas aplicações têm um papel fundamental no decorrer da demonstração. Dentre os resultados apresentados a seguir, pode-se destacar o Lema 1.3, o qual mostra que, no caso particular das aplicações Pham, o índice de Poincaré-Hopf e o número de Milnor coincidem.

Aplicação Pham

Definição 1.3.1. Uma *aplicação Pham* é uma aplicação da forma

$$\begin{aligned} \gamma^J : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto \gamma^J(z_1, \dots, z_n) = (z_1^{j_1}, \dots, z_n^{j_n}) \end{aligned}$$

onde $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$.

O primeiro passo que daremos, para a demonstração da igualdade do índice de Poincaré-Hopf e o número de Milnor é que eles coincidem quando consideramos as aplicações Pham.

Lema 1.3. *Seja γ^J uma aplicação Pham. Então,*

$$\mathcal{I}_0\left(\gamma^J\right) = \mu_0\left(\gamma^J\right).$$

Demonstração. Pela Proposição 1.1.4, sabemos que $\mathcal{I}_0\left(\gamma^J\right)$ é o número de soluções do sistema

$$\begin{cases} z_1^{j_1} = \xi_1 \\ \quad\vdots \\ z_n^{j_n} = \xi_n \end{cases}$$

onde $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ é um valor regular de γ^J suficientemente próximo de $0 \in \mathbb{C}^n$. Assim, $\xi_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Deste modo, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a expressão $z_i^{j_i} = \xi_i$ possui j_i soluções distintas. Consequentemente, existem $j_1 j_2 \ldots j_n$ soluções para o sistema, ou seja

$$\mathcal{I}_0\left(\gamma^J\right) = j_1 j_2 \ldots j_n.$$

Por outro lado, sendo $\mathbf{i}_{\gamma^J} = \left\langle z_1^{j_1}, \ldots, z_n^{j_n} \right\rangle$, uma base para $\mathcal{Q}_{\gamma^J}$ em 0 é formada pelas classes dos seguintes monômios

$$z_1^{m_1} z_2^{m_2} \ldots {z_n}^{m_n}$$

com $0 \leqslant m_i \leqslant j_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, uma vez que estes monômios são todos distintos e não pertencem à $\mathbf{i}_{\gamma^J}$. Como existem $j_1 j_2 \ldots j_n$ monômios deste tipo, segue que

$$\mu_0\left(\gamma^J\right) = j_1 j_2 \ldots j_n.$$

Portanto $\mathcal{I}_0\left(\gamma^J\right) = \mu_0\left(\gamma^J\right)$. □

Proposição 1.3.1. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ o germe de uma aplicação com número de Milnor $\mu_0(f) = \mu$. Considere a aplicação Pham*

$$\gamma^{[\mu+1]} \text{ onde } [\mu+1] = (\mu+1, \ldots, \mu+1) \in \mathbb{N}^n$$

e a deformação holomorfa

$$\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = \gamma^{[\mu+1]} + \lambda f$$

com λ em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. Então, f é A-equivalente à $\gamma_\lambda^{[\mu+1]}$ para $\lambda \neq 0$.

Demonstração. Reescrevendo a deformação considerada:

$$\gamma_{\lambda}^{[\mu+1]} - \lambda f = \gamma^{[\mu+1]}$$

tem-se, em cada componente a seguinte relação

$$\gamma_{\lambda_i}^{[\mu+1]} - \lambda f_i = z_i^{\mu+1}$$

para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Assim, pela Proposição 1.2.2, $\gamma_{\lambda_i}^{[\mu+1]}$ e λf_i são $A-$equivalente. Além disso, como λf_i e f são A-equivalentes, segue o resultado desejado. □

Teorema 1.7. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe holomorfo. Então, $\mu_p(f)$ é finito se, e somente se, p é um ponto isolado de $f^{-1}(0)$.*

Demonstração. Ver em (MOL; SOARES, 2001). □

O próximo passo em direção à demonstração do Teorema 1.6, será fixar algumas notações que serão utilizadas no que segue. Considere:

- Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um domínio, então, $\mathcal{O}(U)$ denota a $\mathbb{C}-$álgebra de aplicações holomorfas definidas em U;
- Dada $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa, denotamos por $\mathfrak{i}_f$ o ideal de $\mathcal{O}(U)$ gerado pelas funções componente de f,

$$\mathfrak{i}_f = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$$

Definição 1.3.2. A álgebra quociente $\mathcal{Q}_f(U)$ é a $\mathbb{C}-$álgebra é definida por

$$\mathcal{Q}_f(U) = \mathcal{O}(U)/\mathfrak{i}_f$$

A subálgebra polinomial $\mathcal{Q}_f[U]$ é a imagem da álgebra polinomial $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]_U \subset \mathcal{O}(U)$ pela projeção

$$\pi : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{Q}_f(U)$$

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe holomorfo com número de Milnor $\mu_0(f) = \mu < \infty$ e considere a deformação holomorfa $f_\lambda = f - \lambda$ de f, com $\lambda \in \mathbb{C}^n$ e $f_0 = f$.

Lema 1.4. *Nas condições acima, dado o ideal $\mathfrak{i}' = \langle f_1, \ldots, f_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle$, tem-se*

$$\mathcal{O}_{n+n}/\mathfrak{i}' \approx \mathcal{O}_n/\mathfrak{i}_f$$

onde $\mathfrak{i}_f$ é o ideal gerado por $f_1, \ldots, f_n$.

Demonstração. Denotando

$$\mathbb{C}^{n+n} = \{(z,\lambda) = (z_1,\dots,z_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n) : z_i, \lambda_j \in \mathbb{C}\},$$

dada uma aplicação $G(z,\lambda) \in \mathcal{O}_{n+n}$, usando a representação em série de potências, podemos escrever

$$\begin{aligned} G(z,\lambda) &= \sum_{J=(J',J'')} a_J z^{J'} \lambda^{J''} \\ &= \sum_{\substack{J=(J',J'')\\ J''\neq 0}} a_J z^{J'} \lambda^{J''} + \sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'} \end{aligned}$$

onde $J' = (j'_1,\dots,j'_n)$, $J'' = (j''_1,\dots,j''_n)$ e

$$z^{J'} = z_1^{j'_1}\dots z_n^{j'_n} \qquad \text{e} \qquad \lambda^{J''} = \lambda_1^{j''_1}\dots\lambda_n^{j''_n}.$$

Assim, a classe de $G(z,\lambda)$ no quociente $\mathcal{O}_{n+n}/_{\mathbf{i}'}$, denotada por $\overline{G(z,\lambda)}$, é dada por

$$\begin{aligned} \overline{G(z,\lambda)} &= \overline{\sum_{\substack{J=(J',J'')\\ J''\neq 0}} a_J z^{J'} \lambda^{J''} + \sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'}} \\ &= \overline{\sum_{\substack{J=(J',J'')\\ J''\neq 0}} a_J z^{J'} \lambda^{J''}} + \overline{\sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'}} \\ &= \overline{0} + \overline{\sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'}} \\ &= \overline{\sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'}} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Por outro lado, vamos denotar a classe de uma função $g \in \mathcal{O}_n$, no quociente $\mathcal{O}_n/_{\mathbf{i}_f}$ por $[g]$.

Agora, usando a igualdade 1.16 vamos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_{n+n}/_{\mathbf{i}'} &\longrightarrow \mathcal{O}_n/_{\mathbf{i}_f} \\ \overline{G(z,\lambda)} &\longmapsto \varphi\left(\overline{G(z,\lambda)}\right) := \left[\sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'}\right] \end{aligned}$$

Mostremos que φ está bem definida. Com efeito, sejam $\overline{G(z,\lambda)}, \overline{H(z,\lambda)} \in \mathcal{O}_{n+n}/_{\mathbf{i}'}$ tais que $\overline{G(z,\lambda)} = \overline{H(z,\lambda)}$. Escrevendo

$$G(z,\lambda) = \sum_{J''\neq 0} a_J z^{J'} \lambda^{J''} + \sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'} \tag{1.17}$$

$$H(z,\lambda) = \sum_{J''\neq 0} b_J z^{J'} \lambda^{J''} + \sum_{J=(J',0)} b_J z^{J'}, \tag{1.18}$$

como $\overline{G(z,\lambda)} = \overline{H(z,\lambda)}$, tem-se que $G(z,\lambda) - H(z,\lambda) \in \mathfrak{i}'$, ou seja, existem

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathcal{O}_{n+n}$$

tais que

$$G(z,\lambda) - H(z,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j.$$

Substituindo 1.17 e 1.18 na expressão acima, segue que

$$\left(\sum_{J'' \neq 0} a_J z^{J'} \lambda^{J''} + \sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'} \right) - \left(\sum_{J'' \neq 0} b_J z^{J'} \lambda^{J''} + \sum_{J=(J',0)} b_J z^{J'} \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \implies$$

$$\sum_{J'' \neq 0} (a_J - b_J)\, z^{J'} \lambda^{J''} + \sum_{J=(J',0)} (a_J - b_J)\, z^{J'} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \tag{1.19}$$

Afirmação. A igualdade 1.19 implica que

$$\sum_{J=(J',0)} (a_J - b_J)\, z^{J'} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \tag{1.20}$$

Com efeito, a igualdade 1.19 é verdadeira para todo (z,λ) (em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^{n+n}$). Em particular, para todo ponto do tipo $(z,0) = (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$, obtemos a igualdade

$$\sum_{J=(J',0)} (a_J - b_J)\, z^{J'} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(z,0) f_j(z)$$

como queiramos. Portanto a afirmação é verdadeira.

Com isso, note que a igualdade 1.20 nos diz que

$$\sum_{J=(J',0)} (a_J - b_J)\, z^{J'} \in \mathfrak{i}_f$$

no anel $\mathcal{O}_n$, uma vez que pode-se ver as funções $\alpha_j(z,0)$ como elementos de $\mathcal{O}_n$. Em particular,

$$\left[\sum_{J=(J',0)} (a_J - b_J)\, z^{J'} \right] = [0] \in \mathcal{O}_n / \mathfrak{i}_f. \tag{1.21}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\overline{G(z,\lambda)}\right) &= \varphi\left(\overline{H(z,\lambda)}\right) && \Longleftrightarrow \\
\left[\sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'}\right] &= \left[\sum_{J=(J',0)} b_J z^{J'}\right] && \Longleftrightarrow \\
\left[\sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'}\right] - \left[\sum_{J=(J',0)} b_J z^{J'}\right] &= [0] && \Longleftrightarrow \\
\left[\sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'} - \sum_{J=(J',0)} b_J z^{J'}\right] &= [0] && \Longleftrightarrow \\
\left[\sum_{J=(J',0)} (a_J - b_J) z^{J'}\right] &= [0]
\end{aligned}$$

o que é verdade por 1.21. Note que pela forma que φ foi definida, segue que φ é um homomorfismo. Agora, vejamos que φ é um isomorfismo. Primeiramente, φ é sobrejetiva. Com efeito, dado $[g] \in \mathcal{O}_n/\mathfrak{i}_f$, como $g \in \mathcal{O}_n$, podemos escrever

$$g = \sum_{J'} a_{J'} z^{J'}.$$

Tomando $G(z,\lambda) \in \mathcal{O}_{n+n}$ definida por

$$G(z,\lambda) = \sum_{J'} a_{J'} z^{J'}$$

temos que

$$\varphi\left(\overline{G(z,\lambda)}\right) = [g]$$

e portanto, φ é sobrejetiva. Agora, basta verificar que φ é injetiva. De fato, seja $\overline{G(z,\lambda)} \in \mathcal{O}_{n+n}/\mathfrak{i}'$ tal que

$$\varphi\left(\overline{G(z,\lambda)}\right) = [0] \in \mathcal{O}_n/\mathfrak{i}_f.$$

Escrevendo

$$G(z,\lambda) = \sum_{J''\neq 0} a_J z^{J'} \lambda^{J''} + \sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'}$$

temos

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\overline{G(z,\lambda)}\right) &= [0] && \Longleftrightarrow \\
\left[\sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'}\right] &= [0] && \Longleftrightarrow \\
\sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'} &= \sum_{j=1}^{n} a_j f_j
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}_n$. Deste modo

$$\begin{aligned}\overline{G(z,\lambda)} &= \overline{\sum_{J=(J',0)} a_J z^{J'}} \\ &= \overline{\sum_{j=1}^{n} a_j f_j} \\ &= \overline{0}.\end{aligned}$$

Logo, φ é injetiva. □

Lema 1.5. *Dada a aplicação*

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, 0) \\ (z,\lambda) &\longmapsto F(z,\lambda) = (f_\lambda(z), \lambda)\end{aligned}$$

temos que, as $\mathbb{C}-$álgebras $\mathcal{Q}_f$ e $\mathcal{Q}_F$ são isomorfas. Além disso, se $e_1, \ldots, e_\mu$ formam uma base para $\mathcal{Q}_f$, então, estes também constituem uma base para $\mathcal{Q}_F$.

Demonstração. Escreva $F = (F_1, \ldots, F_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, onde $F_i = f_{\lambda_i}$. Assim, tem-se:

$$\mathfrak{i}_F = \langle F_1, \ldots, F_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle$$

Mostremos que $\mathfrak{i}_F$ coincide com o ideal $\mathfrak{i}' = \langle f_1, \ldots, f_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle$. Com efeito, temos:

- $\mathfrak{i}_F \subset \mathfrak{i}'$ pois $f_{\lambda_i} = f_i - \lambda_i \in \mathfrak{i}'$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- $\mathfrak{i}' \subset \mathfrak{i}_F$ pois $f_i = f_{\lambda_i} + \lambda_i \in \mathfrak{i}_F$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$;

Logo, $\mathfrak{i}_F = \mathfrak{i}'$. Assim, pelo Lema 1.4, tem-se $\mathcal{O}_{n+n}/\mathfrak{i}_F = \mathcal{O}_{n+n}/\mathfrak{i}' \approx \mathcal{O}_n/\mathfrak{i}_f$ e, consequentemente, $\mathcal{Q}_F \approx \mathcal{Q}_f$.

Agora, dada $\{e_1, \ldots, e_\mu\}$, uma base de $\mathcal{Q}_f$, pelo isomorfismo obtido acima, este conjunto também forma uma base para $\mathcal{Q}_F$, via isomorfismo. □

Proposição 1.3.2. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe holomorfo com número de Milnor $\mu_0(f) = \mu$. Então, todo $g \in \mathcal{O}_{0,n}$ pode ser escrito como*

$$g(z) = h_1(f(z))e_1(z) + \ldots + h_\mu(f(z))e_\mu(z) \tag{1.22}$$

onde $h_j, e_j \in \mathcal{O}_{0,n}$. Chamamos a expressão 1.22 de forma preparada de g.

Observação 1.3.1. O resultado acima será utilizado mais adiante. Este é uma consequência de um resultado conhecido na literatura como Teorema da Preparação. Veja mais detalhes em (SOARES, 2002).

Lema 1.6. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe holomorfo com número de Milnor $\mu_0(f) = \mu < \infty$. Então, existem vizinhanças $U, V \subset \mathbb{C}^n$ de 0, U no domínio e V na imagem de f tais que todos os germes que aparecem na preparação de todo polinômio estão definidas em U e V.*

Demonstração. Considere as seguintes funções: $1, z_1, z_2, \ldots, z_n$ e $\{e_1, \ldots, e_\mu\}$ uma base para $\mathcal{Q}_f$. Cada uma dessas funções pode ser escrita da forma preparada como

$$f^*(h_1(z))e_1(z) + \ldots + f^*(h_\mu(z))e_\mu(z).$$

Seja V um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ onde todas as funções h_i da forma preparada das funções consideradas acima estejam definidas. Coloque $U \subset f^{-1}(V) \subset \mathbb{C}^n$ uma vizinhança de 0 na qual as funções e_j estão definidas.

Demonstraremos o resultado por indução no grau do polinômio P. Se P tem grau 0, então, $P = c.1$, com $c \in \mathbb{C}^n$ e o resultado é válido. Suponha o resultado válido para polinômios de grau menor à d. Um polinômio de grau d, pode ser escrito como

$$P(z) = \sum_{j=1}^{d} z_j Q_j(z) c.1$$

onde $Q_j(z)$ é um polinômio de grau estritamente menor que d. Deste modo, pela hipótese de indução, o resultado é válido para $P(z)$, uma vez que todos o resultado é válido para todos elementos da decomposição. □

Lema 1.7. *Seja $\{e_1, \ldots, e_\mu\}$ uma base para $\mathcal{Q}_f$. Então, existe uma vizinhança $U_1 \subset \mathbb{C}^n$ de 0 tal que para todo $|\lambda|$, suficientemente pequeno, o espaço $\mathbb{C}-$linear gerado pelas imagens de $e_1, \ldots, e_\mu$ na álgebra $\mathcal{Q}_{f_\lambda}(U_1)$ contém a subálgebra polinomial $\mathcal{Q}_{f_\lambda}[U_1]$ onde $f_\lambda = f - \lambda$.*

Demonstração. Considerando $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0)$, pelo Lema 1.6, existem vizinhanças $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ de 0 e $V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, as quais podemos supor convexas, com $F(U_1 \times U_2) \subset V$ tal que todo polinômio P, quando restrito à $U_1 \times U_2$ pode ser escrito como:

$$P(z) = \sum_{j=1}^{\mu} g_j(f_\lambda(z), \lambda)e_j(z) = \sum_{j=1}^{\mu} g_j(w, \lambda)e_j(z) \tag{1.23}$$

Pelo Lema 1.1, cada g_j pode ser escrito como

$$g_j(w, \lambda) = G_j(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} w_i g_{ji}(w, \lambda) \tag{1.24}$$

Substituindo 1.24 em 1.23:

$$\begin{aligned} P(z) = \sum_{j=1}^{\mu} g_j(f_\lambda(z), \lambda) e_j(z) &= \sum_{j=1}^{\mu} g_j(w, \lambda) e_j(z) \\ &= \sum_{j=1}^{\mu} \left(G_j(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} w_i g_{ji}(w, \lambda) \right) e_j(z) \\ &= \sum_{j=1}^{\mu} G_j(\lambda) e_j(z) + \sum_{i=1}^{n} f_{\lambda_i} g_{ji}(w, \lambda) e_j(z) \end{aligned} \tag{1.25}$$

Agora, tomando $\lambda \in U_2$ com $|\lambda|$ suficientemente pequeno, tem-se que $\sum_{i=1}^{n} f_{\lambda_i} g_{ji}(w, \lambda)$ pertence à $\mathbf{i}_{f_\lambda}(U_1)$. Com isso, segue que a classe de $P(z)$ pode ser escrita como combinação linear dos e_i assim

$$\mathcal{Q}_{f_\lambda}[U_1] \subset \langle e_1, \ldots e_\mu \rangle$$

□

Proposição 1.3.3. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe holomorfo com número de Milnor $\mu_0(f) = \mu$ finito. Considere a deformação holomorfa f_λ de f com $\lambda \in \mathbb{C}^n$ e $f_0 = f$. Então, existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{C}^n$ de 0 tal que para $|\lambda|$ suficientemente pequeno, a dimensão do espaço $\mathbb{C}-$linear $\mathcal{Q}_{f_\lambda}[U]$ é no máximo μ.*

Demonstração. Pelo Lema 1.7, existe uma vizinhança de $U \subset \mathbb{C}^n$ de 0 tal que para $|\lambda|$ suficientemente pequeno, tem-se

$$\mathcal{Q}_{f_\lambda}[U] \subset \mathcal{Q}_{f_\lambda}(U)$$

ou seja,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[U] \leqslant \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}(U)$$

Agora, pelo Lema 1.5,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}(U) \leqslant \mu$$

e assim,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[U] \leqslant \mu$$

□

Lema 1.8. *Seja $f : U \subset \mathbb{C}^n \to U$, onde U é um domínio tal que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U] < \infty$. Então, cada zero de f em U tem número de Milnor finito. Além disso, o número de soluções da equação $f = 0$ em U é limitado por $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U]$, contando multiplicidades.*

Demonstração. Ver em (SOARES, 2002). □

Considere agora, $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa com U um domínio. Suponha que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sejam todas as soluções de $f = 0$ em U. Tome os germes de f em cada um dos pontos α_i e considere as álgebras locais correspondentes. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, tem-se:

- O germe $f_i : (U, \alpha_i) \to (f(U), 0)$;
- O ideal $\mathbf{i}_{f_i} = \langle f_{i_1}, \ldots, f_{i_n} \rangle$;
- A álgebra local
$$\mathcal{Q}_{\alpha_i, f} = \frac{\mathcal{O}_{\alpha_i}}{\mathbf{i}_{f_i}}$$

A soma
$$\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_{\alpha_i, f} = \left(\mathcal{Q}_{\alpha_1, f}, \ldots, \mathcal{Q}_{\alpha_k, f}\right)$$
é chamada *álgebra multilocal de f em U*. Tem-se que a álgebra multilocal é uma $\mathbb{C}-$álgebra pela estrutura herdada de cada componente.

Enunciaremos alguns resultados agora que serão utilizados à seguir.

Proposição 1.3.4. *Nas condições acima, o número de soluções em U, contando multiplicidades, da equação $f = 0$ é limitado por* $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U]$.

Demonstração. Ver em (SOARES, 2002). □

Proposição 1.3.5. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe holomorfo tal que $\mu_0(f) < \infty$. Então,*
$$\mu_0(f) \geqslant \mathcal{I}_0(f).$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.7, tem-se que 0 é um ponto isolado em $f^{-1}(\{0\})$. Deste modo, pode-se calcular o índice de Poincaré-Hopf de f em 0, $\mathcal{I}_0(f)$. Pela Proposição 1.1.4, $\mathcal{I}_0(f)$ é dado pelo número de soluções da equação $f_\lambda = f - \lambda = 0$ para λ valor regular com $|\lambda|$ suficientemente pequeno.

Pelo Lema 1.8, tem-se que
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[U] \geqslant \#\{x \in U : f_\lambda = 0\}$$
ou seja,
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[U] \geqslant \#\{x \in U : f_\lambda = 0\} = \mathcal{I}_0(f).$$

Agora, pela Proposição 1.3.3, tem-se que $\mu_0(f) \geqslant \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f_\lambda}[U]$ e, consequentemente,
$$\mu_0(f) \geqslant \mathcal{I}_0(f)$$

□

Agora que temos em mãos todos os resultados necessários, passamos à demonstração da igualdade entre o número de Milnor e o índice de Poincaré-Hopf. Com o trabalho feito anteriormente, a demonstração se resume à unir todas as peças. Apresentamos a seguir, a demonstração do Teorema 1.6

Demonstração do Teorema. Seja $\mu_0(f) = \mu$ e considere a aplicação Pham $\gamma^{[\mu+1]}$.

Pela Proposição 1.3.1, a deformação holomorfa $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = \gamma^{[\mu+1]} + \lambda f$ é A-equivalente à f para $\lambda \in \mathbb{C}$ em uma vizinhança de 0. Assim, pela Proposição 1.2.1, segue que

$$\mu_0\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right) = \mu_0(f) \tag{1.26}$$

e pela Proposição 1.1.5, tem-se

$$\mathcal{I}_0\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right) = \mathcal{I}_0(f). \tag{1.27}$$

Agora utilizaremos algumas propriedades das aplicações Pham. Para tal, fixe uma bola $B(0,\varepsilon)$ e um valor λ tal que as condições da Proposição 1.3.3 sejam satisfeitas para $\gamma_\lambda^{[\mu+1]}$. Sejam $\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda}$ as soluções de $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = 0$ na bola $B(0,\varepsilon)$. Pela Proposição 1.3.3, segue que

$$\mu_0\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right) \geqslant \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{\gamma_\lambda^{[\mu+1]}}[B(0,\varepsilon)].$$

Pela Proposição 1.3.4, vale

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{\gamma_\lambda^{[\mu+1]}}(B(0,\varepsilon)) \geqslant \sum_i \mu_{\alpha_i}\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right).$$

Pela Proposição 1.3.5, para todo $i \in \Lambda$

$$\mu_{\alpha_i}\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right) \geqslant \mathcal{I}_{\alpha_i}\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right). \tag{1.28}$$

Tomando $X = B(0,\varepsilon)$ no Teorema 1.4, tem-se:

$$\deg \frac{\gamma_\lambda^{[\mu+1]}}{\left|\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right|} = \sum_{i\in\Lambda} \mathcal{I}_{\alpha_i}\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right).$$

Pelo Teorema 1.5, segue que

$$\sum_{i\in\Lambda} \mathcal{I}_{\alpha_i}\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right) = \mathcal{I}_0\left(\gamma^{[\mu+1]}\right).$$

Utilizando o Lema 1.3, conclui-se as seguintes igualdades

$$\mathcal{I}_0\left(\gamma^{[\mu+1]}\right) = \mu_0\left(\gamma^{[\mu+1]}\right).$$

e

$$\sum_{i\in\Lambda} \mathcal{I}_{\alpha_i}\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right) = \sum_{i\in\Lambda} \mu_{\alpha_i}\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right) \tag{1.29}$$

Como todos os termos envolvidos em 1.29 são positivos e considerando a desigualdade obtida em 1.28, conclui-se que para todo $i \in \Lambda$ vale

$$\mu_{\alpha_i}\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right) = \mathcal{I}_{\alpha_i}\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right)$$

Note agora que $0 \in \{\alpha_i\}_{ß\in\lambda}$, uma vez que 0 é uma solução para $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = 0$. Deste modo, segue da igualdade acima que

$$\mu_0\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right) = \mathcal{I}_0\left(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}\right)$$

e finalmente, substituindo 1.26 e 1.27 em 1.3 conclui-se que

$$\mu_0(f) = \mathcal{I}_0(f)$$

1.4 Resíduo de Grothendieck

Nesta seção apresentaremos a definição do *resíduo de Grothendieck* e algumas propriedades que ele satisfaz. Dentre estas propriedades, a que estamos mais interessados é a que relaciona o resíduo de Grothendieck com o índice de Poincaré-Hopf e o número de Milnor.

Podendo ser visto como uma generalização do conceito de resíduo de uma função meromorfa, dado por Abel, o resíduo de Grothendieck aparece em diversos resultados muito importantes, dentre eles, o Teorema de Baum-Bott, o qual será abordado na segunda parte deste trabalho.

A aplicação traço

Seja $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa com $f(0) = 0 \in \mathbb{C}^n$ e com número de Milnor $\mu_0(f) = \mu$ finito. Nestas condições, pelo Teorema 1.7, 0 é um ponto isolado de $f^{-1}(0)$ e com isso é possível calcular $\mathcal{I}_0(f)$. Agora, pelo Teorema 1.5, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{C}^n$ de 0 tal que para todo $\lambda \in V$, a equação $f_\lambda = f - \lambda = 0$ possui um número finito de soluções e além disso, vale

$$\sum_{\alpha \in f_\lambda^{-1}(0)} \mathcal{I}_\alpha(f-\lambda) = \mathcal{I}_0(f).$$

Pelo Teorema 1.6, a equação acima pode ser escrita como

$$\sum_{\alpha \in f_\lambda^{-1}(0)} \mathcal{I}_\alpha(f-\lambda) = \mu_0(f) = \mu$$

Novamente utilizando o Teorema 1.6, para todo $\alpha \in f_\lambda^{-1}(0)$ vale:

$$\mathcal{I}_\alpha(f-\lambda) = \mu_\alpha(f-\lambda).$$

Portanto, tem-se

$$\sum_{\alpha \in f_\lambda^{-1}(0)} \mu_\alpha (f - \lambda) = \mu.$$

Considerando a vizinhança V obtida acima e restringindo à $U = f^{-1}(V)$, temos que a função f satisfaz as seguintes propriedades:

i) f é sobrejetiva, dada a maneira que é foi definida;

ii) f é uma aplicação aberta, pelo Teorema da Aplicação aberta;

iii) f é própria. De fato, seja $K \subset V$ compacto e $\beta = \{\beta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura aberta para $f^{-1}(K)$. Como f é uma aplicação aberta, $f(\beta_\lambda)$ é aberto em V para todo $\lambda \in \Lambda$ e assim o conjunto $\gamma = \{f(\beta_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura por abertos de K. A compacidade de K implica na existência de um subconjunto finito $\gamma' = \{f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n)\}$ que ainda cobre K, ou seja:

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} f(\beta_j)$$

e, consequentemente,

$$f^{-1}(K) = \bigcup_{j=1}^{n} \beta_j$$

assim, obtemos uma subcobertura finita para $f^{-1}(K)$, ou seja $f^{-1}(K)$ é compacto e f é uma aplicação própria;

iv) Para todo $\alpha \in V$, o conjunto $f^{-1}(\alpha)$ é finito e vale

$$\sum_{\alpha \in f_\lambda^{-1}(0)} \mathcal{I}_\alpha (f - \lambda) = \mathcal{I}_0 (f) = \mu.$$

Definição 1.4.1. Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{C}^n \to V \subset \mathbb{C}^n$ satisfazendo as quatro condições acima é chamada de *aplicação finita*.

Seja $f : U \subset \mathbb{C}^n \to V \subset \mathbb{C}^n$ uma aplicação finita e η uma n-forma em U.

Definição 1.4.2. O *traço* ou *push-foward* de η por f, denotado por $f_!(\eta)$

$$\begin{aligned} f_!(\eta) : V_{\text{reg}} &\longrightarrow \mathcal{A}_n \left(V_{\text{reg}}, \mathbb{C}\right) \\ \alpha &\longmapsto f_!(\eta)(\alpha) = f_!(\eta)_\alpha \end{aligned}$$

é a n-forma holomorfa definida no conjunto $V_{\text{reg}} \subset V$ dos valores regulares de f, obtida da seguinte maneira: seja $\alpha \in V_{\text{reg}}$, valor regular de f e considere $f^{-1}(\alpha) = \{\beta_1, \ldots, \beta_\mu\}$. Dada uma n-lista de vetores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$, temos para cada v_j um vetor $u_{ij} \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$v_j = f'(\beta_i) u_{ij}.$$

Esta relação também pode ser vista como se, para cada β_i, existem u_{ij} com $j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $v_j = f'(\beta_i)u_{ij}$. e, além disso, para cada β_i, a seguinte n-forma está definida

$$\begin{aligned} \eta(\beta_i) : \mathbb{C}^n \times \ldots \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (v_1, \ldots, v_n) &\longmapsto \eta(\beta_i)(v_1, \ldots, v_n) = \eta_{\beta_i}(v_1, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

Deste modo, defina

$$f_!(\eta)_\alpha(v_1, \ldots, v_n) := \sum_{i=i}^{\mu} \eta_{\beta_i}(v_1, \ldots, v_n) \tag{1.30}$$

Observação 1.4.1. A construção acima é equivalente a fazer o seguinte: seja α é um valor regular de f e $f^{-1}(\alpha) = \{\beta_1, \ldots, \beta_\mu\}$, então, existem vizinhanças V_α de α e U_{β_i} de β_i tais que

$$f_{|_{U_{\beta_i}}} : U_{\beta_i} \longrightarrow V_\alpha$$

é um biholomorfismo. Denote por f_i^{-1} a seguinte aplicação

$$f_i^{-1} = \left(f_{|_{U_{\beta_i}}}\right)^{-1} : V_\alpha \longrightarrow U_{\beta_i}.$$

Deste modo, cada f_i^{-1} induz um *pull-back* da n-forma η

$$\begin{aligned} \left(f_i^{-1}\right)^* : \mathcal{A}_n\left(U_{\beta_i}, \mathbb{C}\right) &\longrightarrow \mathcal{A}_n\left(V_\alpha, \mathbb{C}\right) \\ \eta &\longmapsto \left(f_i^{-1}\right)^*(\eta) = \eta \circ f_i^{-1} \end{aligned}$$

o qual é definido da seguinte maneira: sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$:

$$\left(f_i^{-1}\right)^*(\eta)(\alpha)(v_1, \ldots, v_n) = \eta\left(f_i^{-1}(\alpha)\right)\left(\left(f_i^{-1}\right)'(\alpha) \cdot v_1, \ldots, \left(f_i^{-1}\right)'(\alpha) \cdot v_n\right) \tag{1.31}$$

Proposição 1.4.1. *Vale a seguinte relação:*

$$f_!(\eta)_{|_{V_\alpha}} = \sum_{i=1}^{\mu} \left(f_i^{-1}\right)^* \eta_{|_{U_{\beta_i}}}. \tag{1.32}$$

Demonstração. Seja $\gamma \in V_\alpha$, $f^{-1}(\gamma) = \{\beta_1, \ldots, \beta_\mu\}$ e $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$. Mostremos que

$$\left(f_i^{-1}\right)^* \eta_{|_{U_{\beta_i}}}(\beta_i)(v_1, \ldots, v_n) = \eta_{\beta_i}(u_{i1}, \ldots, u_{in}) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, \mu\}.$$

Podemos escrever a expressão do lado esquerdo como:

$$\left(f_i^{-1}\right)^* \eta_{|_{\beta_i}}(\beta)(v_1, \ldots, v_n) = \eta_{|_{U_{\beta_i}}}\left(f_i^{-1}(\gamma)\right)\left(\left(f_i^{-1}\right)'(\gamma).v_1, \ldots, \left(f_i^{-1}\right)'(\gamma)v_n\right).$$

Porém, como $f_i^{-1}(\gamma) = \beta_i$, pelo Teorema da Aplicação Inversa, tem-se que

$$\left(f_i^{-1}\right)'(\gamma) = \left(f'(\beta_i)\right)^{-1}.$$

Além disso, como $v_j = f'(\beta_i) \cdot u_{ij}$, segue para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e todo $j \in \{1, \ldots, \mu\}$ vale

$$\left(f_i^{-1}\right)'(\gamma).v_j = u_{ij}$$

de modo que

$$\left(f_i^{-1}\right)^* \eta_{|U_{\beta_i}}(\beta_i)\left(v_1,\ldots,v_n\right) = \eta_{\beta_i}\left(u_{i1},\ldots,u_{in}\right) \qquad \forall i \in \{1,\ldots,\mu\}.$$

e pela definição de $f!(\eta)$, segue a igualdade desejada. □

Encontraremos agora uma expressão local pra $f_!(\eta)$. Escreveremos $f = (f_1,\ldots,f_n)$, no domínio consideraremos as coordenadas $z = (z_1,\ldots,z_n)$ e na imagem as coordenadas $w = (w_1,\ldots,w_n)$. Deste modo, temos:

$$\eta(z) = g(z)\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n \tag{1.33}$$

$$f_!(\eta)(w) = \mathrm{tr}(w)\mathrm{d}w_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}w_n \tag{1.34}$$

onde $tr : V_\alpha \to \mathbb{C}$ é chamada *aplicação traço*. Assim, dado $w \in V_\alpha$ e $v_1,\ldots.v_n \in \mathbb{C}^n$, tem-se que

$$f_!(\eta)_w\left(v_1,\ldots,v_n\right) = \mathrm{tr}(w)\mathrm{d}w_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}w_n\left(v_1,\ldots,v_n\right). \tag{1.35}$$

Por outro lado, utilizando a expressão 1.32, segue que:

$$\begin{aligned} f_!(\eta)_w\left(v_1,\ldots,v_n\right) &= \sum_{i=1}^{\mu}\left[\left(f_i^{-1}\right)^*\eta\right](w)\left(v_1,\ldots,v_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\mu}\eta\left(f_i^{-1}(w)\right)\left(\left(f_i^{-1}\right)'(w).v_1,\ldots,\left(f_i^{-1}\right)'(w).v_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} g\left(f_i^{-1}(w)\right)\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n\left(\left(f_i^{-1}\right)'(w).v_1,\ldots,\left(f_i^{-1}\right)'(w).v_n\right). \end{aligned} \tag{1.36}$$

Assim, avaliando a equação acima na base dual de dz_i, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(w) &= \sum_{i=1}^{\mu} g\left(f_i^{-1}(w)\right)\det \mathrm{J}f_i^{-1}(w) \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} g\left(f_i^{-1}(w)\right)\frac{1}{\det\left(\mathrm{J}f(f_i^{-1}(w))\right)}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Denotando

$$g_i(w) = \frac{g\left(f_i^{-1}(w)\right)}{\det\left(\mathrm{J}f(f_i^{-1}(w))\right)}$$

tem-se a seguinte expressão:

$$\mathrm{tr}(w) = \sum_{i=1}^{\mu} g_i(w) \tag{1.38}$$

A função obtida acima,

$$\mathrm{tr}(\eta) : V_{\mathrm{reg}} :\longrightarrow \mathbb{C}$$

está definida apenas no conjunto de valores regulares de f. Porém, o Teorema do Traço garante uma extensão holomorfa da função traço para uma vizinhança de $0 \in V$. Além disso, fornece também uma expressão integral para esta função.

Teorema 1.8 (Teorema do Traço). *A função holomorfa*

$$tr(\eta) : V_{reg} \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite uma extensão holomorfa para uma vizinhança de 0 em V. Além disso, tal extensão é dada por

$$\psi(w) = \left(\frac{1}{2\pi\iota}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\eta}{\prod_{j=1}^n (f_j - w_j)}$$

onde $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{C}^n$ *e* $\Gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |f_i(z)| = \varepsilon_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Demonstração. Ver em (SOARES, 2002) □

O resíduo de Grothendieck

Seja $f = (f_1, \ldots f_n) : U \subset \mathbb{C}^n \to V \subset \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa, finita, com número de Milnor $\mu_0(f) = \mu$ e considere $g \in \mathcal{O}(U)$. Dado α um valor regular de f vamos considerar $f^{-1}(\alpha) = \{\beta_1, \ldots, \beta_\mu\}$.

Definição 1.4.3. O *resíduo de Grothendieck em 0 de g em relação à f* é o limite

$$\mathrm{Res}_0(g, f) = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g(\beta_i)}{\det Jf(\beta_i)} \tag{1.39}$$

O próximo resultado garante não só a existência do limite definido acima como também uma expressão integral para o cálculo do resíduo de Grothendieck,

Teorema 1.9. *Seja* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{C}^n$ $\varepsilon_i > 0$ *e considere o n-ciclo*

$$\Gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |f_i(z)| = \varepsilon_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

com a orientação determinada pela n-forma $d\arg f_1 \wedge \ldots \wedge d\arg f_n$. *Para* ε *suficientemente pequeno tem-se*

$$Res_0(g, f) = \left(\frac{1}{2\pi\iota}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f_1 \ldots f_n}$$

Demonstração. Considere a n-forma $\eta = g\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n$. Pela definição do resíduo de Grothendieck,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_0(g, f) &= \lim_{\alpha \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g(\beta_i)}{\det Jf(\beta_i)} \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{f_i(\alpha)}{\det Jf(f_i^{-1}(\alpha))}\end{aligned}$$

onde α varia no conjunto (aberto e denso) de valores regulares de f, com

$$f^{-1}(\alpha) = \{\beta_1, \ldots, \beta_\mu\}.$$

Por outro lado, por 1.37,

$$\mathrm{tr}(\eta)(\alpha) = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{f_i(\alpha)}{\det Jf(f_i^{-1}(\alpha)}.$$

Assim,

$$\mathrm{Res}_0(g, f) = \lim_{\alpha \to 0} \mathrm{tr}(\eta)(\alpha).$$

Agora, pelo Teorema 1.8,

$$\mathrm{Res}_0(g, f) = \lim_{\alpha \to 0} \mathrm{tr}(\eta)(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{1}{2\pi\iota}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\eta}{(f_1 - \alpha) \ldots (f_n - \alpha_n)}.$$

Donde segue

$$\mathrm{Res}_0(g, f) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g \mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n}{f_1 \ldots f_n}$$

□

Exemplo 3. Vamos exemplificar o cálculo do resíduo de Grothendieck utilizando a fórmula integral provada no Teorema 1.9. Considere $f(z_1, z_2) = (z_1 + z_2, 4z_2)$ e $g(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 + 1$. Calcularemos $\mathrm{Res}_0(g, f)$. Neste caso, tem-se

$$\det(Jf(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Assim, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem vizinhanças $U, V \subset \mathbb{C}^2$ de 0, no domínio e contra-domínio tais que

$$f|_U : U \longrightarrow V$$

é um biholomorfismo. Para cada $w = (w_1, w_2) \in V$, denotemos:

- $G(w) = g(f^{-1}(w))$;
- $K(w) = \dfrac{1}{w_1 w_2} \mathrm{d}w_1 \wedge \mathrm{d}w_2$;
- $\mathrm{J}_f(w) = \mathrm{J}_f(f^{-1}(w))$.

Neste caso, a n-forma

$$\omega = \frac{z_1^{2+z_2^2+1}}{(z_1 + z_2^2)(4z_2)} \mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2$$

pode ser reescrita como o seguinte pull-back

$$\omega = f^* \left(\frac{G}{\mathrm{J}_f} K\right).$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis, tem-se

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \omega = \int_{|w_i|=\varepsilon_i} \frac{GK}{J_f} = \int_{|w_i|=\varepsilon_i} \frac{\frac{G(w)}{J_f(w)}}{w_1 w_2} \mathrm{d}w_1 \wedge \mathrm{d}w_2.$$

e utilizando a Fórmula Integral de Cauchy, segue que

$$\int_{|w_i|=\varepsilon_i} \frac{\frac{G(w)}{J_f(w)}}{w_1 w_2} \mathrm{d}w_1 \wedge \mathrm{d}w_2 = (2\pi\imath)^2 \frac{G(0)}{J_f(0)} = (2\pi\imath)^2 \frac{1}{4}.$$

Portanto,

$$\mathrm{Res}_0(g, f) = \left(\frac{1}{2\pi\imath}\right)^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} \omega = \left(\frac{1}{2\pi\imath}\right)^2 (2\pi\imath)^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Propriedades do resíduo de Grothendieck

A seguir, apresentaremos algumas propriedades do resíduo de Grothendieck. Em especial, veremos a relação com o número de Milnor e o índice de Poincaré-Hopf.

Proposição 1.4.2. *Para $a, b \in \mathbb{C}$ e $g, h \in \mathcal{O}(U)$, tem-se*

$$Res_0(ag + bh, f) = aRes_0(g, f) + bRes_0(b, f)$$

Demonstração. De fato, realizando o cálculo de $\mathrm{Res}_0(ag + bh, f)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_0(ag + bh, f) &= \left(\frac{1}{2\pi\imath}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(ag + bh)\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n}{f_1 \ldots f_n} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\imath}\right)^n a \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{g\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n}{f_1 \ldots f_n} + \left(\frac{1}{2\pi\imath}\right)^n b \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{h\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n}{f_1 \ldots f_n} \\
&= a\mathrm{Res}_0(g, f) + b\mathrm{Res}_0(h, f).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.4.3. *Se f é um biholomorfismo, então, para toda $g \in \mathcal{O}(U)$, tem-se*

$$Res_0(g, f) = \frac{g(0)}{\det(Jf(0))}$$

Demonstração. Seja $\alpha \in U$ valor regular de f. Neste caso, como f é um biholomorfismo, a pré-imagem de α possui apenas um elemento, ou seja, $f^{-1}(\alpha) = \{\beta_\alpha\}$ e assim:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_0(g, f) &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{g(\beta)}{\det(\mathrm{J}f(\beta))} \\
&= \lim_{\beta \to 0} \frac{g(\beta)}{\det(\mathrm{J}f(\beta))} \\
&= \frac{g(0)}{\det(\mathrm{J}f(0))}
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.4.4. *Se $g \in \mathfrak{i}_f$, então,*

$$Res_0(g, f) = 0.$$

Demonstração. Como $g \in \mathfrak{i}_f$, esta pode ser escrita como $g = h_1 f_1 + \ldots + h_n f_n$, com $h_i \in \mathcal{O}(U)$. Pela Proposição 1.4.2, basta mostrar que $\mathrm{Res}_0(h_1 f_1, f) = 0$. De fato, considere a seguinte n-forma

$$\omega = \frac{h_1 f_1 \mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n}{f_1 \ldots f_n} = \frac{h_1 \mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n}{f_2 \ldots f_n}.$$

Defina

$$D_i = \{z \in U : f_i(z) = 0\}. \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Assim, ω é uma n-forma holomorfa no seguinte conjunto

$$U' = U \setminus (D_2 \cup \ldots \cup D_n)$$

e, em particular $U \setminus (D_1 \cup \ldots \cup D_n) \subset U'$. Por outro lado, conjunto

$$\Delta_\varepsilon = \{z \in U : |f_1(z)| \leqslant \varepsilon_1, |f_i(z)| = \varepsilon_i \ i = 2, \ldots, n\}$$

é tal que $\Delta_\varepsilon \subset U'$ e sua fronteira, $\partial\Delta_\varepsilon$ coincide com Γ_ε, a menos de orientação, ou seja, $\partial\Delta_\varepsilon = \pm\Gamma_\varepsilon$. Portanto, segue que:

$$\mathrm{Res}_0(h_1 f_1, f) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \omega = \pm \int_{\partial(\Delta_\varepsilon)} \omega.$$

Agora,pelo Teorema de Stokes,

$$\pm \int_{\partial(\Delta_\varepsilon)} \omega = \pm \int_{\delta_\varepsilon} \mathrm{d}\omega.$$

Finalmente, como ω é uma $n-$forma em um espaço de dimensão n, esta é uma forma fechada, ou seja $\mathrm{d}\omega = 0$. Deste modo, segue que:

$$\mathrm{Res}_0(h_1 f_1, f) = \pm \int_{\delta_\varepsilon} \mathrm{d}\omega = 0.$$

□

O próximo resultado relaciona o número de Milnor, o índice de Poincaré-Hopf e o resíduo de Grothendieck de uma aplicação holomorfa. Deste modo, resíduo de Grothendieck possui representação integral, uma geométrica (dada pelo índice de Poincaré-Hopf) e uma algébrica (dada pelo número de Milnor).

Teorema 1.10. *Seja $f : U \subset \mathbb{C}^n \to V \subset \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa finita com número de Milnor $\mu_0(f) = \mu$ finito. Então:*

$$Res_0(\det Jf, f) = \mu_0(f) = \mathcal{I}_0(f)$$

Demonstração. Como $\mu_0(f) = \mathcal{I}_0(f)$, basta mostrar $\mathrm{Res}_0(\det \mathrm{J}f, f) = \mu_0(f)$. De fato, seja $\mu_0(f) = \mu$ e considere α valor regular de f então,$f^{-1}(\alpha) = \{\beta_1, \ldots, \beta_\mu\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_0(\det \mathrm{J}f, f) &= \lim_{\alpha \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\det(\mathrm{J}f(\beta_i))}{\det(\mathrm{J}f(\beta_i))} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} 1 \\
&= \mu
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.4.5. *Para toda $f : U \subset \mathbb{C}^n \to V \subset \mathbb{C}^n$, vale*

$$\det Jf \notin \mathbf{i}_f$$

Demonstração. De fato, pelo Teorema 1.10, $\mathrm{Res}_0(\det \mathrm{J}f, f) = \mu_0(f) \neq 0$. Assim, pela Proposição 1.4.4, $\det \mathrm{J}f \notin \mathbf{i}_f$. □

Com todos esses resultados, podemos mostrar a recíproca da Proposição 1.2.4.

Proposição 1.4.6. *Se $\mu_0(f) = 1$, então,f é um biholomorfismo*

Demonstração. Como $\mu_0(f) = 1$, tem-se que $\mathrm{Res}_0(\det \mathrm{J}f, f) = 1$ e pela Proposição 1.4.4, $\det \mathrm{J}f \notin \mathbf{i}_f$. Em particular, $\det \mathrm{J}f(z) \neq 0$, para todo $z \in U$, uma vez que $0 \in \mathbf{i}_f$. Deste modo, pelo Teorema da Aplicação Inversa, f é um biholomorfismo. □

2 Teoria Chern-Weil de classes características

2.1 Fibrados vetoriais

Definições

Nesta seção, entenderemos por espaço topológico, um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e conexo.

Definição 2.1.1. Seja X um espaço topológico. Um *fibrado vetorial real de posto n sobre* X é um par (E, π) onde E é um espaço topológico e $\pi : E \to X$ é uma aplicação contínua e sobrejetora, satisfazendo:

i) $E_x := \pi^{-1}(x)$, chamado *fibra de E sobre* $x \in X$, tem estrutura de espaço vetorial real de dimensão n, para todo $x \in X$;

ii) existem uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X e homeomorfismos

$$\theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \subset E \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset E \times \mathbb{R}^n$$

tais que $\forall x \in X$, se $x \in U_\alpha$, então

$$\theta_{\alpha x} = \theta_\alpha|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais reais.

Nestas condições,

- E é chamado de *espaço total* do fibrado;
- X é chamado *base* do fibrado;
- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é chamada *cobertura trivializadora* de X;
- θ_α são chamadas *trivializações locais* de E.

Da definição acima, tem-se que a aplicação $\pi : E \to X$, chamada *projeção* faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\theta_\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_1 : U_\alpha \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_\alpha \\
(x, v) &\longmapsto \mathrm{proj}_1(x, v) = x.
\end{aligned}$$

Definição 2.1.2. Uma *seção* de (E, π) é uma aplicação contínua $s : X \to E$ tal que $(\pi \circ s)(x) = x$ para todo $x \in X$, ou seja, quando $s(x) \in \pi^{-1}(x) = E_x$ para todo $x \in X$.

Exemplo 4. O fibrado trivial sobre X de posto n, denotado por $\underline{\mathbb{R}^n}$ é definido por $\underline{\mathbb{R}^n} = X \times \mathbb{R}^n$ com a projeção $\pi : \underline{\mathbb{R}^n} \to X$ dada por $\pi(x, v) = x$.

Nestas condições, temos que $\underline{\mathbb{R}^n} = X \times \mathbb{R}^n$ é o espaço total do fibrado, X é a base e a projeção como definida acima.

- As fibras, E_x,
$$E_x = \pi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$$
tem estrutura de espaço vetorial real de dimensão n.

- Dada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta para X, como $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, basta tomar as trivializações locais como:
$$\begin{aligned}
\theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\
(x, v) &\longmapsto \theta_\alpha(x, v) = (x, v)
\end{aligned}$$
Nesta condição, θ_α é claramente um homeomorfismo. Em particular, quando restrita à fibra E_x,
$$\begin{aligned}
\theta_{\alpha x} : E_x &\longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \\
(x, v) &\longmapsto \theta_\alpha(x, v) = (x, v)
\end{aligned}$$
é um isomorfismo.

Deste modo, $\underline{\mathbb{R}^n}$ tem, de fato, estrutura de fibrado vetorial de posto n sobre X.

Exemplo 5. Seja X uma variedade de dimensão n de classe C^k. Considere a cobertura por abertos $\{U_\alpha\}_\alpha \in A$ e homeomorfismos

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset \mathbb{R}^n.$$

Em cada ponto $p \in X$, tal que $p \in U_\alpha$, o espaço tangente à X em p, denotado por T_pX, pode ser definido como

$$T_pX = \langle \varphi'_\alpha(p) \cdot e_1, \ldots, \varphi'_\alpha(p) \cdot e_n \rangle .$$

Assim, pode-se definir o seguinte espaço:

$$TU_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_pX = \{(p, v_\alpha) : p \in U_\alpha, v_\alpha \in \mathbb{R}^n\}$$

como a união dos espaços tangentes em todos os pontos em U_α. Agora, fazendo a união disjunta de todos TU_α, dá origem à um conjunto chamado *Fibrado Tangente de X*, denotado por TX.

$$TX = \bigcup_{\alpha \in A} TU_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

de modo que para $p \in U_\alpha \beta$ fixados, tem-se $(p, v_\alpha) = (p, v_\beta)$ quando

$$v_\alpha = \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta\right)' (\varphi_\beta(p)) \cdot v_\beta$$

Mostremos que TX tem estrutura de fibrado vetorial de posto n sobre X. De fato, considerando o espaço base como X, com a cobertura por abertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, considere a projeção

$$\begin{aligned} \pi : TX : &\longrightarrow X \\ (p, v) &\longmapsto \pi(p, v) = p \end{aligned}$$

a qual é contínua. Deste modo, dado $x \in X$, sua fibra é dadas por:

$$\pi^{-1}(x) = \{(p, v) : \pi p, v = x\} = \{(x, v) : v \in \mathbb{R}^n\} \approx \mathbb{R}^n.$$

Como trivializações locais, defina

$$\theta_\alpha := \mathrm{id} : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

a qual é um isomorfismo. Portando, (TX, π) é, de fato, um fibrado vetorial de posto n sobre X.

Observação 2.1.1. Se $f : X \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^0 então, seu gráfico $s(x) = (x, f(x)) \in X \times \mathbb{R}^n = \underline{\mathbb{R}^n}$ é uma seção de $\underline{\mathbb{R}^n}$. De fato, basta notar que para todo $x \in X$,

$$(\pi \circ s)(x) = \pi(x, f(x)) = x$$

Reciprocamente, uma seção $s : X \to \underline{\mathbb{R}^n}$ define uma função $f : X \to \mathbb{R}^n$ de classe C^0. Basta notar que

$$\begin{aligned} s : X &\longrightarrow X \times \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

onde $f : X \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^0.

Observe que sabemos que a primeira função coordenada de s é a identidade pois,

$$x = (\pi \circ s)(x) = \pi(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x)$$

para todo $x \in X$, ou seja $f_1(x) = x$ para todo $x \in X$.

Observação 2.1.2. Se $s : X \to E$ é uma seção de E, então, $s|_{U_\alpha}$ induz uma aplicação de U_α com valores em $\mathbb{R}^n$. Com efeito, considerando a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \theta_\alpha \circ s|_{U_\alpha} : U_\alpha &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \theta_\alpha(s(x)) = (x, S_\alpha(x)) \end{aligned}$$

nós obtemos $S_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ que é a função procurada.

Reciprocamente, uma função $f : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ define, localmente, uma seção de U_α. Para tal, considere:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : U_\alpha &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \psi_\alpha(x) = (x, f(x)) \end{aligned}$$

claramente, ψ_α é uma seção de U_a.

Com isso, temos que seções de um fibrado vetorial estão, localmente, em correspondência com funções definidas em U_α com valores em $\mathbb{R}^n$.

Para a próxima construção, consideremos (E, π) um fibrado vetorial de posto n sobre X, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura trivializadora e $\{\theta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ trivializações locais de E.

Como $\theta_{\alpha x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, segue que $\theta_{\alpha x}^{-1} : \{x\} \times \mathbb{R}^n \to E_x$ também é um isomorfismo.

Denotando $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, vamos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} &\longrightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \approx \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \theta_{\alpha\beta}(x) = \theta_{\alpha x} \circ \theta_{\beta x}^{-1} \end{aligned}$$

onde $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ denotam o espaço dos isomorfismos de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e o espaço das matrizes inversíveis de dimensão n, respectivamente. Primeiramente, note que de fato podemos ver $\theta_{\alpha\beta}(x)$ como a composta de isomorfismos de $\mathbb{R}^n$ ou também, na forma matricial, como produto de duas matrizes $n \times n$ escritas na base canônica:

$$\theta_{\alpha\beta}(x) = [\theta_{\alpha x}]_{\mathrm{can}} \cdot [\theta_{\beta x}]_{\mathrm{can}}^{-1}.$$

De agora em diante, denotaremos as matrizes apenas por $[\theta_{\alpha x}]$, uma vez estando claro que consideramo-as em relação à base canônica de ambos os espaços.

Considerando a aplicação $\theta_{\alpha\beta}$, pode-se tomar o seguinte diagrama

$$U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \xleftarrow{\theta_\beta} \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\theta_\alpha} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n$$

e assim, fica definda a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\longmapsto \varphi(x, v) = (x, \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v) \end{aligned}$$

Antes de continuar, vejamos com mais detalhes como a aplicação φ age:

$$(x, v) \xrightarrow{\theta_{\beta x}^{-1}} \theta_{\beta x}^{-1}(v) \in E_x \subset \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\theta_{\alpha x}} \theta_{\alpha x}\left(\theta_{\beta x}^{-1}(v)\right)$$

donde segue que

$$\theta_{\alpha x}\left(\theta_{\beta x}^{-1}(v)\right) = \left(x, [\theta_{\alpha x}] \cdot [\theta_{\beta x}]^{-1}(v)\right) = \left(x, \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v\right).$$

As funções $\theta_{\alpha\beta}$ são chamadas *funções de transição de E*. Estas funções são contínuas, uma vez que as trivializações locais são homeomorfismos.

A seguir, mostraremos que as funções de transição satisfazem certas condições. Estas condições são chamadas *condições de cociclo*.

Proposição 2.1.1. *As funções $\theta_{\alpha\beta}$ satisfazem as condições de cociclo. A saber:*

- *Se $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ então,*

$$[\theta_{\alpha\beta}][\theta_{\beta\gamma}][\theta_{\gamma\alpha}] = [I]$$

  onde $[I]$ é a matriz identidade de $\mathbb{R}^n$;

- *Em $U_{\alpha\beta}$, vale $[\theta_{\alpha\beta}] = [\theta_{\beta\alpha}]^{-1}$*

Demonstração. Seja $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$. Neste caso, tem-se:

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha}(x) &= [\theta_{\alpha\beta}(x)][\theta_{\beta\gamma}(x)][\theta_{\gamma\alpha}(x)] \\ &= \left([\theta_{\alpha x}][\theta_{\beta x}]^{-1}\right)\left([\theta_{\beta x}][\theta_{\gamma x}]^{-1}\right)\left([\theta_{\gamma x}][\theta_{\alpha x}]^{-1}\right) \\ &= [I] \end{aligned}$$

onde a última igualidade segue da associatividade do produto de matrizes. Assim, temos $\theta_{\alpha\beta} \cdot \theta_{\beta\gamma} \cdot \theta_{\gamma\alpha}(x) = I$.

Agora, considere $x \in U_{\alpha\beta}$. Mostremos que $\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\alpha}(x) = I$. De fato,

$$\begin{aligned}\theta_{\alpha\beta} \cdot \theta_{\beta\alpha}(x) &= [\theta_{\alpha\beta}(x)][\theta_{\beta\alpha}(x)] \\ &= \left([\theta_{\alpha x}][\theta_{\beta x}]^{-1}\right)\left([\,\theta_{\beta x}\,][\theta_{\alpha x}]^{-1}\right) \\ &= [I]\end{aligned}$$

assim, pela unicidade do inverso multiplicativo em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, temos que $\theta_{\alpha\beta} = \theta_{\beta\alpha}^{-1}$. □

A próxima proposição mostra uma relação das seções de um fibrado com as suas funções de transição.

Proposição 2.1.2. *Seja $s : X \to E$ uma seção de E, então, no aberto $U_{\alpha\beta}$, vale a seguinte relação*

$$\theta_{\alpha\beta} \cdot S_\beta = S_\alpha$$

.

Demonstração. Denotando

$$S_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad S_\beta : U_\beta \to \mathbb{R}^n$$

pode-se restringir ambas funções à $U_{\alpha\beta}$ e considerar as seguintes composições:

$$\theta_\alpha \circ s|_{U_{\alpha\beta}}(x) = (x, S_\alpha(x)) \quad \text{e} \quad \theta_\beta \circ s|_{U_{\alpha\beta}}(x) = \left(x, S_\beta(x)\right).$$

Por um lado, tem-se

$$\theta_\alpha \circ \theta_\beta \circ s|_{U_\alpha\beta}(x) = (x, \theta_{\alpha\beta} \cdot S_\beta(x))$$

enquanto por outro lado,

$$\theta_\alpha \circ \theta_\beta \circ s|_{U_\alpha\beta}(x) = \theta_\alpha \circ s|_{U_\alpha\beta}(x) = (x, S_\alpha(x)).$$

Deste modo, segue que

$$\theta_{\alpha\beta} \cdot S_\beta(x) = S_\alpha(x)$$

□

Definição 2.1.3. Sejam (E, π_E) e (F, π_F) fibrados vetoriais sobre X. Um *morfismo* $\varphi : E \to F$ é uma aplicação contínua tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_E"'] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & X \end{tikzcd}$$

e a aplicação

$$\varphi|_{E_x} : E_x \to F_x$$

é linear para todo $x \in X$. Além disso, se φ é uma bijeção e φ^{-1} também é um morfismo, então, φ é chamado de *isomorfismo*.

Observação 2.1.3. Sejam E, e F fibrados sobre X de posto n e m, respectivamente, $\{U_\alpha\}$ uma cobertura trivializadora comum à E e F, com $\{\theta_\alpha\}$ e $\{\eta_\alpha\}$ sendo as trivializações locais de E e F, respectivamente. Um morfismo $\varphi : E \to F$ induz uma família de aplicações $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ dadas por $\varphi_\alpha = \eta_\alpha \circ \varphi \circ \theta_\alpha^{-1}$, conforme o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_E^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta_\alpha"'] & \pi_F^{-1}(U_\alpha) \arrow[d, "\eta_\alpha"] \\
U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_\alpha"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Neste caso, fica também determinada uma família de aplicações

$$a_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

satisfazendo as condições

$$\eta_{\alpha\beta} \cdot a_\beta = a_\alpha \cdot \theta_{\alpha\beta} \qquad \text{em } U_{\alpha\beta}$$

De fato, como pode se observar no diagrama abaixo:

$$(x, v) \xrightarrow{\theta_\alpha^{-1}} \theta_{\alpha x}^{-1}(v) \in E_x \subset \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\varphi} \varphi(\theta_{\alpha x}^{-1}(v)) \in F_x \xrightarrow{\eta_\alpha} (x, \eta_\alpha \circ \varphi \circ \theta_\alpha^{-1}(x) \cdot v)$$

onde $a_\alpha(x) = \eta_\alpha \circ \varphi \circ \theta_\alpha^{-1}(x)$. Isso pode ser observado utilizando o diagrama abaixo como referência

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & \pi_E^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\theta_\alpha"'] \arrow[r, "\theta_\beta"] \arrow[d, "\varphi"] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi_\beta"] \\
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m & \pi_F^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\eta_\alpha"'] \arrow[r, "\eta_\beta"] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

note que $\varphi_\beta = \eta_\beta \circ \eta_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}$. Assim, para $(x, v) \in U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned}
\theta_\beta(x, v) &= \eta_\beta \circ \eta_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \theta_\alpha \circ \theta^{-1}(x, v) && \Longrightarrow \\
\eta_\alpha \circ \eta_\beta^{-1} \circ \theta_\beta(x, v) &= \varphi_\alpha \circ \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}(x, v) && \Longrightarrow \\
\eta_\alpha \circ \eta_\beta^{-1}(x, a_\beta(x) \cdot v) &= \varphi_\alpha(\theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v) && \Longrightarrow \\
(x, \eta_{\alpha\beta}(x) \cdot (a_\beta(x) \cdot v)) &= (x, a_\alpha(x) \cdot (\theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v)) && \Longrightarrow \\
(x, \eta_{\alpha\beta}(x) a_\beta(x) \cdot v) &= (x, a_\alpha(x) \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v)
\end{aligned}$$

donde se conclui o que queríamos.

Reciprocamente, uma família de funções $a_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ determinam um morfismo de E em F desde que estas funções satisfaçam $\eta_{\alpha\beta} \cdot a_\beta = a_\alpha \cdot \theta_{\alpha\beta}$ em $U_{\alpha\beta}$. Com efeito, primeiramente defina a seguinte função:

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m \\
(x, v) &\longmapsto \varphi_\alpha(x, v) = (x, a_\alpha(x) \cdot v)
\end{aligned}$$

assim, obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta_\alpha"'] & F \arrow[d, "\eta_\alpha"] \\
U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_\alpha"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

onde $\varphi = \eta_\alpha^{-1} \varphi_\alpha \circ \theta_\alpha$ é o morfismo que procuramos. De fato, mostremos que φ satisfaz as condições necessárias. Primeiramente, a condição de $\varphi|_{E_x}$ ser linear para todo $x \in X$ é trivialmente satisfeita, uma vez que todas as as aplicações envolvidas são lineares para todo $x \in X$. Além disso, verifiquemos que $\pi_F \circ \varphi \circ \pi_E^{-1} = I$, onde $I : X \to X$ é a aplicação identidade. De fato, seja $x \in X$:

$$\begin{aligned}
\pi_F \circ \varphi \circ \pi_E^{-1}(x) &= \pi_F \circ \varphi(E_x) \\
&= \pi_F \left(\eta_\alpha^{-1} \varphi_\alpha \circ \theta_\alpha(x) \right) \\
&= \pi_F \left(\eta_\alpha^{-1} \varphi_\alpha(\{x\} \times \mathbb{R}^n) \right) \\
&= \pi_F \left(\eta_\alpha^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R}^m) \right) \\
&= \pi_F(F_x) \\
&= x.
\end{aligned}$$

e deste modo, temos que φ é um morfismo entre E e F.

Antes de seguirmos para a próxima proposição, faremos duas observações: a primeira, sobre uma maneira de construir um espaço topológico a partir de uma família de espaços topológicos, chamada *União disjunta*; e a segunda sobre a topologia no espaço quociente, induzida pelo espaço base.

Observação 2.1.4. Seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de conjuntos. A *união disjunta* desta família é um conjunto $A = \bigsqcup_{i\in I} A_i$ juntamente com uma família de funções injetivas $\varphi_i : A_i \to A$ tal que a união das imagens destas funções formam uma partição de A. Neste caso, podemos fazer a seguinte identificação:

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \{(i, x) : x \in A_i\}$$

e definir

$$\begin{aligned} \varphi_i : A_i &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto \varphi_i(x) = (i, x) \end{aligned}$$

a qual é injetiva. Assim, os conjuntos da forma

$$A_i^* := \varphi_i(A_i) = \{(i, x) : x \in A_i\}$$

formam uma partição de A. Isso ocorre pois mesmo que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, tem-se $A_i^* \cap A_j^* = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Dada uma família de espaços topológicos $\{A_i, \tau_i\}_{i\in I}$, podemos definir naturalmente uma topologia para a união disjunta $A = \bigsqcup_{i\in I} A_i$. Com efeito, mostremos que o conjunto

$$\tau_A = \{U \subset A : \varphi_i^{-1}(U) \in \tau_i, \forall i \in I\}$$

onde τ_i é a topologia de A_i para todo $i \in I$, constitui uma topologia para A.

- Temos que $\varphi_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_i$ para todo $i \in I$ e assim $\emptyset \in \tau_A$;
- Tem-se que $\varphi_i^{-1}(A) = A_i \in \tau_i$ para todo $i \in I$ e assim $A \in \tau_A$;
- Seja $\{U_j\}_{j\in J\subset I}$ uma família de conjuntos de τ_A. Assim, tem-se que $\varphi_i^{-1}(U_j) \in \tau_i$ para todo $i \in I$ e todo $j \in J$. Deste modo:

  $$\varphi_i^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} U_j\right) = \bigcup_{j\in J} \varphi_i^{-1}(U_j) \in \tau_i \text{ para todo } i \in I$$

  e, portanto, $\bigcup_{j\in J} U_j \in \tau_A$;
- De maneira semelhante à feita acima, mostra-se que dada $\{U_1, \ldots, U_n\}$ um conjunto de elementos de τ_A, então, a interseção finita $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ é um elemento de τ_A.

e portanto, tem-se definida em A uma topologia.

Observação 2.1.5. Seja M um espaço topológico com topologia τ_M. Dada $\sim$ uma relação de equivalência em M, a topologia τ_M induz no quociente $M/\sim$ uma topologia através da projeção canônica

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} : M &\longrightarrow M/\sim \\ x &\longmapsto \mathfrak{p}(x) = \overline{x} \end{aligned}$$

onde $\overline{x}$ denota a classe de equivalência de x pela relação $\sim$. Com efeito, vejamos que o conjunto

$$\widetilde{\tau} = \left\{ U \subset M/\sim : \mathfrak{p}^{-1}(U) \in \tau_M \right\}$$

constitui uma topologia para o quociente $M/\sim$.

- Primeiramente, $\mathfrak{p}^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_M$. Portanto, $\emptyset \in \widetilde{\tau}$;
- Considerando $\mathfrak{p}^{-1}(M/\sim)$, por definição, temos:

$$\mathfrak{p}^{-1}\left(M/\sim\right) = \left\{ x \in M : \mathfrak{p}(x) \in M/\sim \right\} = M \in \tau_M$$

- Seja $\{U_i\}$ uma família de elementos de $\widetilde{\tau}$, ou seja, $\mathfrak{p}^{-1}(U_i) \in \tau_M$ para todo $i \in I$. Mostremos que $\bigcup_{i\in I} U_i \in \widetilde{\tau}$. De fato, basta considerar

$$\mathfrak{p}^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{p}^{-1}(U_i) \in \tau_M$$

  pois $\mathfrak{p}^{-1}(U_i) \in \tau_M$. Portanto $\bigcup_{i\in I} U_i \in \widetilde{\tau}$;
- Com uma construção semelhante à feita acima, mostra-se que dado um conjunto finito $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de elementos de $\widetilde{\tau}$, então, a interseção finita $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ pertence a $\widetilde{\tau}$.

Deste modo, $\tilde{\tau}$ é de fato uma topologia para o quociente.

No próximo teorema nosso objetivo é fornecer uma maneira alternativa para definir um fibrado vetorial sobre um espaço topológico X. Para isto, utilizaremos as Observações 2.1.4 e 2.1.5.

Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta para X. Suponha dadas aplicações $\theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ contínuas satisfazendo as condições de cociclo. Para cada α, o produto cartesiano $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ possui estrutura de espaço topológico (produto). Dessa forma, ao considerar a união disjunta

$$E = \bigsqcup_{\alpha\in\Delta} (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$$

podemos tomar a topologia canônica τ_E.

No espaço topológico (E, τ_E) vamos definir a seguinte relação de equivalência:

$$(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v) \iff x = y,\ \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v = u \text{ e } U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$$

e considerar o espaço topológico quociente $E/\sim$.

Teorema 2.1. *Nas condições acima, $E/\sim$ possui estrutura de fibrado vetorial de posto n sobre X (a qual é única a menos de isomorfismo).*

Demonstração. Seja $E = \bigsqcup_{\alpha\in\Delta}(U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$ a união disjunta da família $\{U_\alpha \times \mathbb{R}^n\}_{\alpha\in\Delta}$. Vamos considerar a família de aplicações

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow E \\ (x, v) &\longmapsto \varphi_\alpha(x, v) = (\alpha, x, v) \end{aligned}$$

e a projeção canônica

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} : E &\longrightarrow E/\sim \\ (\alpha, x, v) &\longmapsto \mathfrak{p}((\alpha, x, v)) = [(\alpha, x, v)] \end{aligned}$$

Primeiramente, mostraremos que a relação $\sim$ em questão é de fato uma relação de equivalência. Com efeito, sejam $(\alpha, x, u), (\beta, y, v), (\gamma, z, w) \in E$.

- *Reflexividade*: Mostremos que $(\alpha, x, v) \sim (\alpha, x, v)$.

  De fato, temos que $x = x$ e $U_{\alpha\alpha} = U_\alpha \neq \emptyset$. Além disso, neste caso tem-se que $\theta_{\alpha\alpha} = I$ e assim, $\theta_{\alpha\alpha}(x) \cdot v = I \cdot v = v$ e portanto $(\alpha, x, v) \sim (\alpha, x, v)$.

- *Simetria* Se $(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v)$, então, $(\beta, y, v) \sim (\alpha, x, u)$.

  Por hipótese, tem-se que $x = y$, $\theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v = u$ e $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Assim, basta mostrar que $\theta_{\beta\alpha}(y) \cdot u = v$. Como $\theta_{\alpha\beta}(x)$ é um isomorfismo, tem-se que

$$\begin{aligned} & & \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v &= u \\ &\implies & \theta_{\alpha\beta}(x)^{-1} \cdot \big(\theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v\big) &= \theta_{\alpha\beta}(x)^{-1} \cdot u \\ &\implies & v &= \theta_{\beta\alpha}(x) \cdot u \\ &\implies & \theta_{\beta\alpha}(y) \cdot u &= v \end{aligned}$$

  onde a última implicação segue do fato de que x=y. Deste modo, tem-se que $(\beta, y, v) \sim (\alpha, x, u)$;

- *Transitividade*: Suponha $(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v)$ e $(\beta, y, v) \sim (\gamma, z, w)$. Mostremos que $(\alpha, x, u) \sim (\gamma, z, w)$.

Por hipótese, tem-se que $x = y$ e $y = z$, portanto $x = y = z$ o que implica que $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$, pois $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$. Em particular $U_{\alpha\gamma} \neq \emptyset$. Além disso, temos as seguintes relações:

$$\theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v = u \quad \text{e} \quad \theta_{\beta\gamma}(x) \cdot w = v$$

Falta apenas mostrar que $\theta_{\alpha\gamma}(x) \cdot w = u$. De fato

$$\begin{aligned}\theta_{\alpha\gamma}(x) \cdot w =& \theta_{\alpha\gamma}(x) \circ \theta_{\gamma\beta}(x) \cdot v \\ =& \theta_{\alpha\gamma}(x) \circ \theta_{\gamma\beta}(x) \circ \theta_{\beta\alpha}(x) \cdot u \\ =& I \cdot u \\ =& u\end{aligned}$$

onde I denota a aplicação identidade.

Agora, mostraremos que $E/\sim$ é um fibrado vetorial sobre X. Denotando por $\widetilde{\tau}$ a topologia de $E/\sim$, definimos a projeção:

$$\begin{aligned}\pi : E/\sim &\longrightarrow X \\ [(\alpha, x, v)] &\longmapsto \pi([(\alpha, x, v)]) = x\end{aligned}$$

Por se tratar de classes de equivalência, precisa-se verificar que π está bem definida. Sejam $[(\alpha, x, u)], [(\beta, y, v)] \in E/\sim$ tais que $[(\alpha, x, u)] = [(\beta, y, v)]$. Assim tem-se que $(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v)$ o que implica que $x = y$. Consequentemente,

$$\pi[(\alpha, x, u)] = x = \pi[(\beta, x, v)]$$

ou seja, a aplicação π está bem definida. Claramente π é uma aplicação sobrejetora. Mostremos agora que π também é contínua, utilizando a caracterização de que a pré-imagem de abertos é aberta. Assim, tomando um aberto $U \subset X$, mostremos que $\pi^{-1}(U) \subset E/\sim$ é aberto. Em outras palavras, devemos mostrar que $U \in \tau_X$ implica que $\pi^{-1}(U) \in \widetilde{\tau}$. Note que pela definição de $\widetilde{\tau}$ e da topologia da união disjunta τ_E, temos uma equivalência para esta última condição

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(U) \in \widetilde{\tau} &\iff \mathfrak{p}^{-1}\left(\pi^{-1}(U)\right) \in \tau_E \\ &\iff \varphi_\alpha^{-1}\left(\mathfrak{p}^{-1}\left(\pi^{-1}(U)\right)\right) \in \tau_\alpha \quad \forall \alpha \in \Delta\end{aligned}$$

Desta forma, pondo $\Delta' = \{\alpha \in \Delta : U \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$, temos

$$\pi^{-1}(U) = \left\{[\alpha, x, v] \in E/\sim : \alpha \in \Delta', (x, v) \in (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n\right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}^{-1}(\pi^{-1}(U)) &= \left\{(\alpha, x, v) \in E : \mathfrak{p}(\alpha, x, v) \in \pi^{-1}(U)\right\} \\ &= \left\{(\alpha, x, v) \in E : [(\alpha, x, v)] \in \pi^{-1}(U)\right\} \\ &= \{(\alpha, x, v) \in E : \alpha \in \Delta', (x, v) \in (U \cap U\alpha) \times \mathbb{R}^n\}. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Agora, para finalizar, vejamos que de fato, para todo $\alpha \in \Delta$, tem-se

$$\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathfrak{p}^{-1}(\pi^{-1}(U))\right) \in \tau_\alpha.$$

Com efeito, dado $\alpha_0 \in \Delta$, se $\alpha_0 \notin \Delta'$, então, por 2.1,

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha_0}^{-1}\left(\mathfrak{p}^{-1}(\pi^{-1}(U))\right) =& \varphi_{\alpha_0}^{-1}\left(\{(\alpha, x, v) \in E : \alpha \in \Delta', (x, v) \in (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n\}\right)\\ =& \emptyset \in \tau_{\alpha_0}.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $\alpha_0 \in \Delta'$, então, podemos decompor o conjunto que aparece em 2.1 da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}^{-1}(\pi^{-1}(U)) = &\{(\alpha, x, v) \in E : \alpha \in \Delta' \setminus \{\alpha_0\}, (x, v) \in (U \cap U\alpha) \times \mathbb{R}^n\} \cup\\ &\cup \{(\alpha_0, x, v) : (x, v) \in (U \cap U\alpha_0) \times \mathbb{R}^n\}.\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha_0}^{-1}\left(\mathfrak{p}^{-1}(\pi^{-1}(U))\right) =& \varphi_{\alpha_0}^{-1}\left(\{(\alpha, x, v) \in E : \alpha \in \Delta' \setminus \{\alpha_0\}, (x, v) \in (U \cap U\alpha) \times \mathbb{R}^n\}\right) \cup\\ &\cup \varphi_{\alpha_0}^{-1}\left(\{(\alpha_0, x, v) : (x, v) \in (U \cap U\alpha_0) \times \mathbb{R}^n\}\right)\\ =& \emptyset \cup (U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n\\ =& (U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n \in \tau_{\alpha_0}.\end{aligned}$$

Com isso, chegamos que

$$\varphi_\alpha\left(\mathfrak{p}^{-1}(\pi^{-1}(U))\right) \in \tau_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

Logo, $\pi^{-1}(U)$ é aberto em $E/\sim$ e, consequentemente, π é contínua.

Agora, vejamos para cada $x \in X$, o conjunto $E_x := \pi^{-1}(x)$ possui estrutura de espaço vetorial de dimensão n. De fato, dado $x_0 \in X$, temos

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(x_0) &= \left\{[(\alpha, x, v)] \in E/\sim : \pi([(\alpha, x, v)]) = x_0\right\}\\ &= \left\{[(\alpha, x, v)] \in E/\sim : x = x_0\right\}\\ &= \left\{[(\alpha, x_0, v)] \in E/\sim : \alpha \in \Delta'' \text{ e } v \in \mathbb{R}^n\right\}\end{aligned}$$

onde $\Delta'' = \{\alpha \in \Delta : U_\alpha \cap \{x_0\} \neq \emptyset\}$. Fixado $\alpha_0 \in \Delta''$, podemos decompor o conjunto $\pi^{-1}(x_0)$ como segue

$$\pi^{-1}(x_0) = \{[(\alpha_0, x_0, w)] : w \in \mathbb{R}^n\} \cup \left\{[(\alpha, x_0, v)] \in E/\sim : \alpha \in \Delta'' \setminus \{\alpha_0\} \text{ e } v \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Denotando

$$\begin{aligned}M &= \{[(\alpha_0, x_0, w)] : w \in \mathbb{R}^n\}\\ N &= \left\{[(\alpha, x_0, v)] \in E/\sim : \alpha \in \Delta'' \setminus \{\alpha_0\} \text{ e } v \in \mathbb{R}^n\right\}\end{aligned}$$

vejamos que $N \subset M$. Com efeito, dado $[(\alpha, x_0, v)] \in N$, como $x_0 \in U_{\alpha_0\alpha}$ podemos tomar $w_0 := \theta_{\alpha_0\alpha} \cdot v$ e considerar $[(\alpha_0, x_0, w_0)] \in M$. Daí

$$(\alpha, x_0, v) \sim (\alpha_0, x_0, w_0)$$

ou seja,

$$[(\alpha, x_0, v)] = [(\alpha_0, x_0, w_0)] \in M.$$

Portanto,

$$N \subset M.$$

Desta forma,

$$\pi^{-1}(x_0) = M \cup N = M = \{[(\alpha_0, x_0, w)] : w \in \mathbb{R}^n\} \approx \mathbb{R}^n$$

tem estrutura de espaço vetorial de dimensão n.

Mudamos agora o foco para definir as trivializações locais. Antes porém, vejamos que cada conjunto $\pi^{-1}(U_\alpha)$, com $\alpha \in \Delta$, pode ser descrito como

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \left\{[\alpha, x, v] : {}^{E}\!/_{\sim} : x \in U_\alpha, v \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

De fato, se $[\beta, z, w] \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, então $z \in U_\beta$ e $z = \pi([\beta, z, w]) \in U_\alpha$. Logo, $z \in U_{\alpha\beta}$. Tomando $u := \theta_{\beta\alpha}(x) \cdot w$, temos que

$$(\alpha, z, u) \sim (\beta, z, w).$$

Portanto, $[\beta, z, w] = [\alpha, z, u] \in \left\{[\alpha, x, v] \in {}^{E}\!/_{\sim} : x \in U_\alpha, v \in \mathbb{R}^n\right\}$. Ou seja,

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \subset \left\{[\alpha, x, v] \in {}^{E}\!/_{\sim} : x \in U_\alpha, v \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

A inclusão contrária é trivial. Mostremos que a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ [(\alpha, x, v)] &\longmapsto \psi_\alpha([(\alpha, x, v)]) = (x, v) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. Para isso, consideremos as duas funções coordenada de ψ_α

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_1} : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \\ [(\alpha, x, v)] &\longmapsto \psi_{\alpha_1}([(\alpha, x, v)]) = x \end{aligned}$$

a qual já vimos ser contínua, e

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_2} : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [(\alpha, x, v)] &\longmapsto \psi_{\alpha_2}([(\alpha, x, v)]) = v \end{aligned}$$

que mostraremos estar bem definida e ser contínua. Para mostrar que está bem definida, considere $[(\alpha, x, u)], [(\alpha, y, v)] \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ tais que $[(\alpha, x, u)] = [(\alpha, y, v)]$. Neste caso, tem-se $x = y$ e

$$\theta_{\alpha\alpha}(x) \cdot v = I \cdot v = u$$

e portanto, $u = v$. Ou seja

$$\psi_{\alpha_2}([(\alpha, x, v)]) = v = \psi_{\alpha_2}([(\alpha, y, u)])$$

e assim, ψ_{α_2} está bem definida. Para a continuidade, considere $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Mostremos que $\psi_{\alpha_2}^{-1}(U)$ é aberto em $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Como $\pi^{-1}(U_\alpha)$ é aberto em $E/\sim$, basta mostrar que $\psi_{\alpha 2}^{-1}(U)$ é aberto em $E/\sim$. Como feito anteriormente, precisamos verificar que

$$\varphi_\alpha^{-1}\left(\mathfrak{p}^{-1}(\psi_{\alpha 2}(U))\right) \in \tau_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha_2}^{-1}(U) &= \left\{[(\alpha, x, v)] \in \pi^{-1}(U_a) : \psi_{\alpha_2}([(\alpha, x, v)]) \in U\right\} \\ &= \left\{[(\alpha, x, v)] \in \pi^{-1}(U_a) : v \in U\right\}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\psi_{\alpha_2}^{-1}(U)) &= \left\{(\alpha, x, v) \in E : \pi(\alpha, x, v) \in \psi_{\alpha_2}^{-1}(U)\right\} \\ &= \{(\alpha, x, v) \in E : x \in U_\alpha, v \in U\}.\end{aligned}$$

Donde

$$\varphi_\alpha^{-1}\left(\pi^{-1}(\psi_{\alpha_2}^{-1}(U))\right) = \{(x, v) : x \in U_\alpha, v \in U\} = U_\alpha \times U$$

o qual é aberto em $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Portanto, ψ_{α_2} é uma aplicação contínua. Além disso ψ_α é tal que

- ψ_α é injetiva pois

  $$\psi_\alpha([(\alpha, x_1, v_1)]) = \psi_\alpha([(\alpha, x_2, v_2)]) \iff (x_1, v_1) = (x_2, v_2) \iff x_1 = x_2 \text{ e } v_1 = v_2$$

  e, portanto, $([(\alpha, x_1, v_1)]) = ([(\alpha, x_2, v_2)])$;

- ψ_α é sobrejetiva, pois dado $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, basta tomar $[(\alpha, x, v)] \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Assim, $\psi([(\alpha, x, v)]) = (x, v)$

logo, ψ_α é um homeomorfismo. Em particular, quando restrita à fibra sobre $x \in X$,

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha x} : E_x &\longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \\ [(\alpha, x, v)] &\longmapsto \psi_{\alpha x}([(\alpha, x, v)]) = (x, v)\end{aligned}$$

é isomorfismo.

Deste modo, mostramos que $E/\sim$ é um fibrado vetorial real de dimensão n sobre X. □

Com este último resultado, temos uma caracterização de fibrados vetoriais. Um fibrado vetorial de posto n sobre X é definido unicamente, a menos de isomorfismo de fibrados, por uma família de funções de transição satisfazendo as condições do teorema acima. Deste modo, não se faz necessária a descrição do espaço total do fibrado. Além disso, como será visto mais adiante no trabalho, os cálculos envolvendo fibrados levam em consideração apenas as funções de transição e não necessariamente o espaço total. Deste modo, no que segue abaixo, denotaremos um fibrado vetorial (E, π) por E, levando em consideração suas funções de transição.

Em tudo o que foi feito acima, se trocarmos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ obtemos a noção de fibrado vetorial complexo. Além disso, se X é uma variedade complexa e as trivializações forem de classe C^∞ ou holomorfas, teremos fibrados complexos C^∞ ou holomorfos.

Construções envolvendo fibrados

Nesta seção trataremos com detalhe alguns exemplos de como, a partir de fibrados já existentes, pode-se construir outros fibrados utilizando das funções de transição dos fibrados já conhecidos, uma vez que temos em mão o Teorema 2.1.

O produto tensorial

Sejam E e E' fibrados vetoriais sobre X, de posto n e m, respectivamente. Deste modo, dada uma cobertura de $\{U_\alpha\}$ comum à E e E', temos as seguintes funções de transição

- Para E:
$$\theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{GL(n, \mathbb{R})}$$
ou seja, para todo $x \in U_{\alpha\beta}$,
$$\theta_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
- Para E'
$$\theta'_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{GL(m, \mathbb{R})}$$
ou seja, para todo $x \in U_{\alpha\beta}$
$$\theta'_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

ambas $\theta_{\alpha\beta}$ e $\theta'_{\alpha\beta}$ são contínuas e satisfazem as condições de cociclo.

Com isso, definimos agora o fibrado *produto tensorial de E e E'*, denotado por $E \otimes E'$, como o fibrado cujas funções de transição são dadas por:

$$\overline{\theta_{\alpha\beta}} = \theta_{\alpha\beta} \otimes \theta'_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{GL(n, \mathbb{R})} \otimes \mathrm{GL(m, \mathbb{R})} \approx \mathrm{GL(nm, \mathbb{R})}$$

de modo que para todo $x \in U_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned}\overline{\theta_{\alpha\beta}}(x) = \theta_{\alpha\beta} \otimes \theta'_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m &\longrightarrow : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \\ u \otimes v &\longmapsto \overline{\theta_{\alpha\beta}}(x)(u \otimes v) = \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot u \otimes \theta'_{\alpha\beta}(x) \cdot v\end{aligned}$$

Basta agora conferir que as aplicações $\overline{\theta_{\alpha\beta}}$ satisfazem as condições de cociclo.

- Seja $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$, tome $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ e $u \otimes v \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ arbitrários. Mostremos que $\overline{\theta_{\alpha\beta}}(x) \circ \overline{\theta_{\beta\gamma}}(x) \circ \overline{\theta_{\gamma\alpha}}(x) \cdot u \otimes v = u \otimes v$. De fato

$$\begin{aligned}\overline{\theta_{\alpha\beta}}(x) \circ \overline{\theta_{\beta\gamma}}(x) \circ \overline{\theta_{\gamma\alpha}}(x) \cdot u \otimes v &= \overline{\theta_{\alpha\beta}}(x) \circ \overline{\theta_{\beta\gamma}}(x) \cdot \left(\overline{\theta_{\gamma\alpha}}(x) \cdot u \otimes v\right) \\ &= \overline{\theta_{\alpha\beta}}(x) \circ \overline{\theta_{\beta\gamma}}(x) \cdot \left((\theta_{\gamma\alpha}(x) \cdot u) \otimes (\theta'_{\gamma\alpha}(x) \cdot v)\right) \\ &= \overline{\theta_{\alpha\beta}}(x) \cdot \left((\theta_{\beta\gamma}(x) \circ \theta_{\gamma\alpha}(x) \cdot u) \otimes (\theta'_{\beta\gamma}(x) \circ \theta'_{\gamma\alpha}(x) \cdot v)\right) \\ &= \left(\theta_{\alpha\beta}(x) \circ \theta_{\beta\gamma}(x) \circ \theta_{\gamma\alpha}(x) \cdot u\right) \otimes \left(\theta'_{\alpha\beta}(x) \circ \theta'_{\beta\gamma}(x) \circ \theta'_{\gamma\alpha}(x) \cdot v\right) \\ &= u \otimes v\end{aligned}$$

  onde a última igualdade segue do fato de que $\theta_{\alpha\beta}$ e $\theta'_{\alpha\beta}$ satisfazem as condições de cociclo;

- Considere $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, tome $x \in U_{\alpha\beta}$ e $u \otimes v \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$. Mostremos que

$$\overline{\theta_{\alpha\beta}}(x) \circ \overline{\theta_{\beta\alpha}}(x) \cdot u \otimes v = u \otimes v.$$

  De fato

$$\begin{aligned}\overline{\theta_{\alpha\beta}}(x) \circ \overline{\theta_{\beta\alpha}}(x) \cdot u \otimes v &= \overline{\theta_{\alpha\beta}}(x) \cdot \left(\overline{\theta_{\beta\alpha}}(x) \cdot u \otimes v\right) \\ &= \overline{\theta_{\alpha\beta}}(x) \cdot \left(\theta_{\beta\alpha}(x) \cdot u \otimes \theta'_{\beta\alpha}(x) \cdot v\right) \\ &= \left(\theta_{\alpha\beta}(x) \circ \theta_{\beta\alpha}(x) \cdot u\right) \otimes \left(\theta'_{\alpha\beta}(x) \circ \theta'_{\beta\alpha}(x) \cdot v\right) \\ &= u \otimes v\end{aligned}$$

Portanto, a família $\{\overline{\theta_{\alpha\beta}}\}$ satisfaz as condições de cociclo e assim temos de fato um fibrado vetorial de posto nm sobre X.

Subfibrado

Definição 2.1.4. Seja E um fibrado vetorial de sobre X posto n. Um *subfibrado* de E é um subconjunto $F \subset E$ tal que a projeção π e as trivializações locais de E dão à F estrutura de fibrado vetorial real.

Pode-se tirar algumas conclusões direto da definição de subfibrado. Sendo $\{\theta_\alpha\}$ as trivializações locais de E, fixemos a seguinte notação:

- A projeção de F como sendo

$$\pi_F = \pi|_F : F \longrightarrow X$$

- As trivializações locais de F como sendo

$$\eta_\alpha = \theta_\alpha|_F : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

- Sendo E_x a fibra sobre $x \in X$ de E, denotemos por $\pi_F^{-1}(x) = F_x$ as fibras de F.

deste modo, como F tem estrutura de fibrado, note que $F_x \subset E_x$ e assim F_x é um subespaço vetorial de E_x, ou seja, $\dim_{\mathbb{R}}(F_x) = m \leqslant \dim_{\mathbb{R}}(E_x) = n$. Consequentemente,

$$\eta_\alpha(\pi_F^{-1}(U_\alpha)) = U_\alpha \times \eta_\alpha(\pi_F^{-1}(U_\alpha)) \subset U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

onde $\eta_\alpha(\pi_F^{-1}(U_\alpha)) \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $m \leqslant n$ e portanto, isomorfo à $\mathbb{R}^m$. Deste modo, sem perigo de confusões, escreveremos

$$\eta_\alpha : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m \tag{2.2}$$

Fibrado quociente

Utilizando a mesma notação da construção do subfibrado, pode-se relacionar a matriz da transformação linear $\theta_{\alpha\beta}(x)$ com a matriz de $\eta_{\alpha\beta}(x)$ de modo a definir um novo fibrado, o *fibrado quociente*. Ainda considerando $\{U_\alpha\}$ como uma cobertura por abertos para X, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n & \pi_E^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\theta_\alpha"'] \arrow[r, "\theta_\beta"] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \\
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m \arrow[u, "i"] & \pi_F^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\eta_\alpha"'] \arrow[r, "\eta_\beta"] \arrow[u, "i^*"] & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

onde $i : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n$ e $i^* : \pi_F^{-1}(U_{\alpha\beta}) \to \pi_E^{-1}(U_{\alpha\beta})$ são as aplicação inclusão entre os espaços em questão. Deste modo, para $x \in U_{\alpha\beta}$ temos as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \times\mathbb{R}^m \\ v &\longmapsto \eta_{\alpha\beta}(x) \cdot v \end{aligned}$$

Tais aplicações coincidem em vetores $v \in \mathbb{R}^m$ (Neste caso, identificando $R^m = R^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ onde $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$.), dada a relação da equação 2.2 e o fato de η_α ser a restrição de θ_α em F, ou seja

$$\theta_{\alpha\beta}(x)|_{\mathbb{R}^m} = \eta_{\alpha\beta}(x) \tag{2.3}$$

Deste modo, se considerarmos vetores $v \in \mathbb{R}^n$ da forma $v = u + w$ onde $u \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}^{n-m}$. A matriz da transformação linear $\theta_{\alpha\beta}(x)$ em relação às bases canônicas é da forma

$$\theta_{\alpha\beta}(x) = \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha\beta}(x) & \rho_{\alpha\beta}(x) \\ \delta_{\alpha\beta}(x) & \xi_{\alpha\beta}(x) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

onde as submatrizes são tais que $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ tem ordem $m \times m$, $\rho_{\alpha\beta}(x)$ tem ordem $m \times n - m$, $\delta_{\alpha\beta}(x)$ tem ordem $n-m \times m$ e $\xi_{\alpha\beta}(x)$ tem ordem $n-m \times n - m$. Denotando as transformações lineares associadas a cada matriz com o mesmo símbolos, tem-se

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(x) :& \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \rho_{\alpha\beta}(x) :& \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \delta_{\alpha\beta}(x) :& \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} \\ \xi_{\alpha\beta}(x) :& \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} \end{aligned}$$

todas contínuas, uma vez que $\theta_{\alpha\beta}(x)$ o é. Mostraremos a seguir que estas transformações lineares satisfazem as seguintes relações:

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta}(x) \qquad \text{e} \qquad \delta_{\alpha\beta}(x) \equiv 0$$

De fato, utilizando novamente a relação de $\theta_{\alpha\beta}(x)$ e $\eta_{\alpha\beta}(x)$, temos que quando $v \in \mathbb{R}^m$, este vetor se escreve como $v = v + 0 = (v, 0) \in \mathbb{R}^n$, onde $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Assim,

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot (v, 0) = \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha\beta}(x) & \rho_{\alpha\beta}(x) \\ \delta_{\alpha\beta}(x) & \xi_{\alpha\beta}(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} &= (\gamma_{\alpha\beta}(x) \cdot v + \rho_{\alpha\beta}(x) \cdot 0, \delta_{\alpha\beta}(x) \cdot v + \xi_{\alpha\beta}(x) \cdot 0) \\ &= (\gamma_{\alpha\beta}(x) \cdot v, \delta_{\alpha\beta}(x) \cdot v) \\ &= (\eta_{\alpha\beta}(x) \cdot v, 0) \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da equação 2.3. Portanto,

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta}(x) \qquad \text{e} \qquad \delta_{\alpha\beta}(x) \equiv 0$$

deste modo, a matriz em 2.4 se reescreve como

$$\theta_{\alpha\beta}(x) = \begin{bmatrix} \eta_{\alpha\beta}(x) & \rho_{\alpha\beta}(x) \\ 0 & \xi_{\alpha\beta}(x). \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Com isto, temos uma família de aplicações $\{\xi_{\alpha\beta}\}$ tais que

$$\xi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{GL}(n - m, \mathbb{R})$$

e satisfazendo as condições de cociclo. Definimos o fibrado cujas funções de transição são as funções $\{\xi_{\alpha\beta}\}$ como o *fibrado quociente* E/F.

Fibrado *pull-back*

Seja $f : Y \to X$ uma aplicação contínua e E um fibrado vetorial sobre X de dimensão n, com funções de transição $\{\theta_{\alpha\beta}\}$ relativa á cobertura $\{U_\alpha\}$ para X. Podemos considerar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

A seguir, iremos mostrar que f induz um fibrado sobre Y chamado *fibrado pull-back* ou *imagem recíproca de E via f*, denotado por $f^{-1}E$. Construiremos uma cobertura para Y a partir da cobertura de X e também obteremos uma família de funções de transição.

Primeiramente, dada $\{U_\alpha\}$ cobertura de X, como f é contínua, $\{V_\alpha\} = \left\{f^{-1}(U_\alpha)\right\}$ é uma cobertura aberta para Y. Agora, denotando $V_{\alpha\beta} = f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta)$, definimos as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} = f^*\theta_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} &\longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \\ x &\longmapsto f^*\theta_{\alpha\beta}(x) = \theta_{\alpha\beta}(f(x)) = [\theta_{\alpha\beta}(f(x))] \end{aligned}$$

e note que $\eta_{\alpha\beta}$ está bem definida, uma vez que $f(x) \in U_{\alpha\beta}$ dado que $x \in V_{\alpha\beta}$. Assim definida, a família $\{v_{\alpha\beta}\}$ herda todas as propriedades dos elementos de $\{\theta_{\alpha\beta}\}$ e, consequentemente, definem um fibrado em Y de mesma dimensão que E.

Fibrado soma direta

Sejam E e E' fibrados vetoriais sobre X de dimensão m e n, respectivamente. Sejam $\{\theta_{\alpha\beta}\}$ e $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ as funções de transição de E e E', respectivamente, em relação à $\{U_\alpha\}$, uma cobertura de X comum aos dois fibrados, ou seja,

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} &\longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto [\theta_{\alpha\beta}(x)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} &\longrightarrow \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto [\eta_{\alpha\beta}(x)] \end{aligned}$$

Definimos o *fibrado soma direta*, de posto $n+m$, denotado por $E \oplus E'$ através da seguinte família de funções de transição:

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} &\longrightarrow \mathrm{GL}(n+m, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto [\psi_{\alpha\beta}(x)] = \begin{bmatrix} [\theta_{\alpha\beta}(x)] & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & [\eta_{\alpha\beta}(x)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde $0_{n\times m}$ denota a matriz identicamente nula $n \times m$.

Note que, $\psi_{\alpha\beta}$ satisfaz as condições de cociclo. De fato:

- Para $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, tem-se para $x \in U_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\alpha}(x) &= \begin{bmatrix} [\theta_{\alpha\beta}(x)] & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & [\eta_{\alpha\beta}(x)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\theta_{\beta\alpha}(x)] & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & [\eta_{\beta\alpha}(x)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\theta_{\alpha\beta}(x)] \cdot [\theta_{\beta\alpha}(x)] & 0 \\ 0 & [\eta_{\alpha\beta}(x)] \cdot [\eta_{\beta\alpha}(x)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [I]_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & [I]_{n\times n} \end{bmatrix} \\ &= [I] \end{aligned}$$

  onde a matriz $[I]$ obtida representa a matriz identidade $(n+m) \times (n+m)$.

- Se $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$, então, para $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$:

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} \circ \psi_{\gamma\alpha}(x) &= \begin{bmatrix} [\theta_{\alpha\beta}(x)] & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & [\eta_{\alpha\beta}(x)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\theta_{\beta\gamma}(x)] & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & [\eta_{\beta\gamma}(x)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\theta_{\gamma\alpha}(x)] & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & [\eta_{\gamma\alpha}(x)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\theta_{\alpha\beta}(x)] \cdot [\theta_{\beta\gamma}(x)] \cdot [\theta_{\gamma\alpha}(x)] & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & [\eta_{\alpha\beta}(x)] \cdot [\eta_{\beta\gamma}(x)] \cdot [\eta_{\gamma\alpha}(x)] \end{bmatrix} \\ &= [I] \end{aligned}$$

O fibrado associado a uma hipersuperfície

Sejam M uma variedade complexa e $D \subset M$ uma hipersuperfície analítica. Considere uma cobertura $\{U_i\}$ para M de modo que V é definida por $f_i^{-1}(0)$ com $f_i : U_i \to \mathbb{C}$. Neste caso, em $U_{ij} = U_i \cap U_j$ tem-se que $f_i = \varphi_{ij} f_j$ onde $\varphi_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{C}^*$ é uma aplicação holomorfa que não se anula em ponto algum.

O fibrado $[D]$ é definido pelas funções de transição $\varphi_{ij} = \dfrac{f_i}{f_j}$. Como

$$\varphi_{ij} : U_{ij} \longrightarrow \mathbb{C}$$

tem-se que $[D]$ é um fibrado de posto 1.

2.2 Classes de Chern

Conexão

Sejam E um espaço topológico e M uma variedade complexa. Considere (E, π) um fibrado vetorial complexo C^∞ de posto n com projeção $\pi : E \to M$. Se $U \subset M$ é aberto, fixemos as seguintes notações:

- A $\mathbb{C}$-álgebra $C^\infty(U, \mathbb{C})$ de funções complexas de classe C^∞ será denotada por $\mathcal{A}^0(U)$;
- O $\mathcal{A}^0$-módulo das $p-$formas complexas C^∞ sobre U será denotado por $\mathcal{A}^p(U)$;
- A álgebra graduada de formas diferenciais C^∞ sobre U, denotaremos por

$$\mathcal{A}^*(U) = \bigoplus_{p=0}^{\dim M} \mathcal{A}^p(U)$$

- O $\mathcal{A}^0(U)-$módulo $C^\infty(U, E)$ de seções de E sobre U, será denotado por $\mathcal{A}^0(U, E)$;
- O $\mathcal{A}^0(U)-$módulo $C^\infty(U, TM^{\mathbb{C}*} \otimes E)$ das seções de $TM^{\mathbb{C}*} \otimes E$ sobre U, será denotado por $\mathcal{A}^1(U, E)$ (onde $TM^{\mathbb{C}*}$ denota fibrado cotangente complexificado de M);
- De modo geral, para todo $p \in \mathbb{N}$, o $\mathcal{A}^0(U)-$módulo $C^\infty(U, \wedge^p TM^{\mathbb{C}*} \otimes E)$ de seções de $\wedge^p TM^{\mathbb{C}*} \otimes E$ sobre U, será denotado por $\mathcal{A}^p(U, E)$.

Definição 2.2.1. Uma *conexão* em E é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$\nabla : \mathcal{A}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, E)$$

satisfazendo a regra de Leibniz

$$\nabla(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla(s)$$

para todo $f \in \mathcal{A}^0(M)$ e todo $s \in \mathcal{A}^0(M, E)$.

Observação 2.2.1. Note que na definição de conexão, o produto tensorial $\mathrm{d}f \otimes s$ não é feito sobre $\mathbb{C}$, mas sim sobre $\mathcal{A}^0(M)$, uma vez que ambos $\mathcal{A}^0(M, E)$ e $\mathcal{A}^1(M, E)$ são $\mathcal{A}^0(M)-$módulos.

Proposição 2.2.1. *Uma conexão ∇ é um operador local, ou seja, se uma seção s é identicamente 0 num aberto U, então a seção $\nabla(s) \in \mathcal{A}^1(M, E)$ também é identicamente nula em U.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que exista $x_0 \in U$ tal que $\nabla(s)(x_0) \neq 0$. Tomando uma função $\rho \in \mathcal{A}^0(U)$ com suporte compacto e tal que ρ é identicamente 1 numa vizinhança $V \subset U$ de x_0, vamos definir $\overline{\rho} \in \mathcal{A}^0$ pondo

$$\overline{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{quando } x \in U \\ 0, & \text{quando } x \in M \setminus U \end{cases}$$

Note que $\overline{\rho}s \in \mathcal{A}^0(M, E)$ é tal que $\overline{\rho}s \equiv 0$ é a seção nula. Com isso, sendo ∇ uma aplicação $\mathbb{C}-$linear, tem-se

$$\nabla(\overline{\rho}s) = \nabla(0) = \nabla(0_{\mathbb{C}}0) = 0_{\mathbb{C}}\nabla(0) = 0 \tag{2.6}$$

onde $0_{\mathbb{C}}$ denota o número complexo nulo. Por outro lado, pela regra de Leibniz,

$$\begin{aligned} \nabla(\overline{\rho}s) =& \mathrm{d}\overline{\rho} \otimes s + \overline{\rho}\nabla(s) \\ =& 0 \otimes s + \overline{\rho}\nabla(s) \\ =& \overline{\rho}\nabla(s). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Utilizando 2.6 e 2.7, tem-se

$$\overline{\rho}\nabla(s) = \nabla(\overline{\rho s}) = 0.$$

Como $\rho \equiv 1$ no aberto V, segue que ∇s se anula em V. Em particular $\nabla(s)(x_0) = 0$. Absurdo, pois $\nabla(s)(x_0) \neq (0)$. □

Pela Proposição 2.2.1, temos que se $s_1, s_2 \in \mathcal{A}^0(M, E)$ são duas seções de E (distintas) que coincidem num aberto $U \subset M$, então $\nabla(s_1)$ e $\nabla(s_2)$ também coincidem em U. Em particular, a restrição de ∇ ao aberto U faz sentido e a mesma constitui uma conexão para $E|U$.

Com o caráter local das conexões, pode-se restringi-las à abertos de M e consequentemente, se $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de M, então, uma conexão ∇ em E fica completamente determinada por suas restrições $\nabla|_{U_\alpha}$.

Lema 2.1. *Existem conexões.*

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M, trivializadora de ambos $TM^{\mathbb{C}}$ e E.

Para cada α, tome $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ um referencial para $\pi^{-1}(U_\alpha) \approx U_\alpha \times \mathbb{C}^n$, isto é, cada $s_i^\alpha \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$ e para cada $x \in U_\alpha$, o conjunto $\{s_1^\alpha(x), \ldots, s_n^\alpha(x)\}$ é uma base para E_x.

Seja $\{\rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada à $\{U_\alpha\}$, ou seja, para todo $\alpha \in A$, tem-se que $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$ e para todo $x \in M$ tem-se $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$.

Defina ∇^α em U_α por $\nabla^\alpha(s_i^\alpha) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Note que com esta definição, para $f \in \mathcal{A}^0(U_\alpha)$ vale

$$\nabla^\alpha(f s_i^\alpha) = \mathrm{d}f \otimes s_i^\alpha + f\nabla^\alpha(s_i^\alpha) = \mathrm{d}f \otimes s_i^\alpha.$$

Além disso, podemos escrever uma seção qualquer $s \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$ como

$$s|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} f_i s_i^\alpha$$

com $f_i \in \mathcal{A}^0(U_\alpha)$. Deste modo, podemos estender ∇^α para uma seção qualquer fazendo

$$\nabla^\alpha(s|_{U_\alpha}) = \nabla^\alpha(\sum_{i=1}^{n} f_i s_i^\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \nabla^\alpha(f_i s_i^\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}f_i \otimes {s_i}^\alpha$$

Definimos agora

$$\nabla = \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha$$

que verificaremos ser de fato uma conexão e será a conexão que procuramos. Primeiramente note que

$$\nabla(s) = \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha(s|_{U_\alpha}) = \sum_\alpha \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f \otimes s_i^\alpha \right)$$

e deste modo, a $\mathbb{C}$-linearidade de ∇ segue da $\mathbb{C}$-linearidade do produto tensorial. Basta apenas mostrar que $\nabla(gs) = \mathrm{d}g \otimes s + g\nabla(s)$ para todo $g \in \mathcal{A}^0(M)$. De fato

$$\begin{aligned}
\nabla(gs) = \sum_\alpha \rho_\alpha(gs) &= \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha \left(g \sum_{i=1}^{n} f_i s_i^\alpha \right) \\
&= \sum_\alpha \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \nabla^\alpha(g f_i s_i^\alpha) \right) \\
&= \sum_\alpha \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(g f_i) \otimes s_i^\alpha) \right) \\
&= \sum_\alpha \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} ((\mathrm{d}g) f_i + g \mathrm{d}f_i) \otimes s_i^\alpha) \right) \\
&= \sum_\alpha \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} ((\mathrm{d}g) f_i \otimes s_i^\alpha) + (g \mathrm{d}f_i \otimes s_i^\alpha) \right) \\
&= \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}g) f_i \otimes s_i^\alpha + \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{i=1}^{n} g \mathrm{d}f_i \otimes s_i^\alpha \\
&= \mathrm{d}g \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes s_i^\alpha + g \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i \otimes s_i^\alpha \\
&= \mathrm{d}g \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes f_i s_i^\alpha + g \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i \otimes s_i^\alpha \\
&= \mathrm{d}g \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{i=1}^{n} f_i s_i^\alpha + g \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i \otimes s_i^\alpha \\
&= \mathrm{d}g \sum_\alpha \rho_\alpha(s|_{U_\alpha}) + g \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i \otimes s_i^\alpha \\
&= (\mathrm{d}g)s + g\nabla(s)
\end{aligned}$$

□

Ainda utilizando a notação do Lema 2.1, temos que no aberto U_α, ∇ pode ser escrita em função so referencial s^α por

$$\nabla(s_i^\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^\alpha \otimes s_j{}^\alpha \tag{2.8}$$

onde θ_{ij} são 1-formas C^∞ sobre U_α. Tais 1-formas são obtidas da seguinte maneira:

Como $\nabla(s_i^\alpha) \in \mathcal{A}^1(U_\alpha, E) = C^\infty(U_\alpha, TM^{\mathbb{C}*} \otimes E)$, podemos escrevê-la como

$$\nabla(s_i^\alpha) = u \otimes v$$

onde $u \in C^\infty(U_\alpha, TM^{\mathbb{C}*})$ e $v \in C^\infty(U_\alpha, E)$ e como observado anteriormente, $v = \sum_{j=1}^n f_j s_j^\alpha$ com $f_j \in \mathcal{A}^0(U_\alpha)$. Deste modo,

$$\begin{aligned}\nabla(s_i^\alpha) =& u \otimes \sum_{j=1}^{n} f_j s_j^\alpha \\ =& \sum_{j=1}^{n} u \otimes f_j s_j^\alpha \\ =& \sum_{j=1}^{n} f_j u \otimes s_j^\alpha\end{aligned}$$

e denotando $\theta_{ij} = f_j u$ obtêm-se a expressão 2.8. Com esta notação em mente, temos a seguinte definição:

Definição 2.2.2. A matriz da conexão ∇ em U_α é a matriz $\theta^\alpha = \left[\theta_{ij}^\alpha\right]$.

Seja ∇ uma conexão e considere abertos U_α e U_β tais que a matriz de ∇ em U_α é dada por θ^α e em U_β é dada por θ^β. Mostraremos a seguir que, quando $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, as matrizes θ^α e θ^β se relacionam através da relação

$$\theta^\alpha = (\mathrm{d}g_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é uma matriz inversível $n \times n$.

Com efeito, sejam s^α e s^β referenciais sobre U_α e U_β, respectivamente. Então, em $U_{\alpha\beta}$ eles estão relacionados por uma matriz inversível $g_{\alpha\beta} = \left[g_{ij}\right]$ tal que $s_i^\alpha = \sum_{j=1}^n = g_{ij} s_j^\beta$. Assim, denotando $g_{\alpha\beta}^{-1} = [\overline{g_{ij}}]$, temos que $s_k^\beta = \sum_{l=1}^n \overline{g_{jl}} s_l^\alpha$. Consequentemente:

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} \theta_{il^{\alpha}} \otimes s_l^{\alpha} = \nabla(s_i^{\alpha}) =& \nabla\left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij} s_j^{\beta}\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n} \nabla\left(g_{ij} s_j^{\beta}\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n} \left(\mathrm{d}g_{ij} \otimes s_j^{\beta} + g_{ij} \nabla(s_j^{\beta})\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}g_{ij} \otimes s_j^{\beta} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \nabla(s_j^{\beta}) \\
=& \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}g_{ij} \otimes s_j^{\beta} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \sum_{k=1}^{n} \theta_{jk}^{\beta} \otimes s_k{}^{\beta} \\
=& \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}g_{ij} \otimes \left(\sum_{l=1}^{n} \overline{g_{jl}} s_l^{\alpha}\right) + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \left[\sum_{k=1}^{n} \theta_{jk}^{\beta} \otimes \sum_{l=1}^{n} \overline{g_{jl}} s_l^{\alpha}\right] \\
=& \sum_{j=1}^{n} \left(\mathrm{d}g_{ij} \otimes \sum_{l=1}^{n} \overline{g_{jl}} s_l^{\alpha}\right) + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \left[\sum_{k=1}^{n} \theta_{jk}^{\beta} \otimes \sum_{l=1}^{n} \overline{g_{jl}} s_l^{\alpha}\right] \\
=& \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \mathrm{d}g_{ij} \otimes \overline{g_{jl}} s_l^{\alpha} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \theta_{jk}^{\beta} \otimes \overline{g_{jl}} s_l^{\alpha}\right] \\
=& \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}g_{ij} \overline{g_{jl}} \otimes s_l^{\alpha} + \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ij} \theta_{jk}^{\beta} \overline{g_{jl}}\right) \otimes s_l^{\alpha} \\
=& \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}g_{ij} \overline{g_{jl}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ij} \theta_{jk}^{\beta} \overline{g_{jl}}\right) \otimes s_l^{\alpha}
\end{aligned}
$$

ou seja

$$\theta_{il}^{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}g_{ij} \overline{g_{jl}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ij} \theta_{jk}^{\beta} \overline{g_{jl}}.$$

Esta ultima igualdade pode ser vista como produto de matrizes da seguinte maneira:

$$\theta^{\alpha} = (\mathrm{d}g_{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} \theta^{\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} \tag{2.9}$$

O próximo passo é generalizar a ideia de conexão para $\mathcal{A}^1(M, E)$. Isto é feito da seguinte maneira. Dada uma conexão ∇ em E, defina

$$\overline{\nabla} : \mathcal{A}^1(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^2(M, E)$$

satisfazendo

$$\overline{\nabla}(\omega \otimes s) = \mathrm{d}\omega \otimes s + \omega \wedge \nabla(s)$$

onde $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ e $s \in \mathcal{A}^0(M, E)$

Proposição 2.2.2. *A aplicação $\overline{\nabla}$ satisfaz*

$$\overline{\nabla}(f(\omega \otimes s)) = df \wedge \omega - f\overline{\nabla}(\omega \otimes s)$$

onde $f \in \mathcal{A}^0(M)$.

Demonstração. Por definição, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}(f(\omega \otimes s)) = \overline{\nabla}(f\omega \otimes s) =& \mathrm{d}f\,\omega \otimes s - f\omega \wedge \nabla(s) \\
=& (\mathrm{d}f \wedge \omega + f(\mathrm{d}\omega)) \otimes s - f\omega \wedge \nabla(s) \\
=& (\mathrm{d}f \wedge \omega) \otimes s + f(\mathrm{d}\omega) \otimes s - f\omega \wedge \nabla(s) \\
=& (\mathrm{d}f \wedge \omega) \otimes s + f(\mathrm{d}\omega) \otimes s - f\omega \wedge \nabla(s) \\
=& \mathrm{d}f \wedge (\omega \otimes s) + f(\mathrm{d}\omega \otimes s) - f(\omega \wedge \nabla(s)) \\
=& \mathrm{d}f \wedge (\omega \otimes s) + f(\mathrm{d}\omega \otimes s - (\omega \wedge \nabla(s)) \\
=& \mathrm{d}f \wedge (\omega \otimes s) + f\overline{\nabla}(\omega \otimes s)
\end{aligned}$$

□

Definição 2.2.3. A *curvatura* da conexão ∇, é dada por

$$K_\nabla = \overline{\nabla} \circ \nabla$$

Proposição 2.2.3. *A curvatura K_∇ é uma aplicação $\mathcal{A}^0(M)$-linear.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{A}^0(M)$ e considere o fato de que $\nabla(s) = \omega \otimes v \in \mathcal{A}^1(M, E)$, assim

$$\begin{aligned}
K_\nabla(fs) = \overline{\nabla}\left(\nabla(fs)\right) = \overline{\nabla}\left(\mathrm{d}f \otimes s + f\nabla s\right) \\
=& \overline{\nabla}(\mathrm{d}f \otimes s) + \overline{\nabla}(f\nabla s) \\
=& \mathrm{d}^2 f \otimes s - \mathrm{d}f \wedge \nabla(s) + \overline{\nabla}(f(\omega \otimes v)) \\
=& -\mathrm{d}f \wedge \nabla(s) + \mathrm{d}f \wedge (\omega \otimes v) + f\overline{\nabla}(\omega \otimes v) \\
=& -\mathrm{d}f \wedge s + \mathrm{d}f \wedge \nabla(s) + f\overline{\nabla}(\omega \otimes v) \\
=& f\overline{\nabla}(\omega \otimes v) \\
=& fK_\nabla(s)
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.2.4. *O valor de $K_\nabla(s)$ em um ponto $x \in M$ depende apenas do valor da seção em x e não da seção considerada.*

Demonstração. Considere $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ um referencial local de E em U_α com $x \in U_\alpha$ e s, s' duas seções de E sobre U_α tais que $s(x) = s'(x)$. Então, $s - s' \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$, ou seja

$$s - s' = \sum_{i=1}^{n} f_i s_i^\alpha$$

e quando avaliada em x, segue que

$$s(x) - s'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) s_i^\alpha(x) = 0$$

logo $f_i(x) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ pois $\{s_i^\alpha\}_{i=1}^n$ é uma base para E_x. Deste modo, calculando a curvatura de $s - s'$, obtém-se, pela linearidade da curvatura, que

$$K_\nabla(s - s') = K_\nabla(s) - K_\nabla(s')$$

porém, por outro lado,

$$K_\nabla(s - s') = K_\nabla\left(\sum_{i=1}^{n} f_i s_i^\alpha\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i K_\nabla\left(s_i^\alpha\right)$$

e quando avaliada em x, conclui-se

$$K_\nabla(s)(x) - K_\nabla(s')(x) = K_\nabla(s - s')(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) K_\nabla\left(s_i^\alpha(x)\right) = 0$$

portanto

$$K_\nabla(s)(x) = K_\nabla(s')(x)$$

□

Assim como foi feito com a conexão, pode-se expressar a curvatura de uma conexão, localmente, através de uma matriz. Com efeito considere s^α um referencial local para E sobre U_α, deste modo

$$\begin{aligned}
K_\nabla(s_i^\alpha) = \overline{\nabla}\left(\nabla(s_i^\alpha)\right) &= \overline{\nabla}\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{\nabla}\left(\theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathrm{d}\theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha\right) - \sum_{j=1}^{n} \left(\theta_{ij}^\alpha \wedge \nabla(s_j^\alpha)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathrm{d}\theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha\right) - \sum_{j=1}^{n} \left(\theta_{ij}^\alpha \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \theta_{jk}^\alpha \otimes s_k^\alpha\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathrm{d}\theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha\right) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \theta_{ij}^\alpha \wedge \left(\theta_{jk}^\alpha \otimes s_k^\alpha\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{d}\theta_{ik}^{\alpha} \otimes s_k^{\alpha}) - \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^{\alpha} \wedge \theta_{jk}^{\alpha} \right) \otimes s_k^{\alpha} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\mathrm{d}\theta_{ik}^{\alpha} - \left(\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^{\alpha} \wedge \theta_{jk}^{\alpha} \right) \right] \otimes s_k^{\alpha}
\end{aligned}
$$

igualdade esta que também pode ser vista como uma relação matricial em função de θ^{α}. Considerando

$$
\Theta_{ik}^{\alpha} = \mathrm{d}\theta_{ik}^{\alpha} - \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^{\alpha} \wedge \theta_{jk}^{\alpha}
$$

pode-se fazer a seguinte definição:

Definição 2.2.4. A matriz de K_{∇} em U_{α} é definida pela matriz de 2-formas C^{∞} em U_{α}:

$$
\Theta^{\alpha} = \left[\Theta_{ij}^{\alpha} \right]
$$

com

$$
\Theta_{ij}^{\alpha} = \mathrm{d}\theta_{ij}^{\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \theta_{ik}^{\alpha} \wedge \theta_{kj}^{\alpha}
$$

ou seja,

$$
\Theta^{\alpha} = \mathrm{d}\theta^{\alpha} - \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\alpha}
$$

Assim como a conexão, as matrizes da curvatura Θ^{α} e Θ^{β} se relacionam quando $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

Sejam s^{α} e s^{β} referenciais locais sobre U_{α} e U_{β} respectivamente relacionados pela matriz inversível $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$ cuja inversa é $g_{\alpha\beta}^{-1} = [\overline{g_{ij}}]$. Então

$$
\begin{aligned}
K_{\nabla}(s_i) = K_{\nabla} \left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij} s_j^{\beta} \right) &= \sum_{j=1}^{n} g_{ij} K_{\nabla} \left(s_j^{\beta} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} \theta_{jk}^{\beta} \otimes s_k^{\beta} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ij} \theta_{jk}^{\beta} \otimes s_k^{\beta} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ij} \theta_{jk}^{\beta} \otimes \sum_{l=1}^{n} \overline{g_{kl}} s_l^{\alpha} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} g_{ij} \theta_{jk}^{\beta} \overline{g_{kl}} \otimes s_l^{\alpha}
\end{aligned}
$$

ou seja, vendo como a multiplicação de três matrizes

$$\Theta_{ij}^{\alpha} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} g_{ij}\theta_{jk}^{\beta}\overline{g_{kl}}$$

o que leva à

$$\Theta^{\alpha} = g_{\alpha\beta}\Theta^{\beta}g_{\alpha\beta}^{-1}$$

Polinômios invariantes

Considere $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ a $\mathbb{C}$-álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$, .

Definição 2.2.5. Um *polinômio invariante* sobre $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ é uma função

$$P : \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que é polinomial nas entradas de uma matriz e satisfaz

$$P(g^{-1}Ag) = P(A)$$

para todo $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ e $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Proposição 2.2.5. *São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. $P(g^{-1}Ag) = P(A)$ *para todo* $A \in M(n,\mathbb{C})$ *e* $g \in GL(n,\mathbb{C})$*;*
2. $P(AB) = P(BA)$ *para todo* $A, B \in M(n,\mathbb{C})$.

Demonstração. 1) $\implies$ 2): Dividiremos a demonstração em dois casos: Quando uma das matrizes é inversível, e quando ambas não são.

- Suponha $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ e $B \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \setminus \mathrm{GL}(n.\mathbb{C})$. Neste caso, tem-se

  $$AB = AB(AA^{-1}) = A(BA)A^{-1}.$$

  Assim, por hipótese, segue que

  $$P(AB) = P(A(BA)A^{-1}) = P(BA)$$

- Agora, suponha $A, B \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \setminus \mathrm{GL}(n.\mathbb{C})$. A igualdade que procuramos demonstrar é equivalente à seguinte: para todo $\varepsilon > 0$

  $$|P(AB) - P(BA)| < \varepsilon.$$

  Primeiramente, como $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ é denso em $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$, temos que para todo $r > 0$, existe $A_r \in \mathrm{B}(A,r)$ tal que $\det A_r \neq 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, como P é uma aplicação contínua, existe $\delta > 0$ tal que para todo $Z \in \mathrm{B}(A, \delta)$, valem

$$|P(AB) - P(ZB)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |P(BA) - P(BZ)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deste modo, para $r = \delta$, existe $Z_0 \in \mathrm{B}(A, \delta)$ tal que $\det(Z_0) \neq 0$. Pelo item anterior

$$P(Z_0 B) = P(BZ_0),$$

e, consequentemente.

$$\begin{aligned}
|P(AB) - P(BA)| &= |P(AB) - P(Z_0B) + P(Z_0B) - P(BA)| \\
&\leqslant |P(AB) - P(Z_0B)| + |P(Z_0B) - P(BA)| \\
&= |P(AB) - P(Z_0B)| + |P(BZ_0) - P(BA)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

$2 \implies 1)$ Sejam $A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ e $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Neste caso,

$$P((gA)g^{-1}) = P(g^{-1}(gA)) = P(A)$$

□

Como exemplos de polinômios invariantes, temos:

Exemplo 6. A aplicação determinante

$$\begin{aligned}
\det : \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\
A &\longmapsto \det(A)
\end{aligned}$$

é claramente um polinômio invariante. Uma vez que é uma expressão polinomial nas entradas da matriz A e por satisfazer

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA).$$

Exemplo 7. Sejam $A, I \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ onde I é a matriz identidade e considere o seguinte determinante: $\det(tI + A)$. Mostremos que os coeficientes de t^i são polinômios invariantes. Estes polinômios são tais que

$$\det(tI + A) = \sum_{i=0}^{n} C_{n-i}(A)t^i$$

Os polinômios C_{n-i} são invariantes, uma vez que dada $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\det(tI + A) &= \det(g(tI + A)g^{-1}) \\
&= \det(g(tI)g^{-1} + gAg^{-1}) \\
&= \det(t(gIg^{-1}) + gAg^{-1}) \\
&= \det(tI + gAg^{-1})
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=0}^{n} C_{n-i}(A)t^i = \sum_{i=0}^{n} C_{n-i}(gAg^{-1})t^i$$

e pela igualidade de polinômios, segue que $C_{n-i}(A) = C_{n-i}(gAg^{-1})$, o que mostra que C_{n-i} são invariantes.

A título de ilustração, façamos os casos onde $n = 2, n = 3$ e $n = 4$.

- Quando $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned}\det(tI + A) = \begin{vmatrix} t + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & t+_{22} \end{vmatrix} &= (t + a_{11})(t + a_{22}) - (a_{12}a_{21}) \\ &= t^2 + (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\end{aligned}$$

  e assim:

$$\begin{aligned} i = 0 &\implies C_2(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A) \\ i = 1 &\implies C_1(A) = a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}(A) \\ i = 2 &\implies C_0(A) = 1 \end{aligned}$$

- Quando $n = 3$, temos:

$$\begin{aligned}\det(tI + A) =& t^3 + \\ &+(a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 \\ &+[(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})]\,t \\ &+(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{12}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})\end{aligned}$$

  ou seja,

$$\begin{aligned} i = 0 &\implies C_3(A) = \det(A) \\ i = 2 &\implies C_1(A) = \mathrm{tr}(A) \\ i = 3 &\implies C_0(A) = 1 \end{aligned}$$

  Para $i = 1$, note que na expressão do determinante obtida acima, os termos que aparecem entre parênteses no coeficiente do termo t são exatamente os determinante das seguintes matrizes menores de A,

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

  onde A_1 é obtida removendo a i-ésima linha e i-ésima coluna de A. Deste modo, temos que

$$i = 1 \implies C_2(A) = \det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3)$$

- Para $n = 4$, utilizando a relação obtida no caso em $n = 3$, obtêm-se

$$\begin{aligned}\det(tI + A) =& t^4 + \\ &+(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})t^3 \\ &+[(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41}) + \\ &+ (a_{22}a_{23} - a_{23}a_{32}) + (a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42}) + (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})]\, t^2 + \\ &+[\det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) + \det(A_4)]\, t \\ &+\det(A)\end{aligned}$$

e analisando com atenção os termos que aparecem no coeficiente de t^2, nota-se que eles são exatamente o determinante das seguintes matrizes:

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{1,3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{1,4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{2,4} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad A_{3,4} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

onde $A_{i,j}$ é obtida considerando apenas as i-ésima e j-ésimas linhas e colunas de A. Com esta notação, temos:

$$\begin{aligned} i = 0 &\implies C_4(A) = \det(A) \\ i = 1 &\implies C_3(A) = \sum_{j=1}^{4} \det(A_j) \\ i = 2 &\implies C_2(A) = \sum_{i \neq j} \det(A_{i,j}) \\ i = 3 &\implies C_1(A) = \operatorname{tr}(A) \\ i = 4 &\implies C_0(A) = 1 \end{aligned}$$

De modo geral, para n arbitrário, é possível demonstrar que

$$C_i(A) = \sum_{J} \det(A_I)$$

onde $I = (j_1 \ldots, j_i) \in \{1, \ldots, n\}^n$ com $j_k \neq j_l$ para $k \neq l$ e $\det(A_I)$ é o determinante da matriz menor de A considerando apenas as j_k linhas e colunas.

Considere $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial complexo C^∞ de posto n, ∇ uma conexão em E e K_∇ a curvatura de ∇.

Em um aberto trivializador U_α, K_∇ é dada por uma matriz $n \times n$ de 2-formas Θ^α. Lembrando que as matrizes locais de K_∇ satisfazem $\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta}\Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}$ em $U_{\alpha\beta}$ com $g_{\alpha\beta} \in GL(n, \mathbb{C}^n)$, segue que:

$$P(\Theta^\alpha) = P(g_{\alpha\beta}\Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}) = P(\Theta^\beta)$$

para qualquer polinômio invariante P. Com isso, pode-se fazer a seguinte definição: dado um polinômio invariante P de grau k, então, considere a seguinte 2k-forma

$$P(K_\nabla)|_{U_\alpha} = P(\Theta^\alpha).$$

Exemplo 8. Para ilustrar o fato de que $P(\Theta^\alpha)$ é de fato uma 2k-forma, façamos alguns exemplos considerando $P(A) = \det(A)$. Neste caso, $P(A)$ é um polinômio de grau n, onde n é a dimensão da matriz quadrada A. Denotando $\Theta_\alpha = \left[\alpha_{ij} \wedge \beta_{ij}\right]$ onde α_{ij}, β_{ij} são 1-formas em U_α, temos que:

- Quando $n = 2$:

$$\begin{aligned}\det(\Theta_\alpha) =&(\alpha_{11} \wedge \beta_{11}) \wedge (\alpha_{22} \wedge \beta_{22}) - (\alpha_{12} \wedge \beta_{12}) \wedge (\alpha_{21} \wedge \beta_{21})\\ =&(\alpha_{11} \wedge \beta_{11} \wedge \alpha_{22} \wedge \beta_{22}) - (\alpha_{12} \wedge \beta_{12} \wedge \alpha_{21} \wedge \beta_{21})\end{aligned}$$

  que é uma 4-forma em U_α.

- Quando $n = 3$:

$$\begin{aligned}\det(\Theta^\alpha) =&(\alpha_{11} \wedge \beta_{11} \wedge \alpha_{22} \wedge \beta_{22} \wedge \alpha_{33} \wedge \beta_{33})+\\ &+(\alpha_{12} \wedge \beta_{12} \wedge \alpha_{23} \wedge \beta_{23} \wedge \alpha_{31} \wedge \beta_{31})+\\ &+(\alpha_{13} \wedge \beta_{13} \wedge \alpha_{21} \wedge \beta_{21} \wedge \alpha_{32} \wedge \beta_{32})-\\ &-(\alpha_{13} \wedge \beta_{13} \wedge \alpha_{22} \wedge \beta_{22} \wedge \alpha_{31} \wedge \beta_{31})-\\ &-(\alpha_{12} \wedge \beta_{12} \wedge \alpha_{21} \wedge \beta_{21} \wedge \alpha_{33} \wedge \beta_{33})-\\ &-(\alpha_{11} \wedge \beta_{11} \wedge \alpha_{23} \wedge \beta_{23} \wedge \alpha_{32} \wedge \beta_{32})-\end{aligned}$$

  que é uma 6-forma em U_α.

Voltando para o caso de um polinômio invariante P arbitrário, pela relação obtida acima, tem-se que $P(K_\nabla)$ é uma 2k-forma global, por independer da matriz local de K_∇ e estar definida em todo aberto trivializador U_α.

Lema 2.2. *Se P é um polinômio invariante então, $dP(K_\nabla) = 0$.*

Demonstração. Dado P, escreva $P(A) = P([a_{ij}])$ e considere a matriz das derivadas de P, $\Delta = \left[\dfrac{\partial P}{\partial a_{ij}}\right]$. Pode-se escrever a derivada de P como:

$$\mathrm{d}P\left([a_{ij}]\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial P}{\partial a_{ij}} \mathrm{d}a_{ij}$$

Valem as seguintes relações:

- $\mathrm{d}P(A) = \mathrm{tr}(\Delta^T \mathrm{d}A)$.

  Uma vez que os elementos da diagonal de $\Delta^T \mathrm{d}A$ são dados por

$$(\Delta^T \mathrm{d}A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \Delta^T_{ik} \mathrm{d}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ki} \mathrm{d}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial a_{ki}} \mathrm{d}a_{ki}$$

  e, consequentemente,

$$\mathrm{tr}(\Delta^T \mathrm{d}A) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta^T \mathrm{d}A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial a_{ki}} \mathrm{d}a_{ki} = \mathrm{d}P(A) \tag{2.10}$$

- $A\Delta^T = \Delta^T A$.

  De fato, como P é invariante, lembremos que vale $P(XY) = P(YX)$ para $X, Y \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e considere a matriz $E_{ji} = [e_{rs}]$ onde $e_{rs} = \delta_{jr}\delta_{is}$, onde δ_{jr} é o *Delta de Kronecker*, ou seja

$$e_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{quando } r = j \text{ e } i = s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

  Os produtos AE_{ji} e $E_{ji}A$, que podem ser escritos como:

$$(E_{ji}A)_{rs} = \begin{cases} a_{is}, & \text{se } r = j; \\ 0, & \text{se } r \neq j \end{cases} \tag{2.11}$$

$$(AE_{ji})_{rs} = \begin{cases} a_{rj}, & \text{se } s = i; \\ 0, & \text{se } s \neq i \end{cases} \tag{2.12}$$

  além disso, pelo fato de P ser invariante, vale

$$P((I + tE_{ji})A) = P(A(I + tE_{ji}))$$

  onde I é a matriz identidade $n \times n$. Derivando esta igualdade em relação à t, obtém-se

$$\sum_{r,s} \frac{\partial P}{\partial a_{rs}} (E_{ji}A)_{rs} = \sum_{r,s} \frac{\partial P}{\partial a_{rs}} (AE_{ji})_{rs}$$

  porém, utilizando as expressões 2.11, 2.12 a igualdade acima se resume à

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial a_{js}} a_{is} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial a_{ri}} a_{rj}$$

  e agora basta notar que

$$(A\Delta^T)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \frac{\partial P}{\partial a_{js}} \text{ e } (\Delta^T A)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial a_{ri}} a_{rj}$$

  donde segue que

$$A\Delta^T = \Delta^T A \tag{2.13}$$

  .

Tome um aberto trivializador U_α de E e sejam θ^α e $\Theta^\alpha = [\Theta^\alpha_{ij}]$ as matrizes de ∇ e K_∇ em relação à um referencial sobre U_α, respectivamente. Denotando agora $\Delta = \left[\dfrac{\partial P}{\partial \Theta^\alpha_{ij}}\right]$. Note que Δ é uma matriz cujas entradas são formas de grau par uma vez que Θ^α_{ij} são 2-formas, assim as entradas de Δ são produtos exteriores de 2-formas.

Por 2.10, tem-se que

$$\mathrm{d}P(\Theta^\alpha) = \mathrm{tr}(\Delta^T \wedge \mathrm{d}\Theta^\alpha)$$

Olharemos agora com mais atenção para $\Delta^T \wedge \mathrm{d}\Theta^\alpha$. Primeiramente utilizando a relação 2.2.4, obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Theta^\alpha_{ij} &= \mathrm{d}\left(\mathrm{d}\theta^\alpha_{ij} - \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj}\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\mathrm{d}\theta^\alpha_{ij}\right) - \mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj}\right) \\
&= -\mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^n \mathrm{d}\left(\theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^n \mathrm{d}\theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj} - (-1)^1 \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \mathrm{d}\theta^\alpha_{kj} \\
&= -\sum_{k=1}^n \mathrm{d}\theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj} + \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \mathrm{d}\theta^\alpha_{kj} \\
&= -\sum_{k=1}^n \left(\mathrm{d}\theta^\alpha_{ik} - \sum_{l=1}^n \theta^\alpha_{il} \wedge \theta^\alpha_{lk} + \sum_{l=1}^n \theta^\alpha_{il} \wedge \theta^\alpha_{lk}\right) \wedge \theta^\alpha_{kj} + \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \mathrm{d}\theta^\alpha_{kj} \\
&= -\sum_{k=1}^n \left(\mathrm{d}\theta^\alpha_{ik} - \sum_{l=1}^n \theta^\alpha_{il} \wedge \theta^\alpha_{lk}\right) \wedge \theta^\alpha_{kj} - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \theta^\alpha_{il} \wedge \theta^\alpha_{lk}\right) \wedge \theta^\alpha_{kj} + \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \mathrm{d}\theta^\alpha_{kj} \\
&= -\sum_{k=1}^n \left(\mathrm{d}\theta^\alpha_{ik} - \sum_{l=1}^n \theta^\alpha_{il} \wedge \theta^\alpha_{lk}\right) \wedge \theta^\alpha_{kj} - \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{kj} \wedge \left(\sum_{l=1}^n \theta^\alpha_{il} \wedge \theta^\alpha_{lk}\right) + \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \mathrm{d}\theta^\alpha_{kj} \\
&= -\sum_{k=1}^n \left(\mathrm{d}\theta^\alpha_{ik} - \sum_{l=1}^n \theta^\alpha_{il} \wedge \theta^\alpha_{lk}\right) \wedge \theta^\alpha_{kj} - \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \left(\sum_{l=1}^n \theta^\alpha_{kl} \wedge \theta^\alpha_{lj}\right) + \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \mathrm{d}\theta^\alpha_{kj} \\
&= -\sum_{k=1}^n \left(\mathrm{d}\theta^\alpha_{ik} - \sum_{l=1}^n \theta^\alpha_{il} \wedge \theta^\alpha_{lk}\right) \wedge \theta^\alpha_{kj} + \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \left(\mathrm{d}\theta^\alpha_{kj} - \sum_{l=1}^n \theta^\alpha_{kl} \wedge \theta^\alpha_{lj}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^n \Theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj} + \sum_{k=1}^n \theta^\alpha_{ik} \wedge \Theta^\alpha_{kj}
\end{aligned}$$

e esta igualdade obtida é chamada *identidade de Bianchi*

$$\mathrm{d}\Theta^\alpha = \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha$$

que substituindo em 2.2, fornece

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P(\Theta^\alpha) = \mathrm{tr}(\Delta^T \wedge \mathrm{d}\Theta^\alpha) &= \mathrm{tr}\left(\Delta^T \wedge (\theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\Delta^T \wedge \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Delta^T \wedge \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha\right) \end{aligned}$$

utilizando 2.13, segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P(\Theta^\alpha) = \mathrm{tr}&\left((\Delta^T \wedge \theta^\alpha) \wedge \Theta^\alpha - (\Delta^T \wedge \Theta^\alpha) \wedge \theta^\alpha\right) \\ \mathrm{tr}&\left((\Delta^T \wedge \theta^\alpha) \wedge \Theta^\alpha - (\Theta^\alpha \wedge \Delta^T) \wedge \theta^\alpha\right) \end{aligned}$$

e agora, explicitando a expressão do traço, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P(\Theta^\alpha) &= \sum_{i,k=1}^{n} \left((\Delta^T \wedge \theta^\alpha)_{ij} \wedge \Theta^\alpha_{ki} - \Theta^\alpha_{ki} \wedge (\Delta^T \theta^{\alpha_{ik}})\right) \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} \left(\Theta^\alpha_{ki} \wedge (\Delta^T \wedge \theta^\alpha)_{ij} - \Theta^\alpha_{ki} \wedge (\Delta^T \theta^{\alpha_{ik}})\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de Θ^α_{ki} ser uma 2-forma e comutar com qualquer outra forma. □

Classes características

Primeiramente, falaremos brevemente sobre uma operação na cohomologia de De Rham, *integração ao longo das fibras* no contexto que nos interessa.

Considere o fibrado trivial $\pi : M \times \mathbb{R}^q \to M$. Localmente, uma forma diferencial C^∞ ω sobre $M \times \mathbb{R}^q$ se escreve como uma combinação linear de formas dos seguintes tipos:

$$\begin{cases} \text{Tipo } (I): & \omega = f(x^\alpha, t)\mathrm{d}t_I \wedge \mathrm{d}x^\alpha_J \text{ com } |I| < q \\ \text{Tipo } (II): & \omega = f(x^\alpha, t)\mathrm{d}t_{I_q} \wedge \mathrm{d}x^\alpha_J = f(x^\alpha, t)\mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \wedge \ldots \mathrm{d}t_q \mathrm{d}x^\alpha_J \end{cases}$$

onde $t = (t_1, \ldots, t_q) \in \mathbb{R}^q$, $\mathrm{d}t_I = \mathrm{d}t_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}t_{i_r}$ com $i_1 < \ldots < i_r$, $1 \leqslant i_j \leqslant q$, $\mathrm{d}t_1 \wedge \ldots \mathrm{d}t_q$ a $q-$forma que determina a orientação de $\mathbb{R}^q$ e x^α coordenadas locais em M.

Definimos um operador linear $p_*^{\Delta^q} : \mathcal{A}^*(M \times \mathbb{R}^q) \to \mathcal{A}^{*-q}(M \times \mathbb{R}^q)$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} p_*^{\Delta^q}\omega = 0 & \text{quando } \omega \text{ é do Tipo (I)} \\ p_*^{\Delta^q}\omega = \left(\int_{\Delta_q} f(x^\alpha, t)\mathrm{d}t_{I_q}\right) \mathrm{d}x^\alpha_J & \text{quando } \omega \text{ é do Tipo (II)} \end{cases}$$

onde Δ^q é o $q-$simplexo padrão, ou seja, o conjunto:

$$\Delta^q = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geqslant 0\}$$

Note que a linearidade deste operador segue diretamente da linearidade da integração de formas.

Considerando a aplicação inclusão $i : \partial(M \times \Delta^q) \to M \times \Delta^q$, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.6. *Vale a seguinte identidade:*

$$p_*^{\Delta^q} \circ d + (-1)^{q+1} d \circ p_*^{\Delta^q} = p_*^{\partial\Delta^q} \circ i^*$$

Demonstração. Pelo que vimos acima, basta mostrar que o resultado é válido para formas do tipo I e tipo II, uma vez que qualquer outra forma em $M \times \mathbb{R}^q$ é combinação linear destas.

- Para formas do Tipo I, vamos dividir em dois casos: Quando $|I| < q-1$ e quando $|I| = q-i$.

  Seja $\omega = f(x^\alpha, t) = \mathrm{d}t_I \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha$ com $|I| < q-1$. Neste caso, $p_*^{\Delta^q}(\omega) = 0$ e, além disso, $\mathrm{d}w$ também é uma forma do tipo I com $|I| \leqslant q-1$ e assim $p_*^{\Delta^q}(\mathrm{d}w) = 0$. Por outro lado, $i^*\omega$ ainda é uma forma do Tipo 1 e portanto, $p_*^{\partial\Delta^q} \circ i^*(\omega) = 0$ e o resultado segue neste caso.

  Agora, considere $\omega = f(x^\alpha, t) = \mathrm{d}t_I \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha$ com $|I| = q-1$, digamos $\mathrm{d}t_I = \mathrm{d}t_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}t_i} \wedge \mathrm{d}t_q$ onde $\widehat{\mathrm{d}t_i}$ significa a ausência de $\mathrm{d}t_i$ no produto exterior. Deste modo, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega =& \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} \mathrm{d}x_k^\alpha \wedge \mathrm{d}t_I \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha + \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial f}{\partial t_l} \mathrm{d}t_l \wedge \mathrm{d}t_I \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha \\
=& \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} \mathrm{d}x_k^\alpha \wedge \mathrm{d}t_I \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha + \frac{\partial f}{\partial t_i} \mathrm{d}t_i \wedge \mathrm{d}t_I \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha \\
=& (-1)^{q-1} \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} \mathrm{d}t_I \wedge \mathrm{d}x_k^\alpha \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha + (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial t_i} \mathrm{d}t_{I_q} \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha
\end{aligned}$$

  onde a segunda igualdade segue do fato que $\mathrm{d}t_l \wedge \mathrm{d}t_I \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha = 0$ para $l \neq i$ pela repetição de $\mathrm{d}t_l$ no produto exterior. Como cada $\dfrac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} \mathrm{d}t_I \wedge \mathrm{d}x_k^\alpha \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha$ é uma forma do tipo I, segue que,

$$\begin{aligned}
p_*^{\Delta^q}(\mathrm{d}\omega) =& p_*^{\Delta^q} \left((-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial t_i} \mathrm{d}t_{I_q} \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha \right) \\
=& (-1)^{i-1} \left(\int_{\Delta^q} \frac{\partial f}{\partial t_i} \mathrm{d}t_1 \wedge \ldots \mathrm{d}t_q \right) \mathrm{d}x_J^\alpha
\end{aligned}$$

com a expressão acima e utilizando a versão combinatória do teorema de Stokes, temos:

$$(-1)^{i-1}\int_{\Delta^q}\frac{\partial f}{\partial t_i}\mathrm{d}t_1\wedge\ldots\mathrm{d}t_q=\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\int_{\Delta^q(j)}f(x^\alpha,t)\mathrm{d}t_1\wedge\ldots\widehat{\mathrm{d}t_j}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}t_q$$

onde $\Delta^q(j)$ é a j-ésima face de Δ^q. Deste modo, segue que

$$p_*^{\Delta^q}(\mathrm{d}\omega)=\left(\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\int_{\Delta^q(j)}f(x^\alpha,t)\mathrm{d}t_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}t_j}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}t_q\right)\mathrm{d}x_J^\alpha \tag{2.14}$$

Porém, como $p_*^{\partial\Delta^q}$ é definida da mesma maneira que $p_*^{\Delta^q}$ alterando apenas a região da integração de todo Δ^q para apenas as faces de Δ^q, segue que

$$p_*^{\partial\Delta^q}(i^*\omega)=\left(\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\int_{\Delta^q(j)}f(x^\alpha,t)\mathrm{d}t_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}t_j}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}t_q\right)\mathrm{d}x_J^\alpha \tag{2.15}$$

Deste modo, juntando as equações 2.14 e 2.15 com o fato de que $p_*^{\Delta^q}(\omega)=0$, obtêm-se o resultado neste caso.

- Para as formas do Tipo II, considerando $\omega=f(x^\alpha,t)\mathrm{d}_{t_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}t_q\wedge\mathrm{d}x_J^\alpha$, tem-se que $i^*\omega=0$ e assim, voltamos nossa atenção para o lado esquerdo da igualdade. Assim, segue que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega=&\sum_k\frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha}\mathrm{d}x_k^\alpha\wedge\mathrm{d}t_{l_q}\wedge\mathrm{d}x_J^\alpha+\sum_{l=1}^{q}\frac{\partial f}{\partial t_l}\mathrm{d}t_l\wedge\mathrm{d}t_{l_q}\wedge\mathrm{d}x_J^\alpha\\=&\sum_k\frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha}\mathrm{d}x_k^\alpha\wedge\mathrm{d}t_l\wedge\mathrm{d}x_J^\alpha\\=&(-1)^q\sum_k\frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha}\mathrm{d}t_l\wedge\mathrm{d}x_k^\alpha\wedge\mathrm{d}x_J^\alpha\end{aligned}$$

o que implica em:

$$\begin{aligned}p_*^{\Delta^q}(\mathrm{d}\omega)=&p_*^{\Delta^q}\left((-1)^q\sum_k\frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha}\mathrm{d}t_l\wedge\mathrm{d}x_k^\alpha\wedge\mathrm{d}x_J^\alpha\right)\\=&\left(\int_{\Delta^q}(-1)^q\sum_k\frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha}\mathrm{d}t_1\wedge\ldots\mathrm{d}t_q\right)\mathrm{d}x_k^\alpha\wedge\mathrm{d}x_J^\alpha\\=&(-1)^q\sum_k\left(\int_{\Delta^q}\frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha}\mathrm{d}t_1\wedge\ldots\mathrm{d}t_q\right)\mathrm{d}x_k^\alpha\wedge\mathrm{d}x_J^\alpha\end{aligned}$$

Agora, utilizando a propriedade de derivação sob a integral, concluí-se que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(p_*^{\Delta^q}\omega) =& \mathrm{d}\left(\int_{\Delta^q} f(x^\alpha, t)\mathrm{d}t_1 \wedge \ldots \mathrm{d}t_q\right) \mathrm{d}x_J^\alpha \\ =& \sum_k \left(\int_{\Delta^q} \frac{\partial f}{\partial {x_k}^\alpha}\mathrm{d}t_1 \wedge \ldots \mathrm{d}t_q\right) \mathrm{d}x_k^\alpha \wedge \mathrm{d}x_J^\alpha \end{aligned}$$

e assim, $p_*^{\Delta^q}(\mathrm{d}\omega) + (-1)^{q+1}\mathrm{d}(p_*^{\Delta^q}\omega) = 0$ o resultado segue.

□

Considere $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial complexo de posto n sobre a variedade complexa M. Este induz um fibrado vetorial vetorial sobre $M \times \mathbb{R}^q$ dado por

$$\pi \times \mathrm{id} : E \times \mathbb{R}^q \to M \times \mathbb{R}^q.$$

Para cada $(x, v) \in X \times \mathbb{R}^q$, a fibra $(E \times \mathbb{R}^q)_{(x,v)}$ é dada por

$$(E \times \mathbb{R}^q)_{(x,v)} = (\pi \times \mathrm{id})^{-1}(x, v) = \pi^{-1}(x) \times \mathrm{id}^{-1}(v) = E_x \times \{v\} \approx E_x$$

Portanto, cada fibra deste fibrado tem a mesma dimensão de uma fibra de E.

Tomando uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ comum à E e $\mathrm{TM}^{\mathbb{C}}$, um referencial local $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$, pode-se escrever seções de $(E \times \mathbb{R}^q)|_{U_\alpha} \approx U_\alpha \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^n$ na forma

$$s(x^\alpha, t) = \sum_{i=1}^n f_i(x^\alpha, t)s_i^\alpha$$

onde $t = (t_1, \ldots, t_n)$.

Tome $q + 1$ conexões $\nabla^0, \nabla^1, \ldots, \nabla^q$ sobre E e considere a soma convexa

$$\nabla^{0,1,\ldots,q} = (1 - t_1 - t_2 - \ldots - t_q)\nabla^0 + t_1\nabla^1 \ldots + t_q\nabla^q.$$

Deste modo, $\nabla^{0,1,\ldots,q}$ define uma conexão sobre $E \times \mathbb{R}^q$ cuja matriz sobre U_α, denotada por $\theta^{0,1,\ldots,q,\alpha}$, está relacionada com as matrizes das conexões ∇^i da seguinte maneira:

$$\theta^{0,1,\ldots,q,\alpha} = (1 - t_1 - \ldots - t_q)\theta^{0,\alpha} + t_1\theta^{1,\alpha} + \ldots + t_q\theta^{q,\alpha}$$

onde $\theta^{i,\alpha}$ denota a matriz da conexão ∇^i em U_α. Com isto, a curvatura de $\nabla^{0,1,\ldots,q,}$, denotada por $K_{\theta^{0,1,\ldots,q}}$, é dada em U_α por

$$\Theta^{0,1,\ldots,q,\alpha} = \mathrm{d}\theta^{0,1,\ldots,q,\alpha} - \theta^{0,1,\ldots,q,\alpha} \wedge \theta^{0,1,\ldots,q,\alpha}$$

Com isto em mente, dadas $q+1$ conexões em E, pode-se definir a seguinte aplicação

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \ldots, \nabla^q) : I(n, \mathbb{C}) \to \mathcal{A}^*(M)$$

por:

- Quando q=0,
$$\mathcal{P}\left(\nabla^0\right)(P) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} P(K_{\nabla^0})$$
onde $\deg P$ denota o grau de P;

- Quando $q \neq 0$,
$$\mathcal{P}\left(\nabla^0, \ldots, \nabla^q\right)(P) = (-1)^{\frac{q}{2}} p_*^{\Delta^q}\left(\mathcal{P}(\nabla^{0,1,\ldots,q})\right)$$
onde $p_*^{\Delta^q} : \mathcal{A}^*(M \times \mathbb{R}^q) \to \mathcal{A}^{*-q}(M)$ é a integração ao longo das fibras.

Observação 2.2.2. Note que na definição acima, o caso em que $q \neq 0$ é, de certo modo, reduzido ao caso $q = 0$ uma vez que $\nabla^{0,1,\ldots,q}$ é apenas uma conexão e assim,
$$\mathcal{P}(\nabla^{0,1,\ldots,q}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} P(K_{\nabla^{0,1\ldots,q}})$$

Exemplo 9. Analisemos com mais atenção a aplicação definida acima no caso em que q=1. Neste caso
$$\mathcal{P}\left(\nabla^0, \nabla^1\right)(P) = (-1)^{\frac{1}{2}} p_*^{\Delta^1}\left(\mathcal{P}(\nabla^{0,1})(P)\right) = (-1)^{\frac{1}{2}} p_*^{\Delta^1}\left(\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} P\left(K_{\nabla^{0,1}}\right)\right).$$
Utilizando o Lema 2.2, temos que $\mathrm{d}P(K_{\nabla^{0,1}}) = 0$. Além disso,
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathcal{P}\left(\nabla^0, \nabla^1\right)(P)) =& \mathrm{d}\left(p_*^{\Delta^1}\left(\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} P\left(K_{\nabla^{0,1}}\right)\right)\right) \\
=& \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} \mathrm{d}\left(p_*^{\Delta^1}\left(P\left(K_{\nabla^{0,1}}\right)\right)\right) \\
=& \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} \mathrm{d} \circ p_*^{\Delta^1}(P(K_{\nabla^{0,1}}))
\end{aligned}$$
e com isso, aplicando na expressão obtida na Proposição 2.2.6, segue que:
$$\begin{aligned}
p_*^{\Delta^1} \circ \mathrm{d}\left(P(K_{\nabla^{0,1}})\right) + (-1)^2 \mathrm{d} \circ p_*^{\Delta^1}\left(P(K_{\nabla^{0,1}})\right) =& p_*^{\partial\Delta^1} \circ i^*\left(P(K_{\nabla^{0,1}})\right) \\
0 + (-1)^2 \mathrm{d} \circ p_*^{\Delta^1}\left(P(K_{\nabla^{0,1}})\right) =& p_*^{\partial\Delta^1} \circ i^*\left(P(K_{\nabla^{0,1}})\right) \\
(-1)^2 \mathrm{d}(\mathcal{P}\left(\nabla^0, \nabla^1\right)(P)) =& \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} p_*^{\partial\Delta^1}(i^* P(K_{\nabla^{0,1}})) \\
\mathrm{d}(\mathcal{P}\left(\nabla^0, \nabla^1\right)(P)) =& \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} p_*^{\partial\Delta^1}(i^* P(K_{\nabla^{0,1}}))
\end{aligned}$$
Agora, pela versão combinatória do teorema de Stokes, vale que
$$p_*^{\partial\Delta^1} \circ i^* = \sum_{j=0}^{1} (-1)^j p_*^{\Delta^1(j)} = i_0^* - i_1^*$$

onde $i_j : M \to M \times [0,1]$ é a inclusão $i_j(x) = (x, j)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathcal{P}\left(\nabla^0, \nabla^1\right)(P)) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} p_*^{\partial\Delta^1}(i^* P(K_{\nabla^{0,1}})) \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} (i_0^* P(K_{\nabla^{0,1}}) - i_1^* P(K_{\nabla^{0,1}})) \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\deg P} (P(K_{\nabla^0}) - P(K_{\nabla^1})) \\
&= \mathcal{P}(\nabla^0)(P) - \mathcal{P}(\nabla^1)(P)
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos duas coisas. Primeiramente, que as formas $P(K_{\nabla^0})$ e $P(K_{\nabla^1})$ diferem, a menos de uma constante da forma exata $\mathrm{d}(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P)$. Além disso, mostramos também que a classe $[P(K_\nabla)] \in H^*_{DR}(M, \mathbb{C})$ independe da conexão ∇ em E.

Proposição 2.2.7. *A classe $[P(K_\nabla)] = [P(E)]$ depende apenas da classe de isomorfismo de E e é chamada classe característica de E*

A construção feita acima pode ser pensada da seguinte maneira:

- Se $I(n, \mathbb{C})$ é a álgebra graduada de polinômios invariantes e $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial complexo de posto n, foi obtido o seguinte homomorfismo de álgebras

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} : I(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow H^{2*}_{DR}(M, \mathbb{C}) \\
P &\longmapsto \mathcal{W}(P) = [P(K)]
\end{aligned}$$

chamado *Homomorfismo de Weil*, onde K é a curvatura de qualquer conexão em E.

Passemos agora á definição mais importante do trabalho.

Definição 2.2.6. Sejam C_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ os polinômios simétricos elementares dos autos valores de uma matriz $n \times n$. As *formas de Chern* de uma curvatura K_∇ associada à uma conexão ∇ sobre E são:

$$c_j(K_\nabla) = C_j\left(\frac{i}{2\pi} K_\nabla\right)$$

e as *classes de Chern* de E são $c_0(E) = 1$,

$$c_j(E) = \left[C_j\left(\frac{i}{2\pi} K\right)\right] \in H^{2j}_{DR}(M, \mathbb{C}) \tag{2.16}$$

Além disso, chamamos $c_n(E)$ de *Classe Top de Chern de E* e $c(E) = 1 + c_1(E) + \ldots + c_n(E)$ de *Classe de Chern total de E*

Observação 2.2.3. A definição das classes de Chern, feita acima, é feita com um pequeno abuso, uma vez que as classes de Chern $c_j(E)$ são definidas em $H^{2j}_{DR}(M,\mathbb{Z})$ e não em $H^{2j}_{DR}(M,\mathbb{C})$. Porém, através da *Teoria de Chern-Weil*, pode-se concluir que estes objetos são essencialmente os mesmos.

Como visto anteriormente, dada uma variedade diferenciável M, esta possui o seu fibrado tangente, TM e, consequentemente, o fibrado holomorfo tangente $T'M$. Com isto em mente, tem-se a seguinte definição

Definição 2.2.7. Seja M uma variedade complexa de dimensão n. Definimos a *j-ésima classe de Chern de M*, denotada por $c_j(M)$, como sendo

$$c_j(M) := c_j(T'M) \tag{2.17}$$

Propriedades das classes de Chern

Serão listadas abaixo algumas propriedades que as classes de Chern satisfazem e que são uteis para realização de cálculos.

Naturalidade

Considere o digrama

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

onde X e Y são variedades diferenciáveis, $f : Y \to X$ é uma aplicação contínua, $\pi : E \to X$ é um fibrado vetorial de dimensão n e $f^{-1}E : E \to Y$ o fibrado *pull-back* de E por f, como feito na seção 2.1.

Seja ∇ uma conexão em E cuja matriz no aberto trivializador U_α é denotada por $[\theta^\alpha]$. Esta conexão, através do *pull-back* define uma conexão em $f^{-1}E$, a qual, no aberto trivializador de $f^{-1}E$, $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$, é dada pela matriz $[f^*\theta^\alpha]$. Mostremos que de fato $[f^*\theta^\alpha]$ define uma conexão.

- Utilizando a caracterização obtida em 2.9, e aplicando f^*, obtém-se para $x \in V_\alpha$:

$$\begin{aligned} f^*\theta^\alpha(x) = \theta^\alpha(f(x)) =& \mathrm{d}\left(g_{\alpha\beta}f(x)\right)\left(g_{\alpha\beta}(f(x))\right)^{-1} + g_{\alpha\beta}(f(x))\theta^\beta(f(x))\left(g_{\alpha\beta}(f(x))\right)^{-1} \\ =& \mathrm{d}\left(f^*g_{\alpha\beta}(x)\right)\left(f^*g_{\alpha\beta}(x)\right)^{-1} + f^*g_{\alpha\beta}(x)f^*\theta^\beta(x)\left(f^*g_{\alpha\beta}(x)\right)^{-1} \end{aligned}$$

onde a última relação mostra que $[f^*\theta^\alpha]$ é uma conexão. Com isso, utilizando a relação matricial obtida em 2.2.4, a curvatura $K_{f^*\nabla}$, cuja matriz será denotada por $\Theta^\alpha_{f^*}$ pode ser escrita, utilizando as propriedades do pull-back como:

$$\begin{aligned}\Theta^\alpha_{f^*} =& \mathrm{d}f^*\theta^\alpha - f^*\theta^\alpha \wedge f^*\theta^\alpha \\ =& f^*(\mathrm{d}\theta^\alpha) - f^*(\theta^\alpha \wedge \theta^\alpha) \\ =& f^*(\mathrm{d}\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha) \\ =& f^*K_\nabla\end{aligned}$$

onde K_∇ é a curvatura de ∇, ou seja, $K_{f^*\nabla} = f^*K_\nabla$. Com essa igualdade, tem-se que as formas de Chern de E e de $f^{-1}E$ se relacionam por:

$$c_j(K_{f^*\nabla}) = C_j\left(\frac{i}{2\pi}K_{f^*\nabla}\right) = C_j\left(\frac{i}{2\pi}f^*K_\nabla\right) = f^*C_j\left(\frac{i}{2\pi}K_\nabla\right) = f^*c_j(K_\nabla)$$

e, consequentemente, as classes de Chern se relacionam por

$$c_j(f^{-1}E) = f^*c_j(E)$$

Fórmula de Whitney do produto

Sejam $\pi : E \to M$ e $\overline{\pi} : F \to M$ dois fibrados com conexões ∇_E e ∇_F, respectivamente. Sejam $[\theta^\alpha_E]$ e $[\theta^\alpha_F]$ as matrizes de ∇_E e ∇_F, respectivamente, no aberto trivializador U_α. Estas duas conexões, induzem, sobre o fibrado soma direta $E \oplus F$ uma conexão $\nabla_{E\oplus F}$ dada por $\nabla_{E\oplus F} = \nabla_E \oplus \nabla_F$ cuja matriz em U_α é dada por

$$\theta^\alpha_{E\oplus F} = \theta^\alpha_E \oplus \theta^\alpha_F$$

que, utilizando a construção feita na seção 2.1, significa que

$$[\theta^\alpha_{E\oplus F}] = \begin{bmatrix} [\theta^\alpha_E] & 0 \\ 0 & [\theta^\alpha_F] \end{bmatrix}$$

cuja curvatura, $K_{\nabla_{E\oplus F}}$, é dada localmente por

$$\begin{aligned}\Theta^\alpha_{E\oplus F} =& \mathrm{d}(\theta^\alpha_E \oplus \theta^\alpha_F) - (\theta^\alpha_E \oplus \theta^\alpha_F) \wedge (\theta^\alpha_E \oplus \theta^\alpha_F) \\ =& \mathrm{d}\theta^\alpha_E \oplus \mathrm{d}\theta^\alpha_F - [(\theta^\alpha_E \oplus 0) + (0 \oplus \theta^\alpha_F)] \wedge [(\theta^\alpha_E \oplus 0) + (0 \oplus \theta^\alpha_F)] \\ =& \mathrm{d}\theta^\alpha_E \oplus \mathrm{d}\theta^\alpha_F - (\theta^\alpha_E \oplus 0) \wedge (\theta^\alpha_E \oplus 0) - (\theta^\alpha_E \oplus 0) \wedge (0 \oplus \theta^\alpha_F) - (0 \oplus \theta^\alpha_F) \wedge (0 \oplus \theta^\alpha_F) \\ =& \mathrm{d}\theta^\alpha_E \oplus \mathrm{d}\theta^\alpha_F - (\theta^\alpha_E \wedge \theta^\alpha_E) \oplus 0 - 0 \otimes 0 - 0 \oplus (\theta^\alpha_F \wedge \oplus\theta^\alpha_F) \\ =& (\mathrm{d}\theta^\alpha_E - \theta^\alpha_E \wedge \theta^\alpha_E) \oplus (\mathrm{d}\theta^\alpha_F - \theta^\alpha_F \wedge \oplus\theta^\alpha_F) \\ =& \Theta^\alpha_E \oplus \Theta^\alpha_F\end{aligned}$$

onde Θ^α_E e Θ^α_F denotam a matriz das curvaturas K_{∇_E} e K_{∇_F}, respectivamente. Na forma matricial, temos

$$[\Theta^\alpha_{E\oplus F}] = \begin{bmatrix} [\Theta^\alpha_E] & 0 \\ 0 & [\Theta^\alpha_F] \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Com a forma matricial em mente, calculando as formas de Chern, obtém-se:

$$\begin{aligned}\det\left(tI+\Theta^{\alpha}_{E\oplus F}\right) &= \det\left(tI+\Theta^{\alpha}_{E}\right)\det\left(tI+\Theta^{\alpha}_{F}\right)\\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} C_{n-i}(\Theta^{\alpha}_{E})t^{i}\right)\left(\sum_{i=0}^{m} C_{n-i}(\Theta^{\alpha}_{F})t^{i}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n+m}\overline{C_{n-i}}(\Theta^{\alpha}_{E\oplus F})t^{i}\end{aligned}$$

onde

$$\overline{C_{n-k}}(\Theta^{\alpha}_{E\oplus F}) = \sum_{j=0}^{k} C_{n-j}(\Theta^{\alpha}_{E})C_{j}(\Theta^{\alpha}_{F})$$

Em particular, comparando os coeficientes dos polinômios obtidos, segue que as formas de Chern satisfazem

$$\begin{aligned}C_1(\Theta^{\alpha}_{E\oplus F}) =& C_1(\Theta^{\alpha}_{E}) + C_1(\Theta^{\alpha}_{F})\\ C_2(\Theta^{\alpha}_{E\oplus F}) =& C_2(\Theta^{\alpha}_{E}) + C_1(\Theta^{\alpha}_{E})C_1(\Theta^{\alpha}_{F}) + C_2(\Theta^{\alpha}_{F})\\ &\vdots\\ C_K(\Theta^{\alpha}_{E\oplus F}) =& \sum_{j=0}^{K} C_J(\Theta^{\alpha}_{E})C_{K-J}(\Theta^{\alpha}_{E}).\end{aligned}$$

Com isso, utilizando as propriedades do quociente, conclui-se que as classes de Chern de $E\oplus F$ satisfazem as mesmas relações do produto de formas, ou seja:

$$\begin{aligned}c_1(E\oplus F) =& c_1(E) + c_1(F)\\ c_2(E\oplus F) =& c_2(E) + c_1(E)c_1(F) + c_2(F)\\ &\vdots\\ =& c_k(E\oplus F) = \sum_{j=0}^{k} c_j(E)c_{k-j}(F)\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}c(E\oplus F) =& 1 + \sum_{k=1}^{n+m} c_k(E\oplus F)\\ =& 1 + \sum_{k=1}^{n+m}\sum_{j=0}^{k} c_j(E)c_{k-j}(F)\\ =& c_0(E)c_0(F) + \sum_{k=1}^{n+m}\sum_{j=0}^{k} c_j(E)c_{k-j}(F)\\ =& \sum_{k=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{k} c_j(E)c_{k-j}(F)\\ =& c(E)C(F)\end{aligned}$$

Classes de Chern do dual

Sejam $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial e $\pi^* : E^* \to M$ o fibrado dual. Sendo os cociclos de transição de E denotados por $g_{\alpha\beta}$, então $\left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1}$ são os cociclos de E^*.

Dada uma conexão ∇ em E, vamos obter uma conexão para E^*. Com efeito, tomando a transposta na expressão 2.9, tem-se

$$\begin{aligned}(\theta^\alpha)^T &= \left[(\mathrm{d}g_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}\right]^T \\ &= \left[(\mathrm{d}g_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}\right]^T + \left[g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}\right]^T \\ &= \left(g_{\alpha\beta}^{-1}\right)^T (\mathrm{d}g_{\alpha\beta})^T + \left(g_{\alpha\beta}^{-1}\right)^T \left(\theta^\beta\right)^T g_{\alpha\beta}^T \\ &= \left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1} (\mathrm{d}g_{\alpha\beta}^T) + \left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1} \left(\theta^\beta\right)^T g_{\alpha\beta}^T. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Além disso, utilizando a propriedade de aplicação inversa vale

$$\mathrm{d}\left((g_{\alpha\beta}^T)^{-1}\right) = -\left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1} \mathrm{d}g_{\alpha\beta}^T \left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1}$$

ou seja,

$$-\mathrm{d}\left((g_{\alpha\beta}^T)^{-1}\right)\left(g_{\alpha\beta}^T\right) = \left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1} \mathrm{d}g_{\alpha\beta}^T. \tag{2.20}$$

Assim, substituindo 2.20 em 2.19 e multiplicando por -1, segue que

$$\begin{aligned}(-\theta^\alpha)^T =& -\left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1} \mathrm{d}g_{\alpha\beta}^T - \left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1} \left(\theta^\beta\right)^T g_{\alpha\beta}^T \\ =& \mathrm{d}\left((g_{\alpha\beta}^T)^{-1}\right)\left(g_{\alpha\beta}^T\right) + \left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1} \left(-\theta^\beta\right)^T g_{\alpha\beta}^T \\ =& \mathrm{d}\left((g_{\alpha\beta}^T)^{-1}\right)\left(\left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1}\right)^{-1} + \left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1} \left(-\theta^\beta\right)^T \left(\left(g_{\alpha\beta}^T\right)^{-1}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Deste modo, obtemos uma conexão em E^*, denotada por ∇^*, cuja matriz no aberto trivializador U_α é $(-\theta^\alpha)^T$, A matriz da curvatura de ∇^* em U_α, denotada por $\Theta^{*\alpha}$, é dada por

$$\begin{aligned}\Theta^{*\alpha} =& \mathrm{d}\left((-\theta^\alpha)^T\right) - (-\theta^\alpha)^T \wedge (-\theta^\alpha)^T \\ =& -(\mathrm{d}\theta^\alpha)^T - (\theta^\alpha)^T \wedge (\theta^\alpha)^T \\ =& -(\mathrm{d}\theta^\alpha)^T - (\theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)^T \\ =& -(\mathrm{d}\theta^\alpha + \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)^T \\ =& -(\Theta^\alpha)^T \end{aligned}$$

Agora, como a transposição em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é obtida através de conjugação, dado um polinômio homogêneo P^i de grau i, tem-se

$$P^i\left(-\Theta^{\alpha T}\right) = (-1)^i P^i(\Theta^\alpha).$$

Deste modo, as classes de Chern de E e E^* se relacionam por

$$c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E).$$

Classe de Chern do Produto Tensorial

Sejam $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial de posto n e $\mathfrak{p} : L \to M$ um fibrado vetorial de posto 1. Considere o produto tensorial $E \otimes L$. Suas classes de Chern $c_i(E \otimes L)$ se relacionam com as classes de Chern de E e L, $c_i(E)$ e $c_i(L)$ da seguinte maneira (Ver em (HUYBRECHTS, 2005)):

$$c_i(E \otimes L) = \sum_{k=0}^{i} \binom{n-k}{i-k} c_k(E) c_1(L)^{i-k} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n$$

Classe de Chern do Fibrado Virtual

Existe na literatura, uma construção mais geral envolvendo fibrados vetoriais, os *fibrados virtuais*. Para sua construção, pode-se remeter à (MOL; SOARES, 2001). Nosso interesse se restringe à fibrados virtuais envolvendo $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial de posto n e $\mathfrak{p} : L \to M$ um fibrado vetorial de posto 1. Neste caso, E e L induzem o fibrado virtual, denotado por $E - L$. Sendo $c_i(E)$ as classes de Chern de E e $c_1(L)$ a classe de Chern de L, as classes de Chern de $E - L$ se escrevem como

$$c_i(E - L) = \sum_{k=0}^{i} \binom{n-k}{i-k} c_k(E) c_1(L^*)^{i-k} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n$$

Parte II

Resultados Principais

3 Introdução

3.1 Folheações holomorfas de dimensão 1

Definição 3.1.1. Seja X uma variedade complexa e conexa. Uma *folheação holomorfa de dimensão 1* é dada pelos seguinte conjunto de dados:

i) uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X;

ii) para cada U_α um campo de vetores holomorfo v_α;

iii) para cada interseção não vazia, $U_{\alpha\beta} U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, uma aplicação holomorfa

$$f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_{\alpha\beta})$$

tal que $v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta$ em $U_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$ em $U_{\alpha\beta\gamma}$.

Denotamos por $K_{\mathcal{F}}$ o fibrado de posto 1 definido pela família de funções $\{f_{\alpha\beta}\}$ o qual é chamado de *fibrado cotangente de* $\mathcal{F}$. O dual de $K_{\mathcal{F}}$ é chamado de *fibrado tangente da folheação* $\mathcal{F}$ e será denotado por $T\mathcal{F}$.

Chamamos v_α um *gerador de* $\mathcal{F}$ *sobre* U_α. Se denotarmos por $\mathrm{Sing}(v_\alpha)$ o conjunto de zeros de v_α sobre U_α, como $\mathrm{Sing}(v_\alpha)$ e $\mathrm{Sing}(v_\beta)$ coincidem em $U_\alpha \cap U_\beta$ (pelo item (iii) da definição), a união

$$\bigcup_\alpha \mathrm{Sing}(v_\alpha)$$

constitui um conjunto analítico em X, o qual é chamado *conjunto singular da folheação* $\mathcal{F}$.

Dado $p \in X$, seja $v_\alpha = (v_{1\alpha}, \ldots, v_{n\alpha}) \in TX|_{U_\alpha}$ um gerador de $\mathcal{F}$ sobre U_α, com $p \in U_\alpha$. Pela condição (iii) temos que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,p}}{\langle v_{1\alpha}, \ldots, v_{n\alpha} \rangle}$$

não depende da escolha do gerador v_α (de fato, dado $v_\beta = \left(v_{1\beta}, \ldots, v_{n\beta}\right)$, com $p \in U_\beta$, temos $\langle v_{1\alpha}, \ldots, v_{n\alpha} \rangle = \langle f_{\alpha\beta} v_{1\beta}, \ldots, f_{\alpha\beta} v_{n\beta} \rangle = \langle v_{1\beta}, \ldots, v_{n\beta} \rangle$). Com isso, definimos o número de Milnor de $\mathcal{F}$ em p, denotado por $\mu_p(\mathcal{F})$, como sendo

$$\mu_p(\mathcal{F}) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,p}}{\langle v_{1\alpha}, \ldots, v_{n\alpha} \rangle}$$

Definição 3.1.2. Dada uma hipersuperfície D em X, fixemos uma família de expressões locais de D, isto é, uma família de funções holomorfas

$$\{f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$$

tal que

$$D \cap U_\alpha = \{x \in U_\alpha : f_\alpha(x) = 0\}$$

onde $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma cobertura aberta de X. Denotemos por D_{reg} a parte regular de D. Uma folheação $\mathcal{F}$ é dita *logarítmica ao longo de* D quando as seguintes condições equivalentes são satisfeitas:

i) Para todo $x \in D_{\text{reg}}$, o vetor $v_\alpha(x)$ é tangente à D, $x \in U_\alpha$;

ii) Para todo $x \in D$, a derivação do germe $(f_\alpha)_x$ por v_α pertence ao ideal geral $\langle (f_\alpha)_x \rangle \mathcal{O}_{U_\alpha, x}$.

Para o caso de uma folheação $\mathcal{F}$ no espaço projetivo complexo, $\mathbb{P}^n$, é possível definir o grau de $\mathcal{F}$, uma vez que $T\mathcal{F}$ é isomorfo à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ para algum $r \in \mathbb{Z}$.

Definição 3.1.3. Uma folheação no espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^n$ é chamada *folheação projetiva*. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação projetiva com fibrado tangente $T\mathcal{F} \approx \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$. O número inteiro

$$d := r + 1$$

é chamado de *grau de* $\mathcal{F}$.

Recordamos que em $\mathbb{P}^n$, o grau de uma hipersuperfície D é dada pelo inteiro k tal que

$$[D] \approx \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k).$$

3.2 O teorema Baum-Bott

O Teorema de Baum-Bott é um resultado clássico da geometria algébrica, devido à Paul Baum e Raoul Bott (BAUM; BOTT, 1972), o qual generaliza, no caso de campos vetoriais complexos, o Teorema de Poincaré-Hopf.

Teorema 3.1. *Seja X uma variedade complexa compacta de dimensão n e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão 1 em X com singularidades isoladas. Então*

$$\int_X c_n\left(TX - T\mathcal{F}\right) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F})} \mu_p\left(\mathcal{F}\right) \tag{3.1}$$

onde $\mu_p\left(\mathcal{F}\right)$ é o número de Milnor de $\mathcal{F}$ em p.

Uma versão deste teorema, onde a hipótese de que a variedade X é compacta é enfraquecida, onde é considerada uma variedade $\widetilde{X}$ tal que $\widetilde{X} = X - D$ onde X é uma variedade compacta e D uma hipersuperfície do tipo cruzamento normal, foi demonstrada por Corrêa e Machado (CORRÊA; MACHADO, 2019) e sua demonstração é apresentada no Capítulo 5.

3.3 Formas logarítmicas e campos vetoriais logarítmicos

Seja X uma variedade complexa de dimensão n e $D \subset X$ uma hipersuperfície reduzida definida, localmente em uma vizinhança de p pela equação $h_p = 0$, onde h_p é uma aplicação holomorfa.

Definição 3.3.1. Uma $q-$forma meromorfa ω em X é chamada *q-forma logarítmica ao longo de D em* $p \in X$ quando $h_p\omega$ e $h_p d\omega$ são holomorfas. Denotamos por $\Omega^q_{X,p}(\log D)$ o conjunto de germes de $q-$formas logarítmicas ao longo de D em p.

Dado o conjunto $\Omega^q_{X,p}(\log D)$, define-se o seguinte feixe coerente de $\mathcal{O}_X-$módulos:

$$\Omega^q_X(\log D) := \bigcup_{p \in X} \Omega^q_{X,p}(\log D)$$

o qual é chamado de *feixe de* $q-$*formas logarítmicas ao longo de D*.

Definição 3.3.2. Dizemos que um campo de vetores v é *logarítmico ao longo de D* quando uma das seguintes condições é satisfeita:

i) Para todo $p \in D_{\text{reg}}$, o vetor $v(p)$ é tangente à D;

ii) Para todo $p \in X$, se $h_p = 0$ é a equação de D, localmente em p, então, a derivação $v(h_p)$ é um elemento do ideal $\langle h_p \rangle \mathcal{O}_p$.

Denotamos por $TX_p(-\log D)$ o conjunto de germes de campos vetoriais logarítmicos ao longo de D em p.

De modo semelhante ao feito acima, define-se o seguinte feixe coerente de $\mathcal{O}_x-$módulos:

$$TX(-\log D) := \bigcup_{p \in X} TX_p(-\log D)$$

Em ambos os casos, $\Omega^q_X(\log D)$ e $TX(-\log D)$ são feixes localmente livres e, consequentemente, têm estrutura de fibrado vetorial.

3.4 Índice GSV

Uma generalização do índice de Poincaré-Hopf para campos de vetores definidos em hipersuperfícies (possivelmente singular) foi concebida por X. Gomez-Mont, J. Sead e A. Verjovsky (MONT; SEADE; VERJOVSKY, 1991), o *índice GSV*.

O índice GSV é definido da seguinte maneira: Seja D uma hipersuperfície com singularidades isoladas em uma variedade complexa n-dimensional X e considere v um

campo de vetores holomorfo em X com singularidades isoladas e logarítmico ao longo de D. Dado $x_0 \in \mathrm{Sing}(D)$ um ponto singular, seja h uma aplicação analítica definindo D em uma vizinhança U_0 de x_0. Na vizinhança U_0, suponha que o campo de vetores v é não singular exceto em x_0. Como x_0 é um ponto singular isolado, o campo gradiente $\mathrm{grad}(h)$ nunca se anula, exceto em x_0, e além disso, $\mathrm{grad}(h)$ é normal à D. Denote por v_* a restrição de v ao conjunto regular de D, $D_{\mathrm{reg}} = D - \mathrm{Sing}(D)$. Como v é logarítmico ao longo de D, tem-se que $\mathrm{grad}(h)(z)$ e $v_*(z)$ são linearmente independentes em todo ponto $z \in U_0 \cap (D - \{x_0\})$. Assumindo que $(z_1, \ldots, z_n)$ é um sistema de coordenadas complexas em U_0, considere

$$S_\varepsilon = \{z = (z_1, \ldots, z_n : ||z - x_0)|| = \varepsilon\}$$

uma esfera suficientemente pequena de modo que $K = D \cap S_\varepsilon$ é o link da singularidade de D em x_0 (MILNOR, 1968). Esta é uma variedade real orientada de dimensão $2n - 1$. Utilizando o processo de Gram-Schmidt, caso necessário, os campos vetoriais v_* e $\mathrm{grad}(h)$ definem uma aplicação contínua

$$\varphi_v := (v_*, \mathrm{grad}(h)) : K \longrightarrow W_{2,n+1}$$

onde $W_{2,n+1}$ é a variedade de Stiefel de 2-frames em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Definição 3.4.1. O *índice GSV* de v em $x_0 \in D$, denotado por $\mathrm{GSV}(v, D, x_0)$ é definido como o grau da aplicação φ_v.

Observação 3.4.1. Se $x_0 \in D_{\mathrm{reg}}$ é um ponto regular de D, como v é logarítmica ao longo de D, tem-se que o índice de Poincaré-Hopf de $v|_D$ em x_0 está definido e coincide com o índice GSV. Neste caso, se além disso, x_0 é uma singularidade não degenerada de v, então, $\mathcal{I}_{x_0}(v) = \mathcal{I}_{x_0}\left(v_{|D}\right)$ e assim

$$GSV(v, D, x_0) = \mathcal{I}_{x_0}(v)$$

3.5 Índice Logarítmico

Em (ALEKSANDROV, 2005), A. G. Alexandrov introduziu o conceito de índice logarítmico para um campo de vetores logarítmico. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão 1 em X com singularidades isoladas e logarítmica ao longo de D. Fixado um ponto $x \in X$, seja $v \in TX(-\log D)|_U$ o germe de um campo de vetores em (U, x) tangente à D. A multiplicação interior i_v induz o complexo de formas diferenciais logarítmicas:

$$0 \to \Omega^n_{X,x}(\log D) \xrightarrow{i_v} \Omega^{n-1}_{X,x}(\log D) \xrightarrow{i_v} \cdots \xrightarrow{i_v} \Omega^1_{X,x}(\log D) \xrightarrow{i_v} \mathcal{O}_{n,x}.$$

Como todas as singularidades de v são isoladas, os i_v-grupos de homologia do complexo $\Omega^\bullet_X(\log D)$ são espaços vetoriais de dimensão finita (ver (ALEKSANDROV, 2005)). Assim, a

característica de Euler

$$\chi(\Omega^{\bullet}_{X}(\log D), i_v) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H_i \left(\Omega^{\bullet}_{X,x}(\log D, i_v)\right)$$

do complexo de formas diferenciais logarítmicas está bem definido. Como este número independe do representante local v da folheação $\mathcal{F}$ no ponto x. Define-se o *índice logarítmico de $\mathcal{F}$ no ponto x* por

$$\mathrm{Ind}_{\log D,x}(\mathcal{F}) := \chi(\Omega^{\bullet}_{X}(\log D), i_v).$$

Segue da definição que

$$\mathrm{Ind}_{\log D,x}(\mathcal{F}) = 0$$

para todo $x \in X - \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$.

Proposição 3.5.1. *Sejam X uma variedade complexa de dimensão n, D uma hipersuperfície em X com singularidades isoladas e $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão 1 em X e logarítmica ao longo de D. Então, para cada $x \in Sing(\mathcal{F}) \cap D$, tem-se*

$$Ind_{\log D,x}(\mathcal{F}) = \mu_x(\mathcal{F}) - GSV(\mathcal{F}, D, x) \tag{3.2}$$

onde $\mu_x(\mathcal{F})$ e $GSV(\mathcal{F}, D, x)$ denotam, respectivamente, o número de Milnor e o índice GSV de $\mathcal{F}$ em x.

Demonstração. Ver em (ALEKSANDROV, 2005) □

4 Hipersuperfície suave

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar o Teorema 4.2, o qual constitui uma versão do Teorema Baum-Bott onde é enfraquecida e hipótese da variedade X ser compacta. Nesta versão, demonstrada por Corrêa e Machado (CORRÊA; MACHADO, 2019), considera-se $\widetilde{X}$ sendo uma variedade do tipo $\widetilde{X} = X - D$ onde X é uma variedade complexa compacta de dimensão n e D uma hipersuperfície suave em D. Este resultado será utilizado no próximo capítulo na demonstração de uma versão ainda mais geral do Teorema de Baum-Bott, na qual, considera-se D um divisor do tipo cruzamento normal em X, de modo que o caso em que D uma hipersuperfície suave, se torna um caso particular desta segunda versão.

4.1 Resultados preliminares

Lema 4.1. *Seja X uma variedade complexa compacta de dimensão n e D uma hipersuperfície suave em X. Então, vale a seguinte relação*

$$c_k(\mathcal{O}_D) = c_k(\mathcal{O}_X - \mathcal{O}(-D)) = c_1([D])^k \tag{4.1}$$

para $k \in \{1, \ldots, n\}$

Demonstração. Por (HUYBRECHTS, 2005), temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D$$

a qual fornece a seguinte relação entre classes de Chern totais

$$c(\mathcal{O}_X) = c(\mathcal{O}(-D))c(\mathcal{O}_D) \tag{4.2}$$

Agora, pelo corolário 2.3.10 de (HUYBRECHTS, 2005), tem-se que

$$\mathcal{O}(D) = [D] \quad \text{e} \quad \mathcal{O}(-D) = \mathcal{O}(D)^* = [D]^* \tag{4.3}$$

Assim, substituindo 4.3 e o fato de que $c(\mathcal{O}_X) = 1$ em 4.2 tem-se que

$$\begin{aligned} c(\mathcal{O}(-D))c(\mathcal{O}_D) &= 1 \\ c([D]^*)c(\mathcal{O}_D) &= 1 \\ (1 + c_1([D]^*))\,(1 + c_1(\mathcal{O}_D) + \ldots + c_n(\mathcal{O}_D)) &= 1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde na última igualdade, utilizamos o fato de que $[D]^*$ é um fibrado de posto 1 e $\mathcal{O}_D$ um fibrado de posto n. Assim, expandindo a expressão 4.4 e utilizando o produto de classes

de Chern, induzido pelo produto exterior de formas, temos:

$$\begin{aligned} 1 = 1 &+ \\ &+ c_1(\mathcal{O}_D) + c_1([D]^*) \\ &+ c_2(\mathcal{O}_D) + c_1(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) \\ &\vdots \\ &+ c_n(\mathcal{O}_D) + c_{n-1}(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{O}_D) &= -c_1([D]^*) \\ c_2(\mathcal{O}_D) &= -c_1(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) \\ &\vdots \\ c_n(\mathcal{O}_D) &= -c_{n-1}(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) \end{aligned}$$

o que nos fornece a seguinte fórmula de recorrência

$$c_k(\mathcal{O}_D) = -c_{k-1}(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) \tag{4.5}$$

para $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Utilizando o fato de que $c_1(\mathcal{O}_D) = -c_1([D]^*)$ e a relação da classe de Chern do Dual de um fibrado na expressão acima, obtêm-se a relação que procurávamos:

$$c_k(\mathcal{O}_D) = (-1)^k c_1([D]^*)^k = c_1([D])^k \tag{4.6}$$

□

Teorema 4.1. *Seja X uma variedade complexa compacta de dimensão n e D uma hipersuperfície suave em X. Então, para todo fibrado de posto 1 em X, L, tem-se que:*

$$\int_X c_n\left(TX(-\log D) - L\right) = \int_X c_n\left(TX - L\right) - \int_D c_{n-1}\left(TX - [D] - L\right) \tag{4.7}$$

Demonstração. Utilizando propriedades das classes de Chern, temos no integrando do lado esquerdo da expressão 4.7:

$$\begin{aligned} c_n\left(TX(-\log D) - L\right) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n-j}{n-j} c_j\left(TX(-\log D)\right) c_1(L^*)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} c_j\left(TX(-\log D)\right) c_1(L^*)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} c_{n-j}\left(TX(-\log D)\right) c_1(L^*)^{j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} c_{n-j}\left(\Omega^1_X(\log D)\right) c_1(L^*)^{j} \end{aligned}$$

deste modo, a integral do lado esquerdo se escreve como:

$$\begin{aligned}\int_X c_n\left(TX(-\log D)-L\right) &= \int_X \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}c_{n-j}\left(\Omega_X^1(\log D)\right)c_1(L^*)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}\left(\Omega_X^1(\log D)\right)c_1(L^*)^j. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como D é suave, o mapa resíduo de Poincaré de (SAITO, 1980) garante existência da seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1(\log D) \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

com isso, temos a seguinte relação das classes totais de Chern:

$$c\left(\Omega_X^1(\log D)\right) = c\left(\Omega_X^1\right)c\left(\mathcal{O}_D\right)$$

ou seja, as classes de Chern $c_i\left(\Omega_X^1(\log D)\right)$ podem ser escritas como

$$c_i\left(\Omega_X^1(\log D)\right) = \sum_{k=0}^{i} c_{i-k}\left(\Omega_X^1\right)c_k\left(\mathcal{O}_D\right). \tag{4.9}$$

Além disso, pelo Lema 4.1, as classes de Chern de $\mathcal{O}_D$ são:

$$c_k(\mathcal{O}_D) = c_k(\mathcal{O}_X - \mathcal{O}(-D)) = c_1([D])^k \qquad k \in \{1,\dots,n\} \tag{4.10}$$

Substituindo 4.9 e 4.10 em 4.8, temos:

$$\begin{aligned}\int_X c_n\left(TX(-\log D)-L\right) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}\left(\Omega_X^1(\log D)\right)c_1(L^*)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X \left[\sum_{k=0}^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_k\left(\mathcal{O}_D\right)\right]c_1(L^*)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X \left[\sum_{k=0}^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^k\right]c_1(L^*)^j. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Destacando o termo em que $j = n$ na expressão 4.11, podemos reescrevê-la da seguinte

maneira:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=0}^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^k\right]c_1(L^*)^j=\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=0}^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^k\right]c_1(L^*)^j+(-1)^{n-n}\int_X\left[\sum_{k=0}^{0}c_{n-n-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^k\right]c_1(L^*)^n=\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=0}^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^k\right]c_1(L^*)^j+(-1)^{n-n}\int_X c_{n-n}\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^n=\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[c_{n-j-0}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^0\right]c_1(L^*)^j+\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^k\right]c_1(L^*)^j+\\
&+(-1)^{n-n}\int_X c_{n-n}\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^n=\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^j+(-1)^{n-n}\int_X c_{n-n}\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^n+\\
&+\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^k\right]c_1(L^*)^j=\\
&=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^j+\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^k\right]c_1(L^*)^j
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Passamos agora a analisar separadamente cada parcela de 4.12. Para a primeira parcela, temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X c_{n-j}\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^j&=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j}\left(TX\right)c_1(L^*)^j\\
&=\sum_{j=0}^{n}\int_X c_{n-j}\left(TX\right)c_1(L^*)^j\\
&=\int_X\sum_{j=0}^{n}c_{n-j}\left(TX\right)c_1(L^*)^j\\
&=\int_X c_n\left(TX-L\right).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Já para primeira parcela, pela Dualidade de Poincaré, como $c_1([D])$ é o dual de Poincaré

do ciclo determinado por D, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^k\right]c_1(L^*)^j=\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^{k-1}\right]c_1(L^*)^j=\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^{k-1}\right]c_1(L^*)^j=\\
&=-\sum_{j=0}^{n-1}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^{n-j-k}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)(-1)^{k-1}c_1\left([D]\right)^{k-1}\right]c_1(L^*)^j=\\
&=-\sum_{j=0}^{n-1}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}\left(TX\right)c_1\left([D]^*\right)^{k-1}\right]c_1(L^*)^j
\end{aligned}\tag{4.14}$$

onde a última igualdade segue da propriedade da classe de Chern do dual e do fato que $(\Omega_X)^*=TX$. Além disso, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
c_{n-1-j}\left(TX-[D]\right)&=\sum_{k=0}^{n-1-j}c_k(TX)c_1([D]^*)^{n-1-j-k}\\
&=\sum_{k=1}^{n-j}c_{k-1}(TX)c_1([D]^*)^{n-j-k}\\
&=\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}(TX)c_1([D]^*)^{k-1}
\end{aligned}\tag{4.15}$$

e

$$\begin{aligned}
c_{n-1}\left((TX-[D])-L\right)&=\sum_{j=0}^{n-1}c_j(TX-[D])c_1(L^*)^{n-1-j}\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}c_{n-1-j}(TX-[D])c_1(L^*)^j
\end{aligned}\tag{4.16}$$

Substituindo 4.15 e 4.16 em 4.14 segue que:

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=0}^{n-1}\int_D\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}\left(TX\right)c_1\left([D]^*\right)^{k-1}\right]c_1(L^*)^j&=-\sum_{j=0}^{n-1}\int_D c_{n-1-j}\left(TX-[D]\right)c_1(L^*)^j\\
&=-\int_D\sum_{j=0}^{n-1}c_{n-1-j}\left(TX-[D]\right)c_1(L^*)^j\\
&=-\int_D c_{n-1}\left(TX-[D]-L\right)
\end{aligned}\tag{4.17}$$

Portanto, concluímos que

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}\int_X\left[\sum_{k=1}^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left([D]\right)^k\right]c_1(L^*)^j=\int_D c_{n-1}\left(TX-[D]-L\right)\tag{4.18}$$

de modo que substituindo 4.18 e 4.13 em 4.11 conclui-se que.

$$\int_X c_n\left(TX(-\log D) - L\right) = \int_X c_n\left(TX - L\right) - \int_D c_{n-1}\left(TX - [D] - L\right)$$

□

4.2 Teorema 1

Teorema 4.2. *Seja $\widetilde{X}$ uma variedade complexa de dimensão n tal que $\widetilde{X} = X - D$ onde X é uma variedade complexa compacta de dimensão n e D é uma hipersuperfície suave em X. Considere $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão 1 em X, com singularidades isoladas e logarítmica ao longo de D. Suponha $Ind_{\log D,p}(\mathcal{F}) = 0$ para todo $p \in Sing(\mathcal{F}) \cap D$. Então*

$$\int_X c_n(TX(-\log D) - T\mathcal{F}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap \widetilde{X}} \mu_p\left(\mathcal{F}\right) \tag{4.19}$$

Demonstração. Como D é suave, podemos utilizar o Teorema 4.1, ou seja

$$\int_X c_n\left(TX(-\log D) - T\mathcal{F}\right) = \int_X c_n(TX - T\mathcal{F}) - \int_D c_n(TX - [D] - T\mathcal{F}) \tag{4.20}$$

onde $T\mathcal{F}$ é um fibrado de posto 1, uma vez que $\mathcal{F}$ é uma folheação de dimensão 1.

Por (SUWA, 1998), como $\mathcal{F}$ é uma folheação de dimensão 1, logarítmica ao longo de D e possui apenas singularidades isoladas, então, vale a seguinte igualdade

$$\int_D c_n(TX - [D] - T\mathcal{F}) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap D} \mathrm{GSV}(\mathcal{F}, D, p) \tag{4.21}$$

Já pelo Teorema Baum-Bott 3.1, temos que

$$\int_X c_n(TX - T\mathcal{F}) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p\left(\mathcal{F}\right) \tag{4.22}$$

Agora, por hipótese, temos que $\mathrm{Ind}_{\log D,p}(\mathcal{F}) = 0$ para todo $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap D$. Portanto, da pela Proposição 3.5.1 temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{\log D,p}(\mathcal{F}) &= \mu_p\left(\mathcal{F}\right) - \mathrm{GSV}(\mathcal{F}, D, p) \\ 0 &= \mu_p\left(\mathcal{F}\right) - \mathrm{GSV}(\mathcal{F}, D, p) \\ \mathrm{GSV}(\mathcal{F}, D, p) &= \mu_p\left(\mathcal{F}\right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Substituindo 4.23 em 4.21, tem-se:

$$\int_D c_n(TX - [D] - T\mathcal{F}) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap D} \mu_p\left(\mathcal{F}\right) \tag{4.24}$$

Assim, substituindo 4.22 e 4.24 em 4.20, obtemos

$$\begin{aligned}\int_X c_n\left(TX(-\log D) - T\mathcal{F}\right) &= \int_X c_n(TX - T\mathcal{F}) - \int_D c_n(TX - [D] - T\mathcal{F}) \\ &= \sum_{p\in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})} \mu_p\left(\mathcal{F}\right) - \sum_{p\in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})\cap D} \mu_p\left(\mathcal{F}\right) \\ &= \sum_{p\in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})\cap(\widetilde{X})} \mu_p\left(\mathcal{F}\right)\end{aligned} \tag{4.25}$$

□

5 Folheação logarítmica ao longo hipersuperfície do tipo cruzamento normal

5.1 Resultados preliminares

Antes de começarmos, fixemos algumas notações. Seja X uma variedade complexa de dimensão n e D uma hipersuperfície em X.

Definição 5.1.1. Dizemos que D tem *cruzamento normal em* $p \in X$ quando existem coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ tais que D é definida pela equação

$$x_1 \ldots x_r = 0 \qquad 0 \leqslant r \leqslant n$$

onde r depende do ponto considerado. Neste caso, também dizemos que p é uma *singularidade do tipo cruzamento normal de D*.

Uma hipersuperfície D é chamada *hipersuperfície do tipo cruzamento normal* quando D possui cruzamento normal em todo $p \in X$.

Para que o segue, fixemos algumas notações:

- Considere $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$ uma hipersuperfície analítica em X com singularidades do tipo cruzamento normal, onde D_i são suas componentes irredutíveis;
- Fixada uma componente irredutível de D, digamos D_N, definimos

  $$\widehat{D_N} := \bigcup_{j \neq N} D_j \quad \text{e} \quad \widehat{D_N}|_{D_N} := \bigcup_{j \neq N} D_j \cap D_N$$

  Temos direto da definição que $\widehat{D_N}|_{D_N}$ é uma hipersuperfície analítica em D_N com singularidades do tipo cruzamento normal com $N-1$ componentes irredutíveis.
- Utilizaremos a seguinte notação multi-índice: Para cada $J = (j_1, \ldots, j_N)$ e $J' = (j'_1, \ldots, j'_{N-1})$, com $1 \leqslant j_i, j'_i \leqslant n$, denotaremos:

  $$\begin{aligned} c_1(D)^J &= c_1([D_1])^{j_1} \ldots c_1([D_N])^{j_N} \\ c_1(D)^{J'} &= c_1([D_1])^{j'_1} \ldots c_1([D_{N-1}])^{j'_{N-1}} \end{aligned}$$

Fixada notação, demonstraremos alguns resultados preliminares

Lema 5.1. *Nas condições consideradas acima, vale a seguinte relação entre os conjuntos:*

$$X - D = \left(X - \widehat{D_N}\right) - \left(D_N - \widehat{D_N} \cap D_N\right)$$

Demonstração. De fato, seja $x \in X - D$. Deste modo, $x \notin D_j$ para todo $j \neq N$, o que implica em $x \notin \widehat{D_N}$ e, consequentemente, $x \in (X - \widehat{D_N})$. Além disso, $x \notin D_N$ e em particular, como $\left(D_N - \widehat{D_N} \cap D_N\right) \subset D_N$, então, $x \notin D_N - \widehat{D_N} \cap D_N \subset D_N$. Portanto, $x \in \left(X - \widehat{D_N}\right) - \left(D_N - \widehat{D_N} \cap D_N\right)$, ou seja, $X - D \subset \left(X - \widehat{D_N}\right) - \left(D_N - \widehat{D_N} \cap D_N\right)$

Por outro lado, dado $x \in \left(X - \widehat{D_N}\right) - \left(D_N - \widehat{D_N} \cap D_N\right)$, primeiramente tem-se que $x \notin \widehat{D_N}$, ou seja, $x \notin D_j$ para todo $j \neq N$. Basta mostrar agora que $x \notin D_N$. De fato, $x \notin \left(D_N - \widehat{D_N} \cap D_N\right)$, ou seja, $x \notin D_N$. Deste modo, tem-se que $x \notin D_j$ para todo j, ou seja, $x \notin D$. Portanto, $x \in X - D$ e assim segue a igualdade desejada. □

Lema 5.2. *Nas condições consideradas acima, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos*

$$c_i(\Omega^1_X(\log D)) = \sum_{k=0}^{i} \sum_{|J|=k} c_{i-k}(\Omega^1_X) c_1(D)^J \tag{5.1}$$

Demonstração. Como D é uma hipersuperfície com singularidades do tipo cruzamento normal, a aplicação resíduo de Poincaré

$$\mathrm{Res} : \Omega^1_X(\log D) \longrightarrow \mathcal{O}_D \approx \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{D_i}$$

induz a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_X(\log D) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0$$

a qual induz a seguinte relação entre classes de Chern:

$$\begin{aligned}
c_i(\Omega^1_X(\log D)) &= \sum_{k=1}^{i} c_{i-k}\left(\Omega^1_X\right) c_k\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{D_j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{i} c_{i-k}\left(\Omega^1_X\right) \left(\sum_{j_1+\ldots+j_N=k} c_{j_1}(\mathcal{O}_{D_1}) \ldots c_{j_N}(\mathcal{O}_{D_N})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{i} c_{i-k}\left(\Omega^1_X\right) \left(\sum_{j_1+\ldots+j_N=k} c_1([D_1])^{j_1} \ldots c_1([D_N])^{j_N}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{i} c_{i-k}\left(\Omega^1_X\right) \sum_{|J|=k} c_1(D)^J \\
&= \sum_{k=1}^{i} \sum_{|J|=k} c_{i-k}\left(\Omega^1_X\right) c_1(D)^J
\end{aligned} \tag{5.2}$$

onde $c_{j_m}(\mathcal{O}_{D_m}) = c_1([D_l])^{j_m}$ pelo Lema 4.1 □

Lema 5.3. *Nas condições consideradas acima, tem-se a seguinte sequência exata:*

$$0 \longrightarrow TD_N \longrightarrow TX|_{D_N} \longrightarrow [D_N]|_{D_N} \longrightarrow 0.$$

Além disso, a seguinte relação entre as classes totais de Chern:

$$c(TX)|_{D_N} = c(TD_N)c([D_N])|_{D_N} \tag{5.3}$$

Demonstração. A inclusão

$$TD \longrightarrow TX|D$$

induz o seguinte fibrado quociente

$$N_{D/X} = \frac{TX|_D}{TD}$$

chamado *fibrado normal*. Consequentemente, obtêm-se a seguinte sequência exata:

$$0 \to TD \to TX|_D \to N_{D/X} \to 0.$$

Pela estrutura complexa de todos os fibrados envolvidos, a sequência exata acima induz a seguinte decomposição:

$$TX|_D = T_D \oplus N_{D/X}$$

mas, pela fórmula de adjunção (GRIFFITHS; HARRIS, 1994), tem-se $N_{D/X} \approx [D]$. Deste modo, 5.1 e 5.1 se reescrevem como

$$0 \to TD \to TX|_D \to [D] \to 0.$$

e

$$TX|_D = T_D \oplus [D]$$

o que leva à relação

$$c(TX)|_{D_N} = c(TD_N)c([D_N])|_{D_N} \tag{5.4}$$

□

Lema 5.4. *Nas condições acima, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos*

$$c_i(\Omega^1_X)|_{D_N} = c_i(\Omega^1_{D_N}) - c_{i-1}(\Omega^1_{D_N})c_i([D_N])|_{D_N} \tag{5.5}$$

Demonstração. Pelo Lema 5.3 e utilizando o fato de que TX e TD_N são fibrados vetoriais de ponto n-1 e que $[D_N]$ é um fibrado de posto 1, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
c(TX)|_{D_N} =& c(TD_N)c([D_N])|_{D_N} \\
1+\sum_{i=1}^{n-1} c_i(TX)|_{D_N} =& \left(1+\sum_{i=1}^{n-1} c_i(TD_N)\right)(1+c_1([D_N])|_{D_N}) \\
1+\sum_{i=1}^{n-1} c_i(TX)|_{D_N} =& 1+\sum_{i=1}^{n-1} c_i(TD_N)+\sum_{i=1}^{n-1} c_i(TD_N)c_1([D_N])|_{D_N}+c_1([D_N])|_{D_N} \\
\sum_{i=1}^{n-1} c_i(TX)|_{D_N} =& \sum_{i=1}^{n-1} c_i(TD_N)+\sum_{i=1}^{n-1} c_i(TD_N)c_1([D_N])|_{D_N}+c_1([D_N])|_{D_N}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Considerando a igualdade acima e utilizando o produto de classes de Chern, induzido pelo produto exterior de formas, propriedades das classes de Chern e a relação dual $TX^* = \Omega^1_X$, obtemos as seguintes relações:

- Para i=1

$$\begin{aligned}
c_1(TX)|_{D_N} =& c_1(TD_N)+c_1([D_N])|_{D_N} \\
-c_1(\Omega^1_X)|_{D_N} =& -c_1(\Omega^1_{D_N})+c_1([D_N])|_{D_N} \\
c_1(\Omega^1_X)|_{D_N} =& c_1(\Omega^1_{D_N})-c_1([D_N])|_{D_N}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

- Pra i=2

$$\begin{aligned}
c_2(TX)|_{D_N} =& c_2(TD_N)+c_1(TD_N)c_1([D_N])|_{D_N} \\
c_2(\Omega^1_X)|_{D_N} =& c_2(\Omega^1_{D_N})-c_1(\Omega^1_X)c_1([D_N])|_{D_N}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

- Para i=3

$$\begin{aligned}
c_3(TX)|_{D_N} =& c_3(TD_N)+c_2(TD_N)c_1([D_N])|_{D_N} \\
-c_3(\Omega^1_X)|_{D_N} =& -c_3(\Omega^1_{D_N})+c_2(\Omega^1_X)c_1([D_N])|_{D_N} \\
c_3(\Omega^1_X)|_{D_N} =& c_3(\Omega^1_{D_N})-c_2(\Omega^1_X)c_1([D_N])|_{D_N}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

- Em geral, tem-se para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$c_k(\Omega^1_X)|_{D_N} = c_k(\Omega^1_{D_N}) - c_{k-1}(\Omega^1_X)c_1([D_N])|_{D_N}$$

□

Lema 5.5. *Nas condições acima, se L é um fibrado de posto 1 em X, então, as seguintes relações valem:*

$$\int_X c_n\left(TX(-\log D)-L\right) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega^1_X\right) c_1(D)^J c_1(L^*)^j \tag{5.10}$$

Em particular, valem

$$\int_X c_n\left(TX(-\log \widehat{D_N}) - L\right) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1\left(\widehat{D_N}\right)^J c_1(L^*)^j \tag{5.11}$$

$$\int_{D_N} c_n\left(TD_N(-\log \widehat{D_N}|_{D_N}) - L\right) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1-j}\sum_{|J'|=k}\int_{D_N} (-1)^{n-j} c_{n-1-j-k}\left(\Omega_{D_N}^1\right) c_1\left(\widehat{D_N}\right)^{J'} c_1(L^*)^j \tag{5.12}$$

Demonstração. Utilizando propriedades das classes de Chern e lema 5.11, temos:

$$\begin{aligned} c_n\left(TX(-\log D) - L\right) &= \sum_{j=0}^{n} c_{n-j}(TX(-\log D))c_1(L^*)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j} c_{n-j}\left(\Omega_X^1(\log D)\right) c_1(L^*)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\sum_{|J|}(-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1(D)^J c_1(L^*)^j \end{aligned}$$

o que implica em

$$\int_X c_n\left(TX(-\log D) - L\right) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1(D)^J c_1(L^*)^j \tag{5.10}$$

A equação 5.11 é obtida fazendo $D = \widehat{D_N}$ em 5.10. De modo semelhante, obtêm-se 5.12 a partir de 5.10 considerando $X = D_N$, uma variedade complexa de dimensão n-1 e tomando a subvariedade analítica com singularidades do tipo cruzamento normal $D = \widehat{D_N}|_{D_N}$. □

Proposição 5.1.1. *Nas condições acima, se L é um fibrado holomorfo em retas em X, então*

$$\int_X c_n\left(TX(-\log D) - L\right) = \int_X c_n\left(TX\left(-\log \widehat{D_N}\right) - L\right) - \int_{D_N} c_{n-1}\left(TD_N\left(-\log\left(\widehat{D_N}|_{D_N}\right)\right) - L|_{D_N}\right) \tag{5.13}$$

Demonstração. Utilizando as igualdades obtidas no Lema 5.12, a demonstração se resume

a mostrar a seguinte igualdade

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1(D)^Jc_1(L^*)^j = \tag{5.14}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left(\widehat{D_N}\right)^Jc_1(L^*)^j- \tag{5.15}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1-j}\sum_{|J'|=k}\int_{D_N}(-1)^{n-j}c_{n-1-j-k}\left(\Omega_{D_N}^1\right)c_1(\widehat{D_N})^{J'}c_1(L^*)^j \tag{5.16}$$

Destacando o termo quando $j=n$ e depois o termo onde $k=0$ na equação 5.14, temos:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1(D)^Jc_1(L^*)^j+\sum_{k=0}^{n-n}\sum_{|J|=k}\int_X(-1)^{n-n}c_{n-n-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1(D)^Jc_1(L^*)^j=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1(D)^Jc_1(L^*)^j+\int_X c_0\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^j=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|J|=0}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-0}\left(\Omega_X^1\right)c_1(D)^Jc_1(L^*)^j+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1(D)^Jc_1(L^*)^j+$$

$$+\int_X c_0\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^j=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j}\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^j+\int_X c_0\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^j+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1(D)^Jc_1(L^*)^j=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j}\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^j+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1(D)^Jc_1(L^*)^j \tag{5.17}$$

Podemos calcular o segundo termo da expressão 5.17 e obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1(D)^J c_1(L^*)^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N} c_1(L^*)^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N=0}}\int_X (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_{N-1}} c_1(L^*)^j + \\
&+ \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_X (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N} c_1(L^*)^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{|J'|=k}\int_X (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1\left(\widehat{D_N}\right)^{J'} c_1(L^*)^j + \\
&+ \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_X (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N} c_1(L^*)^j =
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Utilizando o fato de que $c_1([D_N])$ é o dual de Poincaré da classe D_N (Teorema 3.36 de (MOL; SOARES, 2001)), obtêm-se da segunda expressão de 5.18:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_X (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N} c_1(L^*)^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_{D_N} (-1)^{n-j} c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right) c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\ldots c_1([D_N])^{j_N-1} c_1(L^*)^j
\end{aligned}
$$

Substituindo a expressão obtida no Lema 5.4 na expressão acima, segue que:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_{D_N}(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega^1_X\right)c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\dots c_1([D_N])^{j_N-1}c_1(L^*)^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_{D_N}(-1)^{n-j}\left(c_{n-j-k}(\Omega^1_{D_N})-c_{n-j-1-k}(\Omega^1_{D_N})c_{n-j-k}([D_N])\right)c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\dots c_1([D_N])^{j_N-1}c_1(L^*)^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_{D_N}(-1)^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega^1_{D_N})c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\dots c_1([D_N])^{j_N-1}c_1(L^*)^j- \\
&-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j-1}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_{D_N}(-1)^{n-j}c_{n-j-1-k}(\Omega^1_{D_N})c_{n-j-k}([D_N])c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\dots c_1([D_N])^{j_N-1}c_1(L^*)^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_{D_N}(-1)^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega^1_{D_N})c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\dots c_1([D_N])^{j_N-1}c_1(L^*)^j- \\
&-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j-1}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_{D_N}(-1)^{n-j}c_{n-j-1-k}(\Omega^1_{D_N})c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\dots c_1([D_N])^{j_N}c_1(L^*)^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_{D_N}(-1)^{n-j}c_{n-j-k}(\Omega^1_{D_N})c_1\left([D_1]\right)^{j_1}\dots c_1([D_N])^{j_N-1}c_1(L^*)^j- \\
&-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j-1}\sum_{\substack{|J|=k\\ j_N\geqslant 1}}\int_{D_N}(-1)^{n-j}c_{n-j-1-k}(\Omega^1_{D_N})c_1\left(D\right)^J c_1(L^*)^j = \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-j}\sum_{|J'|=k}\int_{D_N}(-1)^{n-1-j}c_{n-1-j-k}\left(\Omega^1_{D_N}\right)c_1\left(\widehat{D_N}\right)^{J'}c_1(L^*)j
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Substituindo as expressões 5.18 e 5.19 na segunda expressão de 5.17, temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega^1_X\right)c_1(D)^Jc_1(L^*)^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{|J'|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega^1_X\right)c_1\left(\widehat{D_N}\right)^{J'}c_1(L^*)^j- \\
&-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-j}\sum_{|J'|=k}\int_{D_N}(-1)^{n-1-j}c_{n-1-j-k}\left(\Omega^1_{D_N}\right)c_1\left(\widehat{D_N}\right)^{J'}c_1(L^*)j
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Finalmente, substituindo 5.20 em 5.17, obtêm-se

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{|J|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1(D)^Jc_1(L^*)^j=\\
&=\sum_{j=0}^{n}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j}\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^j+\\
&+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j}\sum_{|J'|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left(\widehat{D_N}\right)^{J'}c_1(L^*)^j-\\
&-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-j}\sum_{|J'|=k}\int_{D_N}(-1)^{n-1-j}c_{n-1-j-k}\left(\Omega_{D_N}^1\right)c_1\left(\widehat{D_N}\right)^{J'}c_1(L^*)j=\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{|J'|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left(\widehat{D_N}\right)^{J'}c_1(L^*)^j-\\
&-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-j}\sum_{|J'|=k}\int_{D_N}(-1)^{n-1-j}c_{n-1-j-k}\left(\Omega_{D_N}^1\right)c_1\left(\widehat{D_N}\right)^{J'}c_1(L^*)j
\end{aligned}\tag{5.21}$$

onde a última igualdade segue do fato de que $\sum_{j=0}^{n}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j}\left(\Omega_X^1\right)c_1(L^*)^j$ é exatamente o termo quando $k=0$ em $\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j}\sum_{|J'|=k}\int_X(-1)^{n-j}c_{n-j-k}\left(\Omega_X^1\right)c_1\left(\widehat{D_N}\right)^{J'}c_1(L^*)^j$. De modo 5.21 coincide com exatamente a expressão que procurávamos. □

5.2 Teorema 2

Teorema 5.1. *Seja $\widetilde{X}$ uma variedade complexa de dimensão n tal que $\widetilde{X}=X-D$ onde X é uma variedade complexa de dimensão n compacta, D uma hipersuperfície do tipo cruzamento normal. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão 1 em X com singularidades isoladas (não degeneradas) e logarítmica ao longo de D. Então*

$$\int_X c_n(TX(-\log D)-T\mathcal{F})=\sum_{p\in Sing(\mathcal{F})\cap\widetilde{X}}\mu_p(\mathcal{F})\tag{5.22}$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre o número de componentes irredutíveis de D.

- Se D possui apenas uma componente irredutível, então, D é suave. Como, por hipótese, as singularidades de $\mathcal{F}$ são não-degeneradas, o resultado segue do Teorema 4.19;
- Suponha que para toda hipersuperfície analítica em X, satisfazendo as hipóteses do teorema e tendo N-1 componentes irredutíveis, a fórmula 5.22 é satisfeita;

- Considere D uma hipersuperfície analítica em X com N componentes irredutíveis, satisfazendo as hipóteses do teorema. Mostremos que 5.22 é satisfeita para D.

  Sabemos que $\widehat{D_N}$ é uma hipersuperfície analítica em X e $\widehat{D_N}|_{D_N}$ é uma hipersuperfície analítica em D_N, ambas com singularidades do tipo cruzamento normal e possuindo N-1 componentes irredutíveis. Além disso, $\mathcal{F}$ é logarítmica ao longo de D_N e $\mathcal{F}|_{D_N}$ é logarítmica ao longo de $\widehat{D_N}|_{D_N}$. Deste modo, conseguimos utilizar a hipótese de indução e obtemos as seguintes expressões:

$$\int_X c_n\left(TX\left(-\log\widehat{D_N}\right)-T\mathcal{F}\right)=\sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F})\cap\left(X\setminus\widehat{D_N}\right)}\mu_p\left(\mathcal{F}\right) \tag{5.23}$$

$$\int_{D_N} c_{n-1}\left(TD_N\left(-\log(\widehat{D_N}|_{D_N})\right)-T\mathcal{F}|_{D_N}\right)=\sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F})\cap\left(D_N\setminus\widehat{D_N}|_{D_N}\right)}\mu_p\left(\mathcal{F}\right) \tag{5.24}$$

  Pelo Lema 5.1, tem-se a seguinte relação

$$\sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F})\cap(X\setminus D)}\mu_p\left(\mathcal{F}\right)=\sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F})\cap\left(X\setminus\widehat{D_N}\right)}\mu_p\left(\mathcal{F}\right)-\sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F})\cap\left(D_N\setminus\widehat{D_N}|_{D_N}\right)}\mu_p\left(\mathcal{F}\right) \tag{5.25}$$

  Substituindo as expressões 5.23 e 5.24 em 5.25, obtemos:

$$\sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F})\cap(X\setminus D)}\mu_p\left(\mathcal{F}\right)=\int_X c_n\left(TX\left(-\log\widehat{D_N}\right)-T\mathcal{F}\right)-\int_{D_N} c_{n-1}\left(TD_N\left(-\log(\widehat{D_N}|_{D_N})\right)-T\mathcal{F}|_{D_N}\right) \tag{5.26}$$

  Aplicando a Proposição 5.1.1, tomando $L=T\mathcal{F}$, temos

$$\sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F})\cap\widetilde{X}}\mu_p\left(\mathcal{F}\right)=\int_X c_n\left(TX(-\log D)-T\mathcal{F}\right) \tag{5.27}$$

  ou seja, a expressão 5.22 é válida para D. Deste modo, o resultado segue por indução.

□

5.3 Corolário 1 - Um teorema do tipo Poincaré-Hopf

Nesta seção, apresentaremos um teorema do tipo Poincaré-Hopf para variedades complexas não compactas o qual é uma consequência direta do Teorema 5.1 demonstrado acima. Para isto, utilizaremos o teorema abaixo, o qual foi prosposto por S. Iitaka (IITAKA, 1976) e demonstrado por Y. Norimatsu (NORIMATSU et al., 1978), e posteriormente por R. Silvotti (SILVOTTI, 1995) e P. Aluffi (ALUFFI, 1999) de forma independente.

Teorema 5.2. *Seja $\widetilde{X}$ uma variedade complexa de dimensão n tal que $\widetilde{X}=X-D$ onde X é uma variedade complexa compacta de dimensão n e D é uma hipersuperfície do tipo cruzamento normal em X. Então*

$$\int_X c_n\left(TX(-\log D)\right)=\chi(\widetilde{X}) \tag{5.28}$$

onde $\chi(\widetilde{X})$ denota a característica de Euler de $\widetilde{X}$.

Teorema 5.3. *Seja $\widetilde{X}$ uma variedade complexa de dimensão n tal que $\widetilde{X} = X - D$ onde X é uma variedade complexa compacta de dimensão n e D é uma hipersuperfície reduzida do tipo cruzamento normal em X. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em X de dimensão 1 dada por um campo de vetores global com singularidades isoladas (não degeneradas) e logarítmica ao longo de D. Então*

$$\chi(\widetilde{X}) = \sum_{p \in Sing(\mathcal{F}) \cap \widetilde{X}} \mu_p(\mathcal{F}) \tag{5.29}$$

onde $\chi(\widetilde{X})$ denota a característica de Euler de $\widetilde{X}$.

Demonstração. Neste caso, como $\mathcal{F}$ é definida por um campo de vetores global, segue que o fibrado tangente $T\mathcal{F}$ é o fibrado trivial de posto 1 e assim

$$TX(-\log D) - T\mathcal{F} \approx TX(-\log D)$$

. Deste modo, utilizando o Teorema 5.2, segue que

$$\int_X c_n(TX(-\log D)) = \chi(\widetilde{X}) \tag{5.30}$$

Por outro lado, como D é uma hipersuperfície do tipo cruzamento normal, então, segue o Teorema 5.1

$$\int_X c_n(TX(-\log D) - T\mathcal{F}) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap \widetilde{X}} \mu_p(\mathcal{F}) \tag{5.31}$$

de modo que obtem-se o resultado obtido igualando as duas expressões obtidas. □

6 Aplicação - Folheações projetivas de dimensão 1

Nesta seção, é apresentada uma caracterização para hipersuperfícies suaves $D \subset \mathbb{P}^n$ invariantes por uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 1 em $\mathbb{P}^n$ satisfazendo $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \subsetneq D$, dada pelo Teorema 6.1.

6.1 Resultados preliminares

Começamos a seção com uma observação que segue diretamente da Proposição 3.5.1.

Observação 6.1.1. Se x é uma singularidade isolada não degenerada de $\mathcal{F}$, então, neste caso, $\mu_x(\mathcal{F}) = \mathrm{GSV}(\mathcal{F}, D, x)$, o implica em

$$\mathrm{Ind}_{\log D,x}(\mathcal{F}) = 0 \tag{6.1}$$

Lema 6.1. *Seja* $f(x,y) = \sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n+1}{n-i-j}x^j y^i$ *com* $n \in \mathbb{N}$.

- *Se* $x \neq y$, *então:*
$$f(x,y) = \frac{(1+x)^{n+1} - (1+y)^{n+1}}{x-y} \tag{6.2}$$
- *Se x=y, então:*
$$f(x,y) = (n+1)(1+x)^{n+1} \tag{6.3}$$

Demonstração. Desenvolvendo a expressão de f(x,y), temos:

$$\begin{aligned} f(x,y) = \binom{n+1}{n}x^0 + \binom{n+1}{n-1}x^1 &+ \binom{n+1}{n-2}x^2 + \dots + \binom{n+1}{0}x^n \\ + \binom{n+1}{n-1}x^0y^1 &+ \binom{n+1}{n-2}x^1y^1 + \dots + \binom{n+1}{0}x^{n-1}y^1 \\ &+ \binom{n+1}{n-2}x^0y^2 + \dots + \binom{n+1}{0}x^{n-2}y^2 \\ &\vdots \\ &+ \binom{n+1}{0}y^n. \end{aligned}$$

Colocando em evidência o fator comum em cada coluna da expressão, temos

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n-1}[x^1+y^1] + \binom{n+1}{n-2}[x^2+xy+y^2] + \dots \binom{n+1}{0}\sum_{j=0}^{n} x^{n-j}y^j \\ =& \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n+1}{n-k}\sum_{j=0}^{k} x^{k-j}y^j\right]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Quando $x \neq y$, temos:

$$\sum_{j=0}^{k} x^{k-j}y^j = \frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{x-y} \tag{6.5}$$

para $0 \leqslant k \leqslant n$. Além disso, utilizando a expansão binomial, temos que:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{n-k}x^{k+1} = (1+x)^{n+1}. \tag{6.6}$$

Substituindo 6.5 e 6.6 em 6.4, segue que:

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n+1}{n-k}\sum_{j=0}^{k} x^{k-j}y^j\right] = \\ =& \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n+1}{n-k}\frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{x-y}\right] \\ =& \frac{1}{x-y}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n+1}{n-k}x^{k+1} - \binom{n+1}{n-k}y^{k+1}\right]. \\ =& \frac{(1+x)^{n+1}-(1+y)^{n+1}}{x-y} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Agora, considerando $x = y$ na expressão 6.4, temos:

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n-1}2x + \binom{n+1}{n-2}3x^2 + \dots \binom{n+1}{0}(n+1)x^n \\ =& (n+1)(1+x)^n. \end{aligned} \tag{6.8}$$

onde a segunda igualdade é obtida derivando termo a termo, em relação à x, a expansão binomial 6.6. □

Lema 6.2. *Sejam k, d, n números naturais com $k \geqslant 1, d \geqslant 0$ e $n \geqslant 2$. Considere o número natural $\delta(k.d,n)$ definido por*

$$\delta(k.d,n) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n+1}{n-i-j}(-k)^j(d-1)^i \tag{6.9}$$

Então, $\delta(k.d,n)$ satisfaz as seguintes condições:

1) *Se n é ímpar, então:*

a) $\delta(k.d, n) > 0 \Longleftrightarrow k < d + 1$

b) $\delta(k.d, n) = 0 \Longleftrightarrow k = d + 1$

c) $\delta(k.d, n) < 0 \Longleftrightarrow k > d + 1$

2) *Se n é par, então,* $\delta(k.d, n) \geqslant 0$. *Além disso:*

a) $\delta(k.d, n) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} k \neq d + 1 \\ \quad ou \\ k = d + 1 \ com \ d \neq 0 \end{cases}$

b) $\delta(k.d, n) = 0 \Longleftrightarrow k = 1 \ e \ d = 0$

3) $\delta(k.d, n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (k-1)^{n-i}$

Demonstração. Para demonstração, colocamos $x = -k$ e $y = d-1$ nas expressões obtidas no Lema 6.1. Deste modo:

- Para $k \neq 1$ ou $d \neq 0$, o que implica em $x \neq y$, temos:

$$\delta(k.d, n) = \frac{(1-k)^{n+1} - d^{n+1}}{-k - d + 1} \tag{6.10}$$

- Para $k = 1$ e $d = 0$, ou seja, x=y, temos:

$$\delta(k.d, n) = (n+1)(1-1)^{n+1} = 0 \tag{6.11}$$

Façamos agora a análise do sinal da expressão 6.10.

Note que como $k \geqslant 1$, tem-se $-k \leqslant -1$. Além disso, $-d \leqslant 0$. Assim:

$$-k - d - 1 \leqslant -1 + 0 + 1 \leqslant 0 \tag{6.12}$$

Em particular, quando $-k - d + 1 = 0$, tem-se que $k = -d + 1$. Porém, como $-d + 1 \geqslant 1$ e $k \geqslant 1$, necessariamente tem-se k=1, o que leva à d=0. Neste caso $\delta(k, d, n) = 0$, como visto anteriormente.

Deste modo, para $k \neq 1$ ou $d \neq 0$, $-k - d - 1 < 0$.

Agora, obteremos as relações que procuramos:

i) Se n é ímpar, então, n+1 é par, consequentemente

$$(1-k)^{n+1} = (k-1)^{n+1} \tag{6.13}$$

Com isso, considerando $k < d+1$, tem-se

$$\begin{aligned} k < d+1 &\iff k-1 < d \\ &\iff (k-1)^{n+1} < d^{n+1} \\ &\iff (1-k)^{n+1} < d^{n+1} \\ &\iff (1-k)^{n+1} - d^{n+1} < 0 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Portanto, $\delta(k,d,n) > 0 \iff k < d+1$.

Por outro lado, se $k > d+1$, vale:

$$\begin{aligned} k > d+1 &\iff k-1 > d \\ &\iff (k-1)^{n+1} > d^{n+1} \\ &\iff (1-k)^{n+1} > d^{n+1} \\ &\iff (1-k)^{n+1} - d^{n+1} > 0 \end{aligned} \tag{6.15}$$

de modo que, neste caso, $\delta(k,d,n) < 0 \iff k > d+1$.

ii) Se n é par, então, n+1 é impar, ou seja, valem

$$\begin{aligned} 1-k \leqslant 0 \implies (1-k)^{n+1} &\leqslant 0 \\ -d^{n+1} &\leqslant 0 \end{aligned}$$

o que implica em

$$(1-k)^{n+1} - d^{n+1} \leqslant 0 \tag{6.16}$$

Como visto na análise feita quando n é par, sabe-se que -k-d+1<0. Portanto, quando n é par, $\delta(k,d,n) \geqslant 0$. Neste, caso, temos:

- Para o caso $\delta(k,d,n) = 0$:

$$\begin{aligned} (1-k)^{n+1} - d^{n+1} = 0 &\iff 1-k = d \\ &\iff k = 1-d \\ &\iff k = 1 \text{ e } d = 0 \end{aligned}$$

  onde a última implicação segue do fato de que $k \geqslant 1$ e $-d \leqslant 0$.

- Agora, se $k \neq 1$ ou $d \neq 0$, temos os seguintes possíveis casos:
  - Se $k = d+1$, com $d \neq 0$, então, $d > 0$ e $k > 1$, ou seja, $(1-k)^{n+1} - d^{n+1} < 0$;
  - Se $k \neq d+1$, então: se $d = 0$, então, $k > 1$. Por outro lado, se $d \neq 0$, então, $d > 0$ e $k > 1$.

  em todos os casos, obtemos $\delta(k,d,n) > 0$..

iii) Neste caso, consideramos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(k-1)^i d^{n-i} =& d^n \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(k-1)^i d^{-i}\\ =& d^n \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i(k-1)^i}{d^i}\\ =& d^n \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{(-1)(k-1)}{d}\right]^i. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Utilizando o fato de que $\sum_{i=0}^{n} a^i = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ em 6.17 tomando $a = \dfrac{(-1)(k-1)}{d}$, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(k-1)^i d^{n-i} =& d^n \left[\frac{1-\left[\frac{(-1)(k-1)}{d}\right]^{n+1}}{1-\frac{(-1)(k-1)}{d}}\right]\\ =& d^n \left[\frac{\frac{d^{n+1}-(-1)^{n+1}(k-1)^{n+1}}{d^{n+1}}}{\frac{d-(-1)(k-1)}{d}}\right]\\ =& d^n \left[\frac{d^{n+1}-(-1)^{n+1}(k-1)^{n+1}}{d^{n+1}}\right]\left[\frac{d}{d+k-1}\right]\\ =& \frac{d^{n+1}-(-1)^{n+1}(k-1)^{n+1}}{d+k-1}\\ =& \frac{-d^{n+1}+(-1)^{n+1}(k-1)^{n+1}}{1-k-d}\\ =& \frac{(1-k)^{n+1}-d^{n+1}}{-k-d+1} = \delta(k,d,n). \end{aligned} \tag{6.18}$$

□

Lema 6.3. *Seja $D \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície suave e irredutível de grau k. Então, para $l \in \{1,\dots,n\}$ tem-se*

$$c_l(T\mathbb{P}^n(-\log D)) = \left[\sum_{j=0}^{l}\binom{n+1}{l-j}(-1)^j k^j\right] c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^l. \tag{6.19}$$

Demonstração. Nestas hipóteses, pelo Teorema 4.3 de (ANGELINI, 2014), tem-se a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow T\mathbb{P}^n(-\log D) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) \longrightarrow 0$$

a qual fornece a seguinte relação entre as classes totais de Chern:

$$c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1}\right) = c\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)\right). \tag{6.20}$$

Pela definição de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1}$, temos:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$$

onde a soma direta é composta por $n+1$ fatores. Deste modo, a classe total de Chern, $c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1}\right)$ pode ser escrita, utilizando as propriedades das classes de Chern, como

$$c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1}\right) = c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) = c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{n+1}$$

Agora, como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ tem estrutura de fibrado vetorial complexo de posto 1, podemos escrever $c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) = 1 + c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)$, o que, substituindo na expressão acima fornece

$$\begin{aligned} c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1}\right) =& c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{n+1} \\ =& \left(1 + c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)\right)^{n+1} \\ =& 1 + c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) + \ldots + \binom{n+1}{j+1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{j+1} + \ldots + c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{n+1}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Utilizando a definição de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$, segue que:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \ldots \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$$

onde o produto tensorial é formado por k fatores. De modo que

$$c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)\right) = k c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) \tag{6.22}$$

ou seja, podemos escrever

$$c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)\right) = 1 + c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)\right) = 1 + k c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right). \tag{6.23}$$

Além disso, como $\mathrm{T}\mathbb{P}^n(-\log D)$ tem estrutura de fibrado vetorial complexo de posto n, podemos escrever

$$c\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) \tag{6.24}$$

Agora, substituindo 6.21, 6.23 e 6.24 em 6.20, obtemos:

$$
\begin{aligned}
c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1}\right) &= c\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)\right) \\
1+\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{j+1} &= \left(1+\sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right)\right)\left(1+kc_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)\right) \\
1+\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{j+1} &= 1+\sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right)+ \\
&\quad +k\sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)+kc_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) \implies \\
\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{j+1} &= \sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right)+k\sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)+ \\
&\quad +kc_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) \implies \\
\sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{j+1}-k\sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)- \\
&\quad -kc_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right).
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

Utilizando o produto de classes de Chern induzido pelo produto exterior de formas, analisaremos alguns dos termos da igualdade obtida acima:

- Para $q=0$, estamos interessados em procurar as 1-formas presentes na igualdade. Do lado esquerdo, temos $c_1\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right)$. Já do lado direito, as 1-formas presentes são: o termo quando j=0 no primeiro somatório, $\binom{n+1}{1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)$ e o termo $-kc_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)$. Ou seja, temos:

$$
\begin{aligned}
c_1\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) &= \binom{n+1}{1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)-kc_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) \\
&= \binom{n+1}{1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)-\binom{n+1}{0} kc_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right),
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

- Para q=1, procuraremos 2-formas. Do lado esquerdo, temos $c_2\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right)$.

  No lado direto, temos 2-formas presentes nos dois somatórios. Estas 2-formas são $\binom{n+1}{2} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2$ e $-kc_1\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)$. Deste modo, segue que:

$$
c_2\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) = \binom{n+1}{2} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2-kc_1\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) \tag{6.27}
$$

Substituindo 6.26 em 6.27, temos:

$$\begin{aligned}
c_2\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) &= \binom{n+1}{2} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2 - k c_1\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) \\
&= \binom{n+1}{2} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2 - k\left[\binom{n+1}{1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) - k c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)\right] c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right) \\
&= \binom{n+1}{2} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2 - k\binom{n+1}{1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2 + k^2 c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2 \\
&= k^0\binom{n+1}{2} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2 - k\binom{n+1}{1} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2 + k^2\binom{n+1}{0} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2 \\
&= \left[k^0\binom{n+1}{2} - k\binom{n+1}{1} + k^2\binom{n+1}{0}\right] c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2 \\
&= \left[\sum_{j=0}^{2}\binom{n+1}{2-j}(-1)^j k^j\right] c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^2
\end{aligned} \tag{6.28}$$

- No caso geral, fazendo de maneira recursiva, temos, para $l \in \{1, \ldots, n\}$

$$c_l(T\mathbb{P}^n(-\log D)) = \left[\sum_{j=0}^{l}\binom{n+1}{l-j}(-1)^j k^j\right] c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^l$$

□

6.2 Teorema 3 - Aplicação em folheações projetivas

Teorema 6.1. *Seja $D \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície suave e irredutível e $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão 1 em $\mathbb{P}^n$ com singularidades isoladas (não-degeneradas) e logarítmica ao longo de D. Então, as seguintes propriedades são válidas:*

1. *Se n é impar, então:*

   a) $\#[Sing(\mathcal{F}) \cap \mathbb{P}^n \setminus D] > 0 \iff \deg(D) < \deg(\mathcal{F}) + 1$

   b) $\#[Sing(\mathcal{F}) \cap \mathbb{P}^n \setminus D] = 0 \iff \deg(D) = \deg(\mathcal{F}) + 1$

2. *Se n é par, então:*

   a) $\#[Sing(\mathcal{F}) \cap \mathbb{P}^n \setminus D] > 0 \iff \begin{cases} \deg(D) \neq \deg(\mathcal{F}) + 1 \\ \qquad ou \\ \deg(D) = \deg(\mathcal{F}) + 1 \ com \ \deg(\mathcal{F}) \neq 0 \end{cases}$

3. *Em geral, vale a fórmula*

$$\#[Sing(\mathcal{F}) \cap \mathbb{P}^n \setminus D] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\deg(D) - 1\right)^i \deg(\mathcal{F})^{n-i} \tag{6.29}$$

Demonstração. Sejam $\deg(D) = k$ e $\deg(\mathcal{F}) = d$. Assim, temos, pelas propriedades das classes de Chern:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}^n} c_n\left(T\mathbb{P}^n(-\log D) - T\mathcal{F}\right) &= \int_{\mathbb{P}^n} \sum_{i=0}^{n} c_{n-i}\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) c_1\left(-T\mathcal{F}^*\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \int_{\mathbb{P}^n} c_{n-i}\left(T\mathbb{P}^n(-\log D)\right) c_1\left(-T\mathcal{F}^*\right)^i .\end{aligned} \tag{6.30}$$

Substituindo a expressão obtida no Lema 6.3 em 6.30, segue que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}^n} c_n\left(T\mathbb{P}^n(-\log D) - T\mathcal{F}\right) &= \sum_{i=0}^{n} \int_{\mathbb{P}^n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j\right] c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{n-i} c_1\left(T\mathcal{F}^*\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j\right] \int_{\mathbb{P}^n} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{n-i} c_1\left(T\mathcal{F}^*\right)^i .\end{aligned} \tag{6.31}$$

Por outro lado, o fibrado tangente $T\mathcal{F}$ de uma folheação em $\mathbb{P}^n$ é tal que $T\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1-d)$. Com isso, temos $c_1(T\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1-d)) = (1-d)c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. O que implica em

$$\begin{aligned}c_1\left(T\mathcal{F}^*\right) &= (-1)c_1(T\mathcal{F}) \\ &= (-1)(1-d)c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \\ &= (d-1)c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)).\end{aligned} \tag{6.32}$$

Substituindo 6.32 em 6.31 e utilizando o fato de que $\int_{\mathbb{P}^n} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^n = 1$ (HUYBRECHTS, 2005), segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}^n} c_n\left(T\mathbb{P}^n(-\log D) - T\mathcal{F}\right) &= \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j\right] \int_{\mathbb{P}^n} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{n-i} c_1\left(T\mathcal{F}^*\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j\right] \int_{\mathbb{P}^n} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^{n-i} \left[(d-1)c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))\right]^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-1)^j k^j\right] (d-1)^i \int_{\mathbb{P}^n} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k^j)(d-1)^i.\end{aligned} \tag{6.33}$$

Por hipótese, as singularidades de $\mathcal{F}$ são não degeneradas, então, o número $\#[\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{P}^n \backslash D]$ corresponde à soma dos números de Milnor dos pontos singulares de $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^n \backslash D$, uma vez que como as singularidades são não degeneradas, para todo $p \in [\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{P}^n \backslash D$, tem-se:

$$\mu_p(\mathcal{F}) = 1.$$

Além disso, como as singularidades de $\mathcal{F}$ são isoladas, segue que $\mathrm{Ind}_{\log D, x}(\mathcal{F}) = 0$ para cada $x \in D$. Assim, pelo Teorema 4.2

$$\begin{aligned} \#[\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{P}^n \backslash D] &= \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{P}^n \backslash D)} \mu_p(\mathcal{F}) \\ &= \int_{\mathbb{P}^n} c_n(T\mathbb{P}^n(-\log D) - T\mathcal{F}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{n-i-j} (-k^j)(d-1)^i \end{aligned} \tag{6.34}$$

Dada a equação acima, o resultado segue da análise feita no Lema 6.2. □

Referências

ALEKSANDROV, A. G. The index of vector fields and logarithmic differential forms. *Functional Analysis and Its Applications*, Springer Science and Business Media LLC, v. 39, n. 4, p. 245–255, oct 2005. Citado 2 vezes nas páginas 103 e 104.

ALUFFI, P. Chern classes for singular hypersurfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 351, n. 10, p. 3989–4026, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 121.

ANGELINI, E. Logarithmic bundles of hypersurface arrangements in $\mathbb{P}^n$. *Collectanea Mathematica*, v. 65, n. 3, p. 285–302, Sep 2014. ISSN 2038-4815. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s13348-014-0112-0>. Citado na página 127.

BAUM, P.; BOTT, R. Singularities of holomorphic foliations. *Journal of Differential Geometry*, International Press of Boston, v. 7, n. 3-4, p. 279–342, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 101.

CHERN, S.-S. A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds. *The Annals of Mathematics*, JSTOR, v. 45, n. 4, p. 747, oct 1944. Citado na página 8.

CORRÊA, M. et al. On Gauss-Bonnet and Poincaré-Hopf type theorems for complex ∂-manifolds. 2. Citado na página 8.

CORRÊA, M.; MACHADO, D. da S. Residue formulas for logarithmic foliations and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society (AMS), v. 371, n. 9, p. 6403–6420, feb 2019. Citado 7 vezes nas páginas 5, 6, 8, 9, 10, 101 e 105.

GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. *Principles of Algebraic Geometry*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1994. Citado na página 114.

HUYBRECHTS, D. *Complex Geometry: An Introduction*. [S.l.]: Springer, 2005. (Universitext (Berlin. Print)). ISBN 9783540212904. Citado 3 vezes nas páginas 98, 105 e 131.

IITAKA, S. Logarithmic forms of algebraic varieties. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math*, v. 23, n. 3, p. 525–544, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 121.

JUDICE, E. D. *O Teorema de Sard e suas aplicações*. [S.l.]: IMPA, 2012. Citado na página 13.

LIMA, E. L. *Introdução à topologia diferencial*. [S.l.]: Instituto de matemática pura e aplicada, 1999. Citado na página 15.

MILNOR, J. *Singular points of complex hypersurfaces*. [S.l.]: Princeton University Press, 1968. Citado na página 103.

MILNOR, J. W.; WEAVER, D. W. *Topology from the differentiable viewpoint*. [S.l.]: Princeton university press, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

MOL, R. S.; SOARES, M. G. Índices de campos holomorfos e aplicações. *Publicações Matemáticas do IMPA*, v. 23, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 34, 98 e 118.

MONT, X. Gómez; SEADE, J.; VERJOVSKY, A. The index of a holomorphic flow with an isolated singularity. *Mathematische Annalen*, Springer Science and Business Media LLC, v. 291, n. 1, p. 737–751, mar 1991. Citado na página 102.

NORIMATSU, Y. et al. Kodaira vanishing theorem and Chern classes for $\backslash\partial$-manifolds. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, The Japan Academy, v. 54, n. 4, p. 107–108, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 121.

SAITO, K. Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics*, v. 27, n. 2, p. 265–291, ago. 1980. Citado na página 107.

SILVOTTI, R. On a conjecture of varchenko. *arXiv preprint alg-geom/9503016*, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 121.

SOARES, M. G. *Lectures on point residues*. [S.l.]: Pontificia Universidade Catolica del Peru, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 38, 40, 41 e 47.

SUWA, T. *Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations*. [S.l.]: Hermann, 1998. ISBN 2705663614. Citado na página 110.