HOECHST CORNÉLIO DA SILVA

EXTENSÃO DE GRAFOS SOBRE SUPERFÍCIES ORIENTADAS

Dissertação apresentada na Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Catarina Mendes de Jesus Sánchez

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T

S586e
2020

Silva, Hoechst Cornélio da, 1994-
Extensão de grafos sobre superfícies orientadas / Hoechst Cornélio da Silva. – Viçosa, MG, 2020.
91 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.
Orientador: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 68-69.

1. Topologia. 2. Teoria dos grafos. 3. Superfícies (Matemática). 4. Polígonos. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 514

HOECHST CORNÉLIO DA SILVA

EXTENSÃO DE GRAFOS SOBRE SUPERFÍCIES ORIENTADAS

Dissertação apresentada na Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 26 de outubro de 2020.

Assentimento:

Hoechst C. Da Silva.

Hoechst Cornélio Da Silva
Autor

Jesus

Catarina Mendes de Jesus Sánchez
Orientadora

Dedico esse trabalho aos meus,
àqueles que me apoiaram!
Em especial a minha mãe, Rita!

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Aos professores que se dispuseram a tirar as minhas dúvidas, muitas vezes repetidas.

À minha professora de piano que sempre me apoiou e entendeu quando tive que me afastar para dedicar por mais tempo a universidade.

Àqueles que me deram oportunidade de iniciação científica, que me estimularam a participar do concurso para professor substituto, o qual fui aprovado.

Àqueles que acreditaram e investiram tempo nos meus projetos e que me permitiram ampliar o meu horizonte, eu nunca vou esquecer!

Àqueles que me estimularam a sempre questionar e não podaram as ideias, em especial à minha orientadora, Catarina Mendes, pela confiança, paciência, orientação e liberdade. Essa forma de trabalhar, certamente me fez crescer muito como profissional.

Agradeço, por fim e de forma destacada, à minha mãe, meus irmãos, minha namorada e amigos, que me apoiaram, de todas as formas imagináveis. Uns passaram horas ouvindo ideias mirabolantes de soluções, que depois de algum tempo eu percebia que não resolviam o problema em questão. Voltava para contar e eles ouviam tudo de novo. Outros passaram noites em claro comigo, "somente"me fazendo companhia, jurando não me deixar dormir ou desanimar de concluir o objetivo. Teve quem se assustasse, diversas vezes, com o meu levantar no meio da noite com alguma solução, soluções essas que, por incrível que pareça, muitas vezes funcionam. Tiveram aqueles que não estavam por perto o tempo todo, mas quando estavam era como se nunca tivesse saído de perto, àqueles que estão sempre longe, mas sei que de lá torcem por mim, aqueles que me apararam nos momentos de tristeza, que me ensinaram algo, que dividiram palcos, quadras e campos. Sintam-se todos abraçados neste momento! Essas pessoas tem uma coisa em comum, TODAS, à sua maneira, me apoiaram e contribuíram para que esse momento fosse possível. Essa conquista é nossa!

Certamente, nesse processo o meu mérito existe, porém ele não seria possível se não me fossem dadas oportunidades e apoios para que chegasse até aqui. A todos os envolvidos, o meu muito obrigado!

A oportunidade de estudar,
infelizmente, ainda é privilégio! Essa
é uma luta inacabada, não perdida!

(Hoechst Cornélio Da silva)

RESUMO

SILVA, Hoechst Cornélio da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, outubro de 2020. **Extensão de grafos sobre superfícies orientadas**. Orientadora: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar as extensões de grafos, sobre superfícies fechadas e orientadas, já usadas em [8], para determinar os grafos de emparelhamento para essas superfícies, apresentar os diagramas de emparelhamento, já usados em [9]. A fim de associar a cada grafo de emparelhamento uma palavra serão introduzidos dois conceitos, à saber curva paralela e grafo paralelo. Com isso será possível obter uma forma alternativa, aos diagramas de emparelhamento, para determinar se dois emparelhamentos são, ou não equivalentes. Por fim, usando a operação de extensão de grafos e as palavras associadas serão exibidos os 537 grafos de emparelhamento sobre o Bitoro, destacando os 106 distintos entre si, separados por famílias de equivalência. Sendo que desses 106, 25 são K-regulares.

Palavras-chave: Topologia. Teoria dos grafos. Superfícies. Polígonos.

ABSTRACT

SILVA, Hoechst Cornélio da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, October, 2020. **Extensão de grafos sobre superfícies orientadas**. Adviser: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.

The present work have finality to present graphs extensions, embedded on a closed and oriented surfaces. This extensions has been used in [8], to determine the pairing graphs for this surfaces and present the pairing diagrams, used in [9]. In order to associate to each pairing graph a word, to concepts will be introduce, namelly parallel curve and parallel graph. Using this concepts wiil be possible to obtain an alternative form, to the pairing diagram, to determine if two pairing are, or not are, equivalents. Finally, using the graph extension operation and the associates words, we show 537 pairing graphs on the Bitoro. We highlighting the 106 distinct ones, separated by equivalence families. Which are 25 of these 106 are $K-$regular.

Keywords: Topology. Graph theory. Manifold. Polygons.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

A teoria de grafos está relacionada com vários ramos da matemática, tais como teoria de grupos, teoria de matrizes, análise numérica, topologia, combinatória e aplicações entre variedades, vide [[2], [1], [6]]. Uma aplicação que estamos interessados é o emparelhamento de arestas de polígonos regulares, vide [9].

Em [9] *Jørgensen e Näätänen* demonstram dois resultados principais:
(i) Existem 5 grafos trivalentes, não equivalentes, mergulhados em uma superfície orientada e fechada de gênero 2 que possuem 6 vértices e 9 arestas e dois ciclos disjuntos.
(ii) Dado um polígono de 18 lados existem exatamente 8 formas de emparelhar as suas arestas, de forma a obter uma superfície orientada e fechada de gênero 2. Isto, indexando uma sequência numérica aos lados do polígono.

Em [3], *Faria, Mendes de Jesus e Romero Sánchez* introduziram dois tipos de cirurgias que contribuíram para determinar famílias de grafos 3-regulares de emparelhamentos de arestas, associados a superfícies fechadas e orientadas com gênero g pré-fixado. Os grafos regulares podem estar relacionados com o empacotamento de esferas para a tesselação {12g-6,3}, como pode ser visto em [[15],[4]].

Em [8], *Mendes de Jesus* e *Romero Sánchez* introduziram o conceito de grafos de emparelhamento sobre superfícies orientadas e fechadas de gênero g. Com isso mostram que toda extensão de um grafo de emparelhamento é também um grafo de emparelhamento, fato que expande a forma de trabalhar com os grafos de emparelhamento e permite determinar com maior facilidade esse tipo de grafo. Além disso, permite determinar os grafos de emparelhamento independente de ser $K-regular$ ou não.

No presente trabalho, que tem [8] como principal referência, o interesse se dá em utilizar a extensão de grafos e a construção de palavras associadas a grafos para determinar todos os grafos de emparelhamento sobre o Bitoro que podem ser obtido por extensão do grafo $G(1,4)$.

No Capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos de topologia, superfícies orientadas e fechadas, representação planar da superfície e grafos sobre superfícies. As principais referências para este capítulo são [[1], [14], [10], [11], [5], [7]].

No Capítulo 3 apresentamos os conceitos de Extensões de grafos, extensões de grafos sobre uma superfície, grafos de emparelhamento e diagramas de emparelhamento, sendo [8] a principal referência deste capítulo.

No Capítulo 4 apresentamos os possíveis exemplos de grafos de emparelhamento regulares, para $g = 2$ e $g = 3$. Sendo [[8], [9]] as principais referências deste capítulo.

Uma contribuição neste trabalho está no Capítulo 5 é introduzido o grafo paralelo a um dado grafo sobre uma superfície, a fim de associar uma palavra a cada grafo de emparelhamento. O grafo paralelo serve para identificar se o grafo dado, sobre a superfície é um grafo de emparelhamento. Além disso, são exibidos todos os grafos de emparelhamento que podem ser retraídos no grafo I_4, sobre o Bitoro. As principais referências deste capítulo são [[8], [9]].

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo serão abordados os conceitos preliminares para o desenvolvimento do trabalho. Sendo estes topologia, superfícies fechadas e orientadas, representação planar da superfície, grafos e grafos sobre superfície. Onde as principais referencias são [[1], [14], [10], [11], [5], [7]].

2.1 Topologia

Seja X um conjunto não vazio. Denotemos por $P(X)$ a família de todos os subconjuntos de X e por A^c o conjunto complementar de $A \subset X$ tal que $A^c = X/A$.

Definição 2.1.1 (Topologia, [14])**.** Um espaço topológico é o par $(X, \mathcal{T})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{T} = \{u_i\}$, $u_i \subset X$ é chamada topologia se satisfaz:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(ii) Se $U_i \in \mathcal{T}, \forall i \in J$, onde J é um conjunto indexador, então $\cup\{u_i\}_{i \in J} \in \mathcal{T}$;

(iii) Se $U_i \in \mathcal{T}, \forall i = 1, ..., n$, então $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Em outras palavras, uma topologia é uma família de subconjuntos de X tais que o conjunto vazio e o conjunto X devem pertencer à topologia; a reunião arbitrária de elementos da topologia deve pertencer à topologia e a interseção finita de elementos da topologia deve pertencer à topologia.

Definição 2.1.2 (Conjuntos Abertos, [14])**.** Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Os elementos de $\mathcal{T}$ são ditos conjuntos *abertos* em X.

Definição 2.1.3 (Conjunto Fechado, [14])**.** Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e seja $F \subset X$. O conjunto F e dito um conjunto *Fechado* em X, se $F^c \in \mathcal{T}$.

Exemplo 2.1.4 (Topologia discreta). Para qualquer conjunto X, todos os subconjuntos são declarados abertos, isto é, $\mathcal{T}$ é o conjunto de todos os subconjuntos de X. Em geral dizemos que $\mathcal{T}$ é o subconjunto das partes de X.

Definição 2.1.5 (Base, [14])**.** Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e β uma família de subconjuntos de X tal que $\beta \subset \mathcal{T}$. Dizemos que β é uma base para $\mathcal{T}$ se para todo $A \in \mathcal{T}$, temos que:

$$A = \cup A_i; A_i \in \beta$$

Definição 2.1.6 (Base enumerável, [14])**.** Dizemos que $\mathcal{T}$ tem uma base enumerável quando existe uma coleção enumerável $\beta = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$ de abertos de $\mathcal{T}$ tais que todo aberto de $\mathcal{T}$ é escrito como a união de conjuntos b_n .

Definição 2.1.7 (Espaços de Housdorff, [14])**.** Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dizemos que X é um espaço de Housdorff se dados quaisquer $x, y \in X; x \neq y$ existem G_x, G_y, disjuntos tais que, $x \in G_x$ e $y \in G_y$.

Exemplo 2.1.8. *$\mathbb{R}$ é um espaço de Housdorff, pois dados $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $x \neq y$ e $x < y$, basta tomar $G_x = \{(a, \frac{x+y}{2}); \quad a \in \mathbb{R} \quad e \quad a < x\}$ e $G_y = \{(\frac{x+y}{2}, b); \quad b \in \mathbb{R} \quad e \quad y < b \}$. Assim, $G_x \cap G_y = \emptyset$. Como $x < y$, segue que $x < \frac{x+y}{2}$ e $\frac{x+y}{2} < y$. Daí, $x \in G_x$ e $y \in G_y$.*

Definição 2.1.9 (Topologia subespaço, [14])**.** Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Então, A "insere"a topologia subespaço de X, onde os subconjuntos abertos de A são dados por $\{u \cap A; u \in \mathcal{T}\}$, ou seja, são os subconjuntos de A abertos relativamente a $\mathcal{T}$.

Definição 2.1.10 (Topologia produto)**.** Sejam X e Y espaços topológicos. A topologia produto sobre $X \times Y$ é a topologia contendo como base a coleção β de todos os conjuntos da forma $U \times V$, onde U é subconjunto aberto de X e V é subconjunto aberto de Y.

Exemplo 2.1.11. De acordo com a Definição 2.1.5, uma base da topologia usual na reta real $\mathbb{R}$ é a coleção de intervalos abertos (a,b). Seja $\Pi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a projeção ao i-ésimo fator para $i = 1, 2$. A topologia produto em $\mathbb{R}^2$ é gerada pela coleção de todos os conjuntos da forma:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b \quad e \quad c < y < d\}.$$

Todo elemento da topologia produto $\mathbb{R}^2$ se expressa da forma:

$$\Pi_1^{-1}[(a, b)] \cap \Pi_2^{-1}[(c, d)],$$

onde

$$\Pi_1^{-1}[(a, b)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b\}$$
$$\Pi_2^{-1}[(c, d)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c < y < d\}.$$

Definição 2.1.12 (Topologia quociente, [14])**.** Seja X um espaço topológico e defina uma relação de equivalência $\sim$ sobre X. Seja $q : X \to X/\sim$ a função que envia

$x \in X$ para a classe de equivalência $[X]$. A topologia quociente sobre $X/\sim$ é definida por $u \subseteq x/\sim$ se, e somente se, $q^{-1}(u)$ é aberto.

Exemplo 2.1.13 (O círculo como espaço quociente)**.** Seja $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$. Consideremos em I a relação de equivalência:

$$x \sim y \leftrightarrow \{x, y\} = \{0,1\}, ou \quad x = y$$

Se $x \in (0,1)$, então $[x] = \{x\}$. Se $x = 0$, então $[0] = \{0,1\}$. Se $x = 1$, então $[1] = \{0,1\}$. logo $[0] = [1]$. Logo, $\Pi : I \to (I/\sim)$ é uma identificação. Note que, Π é bijetiva salvo para $x = 0$ e $x = 1$. portanto:

$$(I/\sim) \simeq \mathbb{S}^1$$

Exemplo 2.1.14. A Figura 2.1 representa uma construção do espaço topológico Toro, como o produto do espaço $\mathbb{S}^1$ por ele mesmo. Essa é apenas uma das formas de construir tal espaço.

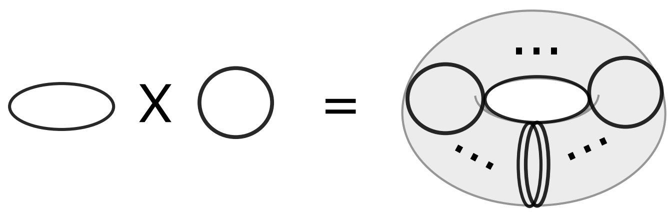


Figura 2.1: Construção do Toro como o produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Exemplo 2.1.15. Outra maneira de obter espaços topológicos é pelo quociente. A Figura 2.2 ilustra o Toro obtido pelo quociente que associa, a uma mesma classe de equivalência, os lados opostos de um quadrado.

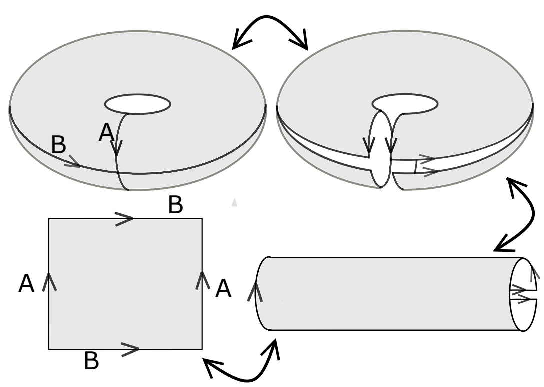


Figura 2.2: Associação do quadrado ao Toro.

Exemplo 2.1.16. Assim como na Figura 2.2 foi exibida uma forma de obter o toro como o quociente de um quadrado. De forma similar o Bitoro, Tritoro, n-Toro pode ser obtido pelo quociente dos polígonos de 8, 12, 4.n lados, respectivamente. Na Figura 2.3-(a) está representado um octógono, sendo destacadas as arestas que devem ser associadas a fim de se obter o Bitoro. Em (b) pode ser visto um dodecágono, sendo destacadas as arestas a serem associadas com o objetivo de se obter o Tritoro. Note que em ambos casos os indexadores estão alternados dois a dois. Usando a mesma disposição em um polígono de $4n$ lados, pode-se construir o n-Toro.

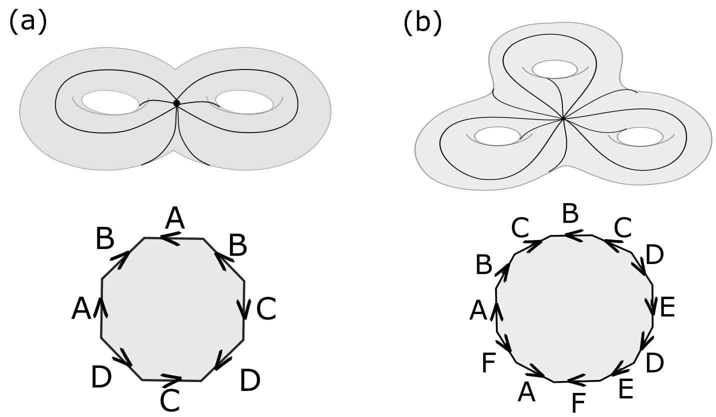


Figura 2.3: Associação de polígonos a espaços topológicos

Definição 2.1.17 (Continuidade, [14])**.** Seja f: $X \to Y$ uma aplicação entre os espaços topológicos (X, τ) e (Y, τ'). Dizemos que f é contínua se para todo aberto $u \in \tau'$, temos $f^{-1}(u) \in \tau$.

Definição 2.1.18 (Homeomorfismo, [14])**.** Dizemos que a função f: $X \to Y$, entre os espaços topológicos X e Y é um homeomorfismo se f é uma bijeção contínua, com inversa contínua. Nesse caso, X e Y são ditos homeomorfos.

Exemplo 2.1.19. Seja $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Defina uma relação de equivalência sobre [0,1] por $0 \sim 1$ e $x \sim x$ para todo $x \in [0, 1]$. O espaço topológico $X/\sim$, visto na Definição 2.1.12, é chamado de círculo, denotado por $\mathbb{S}^1$. Tal espaço é homeomorfo a qualquer elipse em $\mathbb{R}^2$ com a topologia subespaço.

Definição 2.1.20 (Homeomorfismo local, [14])**.** Seja $f : X \to Y$. f é dita um homeomorfismo local se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança de x, $U \subset X$ tal que, $f(U) = V$ é aberto em Y e $f : U \to V$ é um homeomorfismo.

Definição 2.1.21 (Espaço localmente euclidiano, [14])**.** O espaço topológico X é dito um espaço localmente euclidiano, se é localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, para algum $n \geq 1$.

Definição 2.1.22 (Compacto, [14])**.** Um espaço topológico X é compacto se toda cobertura aberta de X contém uma subcobertura finita.

Teorema 2.1.23 (Heine-Borel, [14]). *Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Observação 2.1.24. Vale notar que aqui, um conjunto W fechado é aquele cujo complementar $\mathbb{R}^n \setminus W$ é aberto. Equivalentemente, um conjunto fechado é aquele que contém todos os seus pontos de fronteira, onde um ponto de fronteira de um conjunto $W \subset \mathbb{R}^n$ é um ponto $x \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ tem-se que:

$$B_\epsilon(x) \cap W \neq \emptyset \quad e \quad B_\epsilon(x) \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset.$$

Teorema 2.1.25. *A imagem de um conjunto compacto via uma função contínua, ainda é um compacto.*

Demonstração. Consta em [[14] p.103]. □

Definição 2.1.26 (Espaço dominado, [7] p.528). Um espaço Y é dominado por um espaço X se existem aplicações $I : Y \to X$ e $R : Y \to X$, tais que $R \circ I(y) = y$ para todo $y \in Y$.

Definição 2.1.27 (Equivalência homotópica, [7] p.3). Dois espaços X e Y são ditos homotopicamente equivalentes se existem aplicações $F : X \to Y$ e $G : Y \to X$, tais que $F \circ G(y) = y$ para todo $y \in Y$ e $G \circ F(x) = x$ para todo $x \in X$.

Definição 2.1.28 (Ponto regular, 13 p.148). Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável, onde M e N são variedades. Um ponto p de uma variedade M é dito ponto regular de f quando a derivada $f'(p) : TM_p \to TN_{f(p)}$ é injetiva. Caso contrário, p diz-se um ponto singular de f.

Definição 2.1.29 (Imersão, 13 p.150). Uma aplicação diferenciável, entre variedades, $f : M \to N$ diz-se uma imersão se todo ponto $p \in M$ é um ponto regular de f.

Definição 2.1.30 (Mergulho, 13 p.151). Seja U_0 um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Uma imersão de classe C^k, $\psi : U_0 \to \mathbb{R}^m$, diz-se um mergulho de classe C^k de U_0 em $\mathbb{R}^m$, quando ψ é um homeomorfismo de U_0 sobre $\psi(U_0)$.

2.2 Superfícies fechadas e orientadas

Definição 2.2.1 (n-Variedade,[11] p.3). O conjunto X é dito uma variedade topológica de dimensão n ou uma $n - variedade$ topológica se é um espaço de Hausdorff, de base enumerável e que é localmente euclidiano, isto é localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2.2 (Superfície, [11]). Uma superfície é uma variedade conexa $2 - dimensional$. A superfície é dita orientável se todo caminho fechado preserva a orientação. Se existe algum caminho fechado que inverte a orientação, a superfície é dita não orientável.

Observação 2.2.3. Para algum inteiro positivo n, o $n - toro$ é a soma conexa de n Toros, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Para detalhes a respeito da soma conexa de superfícies veja [[10] p.69].

Definição 2.2.4 (n-Célula, [10])**.** Uma $n - célula$ é um conjunto cujo interior é homeomorfo ao disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| < 1\}$, com a propriedade adicional que o bordo ou fronteira pode ser dividido em um número finito de células de dimensão mais baixa, chamadas de faces da $n - célula$. Vamos escrever $\sigma < \tau$ se σ é face de τ.

Em [12], LIMA destaca que dada uma célula r-dimensional é possível ordená-la de $(r+1)!$ formas. O autor considera duas dessas ordenações equivalentes quando uma delas pode ser obtida da outra por meio de uma permutação par do $r+1$ vértices. Destaca ainda que há duas classes de equivalência segundo essa relação, as quais são denominadas *Orientação* de uma célula.

Definição 2.2.5 (Complexo celular, [10])**.** Um complexo celular K é um conjunto finito de células,

$$K = \bigcup \{\sigma : \sigma \ \ é \ \ uma \ \ célula\}$$

tal que:

1. Se σ é uma célula de K, então todas as faces de σ são elementos de K.
2. Se σ e τ são células de K, então $Int(\sigma) \cap Int(\tau) = \emptyset$.

A dimensão de K coincide com a dimensão da célula de maior dimensão.

Definição 2.2.6 (Subcomplexo celular, [7] p.520)**.** Um subcomplexo de um complexo celular X é um subespaço $A \subset X$ o qual é uma união de células de X, tal que o fecho de cada célula de A está contida em X.

Proposição 2.2.7. *Um espaço dominado por um complexo celular é homotopicamente equivalente a este complexo celular.*

Demonstração. A demonstração encontra-se em [7] p.528. □

Corolário 2.2.8. *Uma superfície compacta é homotopicamente equivalente a um complexo celular.*

De agora em diante, pelo Corolário 2.2.8, as superfícies serão tratadas como complexos celulares.

Definição 2.2.9 (Característica de Euler do complexo, [10])**.** A característica de Euler de um n-complexo K, denotada por $\chi(K)$, é definida pela soma alternada:

$$\chi(K) = \#(0 - \text{célula}) - \#(1 - \text{célula}) + \#(2 - \text{célula}) - \ldots + \ + (-1)^n \#(n - \text{célula}),$$

onde $\#(r - \text{célula})$ denota o número de r -células do complexo K. Para um $2 - complexo$, sejam $F = \#\{\text{ faces }\}, A = \#\{\text{ arestas }\}$ e $V = \#\{\text{ vértices }\}$. A característica de Euler pode ser escrita como

$$\chi(K) = V - A + F.$$

Definição 2.2.10 (Triangulação de superfícies, [10])**.** Uma triangulação de uma superfície (sem bordo) é um 2−complexo conexo tal que:

1. Cada aresta ´e identificada com exatamente uma outra aresta;

2. Um dado vértice pode pertencer a n triângulos, denotados por $T_1, \ldots, T_n$, de modo que nesta sequência, dois a dois triângulos são adjacentes e possuem uma aresta em comum, e T_n se identifica com T_1 ao longo de uma aresta.

Observação 2.2.11. Se um 2−complexo conexo K é uma triangulação de uma superfície S, então pelo Corolário 2.2.8:

$$\chi(S) = \chi(K).$$

Além disso, a Característica de Euler independe do 2−complexo escolhido, pois uma vez que um $2 - complexo$ é triangulação de S o mesmo domina S. (Veja o Exemplo 2.2.13).

Definição 2.2.12 (Gênero, [13])**.** Seja S uma superfície compacta, então o gênero g da superfície se relaciona com a característica de Euler de S da seguinte forma:

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g, & Se \ \ S \ \ \text{é orientável.} \\ 2 - g, & Caso \ \ \text{contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 2.2.13. Para calcular a característica de Euler da esfera S^2, basta considerar uma triangulação da mesma e calcular a característica de Euler do complexo conexo obtido. Mas observe que não é necessário tomar uma triangulação da superfície. Assim como é indicado na Figura 2.4-(b).

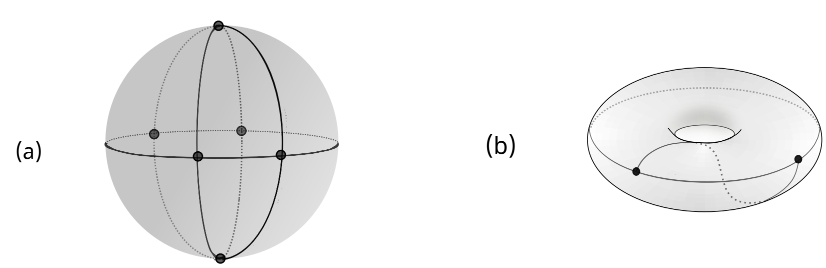


Figura 2.4: (a) Triangulação da esfera $\mathbb{S}^2$; (b) Uma representação complexial do toro.

Em (a) a triangulação da esfera $\mathbb{S}^2$ é um $2-complexo$ celular com 6 $0-células$, 12 $1-células$ e 8 $2-células$. Portanto, pela Observação 2.2.11, $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ e pela Definição 2.2.12, $g = 0$. Já em (b) o $2-complexo$ exibido é um subcomplexo de uma triangulação do toro, porém pela Observação 2.2.11 da característica de Euler de toda superfície independe do complexo. como esse complexo possui 2 $0-células$, 3 $1-células$ e 1 $2-células$, $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$. Logo, pela Definição 2.2.12, $g = 1$.

2.3 Representação planar da superfície:

Nesta seção será trabalhado o conceito de "planificação"de uma superfície. Em [5], a principal referência dessa seção, o autor discute a representação em polígonos de uma superfície compacta. O mesmo utiliza uma triangulação associada à superfície para concluir tal tarefa. Posteriormente, com essa representação, torna possível uma representação algébrica da superfície em questão, por "palavras". Nesta seção, consequentemente, serão discutidas também essas palavras.

Dadas uma superfície compacta M e uma triangulação K de M, a representação planar de M se dá nos seguintes passos:

- Escolha uma orientação para o complexo K.

- Usando as arestas dos triângulos de K decomponha a superfície M e disponha os triângulos separados em um plano Euclidiano, deformando-os caso necessário.

- Após ter decomposto a superfície, a fim de manter as informações dessas estruturas caso se queira reconstituir a superfície, indexe com letras maiúsculas do alfabeto as arestas dos triângulos, obedecendo somente a regra: Se duas arestas estão coladas, então elas receberão a mesma letra indexadora.

- Cole as arestas dos triângulos de forma a formar um polígono regular. Essa colagem deve ser feita respeitando as orientações e indexação das arestas.

Exemplo 2.3.1. Seja a superfície $M = \mathbb{S}^2$ e K a triangulação exibida na Figura 2.4. A Figura 2.5 ilustra em (a) a esfera como um complexo celular orientado, em (b) a decomposição dessa superfície em 8 triângulos, cujas arestas estão indexadas por letras do alfabeto. De (c) a (k) estão representadas as colagens dos triângulos, de modo a obter uma forma planar. Em (l) está representada uma forma simplificada do polígono (k), que representa a superfície M.

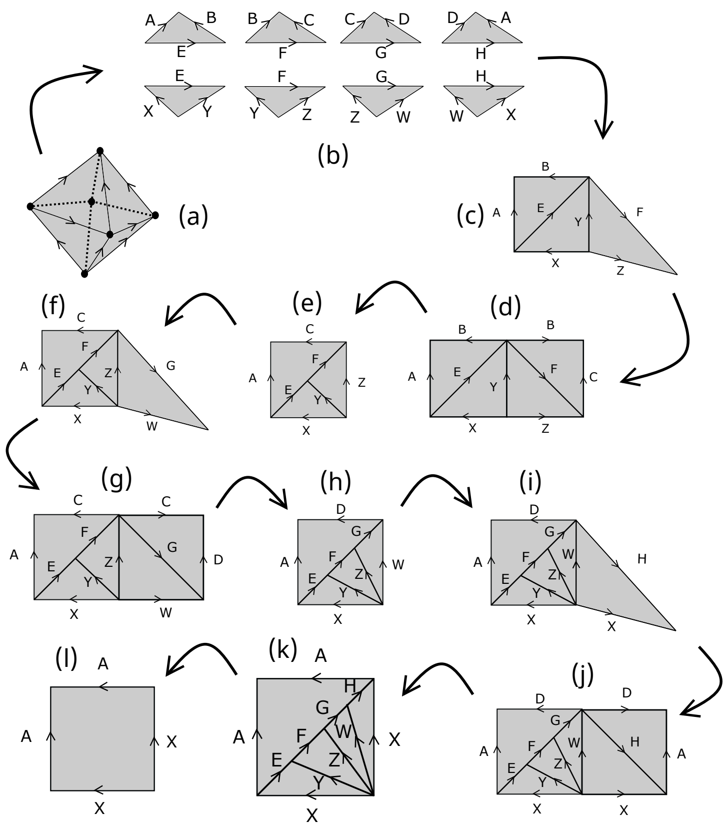


Figura 2.5: Construção do polígono para a esfera.

Exemplo 2.3.2. Na Figura 2.5 foi possível construir um polígono regular que representa a esfera $\mathbb{S}^2$. Com tal construção, percorrendo no sentido anti-horário, a esfera poder ser representada pela palavra:

$$A \ \ A^{-1} \ \ X \ \ X^{-1}.$$

Exemplo 2.3.3. Ao fazer uma construção similar à da Figura 2.5 para o Toro, obtém-se o seguinte diagrama:

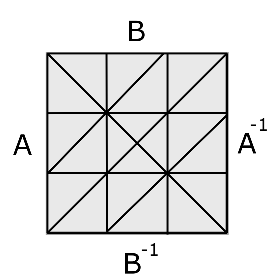


Figura 2.6: Diagrama referente ao Toro

Dessa forma, seguindo no sentido anti-horário, a palavra que representa o toro é:

$$A \;\; B \;\; A^{-1} \;\; B^{-1}$$

Topologicamente falando, é possível transformar as superfícies sem que haja mudanças em sua topologia. Como as palavras vistas construídas nesta seção e exemplificada no Exemplo 2.3.2 indexam os diagramas, que por sua vez representam fielmente as superfícies, é plausível pensar que existem transformações nestas palavras que não implicam em mudanças nas superfícies. De fato! A seguir serão apresentadas as transformações que feitas nas palavras não alteram a superfície. Essas propriedades podem ser vistas também em [5] p.54.

Propriedade 2.3.4. Se α, β e Γ representam blocos quaisquer de uma dada palavra, então algumas das transformações que não alteram a topologia da superfície serão apresentadas nos três seguintes propriedades:

1. Pode-se dizer que a permutação cíclica de uma palavra não altera a topologia da superfície a qual estas estão associadas, ou seja, $\alpha\beta = \beta\alpha$.
2. A remoção ou introdução de um par de consecutivas arestas $A \;\; A^{-1}$ (ou $A^{-1} \;\; A$), no polígono e consequentemente na palavra não altera a topologia da superfície. Isto é, $\alpha \;\; A \;\; A^{-1} \;\; \beta = \alpha \;\; \beta$.
3. Considerando a superfície representada pelo bloco β, tem-se que β^{-1} também representa a superfície, ou seja, $\beta = \beta^{-1}$.
4. A permutação de dois blocos quaisquer, entre duas arestas do tipo A e A^{-1}, não altera a topologia da superfície, ou seja, $\alpha \; A \; \beta \; \Gamma \; A^{-1} = \alpha \; A \; \Gamma \; \beta \; A^{-1}$. A fim de exemplificar a Propriedade 4 basta observar a Figura 2.7.

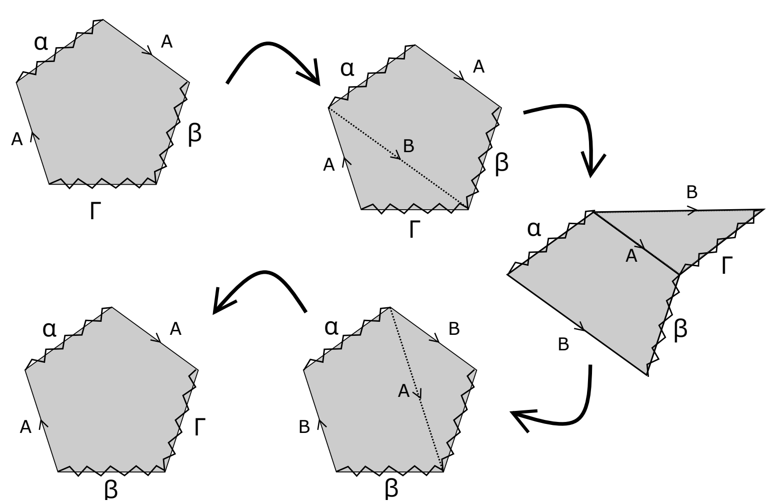


Figura 2.7: Permutação no diagrama

Note que a permutação cíclica da palavra, Propriedade 1, significa trocar o ponto de início quando se percorre o diagrama poligonal a fim de determinar a palavra. A cargo de exemplo observe que na Figura 2.5, caso se comesse na aresta X, da direita, percorrendo no sentido anti-horário, obtém-se a palavra obtida seria:

$$X^{-1} \ X \ A \ A^{-1}$$

Como foi obtida com a mesma construção e do mesmo diagrama, apenas com leituras diferentes as palavras $A \ A^{-1} \ X^{-1} \ X$ e $X^{-1} \ X \ A \ A^{-1}$ são equivalentes.

Já a Propriedade 2, que fala sobre a inclusão de um par $A \ A^{-1}$ consecutivamente em um diagrama pode ser observada na antepenúltimo passo da Figura 2.5 onde as ares D e D^{-1} são associadas e não interferem na representação da superfície. No passo citado a palavra associada é:

$$A \ D^{-1} \ D \ A^{-1} \ X^{-1} \ X$$

Ao associar as arestas D e D^{-1} obtém-se a palavra:

$$A \ A^{-1} \ X^{-1} \ X$$

Por fim, a Propriedade 3, diz que percorrer o polígono em qualquer sentido é indiferente.

2.4 Grafos

Esta seção contém o conceito de grafo e suas propriedades. O mesmo visa fornecer ao leitor definições e teoremas que serão usados de forma natural nos capítulos seguintes.

No presente trabalho serão trabalhados apenas grafos conexos. A fim de organizar ferramentas para o trabalho que será desenvolvido a partir da teoria de grafos são necessárias as definições de alguns invariantes topológicos que são de extrema importância . O mais conhecido deles segue na Definição 2.4.12.

Definição 2.4.1 (Grafo, [1] p.1)**.** Um grafo G é um par ordenado de conjuntos disjuntos (V, A) tal que A é um subconjunto do conjunto V^2 de pares não ordenados de V.

Observação 2.4.2. Aqui serão considerados somente grafos finitos, então V e A são finitos.

Um grafo é um $1 - complexo$ celular.

Observação 2.4.3. Se G é um grafo, então $V = V(G)$ é o conjunto de vértices de G, e $A = A(G)$ é o conjunto de arestas.

Se os vértices v, w são as extremidades de uma aresta, ela será representada por $\{v, w\}$, vw ou wv. Neste caso, se diz que os vértices v e w são adjacentes.

Quando o par for $\{vv\}$, essa aresta será chamada de laço.

Definição 2.4.4 (Grau, [1] p.3)**.** O grau de um vértice V, denotado por $dg(V)$, é o número de arestas que estão ligadas a ele. Sendo que um laço conta duas vezes.

Observação 2.4.5. Seja v um vértice do grafo $G(V, A)$. Neste caso, a Definição 2.4.4 é equivalente a considerar uma bola de centro v e raio $\epsilon > 0$ e contar as arestas contidas nessa bola. Este número é o grau do vértice v.

Definição 2.4.6 (K-regular, [1] p.4)**.** Um grafo $G(V, A)$ será dito K-regular quando todos os vértices do grafo tiverem o mesmo grau K.

Definição 2.4.7 (Subgrafo, [1] p.2)**.** Um grafo $G'(V', A')$ é dito um subgrafo de $G(V, A)$ se $V' \subset V$ e $A' \subset A$.

Definição 2.4.8 (Caminho, [1] p.4)**.** Um caminho em um grafo G, é um subgrafo P, de G, da seguinte forma: $V(P) = \{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$, $E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{l-1}x_l\}$. Normalmente esse caminho é denotado por $x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{l-1}x_l$.

Definição 2.4.9 (Ciclo, [1] p.5)**.** Se $W = x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{l-1}x_l$ é tal que $l \geq 3$, $x_0 = x_l$ e os vértices $x_i; 0 < i < l$ são distintos entre si e de x_0, então W é dito um ciclo, por simplicidade esse ciclo será denotado por $x_0, x_1, \ldots, x_l$.

Definição 2.4.10 (Grafo orientado, [1] p.8)**.** Um grafo orientado é grafo direcionado obtido pela orientação das arestas de um grafo, tais como, dada a aresta ab, ela pode ser orientada como $\vec{ab}$ ou $\vec{ba}$.

Definição 2.4.11 (Número de Betti, [14])**.** O número primeiro de Betti de um grafo $G(V, A)$ é dado por:

$$\beta(G) = S - V + A,$$

onde S representa o número de componentes conexas do grafo G.

Definição 2.4.12 (Característica de Euler, [14])**.** Seja $G(V, A)$ um grafo. A característica de Euler de G, denotada por $\chi(G)$, será dada por:

$$\chi(G) = V - A.$$

Como neste trabalho serão tratados apenas grafos conexos, segue que o primeiro número de Betti será dado por:

$$\beta(G) = 1 - V + A.$$

Observação 2.4.13. O número $\beta(G)$ define o número de ciclos livres do grafo G. O grafo com um único vértice e β laços, será chamado de I_β. Este grafo é $2\beta - regular$.

Definição 2.4.14 (Árvore)**.** Um grafo será denominado árvore quando não admitir ciclos.

Exemplo 2.4.15. A Figura 2.8 representa em (a) um grafo com 2 ciclos livres, em (b) uma árvore e em (c) um grafo $4 - regular$.

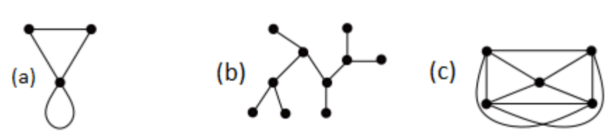


Figura 2.8: Exemplos de grafos.

2.5 Grafos sobre uma superfície

A partir de agora, serão relacionados de forma direta os conceitos de grafos e superfícies. Assim como as suas propriedades. Nesta seção será definido o conceito de gênero de um grafo, além de discutir as relações topológicas entre esses os grafos e as superfícies, quando relacionados. Será denotado por M_g a superfície fechada e orientada de gênero g.

Definição 2.5.1 (Gênero de um grafo, [1])**.** O gênero de um grafo conexo G é o menor número "g" para o qual existe um mergulho:

$$i : G \to M_g.$$

Vale observar que:

(1) Se g é maior ou igual ao gênero do grafo, então, necessariamente, existe o mergulho $i : G \to M_g$.

(2) Segundo a definição de gênero de um grafo, está implícito que o gênero de um grafo coincide com o gênero da superfície de menor gênero a qual o grafo pode ser representado sobre ela, sem que haja interseção de arestas. A naturalidade dessa observação decorre diretamente da definição de mergulho.

Definição 2.5.2 (Faces)**.** Seja G um grafo mergulhado em uma superfície M_g. Se omitirmos os vértices e arestas de G, o restante que sobrar nas componentes conexas são chamadas faces.

Exemplo 2.5.3. A Figura 2.9 representa mergulhos de grafos sobre o toro. Em (a) o grafo mergulhado divide M_1 em duas faces uma simplesmente conexa (Homeomorfa a um disco) e outra não. Já em (b) o grafo mergulhado divide M_1 em três regiões simplesmente conexas.

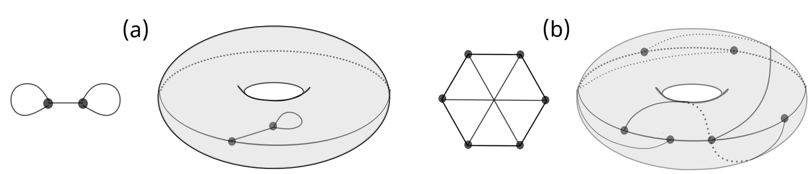


Figura 2.9: Mergulho de um grafo, com dois vértices em um toro.

A partir de agora, será denotado por $\mathcal{G} = i(G)$ o mergulho de G sobre a superfície M_g. As faces determinadas por um grafo mergulhado em uma superfície serão denotadas por F, ou seja, será denotado por F, o número de componentes conexas do complemento do grafo, relativo à superfície de gênero g, $M_g \setminus \mathcal{G}$.

Proposição 2.5.4 ([8] p.4)**.** *Se $M_g - \mathcal{G}$ tem F regiões simplesmente conexas (homeomorfas ao disco), então $\chi(G) = 2 - 2g - F$.*

Demonstração. A característica de Euler de uma superfície M_g é dada por:

$$\chi(M_g) = V - A + F = \chi(G) + F,$$

onde F é o número de regiões de $M_g \setminus \mathcal{G}$ simplesmente conexas. Por outro lado,

$$\chi(M_g) = 2 - 2g.$$

Daí,

$$\chi(G) = 2 - 2g - F.$$

□

Corolário 2.5.5. *Seja $\mathcal{G}$ um grafo sobre M_g. Portanto, $\chi(G) = \chi(M_g) \setminus F$. Onde F é o número de regiões simplesmente conexas de $M_g \setminus \mathcal{G}$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.5.4, $\chi(G) = 2 - 2g - F$.
De acordo com a Definição 2.2.12, se M_g é orientável, $\chi(M_g) = 2 - 2g$. Daí, $\chi(G) = \chi(M_g) \setminus F$. □

Capítulo 3

Extensões de grafos sobre M_g

Em [8] estão definidos os conceitos de extensão dos vértices de um grafo e suas propriedades. Neste capítulo serão exibidos tais conceitos assim como estão descritos em [8] visto que tais resultados são de extrema importância e relevância tanto para os estudos de grafos de modo geral, quanto para o decorrer do presente trabalho.

3.1 Extensão de grafos:

A seguir a Definição 3.1.1, ponto inicial do trabalho feito em [8] nos fornece uma técnica que permite, a partir de um dado grafo G, encontrar um novo grafo, digamos G_1, chamado Extensão de G.

Definição 3.1.1 (Alongamento de um vértice, [8] p.2)**.** Uma aresta "uv" $\in G$ é dita uma extensão do vértice $w \in G_1$ se os vértices $u, v \in G$ e a aresta "uv" pode ser obtida por um "alongamento"do vértice w. Nesse caso, dizemos que o grafo G é uma extensão, a um vértice, de G_1 ou G_1 é uma contração, a um vértice, de G.

Definição 3.1.2 (Extensão de grafos)**.** Dizemos que um grafo G é uma extensão de um grafo G_1 quando G pode ser obtido pelo alongamento de um ou mais vértices de G_1.

Observação 3.1.3. Se $G_1(V_1, A_1)$ é uma extensão de $G(V, A)$, então $V_1 = V + M$ e $A_1 = A + M$, onde M é o número de vértices que foi estendido. De fato, pois cada vez que se faz uma extensão de um vértice, aumenta em uma unidade o número de vértices e o número de arestas. então ao repetir o processo M vezes, obtém-se as igualdades exibidas.

Definição 3.1.4 (Grafo canônico)**.** O grafo com um único vértice e β arestas será chamado de I_β.

Exemplo 3.1.5. A Figura 3.3 ilustra extensões do grafo I_4. Seguindo s sequências (a)(d)(e), (b)(c)(g) ou (b)(c)(f), obtém-se grafos $3-regulares$ com 6 vértices.

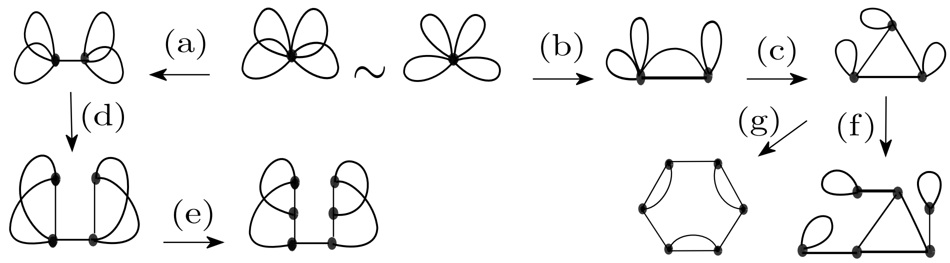


Figura 3.1: Algumas extensões de I_4

Observe que a característica de Euler de I_4 é:

$$\chi(I_4) = 1 - 4 = -3.$$

Logo, como era esperado, o número de Betti:

$$\beta(I_4) = 1 - \chi(I_4) = 1 + 3 = 4$$

Agora seguindo para a seta indexada por (a), segue que o número de Betti do grafo obtido por tal extensão é dado por:

$$\beta(G_1) = 1 - \chi(G_1) = 1 - (2 - 5) = 1 + 3 = 4$$

De modo análogo seguindo a seta indexada por (g):

$$\beta(G_2) = 1 - \chi(G_2) = 1 - (6 - 9) = 1 + 3 = 4$$

segue analogamente para os demais grafos provenientes de extensões de I_4.

Algumas características importantes da extensão de grafos, como a sua relação com a característica de Euler e o número de Betti, são tratadas em [8] e serão também tratadas com detalhe. As Proposições 3.1.6 e 3.1.7 tratam, exatamente, do fato destacado no Exemplo 3.1.5.

Proposição 3.1.6. *A extensão e contração de um grafo G não altera a sua característica de Euler.*

Demonstração. Se G possui V vértices e A arestas, então pela Definição 2.4.12

$$\chi(G) = V - A.$$

Se $G_1(V_1, A_1)$ é uma extensão de G, então, pela Observação 3.1.3, $V_1 = V + M$ e $A_1 = A + M$, onde M é o número de extensões de vértices necessárias para se obter

G_1 a partir de G. Portanto,

$$\chi(G_1) = (V + M) - (A + M) = V - A = \chi(G).$$

Portanto a extensão e contração de um grafo G não altera a sua característica de Euler. □

Proposição 3.1.7 ([8] p.3)**.** *Extensão e contração de grafos preservam o número de ciclos livres.*

Demonstração. Considere G um grafo com V vértices, A arestas. Pela Definição 2.4.11, o número de ciclos livres é dado por:

$$\beta(G) = 1 - V + A.$$

Digamos que os V vértices são estirados, então teremos $\overline{V} = 2V$ vértices e $\overline{V} = A + V$ arestas. Pela Definição 2.4.11 , o número de ciclos livres da extensão é dado por:

$$\beta(G_1) = 1 - \overline{V} + \overline{A}.$$

Daí,

$$\beta(G_1) = 1 - (2V) + (A + v) = 1 - V + A = \beta(G).$$

Onde G_1 é uma extensão de G.
A demonstração segue análoga se são estirados $n < V$ vértices. □

As Proposição 3.1.6 e Proposição 3.1.7 são os resultados base de [8], a respeito da extensão de grafos.

Corolário 3.1.8. *Sejam G_1' e G_2' grafos obtidos após aplicar sequências E_1 e E_2 de extensões ou contrações sobre os grafos G_1 e G_2, respectivamente. Se $G_1' = G_2'$, então $\chi(G_1) = \chi(G_2)$.*

Demonstração. De fato, como $G_1' = G_2'$, temos que $\chi(G_1') = \chi(G_2')$. Visto que a característica de Euler é invariante por extensões ou contrações e G_1' é gerado por uma sequência de extensões ou contrações de G_1, segue:

$$\chi(G_1) = \chi(G_1').$$

De modo análogo, temos:

$$\chi(G_2) = \chi(G_2').$$

□

O Corolário 3.1.9 tem uma grande relevância no decorrer do trabalho, pois ele será usado como base para a construção do capítulo final e neste caso o principal deste texto.

Corolário 3.1.9 ([8] p.3)**.** *Todo grafo conexo, com β ciclos livres pode ser contraído em um grafo I_β.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo com β ciclos livres, então quaisquer dois vértices u e v de G são conectados por um caminho, podendo ser contraídos em um vértice. Consequentemente, qualquer ciclo pode ser contraído em um *loop*. Devido à contração de todos os caminhos será obtido um único vértice com β *loops*. □

A Proposição 3.1.10 resultado é citado em [8], aqui será apresentada também a sua prova.

Proposição 3.1.10. *Se uv é proveniente de uma extensão do vértice w, então:*

$$\deg(w) = deg(u) + deg(v) - 2.$$

Demonstração. Ao estender o vértice w, surge uma aresta entre os vértices u e v, provenientes da extensão. Portanto essa aresta é o diferencial entre o grau de w e a soma dos graus de u e v. Como a aresta uv conecta os vértices u e v, segue que a mesma incrementa tanto no grau de u quanto no grau de v em uma unidade. Logo,

$$deg(w) = (deg(u) - 1) + (deg(v) - 1) = deg(u) + deg(v) - 2.$$

□

3.2 Extensões de grafos sobre M_g

Até o momento, foram feitas apenas extensões de grafos no espaço. Mas é natural pensar: *Será que essas extensões de grafo podem ser feitas sobre algumas restrições dos espaços, mais especificamente, elas podem ser feitas sobre superfícies?*

A resposta é sim! Se $\mathcal{G}_1$ é um grafo imerso em uma superfície M_g e w é um vértice de $\mathcal{G}_1$, então é possível construir um novo grafo $\mathcal{G}$, mergulhado na superfície M_g, via um alongamento do vértice w sobre a superfície M_g.

Definição 3.2.1. Se $\mathcal{G}$ é um grafo obtido do grafo $\mathcal{G}_1$ via um alongamento de vértices sobre a superfície M_g, então dizemos que $\mathcal{G}$ é uma extensão sobre M_g, de $\mathcal{G}_1$.

Exemplo 3.2.2. Na Figura 3.2 pode ser observado, em (a), um mergulho do grafo I_4 sobre o Bitoro. Em (b), (c) e (d), seguem grafos que podem ser retraídos no grafo I_4. Em (b) está ilustrado a extensão $5 - regular$ de I_4. Em (c) está representada uma extensão do grafo (b), onde foram feitas duas extensões a partir de um dos vértices 5-regulares. Em (d) está representada uma extensão do grafo (c), onde foram feitas duas extensões do grafo (c) a partir do vértice $5-regular$, obtendo assim um grafo $3-regular$.

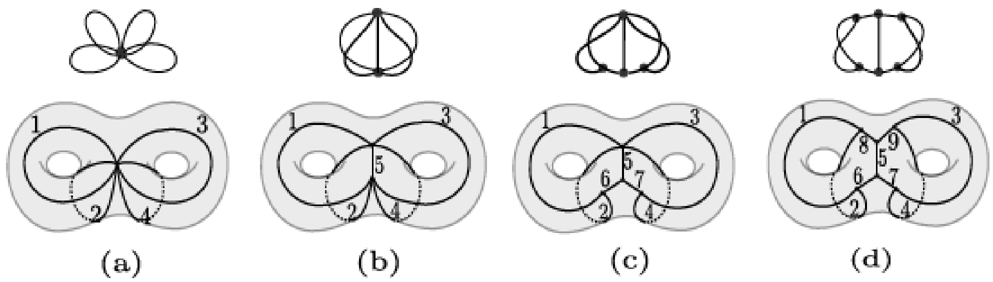


Figura 3.2: Grafos sobre o Bitoro

Exemplo 3.2.3. Com o objetivo de explorar a Definição 3.2.1, considere a Figura 3.2.3. A mesma ilustra uma visão local das extensões do I_4 exibidas na Figura 3.2, de forma respectiva, e pode ser observado que essas extensões podem, todas, ser feitas no interior de um círculo de raio fixo. Além disso, nesta visão local as áreas separadas pelas arestas estão indexadas com letras de a até h. E ao decorrer das extensões a quantidade de áreas não é alterada. Esse fato não é particular deste exemplo e será generalizada na Proposição 3.2.6.

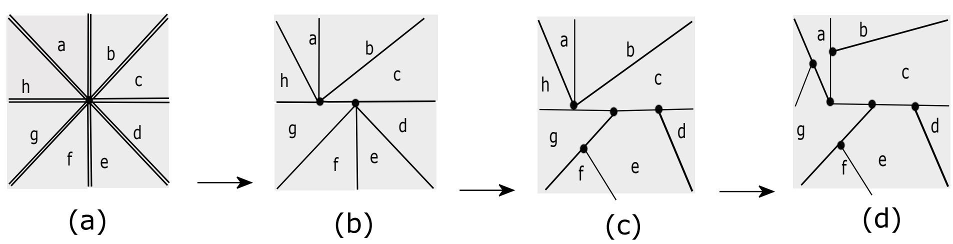


Figura 3.3: Exemplo local de extensão

Naturalmente, da mesma forma que um grafo pode ser estendido, um grafo pode ser contraído, desde que tenha mais de um vértice, ou seja a operação da Definição 3.1.1 é reversível. O Exemplo 3.2.3 permite, também, observar esse fato, bastando apenas percorrer o caminho contrário das setas indicadoras.

Observação 3.2.4. Os movimentos feitos na Figura 3.3 são alguns exemplos dos movimentos permitidos na extensão de grafos. Vale ainda observar que apesar de qualquer grafo poder ser estendido, as extensões não serão mais "eficazes"quando o vértice tiver grau menor ou igual 3.

De fato, neste caso ao estender um vértice de grau três, o novo vértice terá grau dois e só estará aumentando o comprimento do caminho ao qual ele pertence, nada além disso. Portanto, no decorrer do trabalho um dado vértice poderá ser estendido se, e somente se o grau do mesmo for maior que 3.

Exemplo 3.2.5. A Figura 3.4 é a representação local de todas as possibilidades de extensão de apenas um vértice de grau 6, sobre uma superfície M_g. Visto que o grafo em questão tem grau 6, a extensão desse vértice gera um vértice com grau 3 e outro com grau 5 ou dois vértices com grau 4. A tarefa de contabilizar as possibilidades para cada opção citada é uma tarefa simples de combinatória.

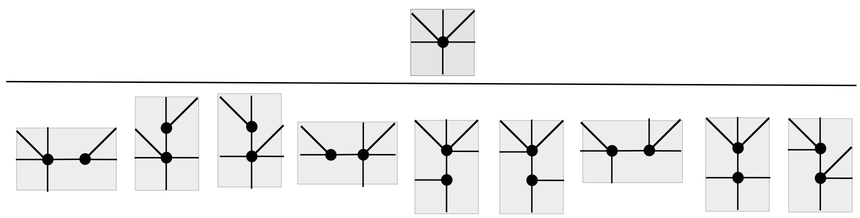


Figura 3.4: Representação local de todas as extensões de um vértice de grau 6.

A Proposição 3.2.6 garante mais uma propriedade da operação de extensão de um grafo, que diz respeito ao número de regiões simplesmente conexas existentes no complemento do grafo relativo à superfície.

Proposição 3.2.6 ([8] p.4)**.** *A extensão e contração de um grafo sobre uma superfície não altera o número de componentes conexas do complemento do grafo.*

Demonstração. O estiramento de um vértice de um grafo sobre uma superfície altera em uma unidade o número de vértices e o número de arestas e por sua vez altera somente o número de arestas das regiões simplesmente conexas do complemento do grafo, sem alterar o número de regiões simplesmente conexas. □

Exemplo 3.2.7. Dada uma triangulação para o toro, estirar os vértices dessa triangulação apenas o formato das regiões são alterados, mantendo portanto o número de componentes simplesmente conexas do complemento do grafo relativo à superfície. Como pode ser visto na Figura 3.5.

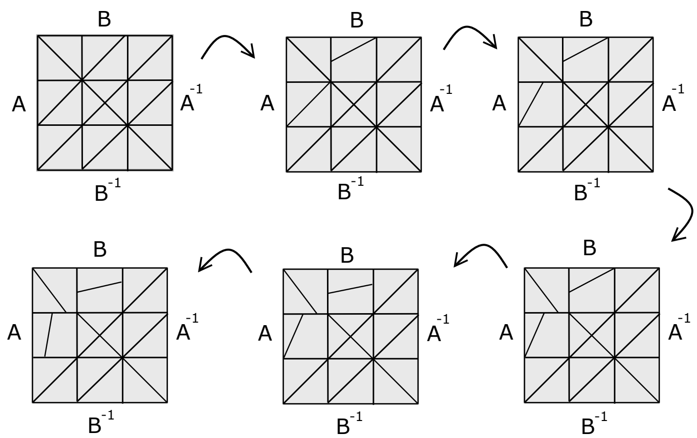


Figura 3.5: Extensão de uma triangulação para o toro.

Teorema 3.2.8 ([8] p.5)**.** *Todo grafo conexo mergulhado na superfície M_g, com β ciclos livres, pode ser contraído no grafo do tipo I_β, com um vértice e β ciclos livres.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G}$ um grafo conexo com β ciclos livres, mergulhado sobre M_g. Visto que M_g é conexa por caminhos, pode-se esticar uma aresta de cada ciclo livre de $\mathcal{G}$ e contrair as demais em um vértice. □

3.3 Grafos e diagramas de emparelhamento

Na Seção 3.2 foi visto que quando um grafo é mergulhado em uma superfície, no caso deste trabalho orientada e fechada, o mesmo define faces sobre a superfície. Até o momento, não foi feita nenhuma restrição nesse sentido. Porém, no presente capítulo será discutido um tipo particular de grafos, que será denominado grafos de emparelhamento, assim como as propriedades referentes aos grafos de emparelhamento.

3.3.1 Grafos de emparelhamento

Na Figura 2.5 foi exibida uma representação poligonal da esfera $\mathbb{S}^2$, a partir de uma triangulação dada. Com base na mesma figura é possível observar que, naquele caso, ao fazer a associação das arestas do polígono, o grafo obtido sobre a superfície é distinto da triangulação inicial. Mesmo quando é feita essa identificação das arestas no penúltimo polígono da Figura 2.5 o grafo final sobre a superfície seria distinto da triangulação inicial, visto que no processo de construção do polígono foram "perdidas"informações da triangulação no momento em que algumas arestas foram colapsadas, no caso as arestas B, C e D.

Uma questão plausível é, será que existem grafos mergulhados em uma superfície tal que seja possível executar o processo descrito na Seção 2.3 e, além disso, quando associar as arestas do polígono obtido poder voltar exatamente no mesmo grafo? A resposta é sim! Nesta Subseção serão definidos os grafos que tem essa propriedade. Os mesmos serão chamados de grafos de emparelhamento, como pode ser visto na Definição 3.3.1.

Definição 3.3.1 (Grafo de emparelhamento, [9] p.452)**.** Um grafo $\mathcal{G}$, mergulhado numa superfície M_g, é dito grafo de emparelhamento de tal superfície, se o complemento $M_G \setminus \mathcal{G}$ é simplesmente conexo, ou seja, homeomorfo a um disco.

Exemplo 3.3.2. A Figura 3.6 ilustra a representação local de um grafo de emparelhamento. Cujo vértice em questão é $3 - regular$.

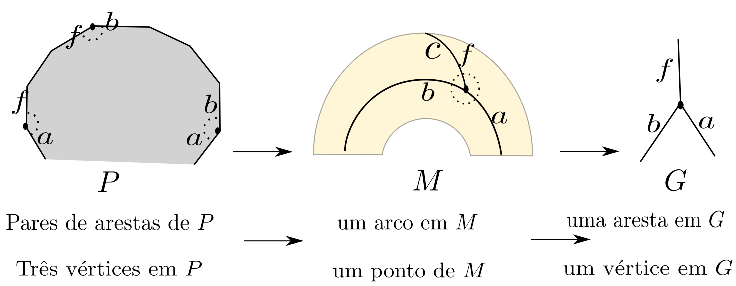


Figura 3.6: Representação local de grafo de emparelhamento sobre uma superfície

Exemplo 3.3.3. A assim como a forma a qual um grafo é mergulhado em uma superfície é essencial para o estudo de grafos de emparelhamento, a escolha da superfície também o é. Na Figura 3.7 seguem dois mergulhos de um mesmo grafo sobre o Toro e sobre o Bitoro, respectivamente. O mergulho da esquerda já foi discutido na Figura 2.9, nele foi concluído que o complemento de tal grafo é constituído por 3 regiões simplesmente conexas. Logo, não é um grafo de emparelhamento para o Toro. Já o mergulho da direita é um grafo de emparelhamento para o Bitoro, visto que o complemento do mesmo admite apenas uma componente simplesmente conexa.

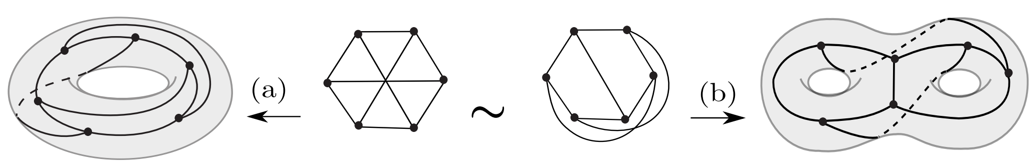


Figura 3.7: Grafo mergulhado sobre o toro e Bitoro

Exemplo 3.3.4. Na Figura 2.2 pode ser observado que o complemento do grafo admite uma única componente conexa e portanto o mesmo constitui um grafo de emparelhamento. Além disso, ao associar as arestas do polígono obtido, obtém-se o mesmo grafo sobre o toro, ou seja, existe uma associação biunívoca entre as arestas do grafo e as arestas do diagrama. Ao diagrama com essa propriedade também será dado um nome especial, formalizado na Definição 3.3.12.

A seguir serão descritas e demonstradas algumas propriedades dos grafos de emparelhamento, apresentadas em [8].

Proposição 3.3.5 ([8] p.5)**.** *Se $\mathcal{G}$ é um grafo de emparelhamento sobre M_g, então $V - A = 1 - 2g$.*

Demonstração. Se $\mathcal{G}$ é um grafo de emparelhamento sobre M_g, o complemento de $\mathcal{G}$ sobre M_g é simplesmente conexo, portanto $F = 1$. Dessa forma:

$$A - V = 2g - 2 + F = 2g - 1.$$

□

Corolário 3.3.6 ([8] p.6)**.** *O grafo de emparelhamento $\mathcal{G}$ é uma árvore se, e somente se, $M_g = \mathbb{S}^2$.*

Demonstração. Mostremos, primeiramente, que se o grafo de emparelhamento é uma árvore, então $M_g = \mathbb{S}^2$. Observe que sendo $\mathcal{G}$ uma árvore, temos que tal grafo não possui nenhum ciclo, então:

$$\beta(\mathcal{G}) = 1 - \chi(\mathcal{G}) \to 0 = 1 - \chi(\mathcal{G})$$

Ou seja,

$$\chi(\mathcal{G}) = 1.$$

Pela Proposição 3.3.5, temos:

$$V - A = 1 - 2g \to \chi(\mathcal{G}) = 1 - 2g \to 2g = 1 - 1 = 0 \to g = 0.$$

Logo, $M_g = \mathbb{S}^2$.
Agora, resta mostrar que se $M_g = \mathbb{S}^2$, então $\mathcal{G}$ é uma árvore. Sendo $M_g = \mathbb{S}^2$, temos que $g = 0$. Pela Proposição 3.3.5:

$$V - A = 1 - 2g \to \chi(\mathcal{G}) = 1.$$

Dessa forma,

$$\beta(\mathcal{G}) = 1 - \chi(\mathcal{G}) \to \beta(\mathcal{G}) = 0.$$

Portanto, $\mathcal{G}$ é uma árvore. □

Proposição 3.3.7 ([8] p.6)**.** *Seja $\mathcal{G}$ um grafo de emparelhamento com V_i vértices e A arestas sobre M_g. Sendo que o grafo $\mathcal{G}$ tem V_i vértices com grau K_i, para $i = 1, ..., r$, então:*

$$2A = \sum_{i=1}^{r} K_i.V_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{r}(K_i - 2)V_i = 2(2g - 1).$$

Demonstração. Se $\mathcal{G}$ tem V_i vértices com grau K_i, para $i = 1, ..., r$, o número total de vértices é dado por:

$$V = \sum_{i=1}^{r} V_i$$

e o número total de arestas é dado por:

$$A = \frac{1}{2}. \sum_{i=1}^{r} V_i.K_i$$

pois cada aresta conecta dois vértices.
Daí,

$$2(A - V) = \sum_{i=1}^{r} V_i.(K_i - 2).$$

Como, pela Proposição 3.3.5 , $V - A = 1 - 2g$, segue que:

$$2(A - V) = 2(2g - 1).$$

Das duas últimas igualdades segue que:

$$\sum_{i=1}^{r} (K_i - 2)V_i = 2(2g - 1).$$

□

Tendo em vista a dificuldade, enfrentada em [4], por *Faria* e *Palazzo Jr*, de obter grafos de emparelhamento, em [3] *Faria*, *Mendes de Jesus* e *Romero Sánchez*, trouxeram um grande avanço, onde foram definidas as cirurgias verticais e horizontais de grafos. As quais permitiram, dados grafos de emparelhamento, determinar uma série de grafos desse tipo usando essas cirurgias, porém não era possível determinar todos os grafos a partir delas. Agora, o Lema 3.3.8 se faz de grande valia, no sentido de obter grafos de emparelhamento, desde que se conheça ao menos um, se tornando assim um facilitador. Unindo o Lema 3.3.8 com o Teorema 3.2.8, pode-se concluir que usando a extensão de grafos de emparelhamento é possível obter todos dos grafos de emparelhamento para um gênero fixado.

Lema 3.3.8 ([8] p.6)**.** *Seja $\mathcal{G}$ um emparelhamento sobre a superfície M_g. Se $\mathcal{G}_1$ é uma extensão ou uma contração sobre M_g, do grafo $\mathcal{G}$ sobre M_g, então $\mathcal{G}_1$ é um grafo de emparelhamento de M_g.*

Demonstração. Visto que o número de componentes simplesmente conexas de $M_g - \mathcal{G}$ é igual a 1, $F = 1$, eque $\mathcal{G}_1$ é extensão de $\mathcal{G}$. Pela Proposição 3.2.6, segue que o número de componentes simplesmente conexas do complemento $M_g \setminus \mathcal{G}_1$ também é igual a 1. Logo, $\mathcal{G}_1$ também é um grafo de emparelhamento. □

Exemplo 3.3.9. Como visto na Figura 2.2, o grafo indicado constitui um grafo de emparelhamento para o toro. Portanto, de acordo com o Lema 3.3.8 qualquer extensão do grafo, feita sobre o toro, também o é. A Figura 3.8 representa uma construção poligonal para o toro, via um grafo $G(2,3)$ com dois vértices e três arestas obtido como extensão do grafo I_2, com um vértice e duas arestas. Note que o grafo $G(2,3)$ admite uma correspondência biunívoca com as arestas do polígono regular de 6 lados. Além disso, a palavra que representa o toro, de acordo com o diagrama, partindo de A no sentido anti-horário é:

$$A \;\; B^{-1} \;\; C \;\; A^{-1} \;\; B \;\; C^{-1}$$

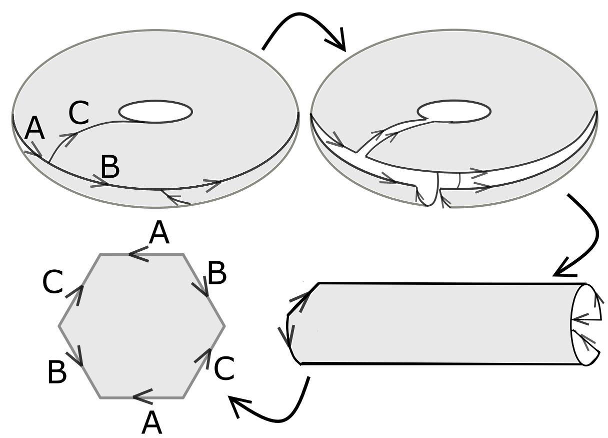


Figura 3.8: Construção de uma forma poligonal para o toro.

Exemplo 3.3.10. A Figura 3.9 ilustra duas extensões do grafo de emparelhamento do toro I_2. O grafo indicado em (a) é também um grafo de emparelhamento para o Toro, enquanto o grafo indicado em (b) não é. Essa aparente incongruência com a proposição se dá do fato que tais extensões foram feitas no espaço.

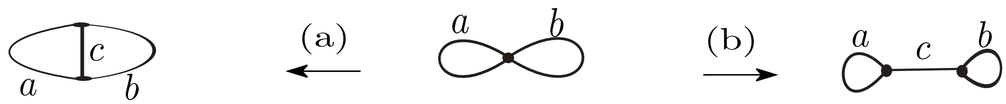


Figura 3.9: Extensões do grafo I_2

Quando mergulhamos tais grafos sobre o toro, é possível ver que apenas um deles pode ser contraído em um grafo de emparelhamento de um vértice, veja a Figura 3.10. Tal fenômeno é decorrente do fato dessas extensões terem sido feitas no espaço e não sobre a superfície.

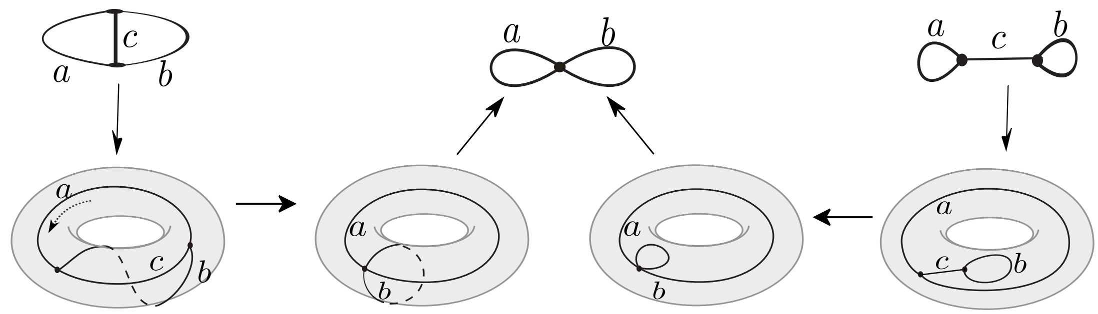


Figura 3.10: Mergulhos sobre o Toro de extensões do I_2

Proposição 3.3.11 ([8] p.7)**.** *Todo grafo de emparelhamento $\mathcal{G}$ sobre uma superfície M_g pode ser obtido por extensão do grafo canônico I_{2g}.*

Demonstração. Como $\mathcal{G}$ é um grafo de emparelhamento, segue da Proposição 3.3.5 que:

$$A - V = 2g - 1.$$

Daí,

$$2g = 1 + A - V = \beta(\mathcal{G}).$$

Dessa forma, como foi visto no Corolário 3.1.9, $\mathcal{G}$ pode ser contraído em $I_{\beta(\mathcal{G})}$. Portanto, basta fazer o caminho inverso e obter $\mathcal{G}$ a partir de I_{2g}. □

O resultado da Proposição 3.3.11 será usado diretamente no desenvolvimento deste trabalho. Será exibido, dado um grafo I_β, quantos grafos podem ser estendidos do mesmo. Contabilizando quais desses são regulares.

3.3.2 Diagramas de emparelhamento

Considerando que $\mathcal{G}$ é uma grafo de emparelhamento sobre a superfície M_g, a fim de fixar um invariante para os grafos, segue que existe uma aplicação quociente, $q : P \to M_g$, que associa o bordo de um polígono regular, P, de $2A$ lados, sendo A o número de arestas do grafo em questão.

Em [9] o autor parte dos diagramas, emparelha as suas arestas e dessa forma obtém a superfície e portanto os grafos de emparelhamento. Já em [8] parte-se do grafo, o mergulham sobre a superfície e obtém-se os respectivos diagramas.

A Definição 3.3.12 formaliza o conceito dos polígonos regulares associados a superfícies, via grafos, tais que esses grafos estão associados de forma biunívoca às arestas do polígono.

Definição 3.3.12 (Diagrama de emparelhamento, [8] p.5)**.** O conjunto de segmento de retas que apontam os pares de arestas de $\mathcal{P}$ identificado por M_g, será chamado diagrama de emparelhamento, denotado por D. O emparelhamento do polígono $\mathcal{P}$, com $4g$ lados, sobre a superfície M_g chamaremos de emparelhamento canônico.

Definição 3.3.13 (Diagramas equivalentes)**.** Dois diagramas de emparelhamento $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ são ditos equivalentes se $\mathcal{D}_1$ pode ser obtido de $\mathcal{D}_2$ por alguma rotação, reflexão por algum eixo ou combinação delas.

Quando a questão é associar um polígono a uma superfície, existem duas características importantes. A primeira é indicar quais arestas devem ser emparelhadas e a segunda é o direcionamento das mesmas para garantir que essa colagem das arestas seja possível. Na Seção 2.3, foi apresentada a palavra, que supre essas duas necessidades. Porém, a cargo de simplicidade, pode-se usar um segmento de reta conectando as arestas do polígono que serão conectadas e manter as setas de orientação como na Figura 3.11 .

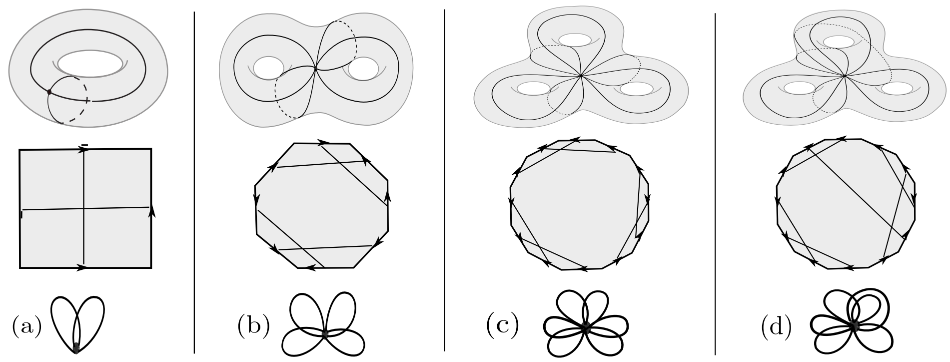


Figura 3.11: Grafos mergulhados e seus respectivos diagramas.

Observação 3.3.14. Em [8], os diagramas aparecem como na Figura 3.11, porém sem a identificação do direcionamento das arestas. Tal fato se dá partindo do pressuposto que as arestas a serem emparelhadas devem ter direções opostas. Dessa forma, é indiferente o direcionamento das arestas conectadas, desde que seja respeitado o pressuposto. Note ainda que tal alteração não altera o polígono, o emparelhamento das arestas, a superfície obtida e nem o grafo.

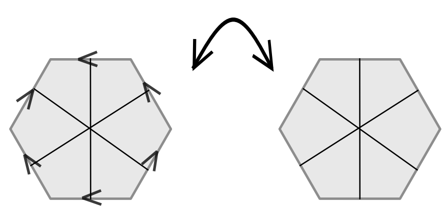


Figura 3.12: Maneiras equivalentes de representar um mesmo diagrama

Observação 3.3.15. Sejam α, β e Γ blocos de uma palavra. Tendo em vista a Observação 3.3.14 e a identificação por palavras feita na Subseção 2.3 pode-se notar que ao alternar, entre si, as posições de dois índices que se diferenciam apenas pelos expoentes, as palavras são equivalentes, ou seja:

$$\alpha \;\; A \;\; \beta \;\; A^{-1} \;\; \Gamma = \alpha \;\; A^{-1} \;\; \beta \;\; A \;\; \Gamma.$$

Exemplo 3.3.16. A cargo de exemplificar a Observação 3.3.15 observe a Figura 3.13, onde o polígono da esquerda é representado pela palavra:

$$A \;\; B^{-1} \;\; C \;\; A^{-1} \;\; B \;\; C$$

Enquanto o polígono da direita é representado por:

$$A \;\; B \;\; C \;\; A^{-1} \;\; B^{-1} \;\; C^{-1}$$

Porém, como mostra a Figura 3.13, todos os diagramas são equivalentes. Portanto as palavras também o são.

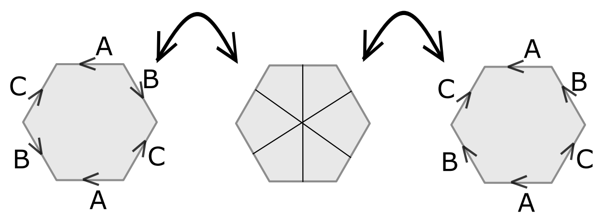


Figura 3.13: Polígonos equivalentes

Proposição 3.3.17 ([8] p.8)**.** *Todo polígono regular $\mathcal{P}_{2A}$ são polígonos de emparelhamento para algum par $(M_g, \mathcal{G})$, onde $A \geq 2g$ e o grafo $\mathcal{G}$ tem A arestas e $V = A + 1 - 2g$ vértices.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ um polígono regular de $2A$ lados. A fim de mostrar que $\mathcal{P}$ é um polígono de emparelhamento para algum grafo $\mathcal{G}$ e superfície M_g é suficiente conectar as arestas opostas de $\mathcal{P}$. Assim obtém-se M_g e as colagens dos lados do polígono geram o grafo $\mathcal{G}$ sobre M_g. (Processo inverso ao exibido na Figura 3.8). Como P tem $2A$ lados que foram conectados aos pares, o grafo obtido possui A arestas. Além disso pela Proposição 3.3.5 tem-se $A - V = 2g - 1$, então $V = A + 1 - 2g$. $\square$

Capítulo 4

Grafos de emparelhamento K-regulares

Neste capítulo serão trabalhadas as propriedades dos grafos de emparelhamento $K - regulares$ e serão exibidos exemplos sobre M_2, os quais são exibidos em [8] e [9] e exemplos contendo todos os grafos de emparelhamento 3-regulares sobre M_3, exibidos em [15].

Proposição 4.0.1 ([8] p.8)**.** *Todo grafo de emparelhamento $K - regular$, com $K > 1$, pode ser obtido por alguma extensão do grafo I_{2g}. Em particular, todo grafo de emparelhamento sobre M_g, com $(V, A) \leq (4g - 2, 6g - 3)$, pode ser obtido por alguma extensão sobre M_g do grafo emparelhamento I_{2g}.*

Demonstração. O resultado segue diretamente da Proposição 3.3.11. □

Definição 4.0.2 (Polígono de emparelhamento $K - regular$, [8] p.8)**.** Um polígono regular $\mathcal{D}$ será dito um polígono de emparelhamento K-regular, se existe um par (M_g, G), onde G é um grafo de emparelhamento K-regular sobre a superfície M_g.

Proposição 4.0.3 ([8] p.8)**.** *Seja $\mathcal{G}$ um grafo de emparelhamento sobre uma superfície M_g. Se $\mathcal{G}$ é K-regular e $g > 0$, então $K \geq 3$.*
Consequentemente, se D_{2A} é um polígono K-regular, então $A \geq 2$.

Demonstração. Sendo $\mathcal{G}$ de emparelhamento $K - regular$, pela Proposição 3.3.7

$$V = \frac{2(2g-1)}{(K-2)} \rightarrow k - 2 = \frac{2(2g-1)}{V}.$$

Suponha que $K < 3$, então:

$$K - 2 \leq 0 \rightarrow \frac{2(2g-1)}{V} \leq 0 \rightarrow g \leq 0.$$

Absurdo! Logo $K \geq 3$. Se D_{2A} é um polígono $K - regular$, então pela Proposição 3.3.7,

$$2A = K.v.$$

Como $K \geq 3$, então:

$$2A \geq 3V \rightarrow A \geq \frac{3V}{2}.$$

Como A só admite valores naturais , segue que $A \geq 2$. □

Proposição 4.0.4 ([8] p.8)**.** *Seja $\mathcal{D}$ um polígono de emparelhamento K-regular associado com um par $(M_g, \mathcal{G})$. Então:*

$$(V, A) = (\frac{2(2g-1)}{k-2}, \frac{K(2g-1)}{K-2}).$$

Consequentemente, o polígono de emparelhamento K-regular tem $2.\frac{K(2g-1)}{K-2}$ lados.

Demonstração. Observe que sendo $\mathcal{G}$ um grafo de emparelhamento, com V vértices e A arestas, então o número de componentes simplesmente conexas, F, vale 1. Além disso,

$$\chi(M_g) = 2 - 2g.$$

Por outro lado, pela Proposição 2.5.5:

$$\chi(M_g) = V - A + F = V - A + 1.$$

Por fim, visto que G é K-regular, temos $2A = K.V$. Das igualdades:

- $2 - 2g = V - A + 1 \rightarrow V - A = 1 - 2g \rightarrow V(1 - \frac{K}{2}) \rightarrow V = \frac{2(1-2g)}{2-K}$.
- $2 - 2g = V - A + 1 \rightarrow V - A = 1 - 2g \rightarrow A(\frac{2}{K} - 1) = 1 - 2g \rightarrow A = \frac{K(1-2g)}{2-K}$.

Naturalmente o polígono de emparelhamento possui $2.\frac{K(1-2g)}{2-K} = 2A$ lados. □

Corolário 4.0.5 ([8] p.8)**.** *Se $\mathcal{G}$ é um grafo de emparelhamento $K - regular$ sobre M_g, então $g = \frac{1}{2K}[(K-2)A + K]$.*

Demonstração. Pelo fato de $\mathcal{G}$ ser um grafo $K - regular$, segue que $2A = K.V$. Pela Proposição 4.0.4, sendo $\mathcal{G}$ um grafo de emparelhamento $K - regular$, tem-se $(V, A) = (\frac{2(2g-1)}{K-2}, \frac{K(2g-1)}{K-2})$. Substituindo $V = \frac{2(2g-1)}{K-2}$ e $A = \frac{K(2g-1)}{K-2}$ em $2A = K.V$ segue que $g = \frac{1}{2K}[(K-2)A + K]$. □

Observação 4.0.6. Da Proposição 4.0.4 segue que, os possíveis valores para $K > 2$, para os grafos de emparelhamento $K - regular$ sobre M_g, para $0 < g \leq 3$ são:

g	V	A	K	n
1	1	2	4	4
	2	3	3	6
2	1	4	8	8
	2	5	5	10
	3	6	4	12
	6	9	3	18
3	1	6	12	12
	2	7	7	14
	5	10	4	20
	10	15	3	30

Figura 4.1: Valores para os grafos de emparelhamento K-regular

Na Figura 4.1, g representa o gênero de uma superfície, V o número de vértices do grafo, A o número de arestas do grafo, K o grau dos vértices do grafo e n o número de arestas do polígono de emparelhamento.

4.0.1 Exemplos de grafos $K-$ **regulares**, para $g = 2$

Exemplo 4.0.7. De acordo com a Proposição 4.0.4, os grafos de emparelhamento $G(2,5)$, para $g = 2$, são $K-regulares$, somente se $K = 5$. A Figura 4.2 está dividida em 4 níveis, indicadas por $N1$, $N2$, $N3$, $N4$, respectivamente.

- No nível $N1$ estão representados o grafo I_4, o grafo I_4 mergulhado sobre o Bitoro e o diagrama de emparelhamento do I_4 sobre o Bitoro.
- No nível $N2$ estão representados três extensões $5-regulares$ do grafo I_4, indicados por (a), (b) e (c). Observe que a extensão de um vértice é uma ação local e por esse motivo pode ser feita no interior de um círculo de de raio tão pequeno quanto se queira.
- No nível $N3$ estão representados, da esquerda para a direita, os mergulhos dos grafos (a), (b) e (c), respectivamente, sobre o Bitoro.
- No nível $N4$ estão representados, da esquerda para a direita, os diagramas de emparelhamento dos grafos (a), (b) e (c) sobre o Bitoro, respectivamente.

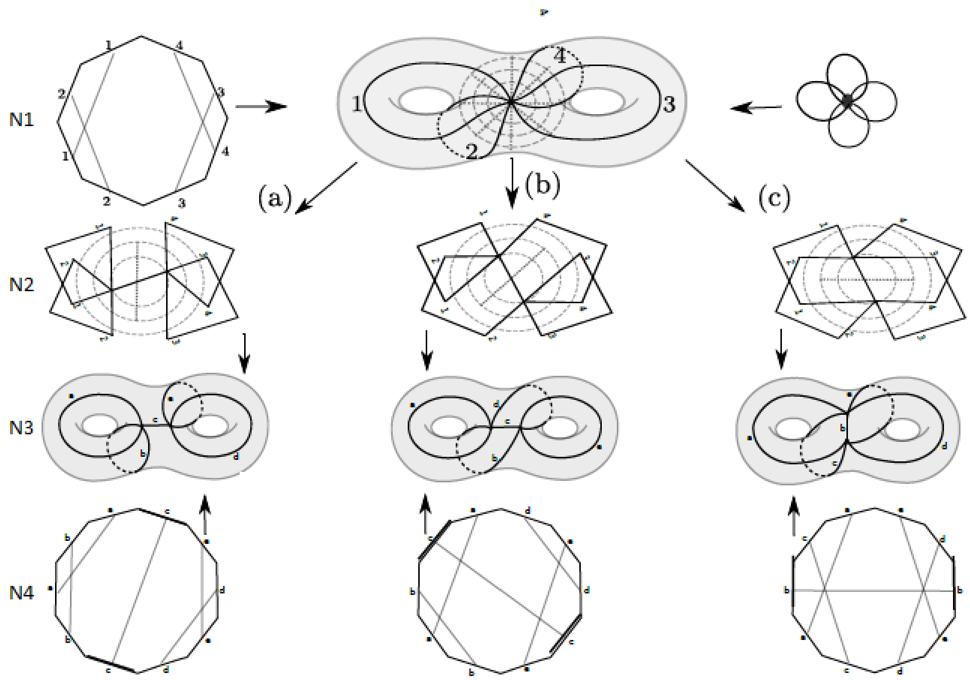


Figura 4.2: Alguns grafos 5-regulares sobre o Bitoro

Exemplo 4.0.8. De acordo com a Proposição 4.0.4, os grafos de emparelhamento $G(3,6)$, para $g = 2$, são $K-regulares$, somente se $K = 4$. A Figura 4.3 está dividida em 4 níveis, indicadas por $N1$, $N2$, $N3$, $N4$, respectivamente.

- No nível $N1$ está apresentado o grafo I_4.
- No nível $N2$ estão representados três extensões $4 - regulares$ do grafo I_4, indicados por (a), (b), (c) e (d). Observe que a extensão de um grafo é uma ação local e por esse motivo pode ser feita no interior de um círculo de de raio tão pequeno quanto se queira.
- No nível $N3$ estão representados, da esquerda para a direita, os mergulhos dos grafos (a), (b), (c) e (d), respectivamente, sobre o Bitoro.
- No nível $N4$ estão representados, da esquerda para a direita, os diagramas de emparelhamento dos grafos (a), (b), (c) e (d) sobre o Bitoro, respectivamente.

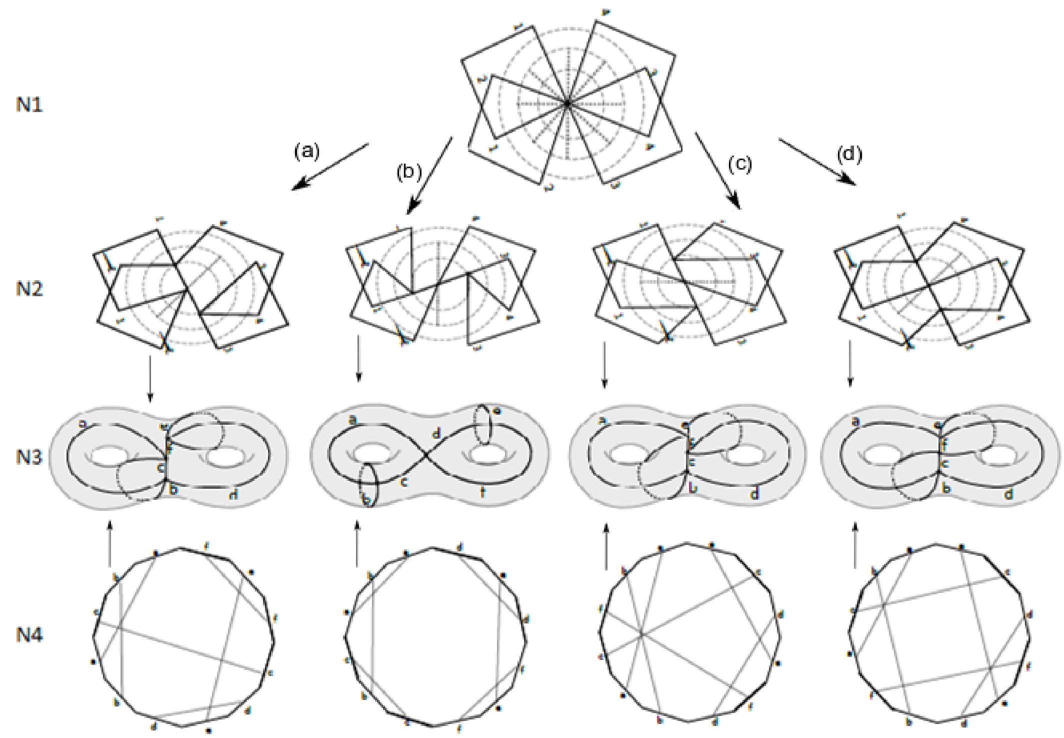


Figura 4.3: Alguns grafos $4-regulares$ sobre o Bitoro

Exemplo 4.0.9. De acordo com a Proposição 4.0.4, os grafos de emparelhamento $G(6,9)$, para $g=2$, são $K-regulares$, somente se $K=3$. A Figura 4.4 ilustra em (a), (b), (c), (d) e (e) os cinco grafos de emparelhamento $3-regulares$, sobre o Bitoro, que foram obtidos como extensão do I_4. Além disso, a Figura 4.4 está dividida em quatro níveis, indicados respectivamente por $N1$, $N2$, $N3$ e $N4$.

- No nível $N2$ estão representadas, da esquerda para a direita, respectivamente, duas representações, distintas entre si, do grafo (a) e duas representações, distintas entre si, do grafo (b).
- No nível $N1$ estão representadas, da esquerda para a direita, respectivamente, mergulhos das duas representações do grafo (a), sobre o Bitoro e mergulhos das duas representações do grafo (b), sobre o Bitoro.
- No nível $N3$ estão representadas, da esquerda para a direita, respectivamente, uma representação do grafo (c), duas representações do grafo (d) e uma representação do grafo (e).
- No nível $N4$ estão representadas, da esquerda para a direita, respectivamente, o mergulho da representação do grafo (c), sobre o Bitoro, os mergulhos das representações do grafo (d), sobre o Bitoro e o mergulho da representação do grafo (e), sobre o Bitoro.

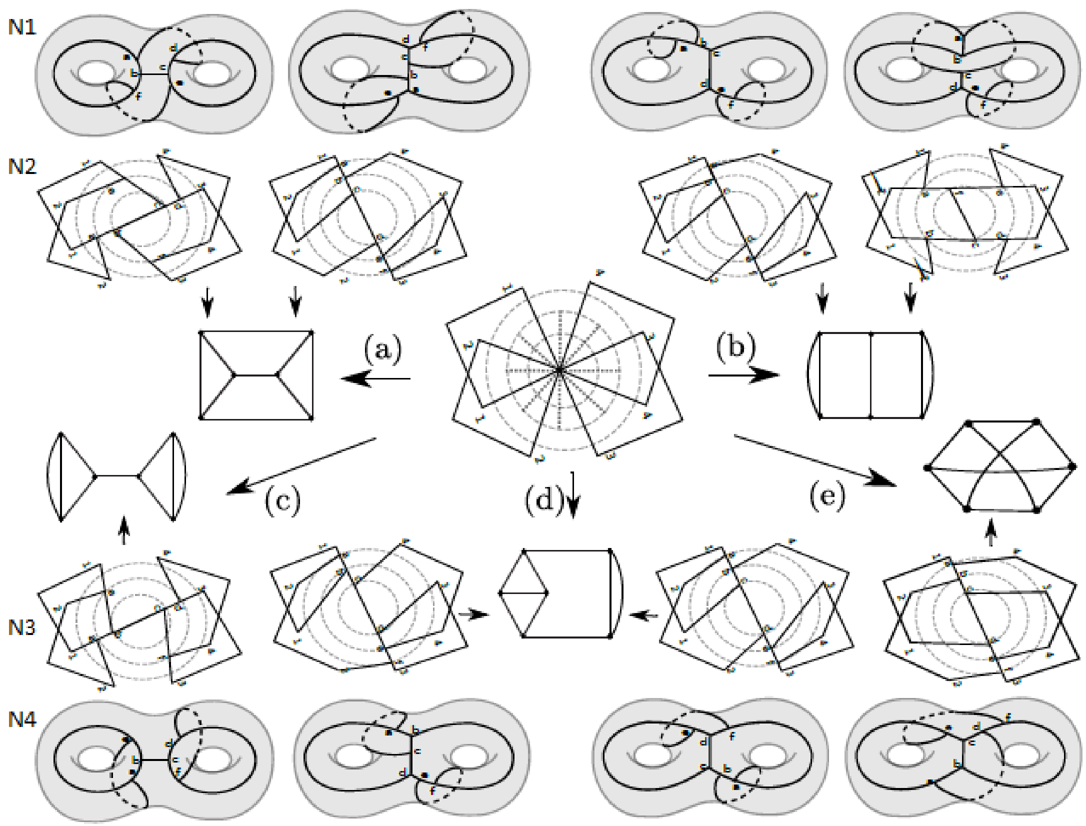


Figura 4.4: Grafos de emparelhamento G(6,9) sobre o Bitoro

No Exemplo 4.0.7 e Exemplo 4.0.8 estão apresentados apenas alguns dos grafos de emparelhamento $5-regulares$ e $4-regulares$, que podem ser retraídos no I_4, sobre o Bitoro. Na Subseção 5.3 serão apresentados todos os grafos de emparelhamento sobre o Bitoro que podem ser retraídos no I_4, sendo estes separados em famílias. Também serão destacados os grafos de emparelhamentos regulares.

4.0.2 Exemplos de grafos $K-regulares$, para g=3

Para M_3 os possíveis valores para K, em um grafo $K-regular$, são: 3, 4, 7, e 12. Assim como pode ser visto na Figura 4.1.

Exemplo 4.0.10. Para $V = 1$ e $V = 2$ a Figura 4.5 representa, em (a), oito diagramas de emparelhamento, com 12 lados, associados a grafos do tipo I_6 e seus respectivos mergulhos sobre o Tritoro. Em (b), (c), e (d) representa oito grafos de emparelhamento $7-regulares$, sobre o Tritoro e seus respectivos diagramas de emparelhamento, com 14 lados.

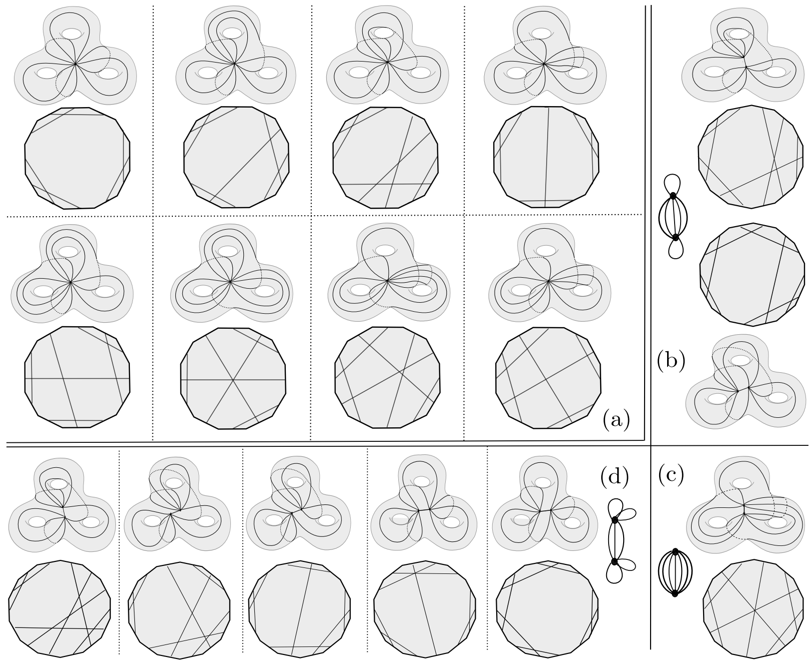


Figura 4.5: Grafos de emparelhamento sobre o Tritoro e seus diagramas

Exemplo 4.0.11. Em [15], Nakamura mostra que existem 65 grafos de emparelhamento 3-regulares sobre M_3, representados na Figura 4.6, e o autor mostra os 927 diagramas de emparelhamento, polígono de 30 lados, associados a esses grafos.

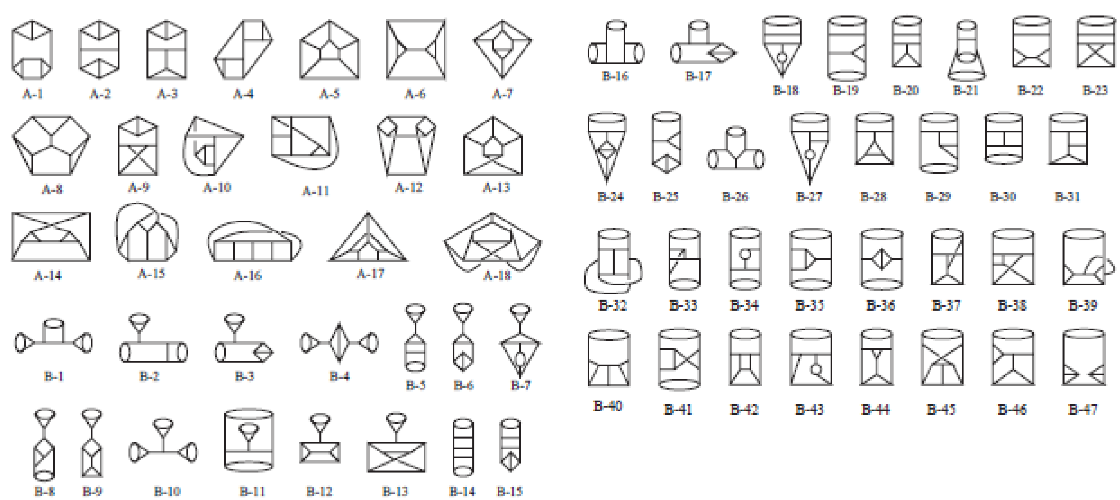


Figura 4.6: Grafos 3-regulares para o Tritoro-Figura retirada de 2 p.90

Exemplo 4.0.12. A Figura 4.7 representa alguns grafos de emparelhamento $4-regulares$ do Tritoro e seus respectivos diagramas. Observe que o diagrama de emparelhamento diz respeito a forma a qual um dado grafo será mergulhado na superfície. Portanto, um grafo pode estar associado a mais de um emparelhamento de arestas.

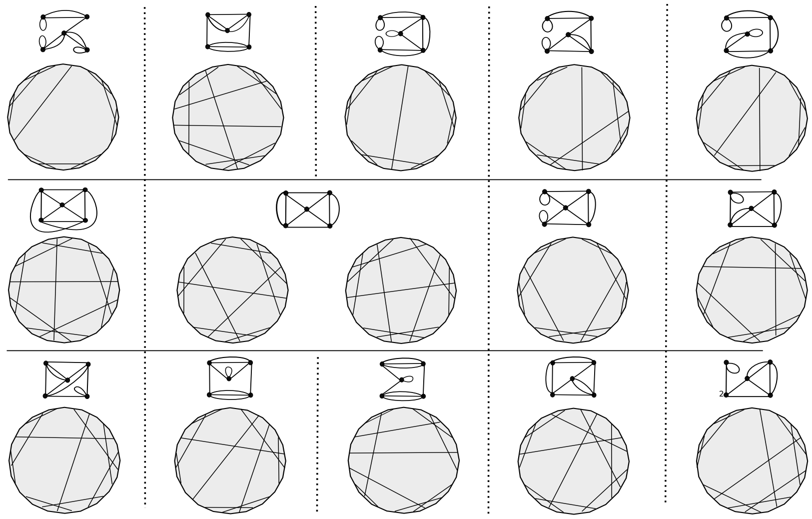


Figura 4.7: Alguns grafos de emparelhamento 4-regulares do tritoro

Exemplo 4.0.13. Em [8] é mostrado que os grafos da Figura 4.7 podem ser usados para obter os 65 grafos de emparelhamento exibido por Nakamura em [15]. No canto inferior direito da Figura 4.8 estão representados estes 14 grafos com 5 vértices. Em cada retângulo desta figura estão representados um grafo 3 regular, exibido por Nakamura e um grafo dos grafos com 5 vértices já citados. Indicando que o grafo 3-regular foi obtido via extensão do grafo com 5 vértices com o qual divide o retângulo.

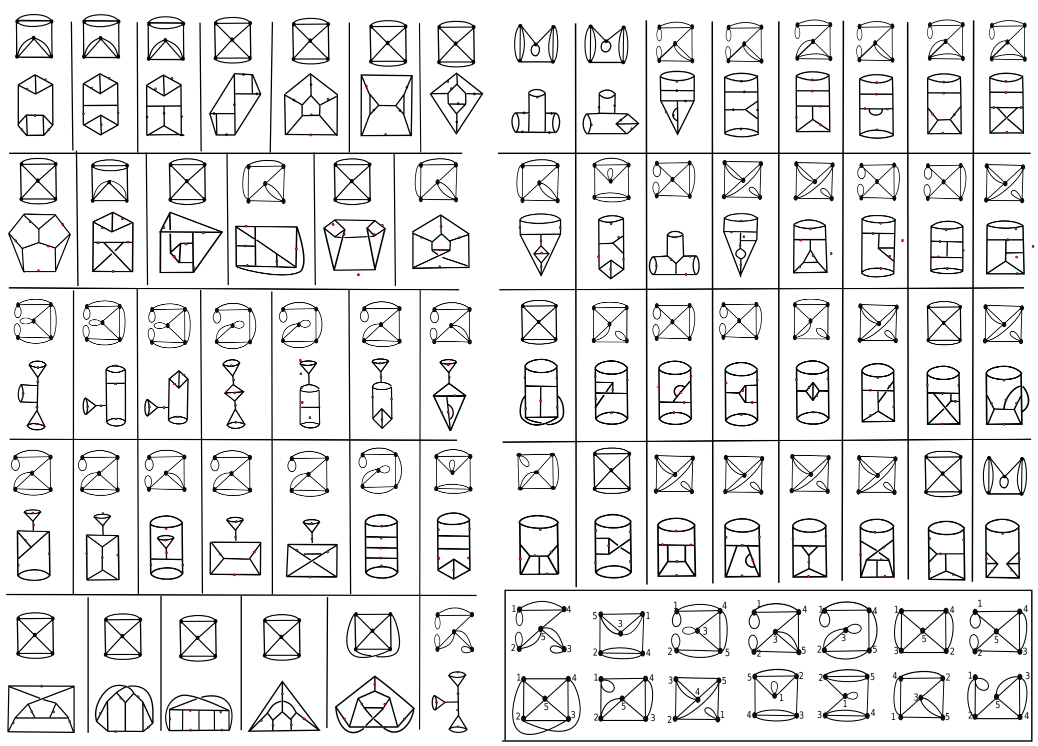


Figura 4.8: Grafos de emparelhamento 3-regulares do Tritoro

Capítulo 5

A palavra e os grafos de emparelhamento

Neste capítulo será introduzido o conceito de curva paralela a um grafo mergulhado na superfície e algumas propriedades da mesma, com objetivo de determinar os possíveis grafos de emparelhamento sobre o Bitoro.

5.1 Curva Paralela

Seja $G(V, A)$ um grafo, com $V > 0$, mergulhado no plano. Então o bordo de uma vizinhança tubular de $G(V, A)$, está formado por um conjunto de curvas simples e fechadas contida no conjunto complementar $\mathbb{R}^2 \setminus G(V, A)$, como ilustrado na Figura 5.1.

Se $G(V, A)$ é um grafo mergulhado sobre uma superfície M_g, de forma análoga podemos construir a vizinhança tubular de $G(V, A)$ para obter o conjunto de curvas bordo dessa vizinhança tubular sobre M_g.

Notação: O número de componentes conexas do conjunto $M \setminus G(V, A)$ será denotado por $\mathcal{C}_G$.

Definição 5.1.1 (Curva paralela)**.** Dado um grafo $G(V, A)$ mergulhado sobre a superfície M, o conjunto bordo da vizinhança tubular de $G(V, A)$ será chamado de curva paralela ao grafo $G(V, A)$ e será denotado por $B(G)$.

Exemplo 5.1.2. A Figura 5.1 representa em (a) a construção da vizinhança tubular do grafo G. Em (b) está ilustrada a construção da curva paralela ao grafo G, a partir da vizinhança tubular. O grafo G divide o plano em 5 componentes, observe que o número de componentes conexas da curva paralela coincide com tal valor.

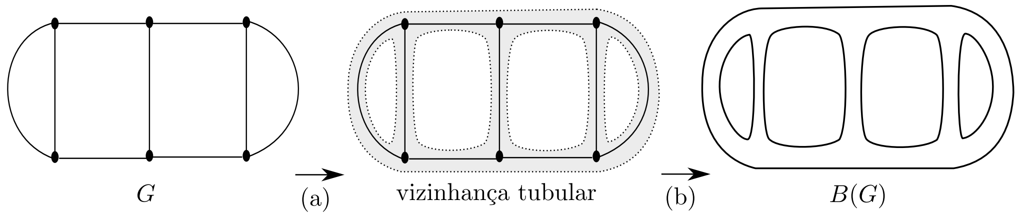


Figura 5.1: Curva paralela a um grafo

Proposição 5.1.3. *Se $G(V, A)$ é um grafo conexo mergulhado sobre M então no número de componentes de curvas de $B(G)$ é igual a $\mathcal{C}_G$ (ver Figura 5.1-(a)).*

Consequentemente, se $G(V, A)$ é uma árvore, então $\mathcal{C}_G = 1$.

Demonstração. Isto segue do fato que cada componente conexa de $B(G)$ está contida em uma região conexa de $M \setminus G(V, A)$. □

Como consequência da triangulação de superfícies (ver Definição 2.2.10), temos a seguinte afirmação:

Corolário 5.1.4. *Se $G(V, A)$ é um grafo de triangulação da superfície M_g então $\mathcal{C}_G = F = 2-2g-V+A = 1-2g+\beta_1(G)$, onde $\beta_1(G) = 1-V+A$ denota o número de ciclos livres de G.*

Consequentemente, se $M = \mathbb{S}^2$, então $\mathcal{C}_G = 1 + \beta_1(G)$.

Proposição 5.1.5. *Se $G'(V', A')$ é uma extensão ou contração do grafo $G(V, A)$ sobre a superfície M_g, então $\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{G'}$.*

Demonstração. Isto é uma consequência imediata da Proposição 3.2.6, a qual garante que a extensão e a contração de grafos sobre uma superfície M_g não altera o número de componente conexa do complemento do grafo, ou seja, $\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{G'}$. (Veja a Figura 3.5). □

Lema 5.1.6. *Se $G(V, A)$ é um grafo de emparelhamento de arestas então $\mathcal{C}_G = 1$.*

Demonstração. Pela Definição 3.3.1, o complemento de um grafo de emparelhamento sobre M_g é simplesmente conexa, logo tem única componente conexa e $\mathcal{C}_G = 1$. □

Exemplo 5.1.7. A Figura 5.2 ilustra que recíproca do Lema 5.1.6 nem sempre é verdade. Na Figura 5.2, o grafo sobre o Bitoro é grafo de emparelhamento para o Toro, portanto desfaz a alça da esquerda. Porém a alça da direita é mantida, então o complemento do grafo é conexo, mas não é simplesmente conexo. Daí, não é grafo de emparelhamento, pela Definição 3.3.1.

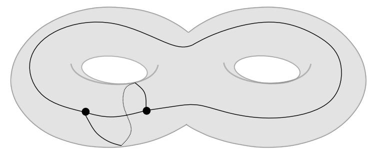


Figura 5.2: Grafo com $\mathcal{C}_g = 1$ sobre o Bitoro

Lema 5.1.8. *Todo grafo de emparelhamento de arestas sobre a superfície fechada e orientada M_g, satisfaz $\beta_1(G) = 2g$.*

Demonstração. Se $G(V, A)$ é um grafo de emparelhamento de arestas sobre a superfície fechada e orientada M_g, então o complemento é simplesmente conexo. Então $2 - 2g = \chi(M) = V - A + F = 2 - (1 - V + A) = 2 - \beta_1(G)$. Logo $\beta_1(G) = 2g$. □

Exemplo 5.1.9. A Figura 5.3 ilustra ilustra que recíproca do Lema 5.1.8 nem sempre é verdade. Na Figura 5.3, o grafo sobre o toro tem dois vértices, um laço em cada vértice e uma aresta conectando os dois vértices. Este grafo satisfaz $\beta_1(G) = 2g$, mas não é grafo de emparelhamento, pela Definição 3.3.1, pois o seu complemento no toro não é simplesmente conexo.

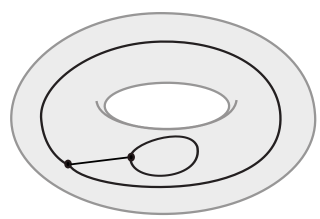


Figura 5.3: Grafo com $\beta_1(G) = 2g$ sobre o Toro

Para verificar que $G(V, A)$ é um grafo de emparelhamento de arestas, devemos mostrar que $M \setminus G(V, A)$ é simplesmente conexo. O fato de $\mathcal{C}_G = 1$ não é suficiente, pois esta única componente conexa pode não ser simplesmente conexa.

Lema 5.1.10. *Se $\beta_1(G) = 2g$ e $M \setminus G(V, A)$ é conexo, então $M \setminus G(V, A)$ é simplesmente conexo.*

Demonstração. Se $\beta_1(G) = 2g$, então $\chi(M \setminus G(V, A)) = \chi(M) - \chi(G) = (2 - 2g) - (V - A) = 2 - \beta_1(G) - (V - A) = 2 - (1 - V + A) - (V - A) = 1$. Se $\chi(M \setminus G(V, A)) = 1$ e $M \setminus G(V, A)$ é conexo, então $M \setminus G(V, A)$ é simplesmente conexo. □

Teorema 5.1.11. *Seja $G(V, A)$ um grafo mergulhado sobre a superfície fechada e orientada M_g. $G(V, A)$ é um grafo de emparelhamento de arestas, se e somente se, satisfaz $\beta_1(G) = 2g$ e a curva paralela $B(G)$ tem única componente conexa.*

Demonstração. Se $G(V, A)$ é um grafo de emparelhamento de arestas sobre M_g, pelo Lema 5.1.6, $B(G)$ tem única componente conexa. Pelo Lema 5.1.8, $G(V, A)$ satisfaz $\beta_1(G) = 2g$.

A volta, se $B(G)$ tem única componente conexa, pela Proposição 5.1.3, $M \setminus G(V, A)$ é conexo. Se $\beta_1(G) = 2g$, e $M \setminus G(V, A)$ é conexo, pelo Lema 5.1.10, $M \setminus G(V, A)$ é simplesmente conexo. Logo pela Definição 3.3.1, $G(V, A)$ é um grafo de emparelhamento de arestas sobre M_g. □

Exemplo 5.1.12. A Figura 5.4 ilustra um grafos cujo os complementos $M_g \setminus \mathcal{G}$ admitem única componente conexa, visto que ao efetuar um corte na superfície sobre este grafo o mesmo desfaz as duas alças de M_g, sobre o Bitoro. Este grafo possui 6 vértices e 9 arestas. Portanto, de acordo com a Definição 2.4.11, o mesmo satisfaz $\beta_1(G) = 4 = 2g$ e como visto no Exemplo 3.3.3 este é um grafo de emparelhamento para o Bitoro. O grafo ilustrado em (b) é o mesmo que está na Figura 5.1, onde foi construída a sua curva paralela.

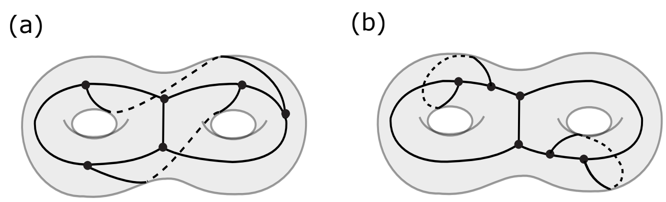


Figura 5.4: Grafos com $\mathcal{C}_g = 1$ e $\beta_1(G) = 2g$ sobre o Bitoro.

5.2 Palavras associadas a diagramas de emparelhamento

Nesta seção, vamos introduzir uma palavra associada a um dado grafo de emparelhamento sobre o Bitoro, com objetivo de determinar o diagrama de associado a este grafo. Esta palavra vale também para o emparelhamento sobre superfícies com gênero maior que 2.

Uma projeção do Bitoro no plano $\pi : M_2 \to \mathbb{R}^2$ será chamada de projeção trivial se o conjunto singular de π tem três curvas simples e a imagem destas curvas no plano não tem pontos de cúspides ou pontos duplos.

Sejam $G(V, A)$ um grafo associado a um emparelhamento de arestas sobre o Bitoro e $\mathcal{P}$ um polígono regular com $2A$ lados. Como visto na Seção 3.2 do Capítulo 3, pode existir diferentes formas de emparelhamento das arestas de $\mathcal{P}$ associado a $G(V, A)$. O que diferencia os emparelhamentos são os diagramas de emparelhamentos sobre $\mathcal{P}$ (ver Definição 3.3.12). Ou seja, dois emparelhamentos são não equivalentes se seus diagramas são não isomorfos.

Dado um mergulho de $G(V, A)$ sobre o Bitoro, vamos representar as informações deste mergulho, pela imagem da projeção trivial do grafo no plano, como ilustra a Figura 5.5-(b). No cruzamento das arestas do grafo no plano, a descontinuidade indica a aresta que está por baixo no Bitoro.

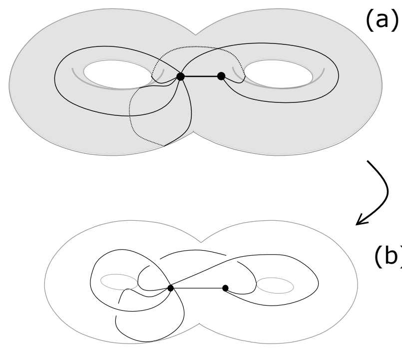


Figura 5.5: Projeção do Toro no plano e imagem do grafo

Vamos construir grafo paralelo ao grafo de emparelhamento $G(V, A)$, sobre a única curva de Então $B(G)$, da seguinte forma:

- Considere os dois arcos da curva $B(G)$, paralelos a arestas a_i de $G(V, A)$ $(i = 1, \cdots, A)$, como um par de arestas, que será denotado por A_i e A_i^{-1}. O sinal -1 indica que a orientação local de A_i^{-1} é inversa da orientação de A_i. Entre duas arestas consecutivas colocamos um vértice, como ilustra a Figura 5.6. A este grafo, com as arestas A, será chamado de **grafo paralelo** a $G(V, A)$ e será denotado por $\mathcal{Q}(G)$.
- Uma orientação natural para $\mathcal{Q}(G)$ é como segue: partindo de uma aresta $A \in \mathcal{Q}(G)$, caminha sobre $\mathcal{Q}(G)$ de forma que as arestas do grafo $G(V, A)$ estejam do lado esquerdo de A_i.

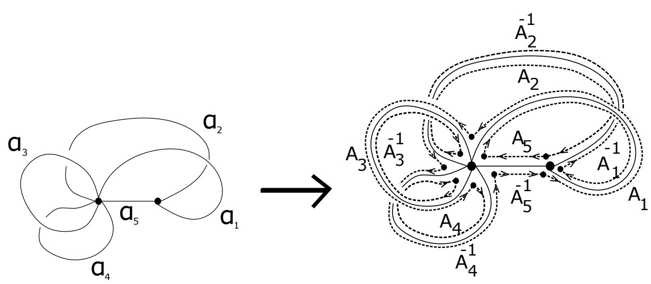


Figura 5.6: Construção do grafo paralelo

- Se $q : \mathcal{P} \to M$ é a aplicação quociente, do polígono $\mathcal{P}$ sobre M_g, que tem o grafo $G(V, A)$ como grafo de emparelhamento, então a pré-imagem de $\mathcal{Q}(G)$ é uma curva no bordo de $\mathcal{P}$, com as arestas $\overline{A}_i$ e $\overline{A}_i^{-1}$ pré-imagem de A_i e A_i^{-1}.

- O diagrama de emparelhamento, denotado por $\mathcal{D}$, associado a aplicação q está formado pelos seguimentos de retas que conectam as arestas $(\alpha_i, \alpha_i^{-1})$ de $\mathcal{P}$ paralelas ao par $(\overline{A}_i, \overline{A}_i^{-1})$.
- A palavra formada percorrendo $\mathcal{Q}(G)$ ou o bordo de $\mathcal{P}$, por exemplo $A_1A_3A_4A_3^{-1}A_2A_5A_1^{-1}A_2^{-1}A_4^{-1}A_5^{-1}$ na Figura 5.7, descreve de forma única o emparelhamento.

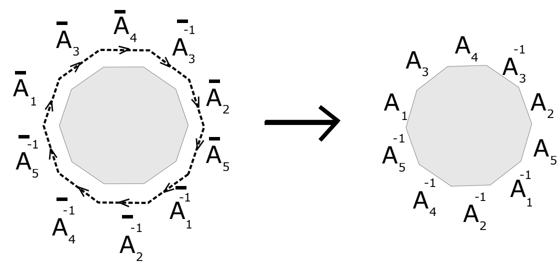


Figura 5.7: Pré-imagem do garfo paralelo e pré-imagem do grafo de emparelhamento

A palavra formada quando caminhamos ao longo de $B(G)$ ou no bordo do polígono $\mathcal{P}$, no sentido horário, será denotado por $\mathcal{K}$.

Definição 5.2.1 (Palavras equivalentes)**.** Duas palavras $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ são ditas equivalentes se $\mathcal{K}_1$ pode ser obtida de $\mathcal{K}_2$ via aplicação dos Itens 1, 2, 3, 4 da Propriedade 2.3.4, aplicação da Observação 3.3.15 ou combinação destas.

Exemplo 5.2.2. A Figura 5.8-(a) um diagrama de emparelhamento e a sua palavra associada. Em (b), (c), (d), (e), (f), (g), os diagramas de emparelhamento são obtidos por reflexão de (a) em torno da reta r. Todas as palavras indicadas na Figura 5.8 são equivalentes: (b) e (e) podem ser levadas em (a) $(A_1A_2A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1})$ com aplicação conveniente das devidas propriedades; (c) e (d) seguem análogas a (b) e (f); (g) seguem análogas a (e).

(b)→ (a):
$A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}A_3A_2A_1$ (Item 4)
$A_3^{-1}A_2^{-1}A_3A_1^{-1}A_2A_1$ (Item 1)
$A_3A_1^{-1}A_2A_1A_3^{-1}A_2^{-1}$ (Item 4)
$A_3A_1^{-1}A_2A_3^{-1}A_1A_2^{-1}$ (Item 1)
$A_3A_1^{-1}A_2A_3^{-1}A_1A_2^{-1}$ (Item 1)
$A_1A_2^{-1}A_3A_1^{-1}A_2A_3^{-1}$
$A_1A_2^{-1}A_3A_1^{-1}A_2A_3^{-1}$(Observação 3.3.15)
$A_1A_2A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}$

(e) → (a):
$A_3A_2A_1A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$ (Observação 3.3.15)
$A_3^{-1}A_2A_1A_3A_2^{-1}A_1^{-1}$(Observação 3.3.15)
$A_3^{-1}A_2A_1^{-1}A_3A_2^{-1}A_1$(Item 4)
$A_3^{-1}A_2A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_1$(Item 1)
$A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_1A_3^{-1}A_2$(Item 4)
$A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}A_1A_2$
$A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}A_1A_2$(Item 1)
$A_1A_2A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}$

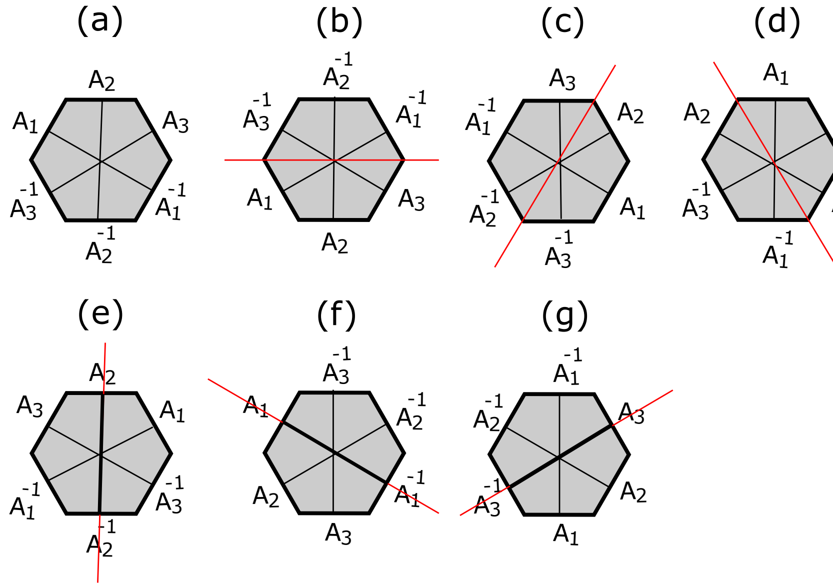


Figura 5.8: Reflexões de um diagrama e suas respectivas palavras

Definição 5.2.3 (Sílaba de uma palavra)**.** Se $\mathcal{K}$ é uma palavra associada a um grafo, então cada elemento A_i(ou A_i^{-1}), da palavra, será chamado de sílaba da palavra $\mathcal{K}$.

Observação 5.2.4. Todo diagrama de emparelhamento admite uma palavra associada a ele escolha um lado do polígono e indexe-o por A_i. Ao lado ligado com o A_i indexe por A_i^{-1}. Seguindo no sentido anti horário, indexe o lado, subsequente ao escolhido anteriormente, por A_{i+1} e o lado conectado a ele por A_{i+1}^{-1}. Repita o processo para $i = 1, 2, \ldots, A$.

Proposição 5.2.5. *Seja $\mathcal{K}$ uma palavra associada a um grafo de emparelhamento $G(V, A)$, de uma superfícies M_g. Então $\mathcal{K}$ está associada a um, e somente um diagrama de emparelhamento.*

Demonstração. Primeiramente, mostremos a existência de um diagrama associado a $\mathcal{K}$. Seja $\mathcal{K}$ uma palavra associada a um grafo de emparelhamento $G(V, A)$, então K admite $2A$ sílabas. Pela Construção do Grafo paralelo (início da Seção 5.2) as arestas do A_i e A_i^{-1} são paralelas a aresta α_i de $G(V, A)$, para cada $i = 1, \ldots, A$. Em um diagrama de $2A$ lados transcreva a palavra para o seu bordo e conecte as arestas referentes às sílabas A_i e A_i^{-1}. Resta mostrar que tal diagrama é único. Dado a palavra $\mathcal{K}$, seja $\mathcal{D}$ o diagrama de emparelhamento associado a $\mathcal{K}$. Suponha $\mathcal{D}'$ outro diagrama de emparelhamento associado a $\mathcal{K}$, não equivalente à $\mathcal{D}$. Então $\mathcal{D}'$ não é fruto de nenhuma rotação, reflexão ou combinação delas de $\mathcal{D}$ (vide Definição 3.3.13). Como a palavra em questão é a mesma para os dois diagramas, então pode ocorrer que

1. A disposição das sílabas é a mesma para os dois diagramas. Neste Caso, os diagramas são exatamente iguais. Uma contradição.

2. A disposição das sílabas é uma permutação circular.
   Neste caso, $\mathcal{D}'$ é uma rotação de $\mathcal{D}$. Uma contradição.

Logo o diagrama ao qual está associado é único. □

Corolário 5.2.6. *Se $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ são palavras equivalentes, associadas aos diagramas $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, respectivamente, então $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ são equivalentes. Vale a recíproca.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sejam não equivalentes. Então $\mathcal{D}_1$ não pode ser obtido de $\mathcal{D}_2$ via qualquer rotação, reflexão ou combinação delas. Como $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ são equivalentes, pode-se obter $\mathcal{K}_1$ de $\mathcal{K}_2$ aplicando de forma necessária os item a Propriedade 2.3.4, juntamente com a Observação 3.3.15, se necessário. Essas mudanças nas palavras geram rotações, reflexões ou combinação dessas nos diagramas associados. Pelo Teorema 5.2.5 cada palavra está associado a um único diagrama. Portanto, os diagramas $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ são equivalentes.
A recíproca é imediata. □

Proposição 5.2.7. *As palavras associadas a $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$, dois grafos de emparelhamento, são equivalentes se, e somente se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ são equivalentes.*

Demonstração. As palavras associadas aos grafos $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ são equivalentes se, e somente se, os diagramas associados são também equivalentes. Além disso, os diagramas de emparelhamento são equivalentes se, e somente se, os grafos também o são. □

Exemplo 5.2.8. A Figura 5.9 ilustra duas palavras equivalentes e os seus respectivos diagramas associados. As setas verticais indicam a quais diagramas as palavras estão associadas. A seta horizontal inferior, indica que os diagramas são equivalentes. Tal equivalência é natural. Portanto, resta mostrar a equivalência das palavras, indicadas pela seta horizontal superior. A fim de verificar que as palavras são de fato equivalentes é necessário e suficiente obter uma a partir da outra via as operações da Definição 5.2.1.
$A_1A_3A_4A_3^{-1}A_2A_5A_1^{-1}A_2^{-1}A_4^{-1}A_5^{-1}$
$A_1A_3A_4A_3^{-1}A_2A_5A_1^{-1}A_5^{-1}A_2^{-1}A_4^{-1}$ (Item 4)
$A_1A_3A_4A_3^{-1}A_2A_5A_1^{-1}A_5^{-1}A_2^{-1}A_4^{-1}$
$A_1A_5A_3A_4A_3^{-1}A_2A_1^{-1}A_5^{-1}A_2^{-1}A_4^{-1}$ (Item 4)

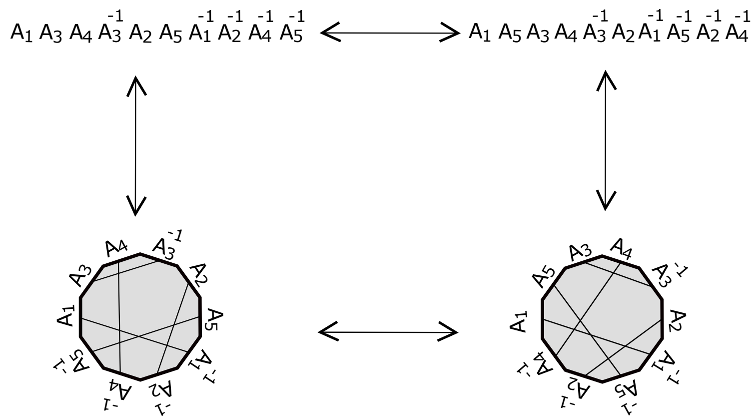


Figura 5.9: Palavras e diagramas

5.3 Grafos de emparelhamento sobre o Bitoro

Nesta seção serão apresentados todos os grafos de emparelhamento, não equivalentes, que podem ser retraídos no l_4, sobre o Bitoro. A fim de determinar tais grafos foram usadas as extensões de grafos, (vide Proposição 3.3.11) e o grafo paralelo , como na Figura 5.6, onde foi associada uma palavra a cada grafo, com o diagrama correspondente (ver Figura 5.7).

A fim de cumprir o objetivo desta seção, o primeiro passo mergulhar o l_4 de todas as formas possíveis sobre o Bitoro. Ao verificar essas formas, pode ser observado na Seção 6.1 do Apêndice A , que existem apenas duas formas não equivalentes, as quais serão chamadas de I e III. Essas formas podem ser vistas na Figura 5.10.

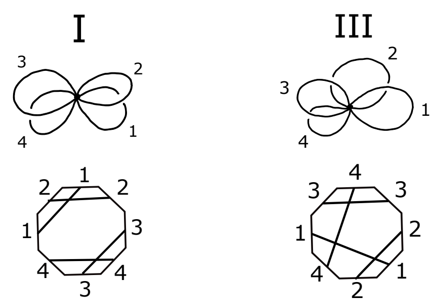


Figura 5.10: Formas não equivalentes de mergulhar l_4 no Bitoro

Proposição 5.3.1. *Existem 11 grafos de emparelhamento G(2,5) sobre o Bitoro. Os grafos e seus respectivos diagramas de emparelhamento se encontram na Figura 5.11.*

Demonstração. Uma vez obtidas todas as formas de mergulhar o grafo l_4 sobre o Bitoro, com o objetivo de encontrar todos os grafos de emparelhamento G(2,5), com dois vértices e cinco arestas, que podem ser retraídos no l_4, sobre o Bitoro, basta

determinar todas as extensões não equivalentes de I e III. A cargo de simplicidade, nesta seção serão apresentadas apenas um representante de cada família. Os demais grafos contidos nas famílias podem ser vistos na Seção 6.1.1 do Apêndice A.
As extensões de I serão indicadas por I^j e as extensões de III por III^j, onde j é um número inteiro. Como pode ser visto na Seção 6.1.1 do Apêndice A, existem 31 formas de estender do grafos I e III, porém apenas 11 dessas são distintas. Como pode ser visto na Figura 5.11.

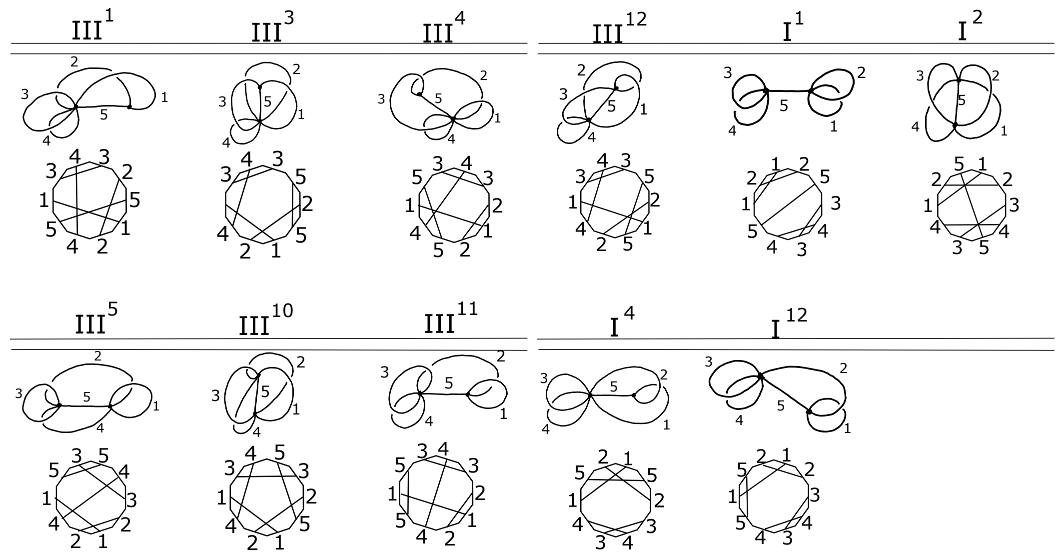


Figura 5.11: Representantes das famílias com dois vértices

□

Como visto na Figura 4.1 e na Proposição 4.0.4, os grafos com dois vértices podem ser regulares somente se forem 5-regulares, caso sejam. Ao destacar os grafos 6 regulares da Subseção 6.1.1, obtém-se que existem 6 grafos desse tipo, porém somente 4 destes não equivalentes, a saber III^5, III^{10}, I^2, I^1. De acordo com a Figura 5.12, pode-se observar que III^5, III^9 e I^3 são equivalentes.

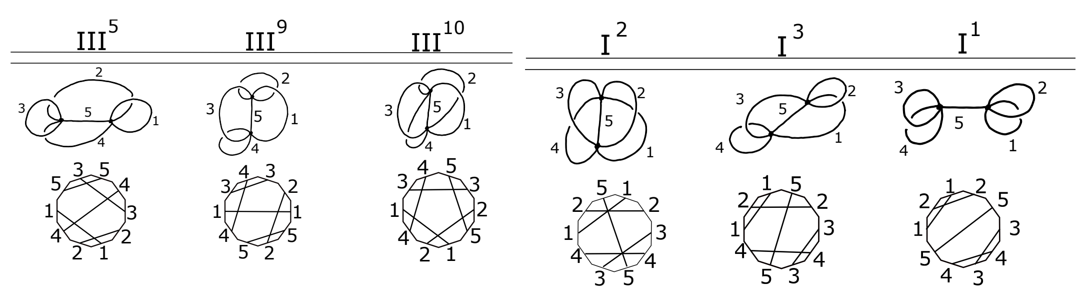


Figura 5.12: Grafos de emparelhamento 5- regulares

Proposição 5.3.2. *Existem 29 grafos de emparelhamento G(3,6) sobre o Bitoro. Os grafos e seus respectivos diagramas de emparelhamento se encontram nas Figuras 5.13 e 5.14.*

Demonstração. A fim de determinar todos os grafos de emparelhamento G(3,6), com três vértices e seis arestas, que podem ser retraídos no l_4, sobre o Bitoro, basta determinar todas as extensões dos grafos da Figura 5.11. A cargo de simplicidade estão exibidos na Figura 5.13 e na Figura 5.14 somente as 29 extensões não equivalentes. Ao contabilizar todas as extensões dos grafos da Figura 5.11, podemos observar que existem 126 formas de mergulhar os grafos G(3,6) sobre o Bitoro. Tais mergulhos constam na Subseção 6.1.2 do Apêndice A.
As extensões de III^i, serão representadas por III^{i_j}, enquanto as extensões de I^i serão representadas por I^{i_j}, sendo i, j números naturais.

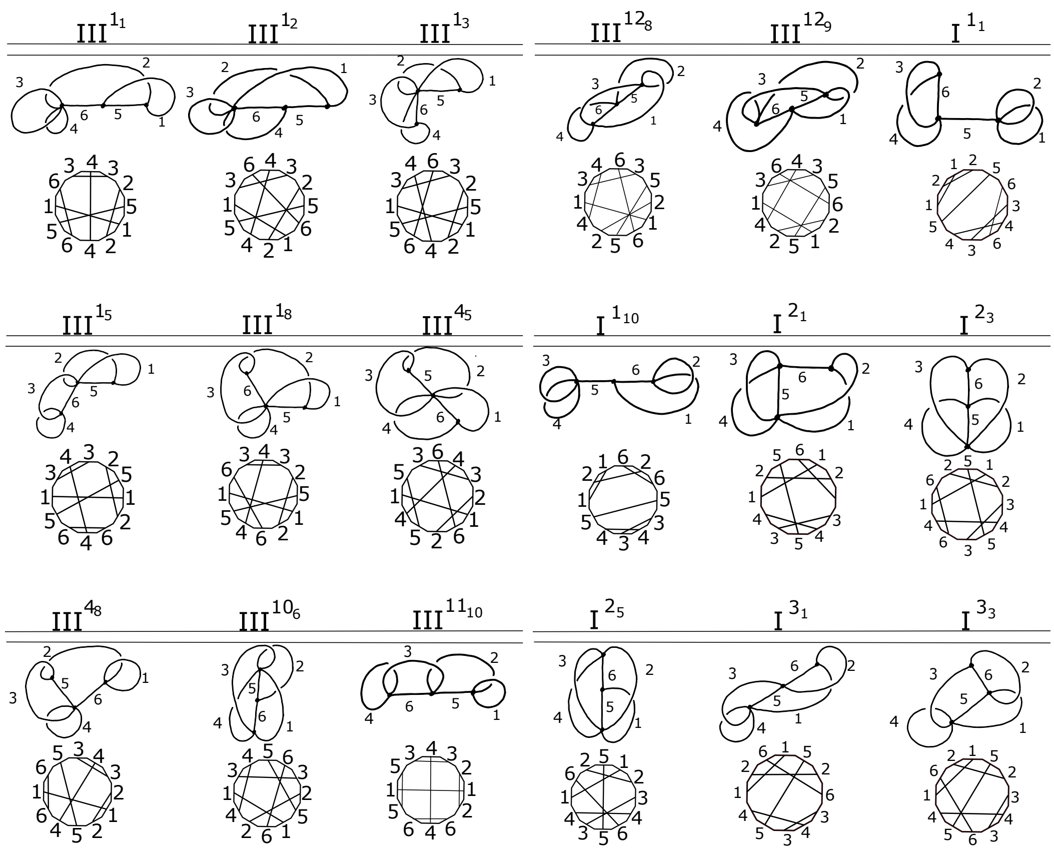


Figura 5.13: Representantes das famílias com três vértices

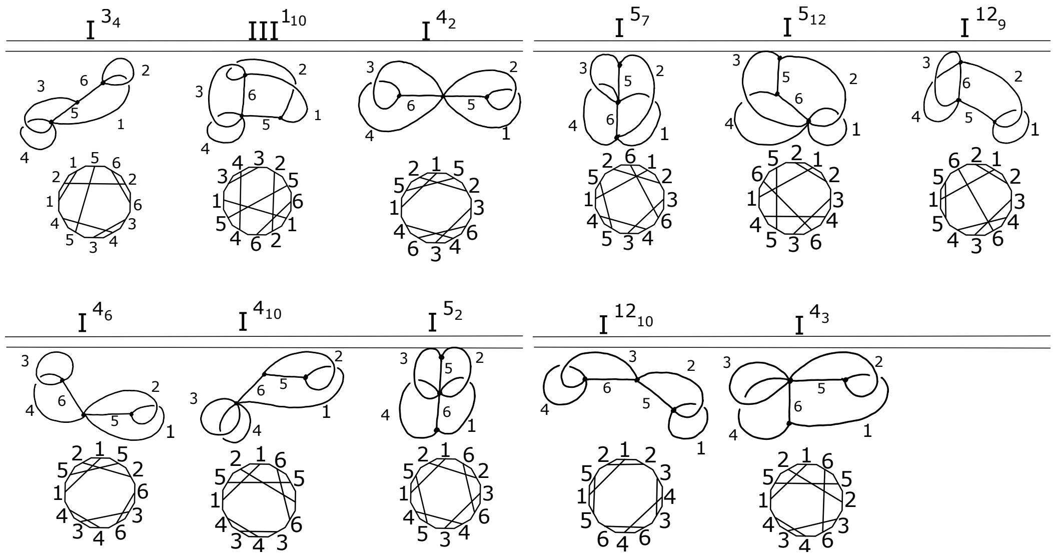


Figura 5.14: Representantes das famílias com três vértices

□

De acordo com a Proposição 4.0.4, os grafos de emparelhamento com 4 vértices sobre o Bitoro que são K-regulares tem, necessariamente, K=4. Pode-se observar na Figura 5.15 que existem 9 grafos 4-regulares, porém apenas 5 destes são não equivalentes. Na Figura 5.15 pode ser observado que os grafos indicados por III^{11_9}, $III^{11_{11}}$, III^{12_5},I^{12_9} são equivalentes. Assim como os grafos indicados por $I^{12_{10}}$, $I^{12_{11}}$ são equivalentes.

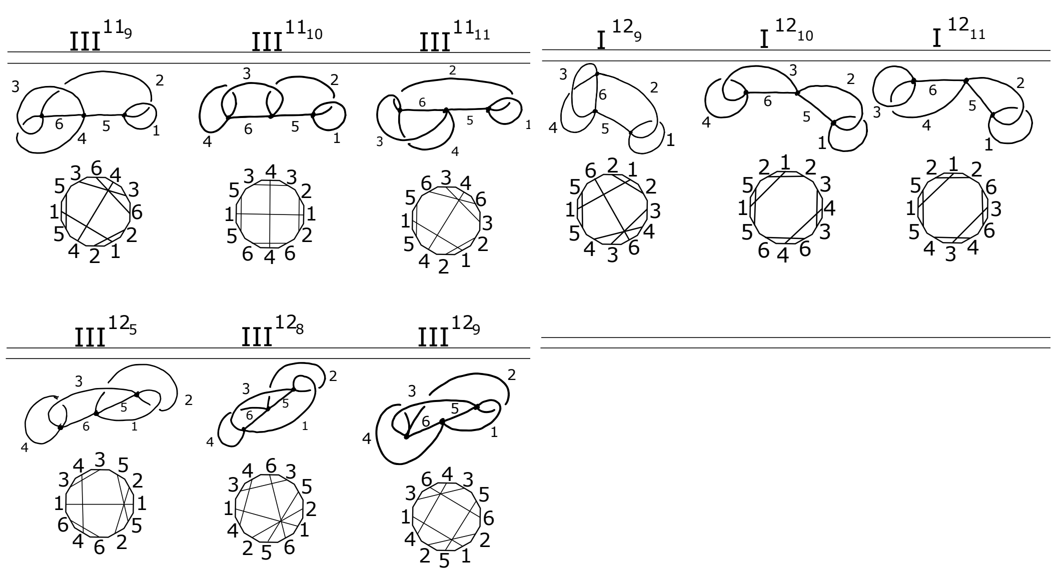


Figura 5.15: Grafos de emparelhamento 4-regulares

Proposição 5.3.3. *Existem 36 grafos de emparelhamento G(4,7) sobre o Bitoro. Os grafos e seus respectivos diagramas de emparelhamento se encontram nas Figuras 5.16 e 5.17.*

Demonstração. Para determinar todos os grafos de emparelhamento $G(4,7)$ que podem ser retraídos no I_4, sobre o Bitoro, basta encontrar todas as extensões de todos os grafos da Figura 5.13 e da Figura 5.14. Na Figura 5.16 e na Figura 5.17 serão apresentadas somente as 36 extensões não equivalentes, onde as extensões de III^{i_j} estão representadas por $\mathrm{III}^{i_{j\alpha}}$ e as extensões de I^{i_j} por $\mathrm{I}^{i_{j\alpha}}$, onde i, j são números naturais e α uma letra maiúscula do alfabeto. No total existem 189 extensões, ou seja, 189 formas de mergulhar um grafo de emparelhamento com quatro vértices e sete arestas em M_2. Estas se encontram apresentadas na Subseção 6.1.3 do Apêndice A.

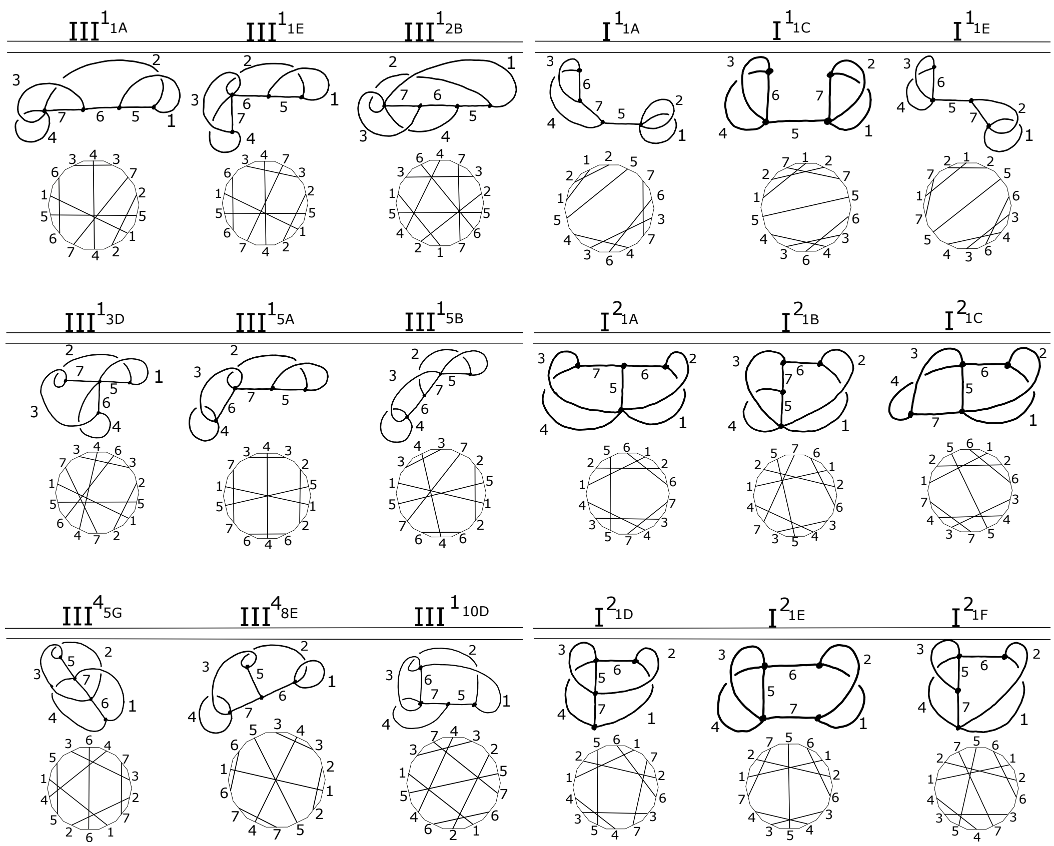


Figura 5.16: Representantes das famílias com quatro vértices

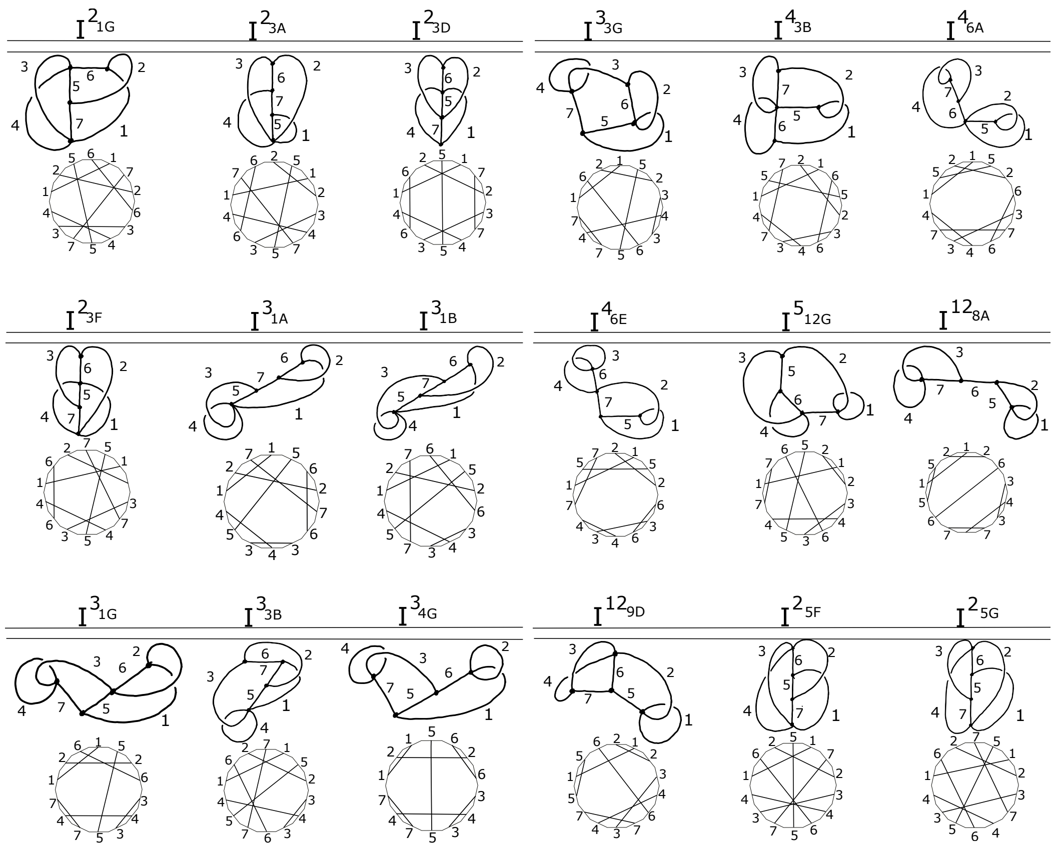


Figura 5.17: Representantes das famílias com quatro vértices

□

De acordo com a Proposição 4.0.4 os grafos $G(4,7)$ de emparelhamento sobre o Bitoro não podem ser $K - regulares$, para qualquer que seja $K \in \mathbb{N}$.

Em [9] *Jørgensen e Näätänen*, na página 461, exibem 20 códigos referentes aos diagramas de emparelhamento, representando as 20 famílias existentes neste caso. Porém, os mesmos não exibem os grafos associados a tais diagramas.

Proposição 5.3.4. *Existem 20 grafos de emparelhamento G(5,8) sobre o Bitoro. Os grafos e seus respectivos diagramas se encontram nas Figuras 5.18 e 5.19.*

Demonstração. A fim de determinar e exibir todos os grafos de emparelhamento com 5 vértices e oito arestas, G(5,8), sobre o Bitoro que podem ser retraídos no I_4, basta determinar todas as extensões de todos os grafos representados nas Figura 5.16 e Figura 5.17. Ao realizar este trabalho, pode-se observar que existem 164 formas de mergulhar um grafo G(5,8) sobre o Bitoro, tais que os mesmos possam ser retraídos no I_4. Estes grafos estão representados na Subseção 6.1.4 do Apêndice A. Dessas 164 formas, como já citado em [9], apenas 20 delas são distintas, onde os autores exibem os diagramas de emparelhamento. Nas Figuras 5.18 e 5.19 estão apresentados os 20 diagramas e adicionalmente os grafos, os quais os autores de [9] não exibem no trabalho. As extensões de $\mathrm{III}^{i_{j\alpha}}$ serão representadas por $\mathrm{III}^{i_{j\alpha k}}$ e as extensões de $\mathrm{I}^{i_{j\alpha}}$ por $\mathrm{I}^{i_{j\alpha k}}$, onde i, j, k são números naturais e α uma letra maiúscula do alfabeto.

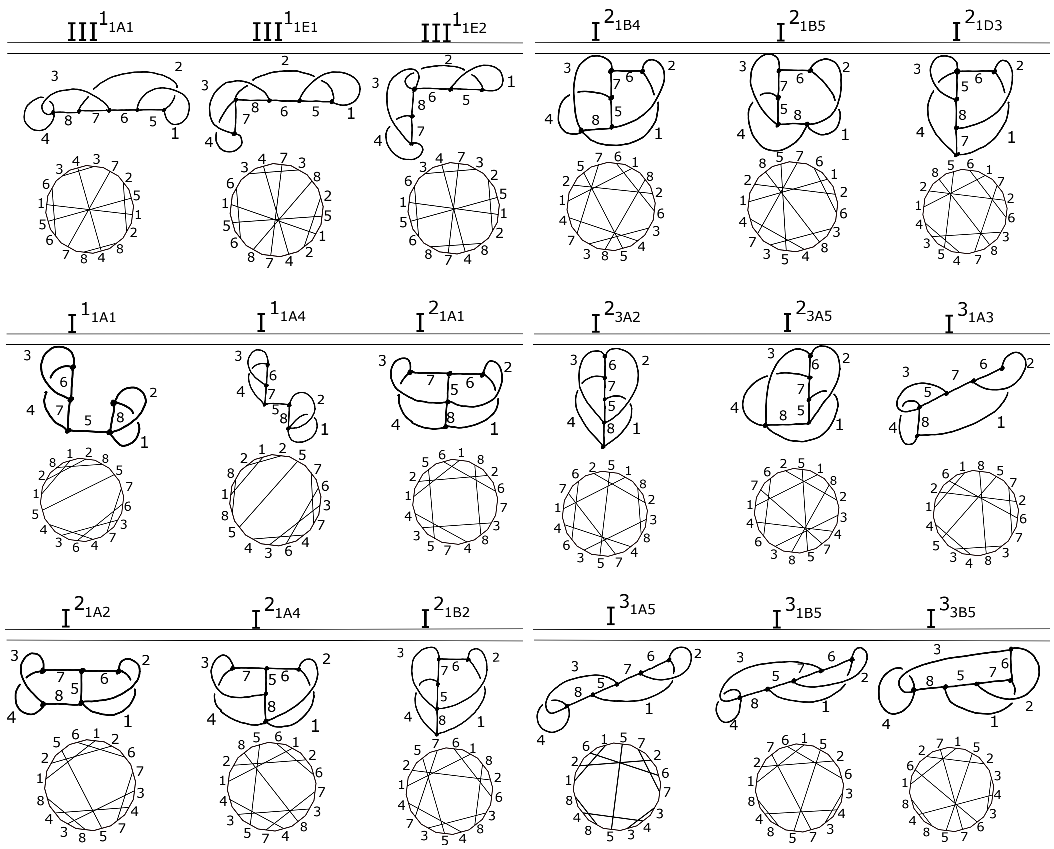


Figura 5.18: Representantes das famílias com cinco vértices

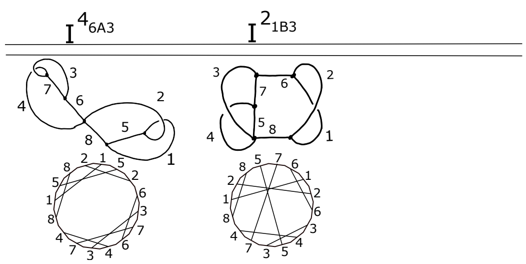


Figura 5.19: Representantes das famílias com cinco vértices

□

Como visto na Proposição 4.0.4, sobre o Bitoro, os grafos de emparelhamento com cinco vértices e oito arestas, não podem ser $k-regulares$, para qualquer que seja $K \in \mathbb{N}$.

Em [9] *Jørgensen e Näätänen*, na página 460, exibem 8 códigos referentes aos diagramas de emparelhamento, representando as 8 famílias existentes nesse caso, onde demonstram a que existem somente essas famílias, para G(6,9) sobre o Bitoro. Além disso exibem oito grafos como representantes associados a tais diagramas.

Neste trabalho, serão apresentados, nas Figuras 5.21 e 5.22, todos os grafos de emparelhamento $G(6,9)$ sobre o Bitoro. Para concluir este objetivo, foi suficiente encontrar todas as extensões de todos os grafos das Figuras 5.18 e 5.19.

Proposição 5.3.5. *Existem 8 grafos de emparelhamento $G(6,9)$ sobre o Bitoro. Os grafos e seus respectivos diagramas de emparelhamento se encontram na Figura 5.20.*

Demonstração. No total existem 40 grafos de emparelhamento $G(6,9)$ para o Bitoro, porém apenas 8 delas são distintas, estes estão apresentados na Figura 5.20. As extensões de $\mathrm{III}^{i_{j\alpha k}}$ serão representadas por $\mathrm{III}^{i_{j\alpha k\beta}}$ e as extensões de $\mathrm{I}^{i_{j\alpha k}}$ por $\mathrm{I}^{i_{j\alpha k\beta}}$, onde i, j, k são números naturais e α e β são letras maiúsculas do alfabeto.

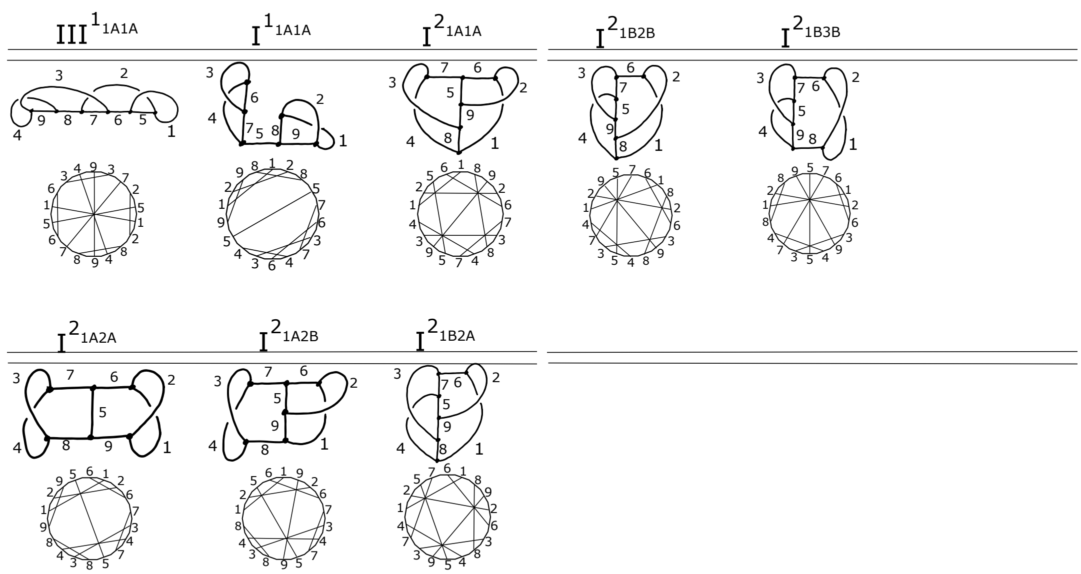


Figura 5.20: Representantes das famílias com seis vértices

□

De acordo com a Proposição 4.0.4, os grafos de emparelhamento com 6 vértices sobre o Bitoro que são K-regulares tem, necessariamente, $K = 3$. Estes grafos são particularmente trabalhados em [4], [3], [9] e [8], onde em [4] e em [9] os grafos trivalentes são obtidos a partir da tesselação. Porém nestes havia uma séria dificuldade em determinar tais grafos. Em [3] *Faria*, *Mendes de Jesus*, *Romero Sánchez*, introduziram o conceito de cirurgias verticais e horizontais e demonstraram que se G e H são grafos de emparelhamento trivalentes, então o grafo obtido por cirurgia de G e H também é um grafo de emparelhamento. Facilitando a determinação dos grafos de emparelhamento.

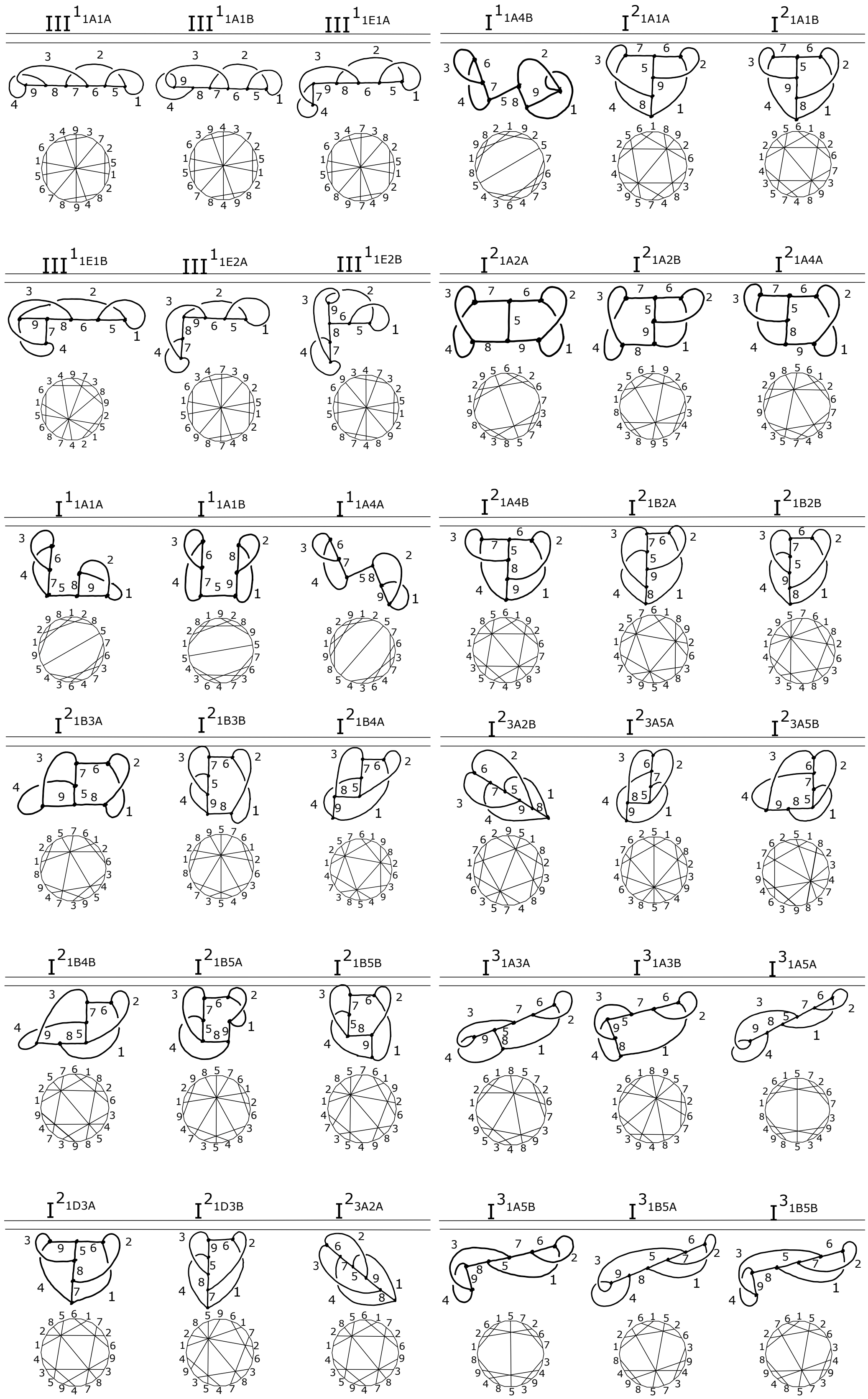


Figura 5.21: Grafos G(6,9) 3-regulares

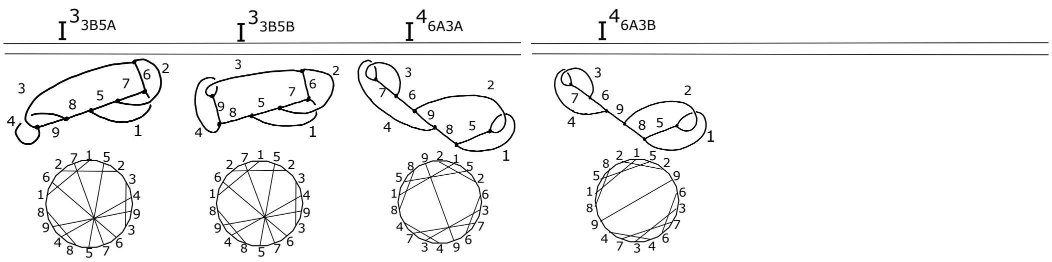


Figura 5.22: Representantes G(6,9) 3-regulares

Pode-se observar na Figura 5.21 e na Figura 5.22 que dos 40 grafos 3-regulares existentes, todos se resumem nos oito grafos da Figura 5.18 e da figura 5.19, tais equivalências seguem na seguinte lista:

$F1_6$: I^{1}_{1A1A}, I^{1}_{1A1B}, I^{1}_{1A4A}, I^{1}_{1A4B}, I^{4}_{6A3B}

$F\ 2_6$: I^{2}_{1A1A}, I^{2}_{1A1B}, I^{2}_{1A4A}, I^{2}_{1B4B}, I^{2}_{1D3A}, I^{2}_{3A2A}, I^{2}_{3A2B}

$F\ 3_6$: I^{2}_{1A2A}, I^{3}_{1A5A}, I^{3}_{1A5B}, I^{4}_{6A3A}

$F\ 4_6$: I^{2}_{1A2B}, I^{2}_{1A4A}, I^{2}_{1B3A}, I^{3}_{1A3A}

$F\ 5_6$: I^{2}_{1B2A}, I^{2}_{1B4A}

$F\ 6_6$: I^{2}_{1B2B}, I^{2}_{1B5B}, I^{2}_{1D3B}, I^{2}_{3A5A}, I^{2}_{3A5B}, III^{1}_{1E1B}

$F\ 7_6$: I^{2}_{1B3B}, I^{2}_{1B5A}, I^{3}_{1A3B}, I^{3}_{3B5A}, I^{3}_{3B5B}

$F\ 8_6$: III^{1}_{1A1A}, III^{1}_{1E1A}, III^{1}_{1E2A}, I^{1}_{1E2B}

A Figura 4.4 apresenta as oito formas distintas de mergulhar grafos de emparelhamento com seis vértices e nove arestas. Observe que estas oito formas de mergulhar se reduzem a apenas 5 grafos, visto que os os grafos I^{2}_{1B2B} e I^{2}_{1A1A} da Figura 5.20 são formas de mergulhar o grafo indicado por (a) na Figura 4.4. Os grafos indicados por I^{2}_{1A2A} e III^{1}_{1A1A} da Figura 5.20 são formas distintas de mergulhar o grafo indicado por (b) na Figura 4.4. Já os grafos I^{2}_{1A2B} e I^{2}_{1B3B} da Figura 5.20 são duas formas distintas de mergulhar o grafo indicado por (d) na Figura 4.4. Os demais grafos, I^{1}_{1A1A} e I^{2}_{1B2A} da Figura 5.20 estão representados por (c) e (e) na Figura 4.4, respectivamente.

5.4 Conclusão

Neste trabalho foram estudadas as extensões de grafos sobre uma superfície fechada e orientada, a fim de determinar grafos de emparelhamento sobre essas superfícies, cuja relação foi introduzida em [8]. Ao determinar grafos de emparelhamento sobre superfícies M_g surge um invariante relacionado a estes grafos, o diagrama de emparelhamento, cujas principais referências de estudo foram [8] e [9]. Estes diagramas permitiram distinguir as formas as quais um grafo de emparelhamento está mergulhado em M_g, já usado em [8] e por outro lado distinguir as formas as quais pode-se emparelhar as arestas de um polígono regular, a fim de obter uma superfície fechada e orientada, já usada em [9].

Com o objetivo de associar uma palavra ao grafo de emparelhamento, foram introduzidos os conceitos de curva paralela e grafo paralelo. Foram demonstrados resultados relacionando a curva paralela aos grafos de emparelhamento de arestas, tal como o resultado que caracteriza um grafo de emparelhamento a partir do número de componentes conexas da curva paralela.

A curva paralela foi também usada para construir o grafo paralelo. Um grafo auxiliar que pode ser definido de forma mais geral, mas no texto foi construído de modo a, somente, carregar informações a respeito dos grafos de emparelhamento de uma dada superfície M_g. Com as informações que carrega, o grafo paralelo tem o poder de associar, de forma natural, uma palavra a um diagrama de emparelhamento e consequentemente a um grafo de emparelhamento.

Usando a extensão de grafos de emparelhamento e as palavras associadas para distinguir os emparelhamentos, partimos do I_4 mergulhado sobre o Bitoro e foi possível concluir que existem 537 formas de mergulhar grafos de emparelhamento com 1, 2, 3, 4, 5, e 6 vértice sobre M_2(Todas exibidas no Capítulo 6). Porém, apenas 106 destas formas são distintas. Sendo 2 formas com um vértice, 11 formas com dois vértices, 29 formas com três vértices, 36 formas com quatro vértices, 20 formas com cinco vértices e 8 formas com seis vértices.

Das 537 formas de mergulhar grafos de emparelhamento sobre o Bitoro, 57 dessas são K-regulares, com $K = 3, 4, 5, 8$. Dessas 57 formas $K - regulares$, apenas 25 são distintas, sendo 2 formas com umi vértices, 6 formas com dois vértices, 9 formas com três vértices e 8 formas com seis vértices.

Como projeto futuro, pretendemos utilizar as palavras associadas aos diagramas de emparelhamento para estudar possíveis propriedades algébricas dos grafos de emparelhamento e verificar a relação dos grafos de emparelhamento com as apresentações do grupo fundamental do Bitoro. Além disso, resultados similares podem ser demonstrados para o caso de superfícies não orientadas.

Bibliografia

[1] Béla Bollobás. *Modern graph theory*. Vol. 184. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] Sergei Chmutov. “Generalized duality for graphs on surfaces and the signed Bollobás–Riordan polynomial”. Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 99.3 (2009), pp. 617–638.

[3] MB Faria, C Mendes de Jesus e PDR Sanchez. “Surgeries of pairing of Edges associated to trivalent graphs”. Em: *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* 47.4 (2016), pp. 1085–1095.

[4] MB Faria e R Palazzo Jr. “Emparelhamentos Generalizados Associados à Tesselação {12g- 6, 3}”. Em: *TEMA-Tendências em Matemática Aplicada e Computacional* 11.1 (2010), pp. 59–67.

[5] Peter A Firby e Cyril F Gardiner. *Surface topology*. Elsevier, 2001.

[6] J Foisy e L Ludwig. “When graph theory meets knot theory”. Em: *Communicating mathematics* (2009), pp. 67–85.

[7] Allen Hatcher. *Algebraic topology.*, 2005.

[8] C Mendes de Jesus e Pantaleón D Romero. “Graphs and closed surfaces associated with a pairing of edges for Regular Polygons”. Em: *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* 51.2 (2020), pp. 527–541.

[9] Troels Jørgensen e Marjatta Näätänen. “Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons”. Em: *The Quarterly Journal of Mathematics* 33.4 (1982), pp. 451–461.

[10] L Christine Kinsey. *Topology of surfaces*. Springer Science & Business Media, 1997.

[11] M Lee John. “Introduction to smooth manifolds”. Em: *Graduate Texts in Mathematics* 218 (2003).

[12] Elon Lages Lima. *Homologia básica*. IMPA, 2009.

[13] Elon Lages Lima. *Variedades diferenciáveis*. 15. Instituto Matemática Puro e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1973.

[14] James R Munkres. *Topology; a First Course [By] James R. Munkres*. Prentice-Hall, 1974.

[15] Gou Nakamura. "Generic fundamental polygons for surfaces of genus three". Em: *Kodai Mathematical Journal* 27.1 (2004), pp. 88–104.

Capítulo 6

Apêndice A

6.1 A técnica do grafo paralelo e os grafos sobre o Bitoro

Na presente seção serão descritos todos os grafos de emparelhamento sobre o Bitoro, como extensão de l_4. Para cada passo de extensão, serão separadas as famílias, ou seja, quais grafos são diferentes, para um número fixo de vértices. Usando como invariante a palavra associada, associada a cada grafo e consequentemente o respectivo diagrama.

Existem duas formas de mergulhar o l_4 no Bitoro, com o objetivo do mesmo constituir um grafo de emparelhamento, as quais estão nomeadas por I e III.

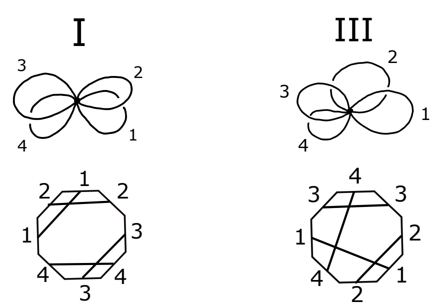
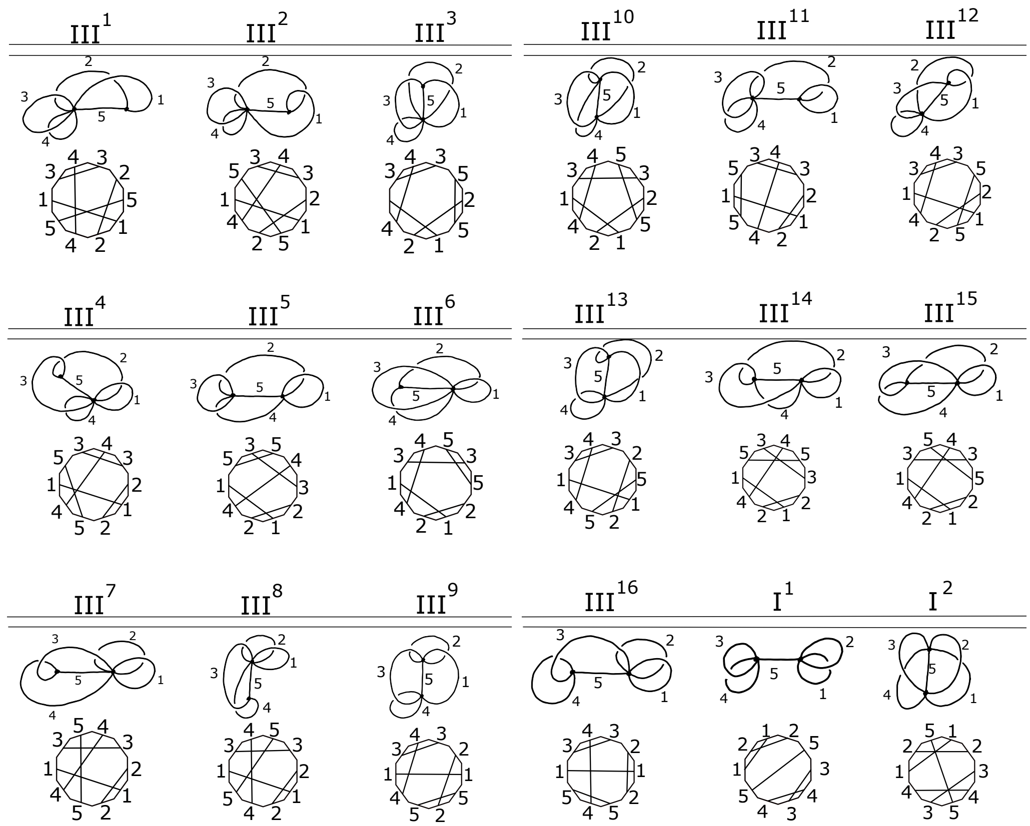


Figura 6.1: Grafos com 2 vértices

6.1.1 Grafos com 2 vértices e 5 arestas:

Nesta seção serão descritos e discriminados, todos os grafos com dois vértices e cinco arestas que podem ser reduzidos ao l_4. Seguem todas as extensões possíveis para III e I, sendo que as extensões de III serão indicadas por III^i enquanto as extensões de I serão indicadas por I^j.



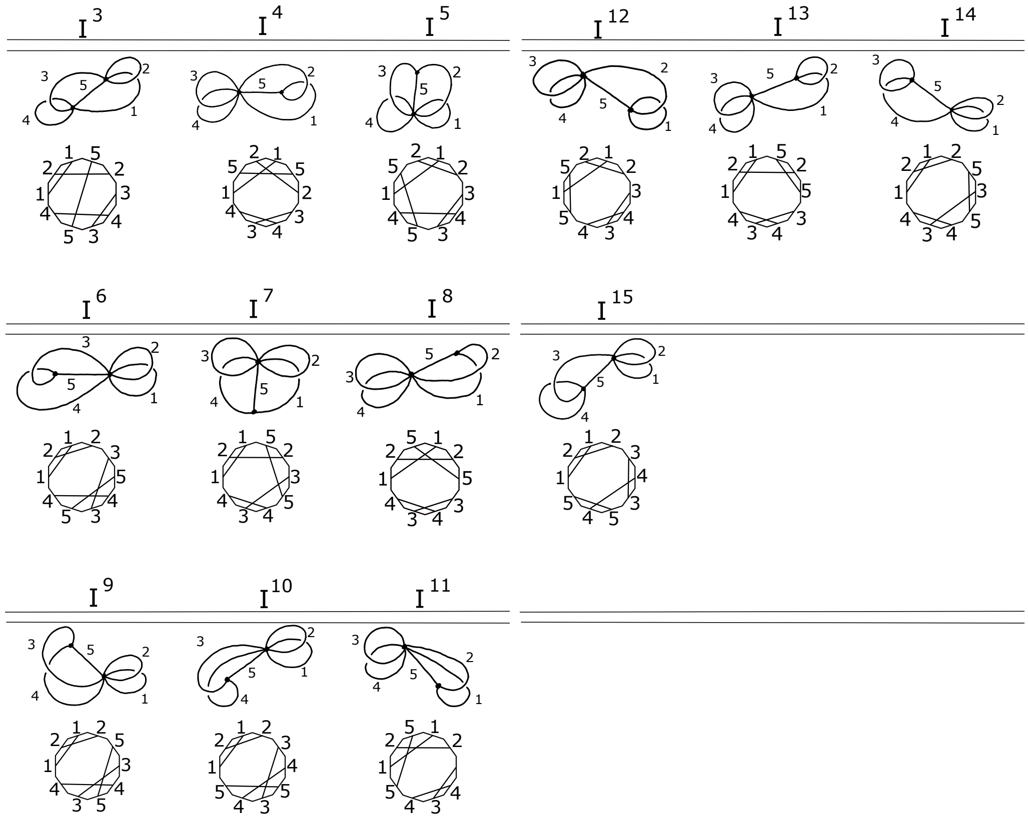


Figura 6.2: Grafos com dois vértices

Como visto na Figura 6.2, exitem 31 formas de mergulhar grafos com dois vértices e cinco arestas. Porém, apenas 11 dessas são distintas.

As formas equivalentes, de acordo com a leitura da palavra, irão formar o que será chamado de família. Dessa forma, as famílias referentes aos grafos de dois vértices e cinco arestas são:

F 1_2 : III^1, III^2, III^7, III^8.

F 2_2: III^3, III^6, I^5 I^7.

F 3_2: III^4.

F 4_2: III^5, III^9, I^3.

F 5_2: III^{10}.

F 6_2: III^{11}, III^{16}.

F 7_2: III^{12}, III^{13}, III^{14}, III^{15}.

F 8_2: I^1.

F 9_2: I^2.

F 10_2: I^4, I^6, I^8, I^9, I^{10}, I^{11}.

F 11_2: I^{12}, I^{13}, I^{14}, I^{15}.

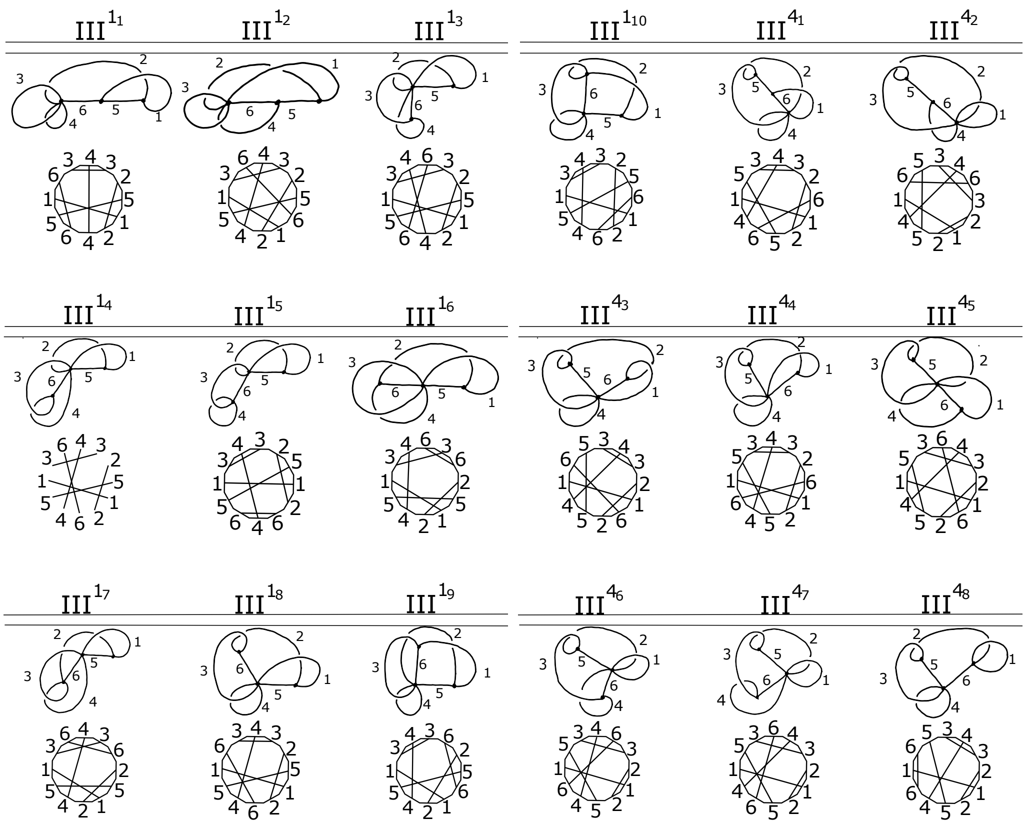
Os quais são representados por:

$$I^1, I^2, I^3, I^4, I^5, I^{12}, III^1, III^4, III^{10}, III^{11} III^{12}.$$

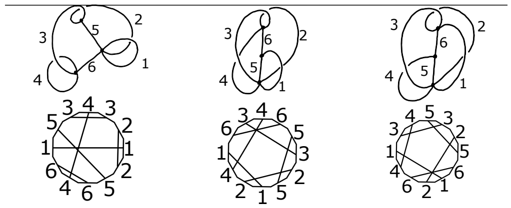
6.1.2 Grafos com 3 vértices e 6 arestas:

Nesta seção serão descritos e discriminados os grafos de três vértices e seis arestas que podem ser retraídos no I_4. A indexação das extensões irão seguir o mesmo padrão das anteriores.

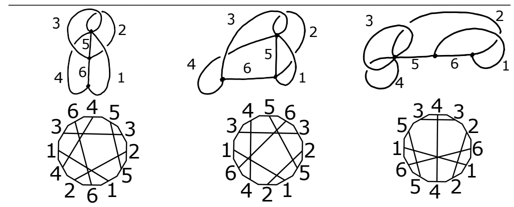
A fim de determinar tais grafos, basta estender os representantes das 10 famílias descritos na Subseção 6.1.1.



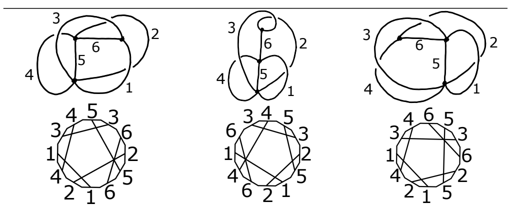
III^{4_9} III^{10_1} III^{10_2}



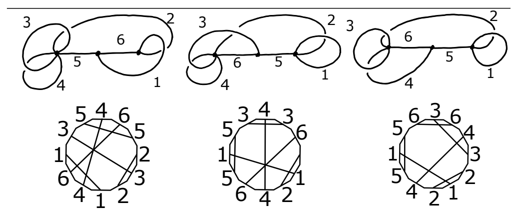
III^{10_9} $\mathrm{III}^{10_{10}}$ III^{11_1}



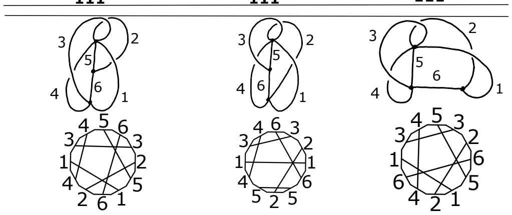
III^{10_3} III^{10_4} III^{10_5}



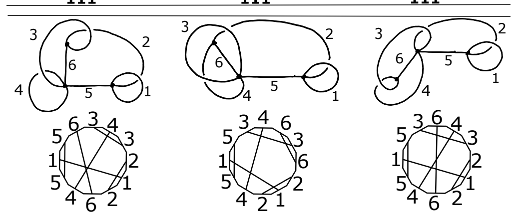
III^{11_2} III^{11_3} III^{11_4}



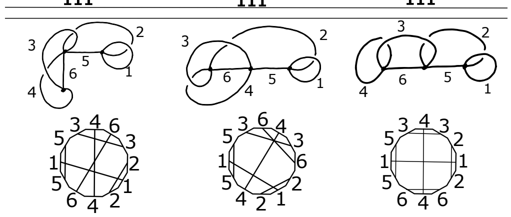
III^{10_6} III^{10_7} III^{10_8}



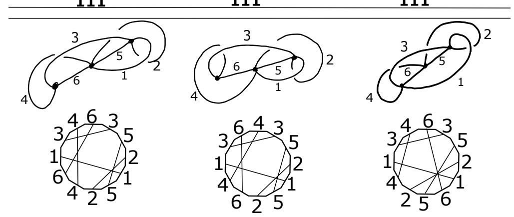
III^{11_5} III^{11_6} III^{11_7}



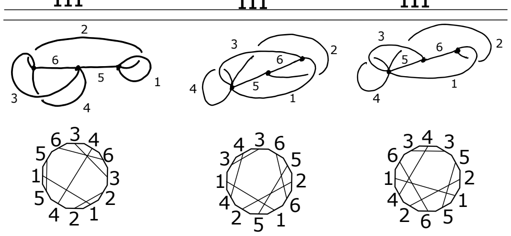
III^{11_8} III^{11_9} $\mathrm{III}^{11_{10}}$



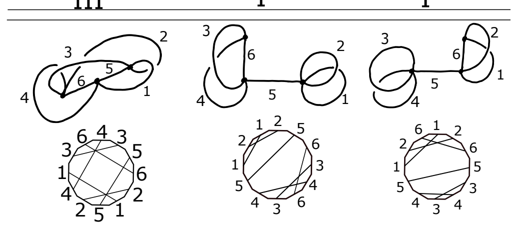
III^{12_6} III^{12_7} III^{12_8}



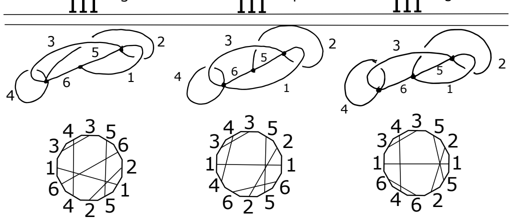
$\mathrm{III}^{11_{11}}$ III^{12_1} III^{12_2}



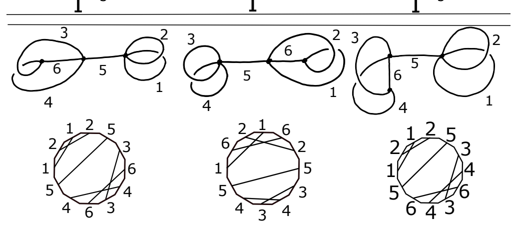
III^{12_9} I^{1_1} I^{1_2}

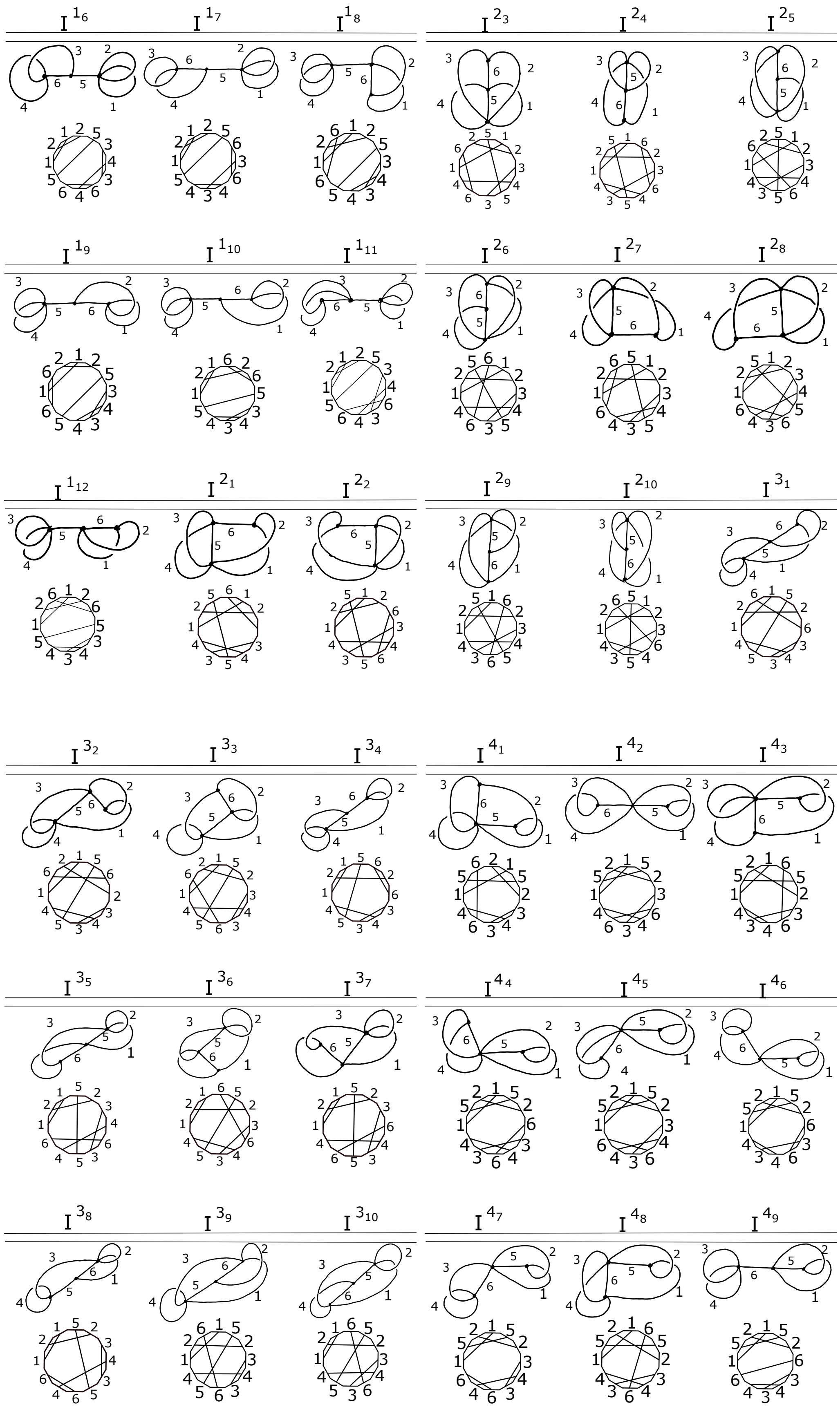


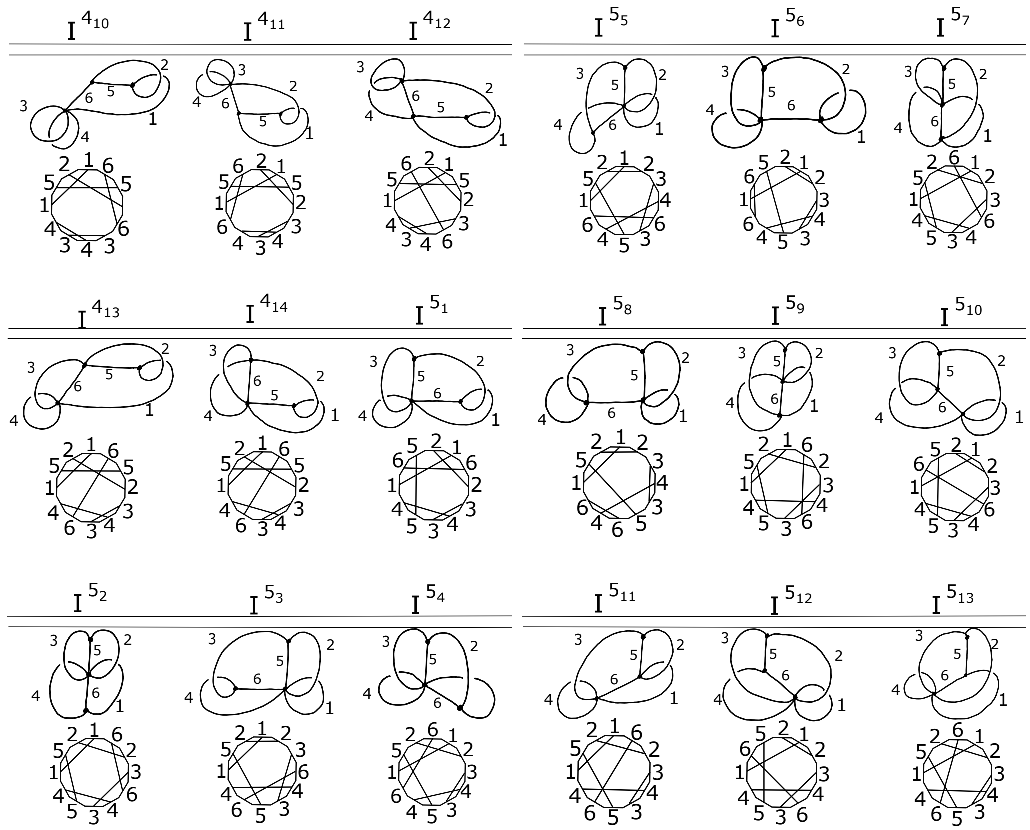
III^{12_3} III^{12_4} III^{12_5}



I^{1_3} I^{1_4} I^{1_5}




I^{1_6}
I^{1_7}
I^{1_8}
I^{2_3}
I^{2_4}
I^{2_5}
I^{1_9}
$I^{1_{10}}$
$I^{1_{11}}$
I^{2_6}
I^{2_7}
I^{2_8}
$I^{1_{12}}$
I^{2_1}
I^{2_2}
I^{2_9}
$I^{2_{10}}$
I^{3_1}
I^{3_2}
I^{3_3}
I^{3_4}
I^{4_1}
I^{4_2}
I^{4_3}
I^{3_5}
I^{3_6}
I^{3_7}
I^{4_4}
I^{4_5}
I^{4_6}
I^{3_8}
I^{3_9}
$I^{3_{10}}$
I^{4_7}
I^{4_8}
I^{4_9}



$I^{4_{10}}$
$I^{4_{11}}$
$I^{4_{12}}$
I^{5_5}
I^{5_6}
I^{5_7}
$I^{4_{13}}$
$I^{4_{14}}$
I^{5_1}
I^{5_8}
I^{5_9}
$I^{5_{10}}$
I^{5_2}
I^{5_3}
I^{5_4}
$I^{5_{11}}$
$I^{5_{12}}$
$I^{5_{13}}$

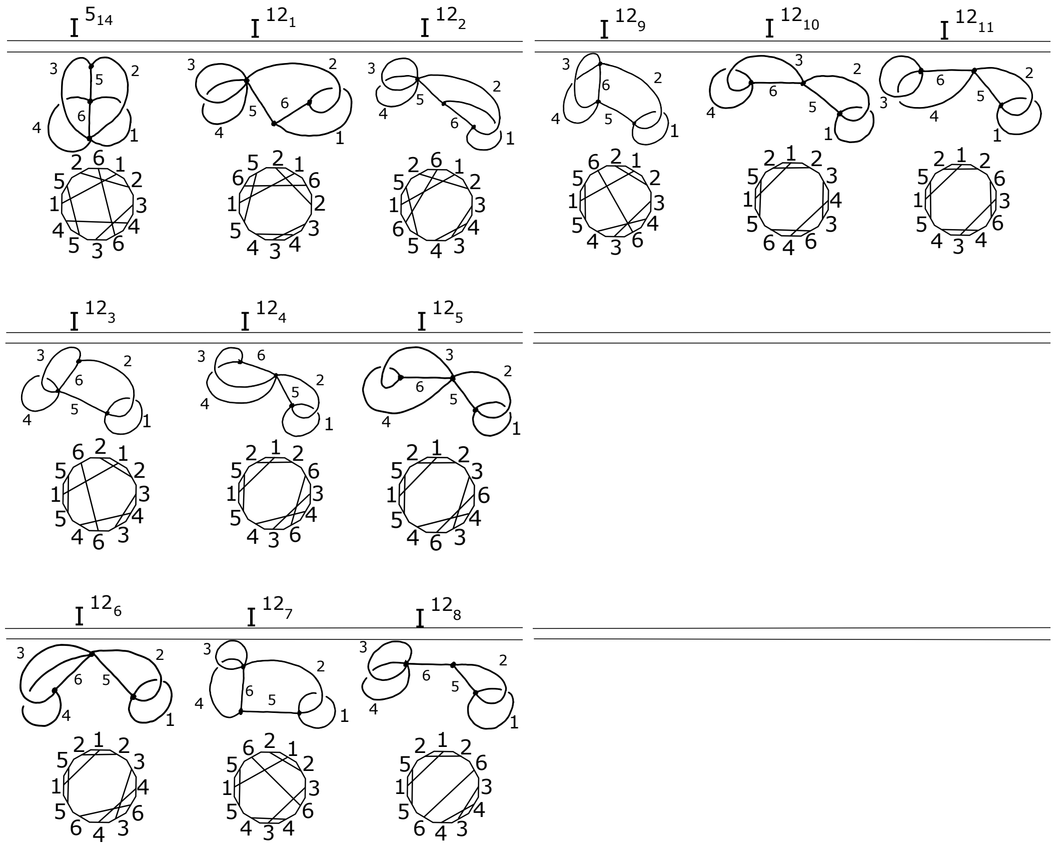


Figura 6.3: Grafos com três vértices

Como visto na Figura 6.3, exitem 120 formas de mergulhar grafos com três vértices e seis arestas. Porém, apenas 29 dessas são distintas.

As famílias referentes aos grafos de três vértices e seis arestas são:

F 1_3 : $I^{1_1}, I^{1_2}, I^{1_3}, I^{1_4}, I^{1_5}, I^{1_8}, I^{4_9}, I^{1_{11}}, I^{1_{12}}$

F 2_3: $I^{1_{10}}, I^{1_6}, I^{1_7}, I^{1_9}, I^{12_8}$

F 3_3: $I^{2_1}, I^{2_2}, I^{2_7}, I^{2_8}, I^{4_8}, I^{4_{14}}, III^{1_7}$.

F 4_3: $I^{2_3}, I^{2_4}, I^{5_{14}}$.

F 5_3: $I^{2_5}, I^{2_6}, I^{2_9}, I^{2_{10}}$

F ĺ6_3: $I^{3_1}, I^{3_2}, I^{3_5}, I^{3_6}, I^{3_7} I^{4_{12}}, I^{4_{13}}, , III^{12_4}$

F 7_3: $I^{3_3}, I^{3_6}, I^{5_{10}}, I^{5_{11}}, I^{10_7}$

F 8_3: $I^{3_4}, I^{3_8}, I^{5_6}, I^{5_8}, I^{12_3}, I^{12_7}, III^{11_4}, III^{11_6}$.

F 9_3: $III^{1_{10}}, III^{12_3}, I^{3_9}, I^{3_{10}}$

F 10_3: $I^{4_2}, I^{4_4}, I^{4_5}$.

F 11_3: $I^{4_6}, I^{4_7}, I^{12_4}, I^{12_5}, I^{12_6}$

12_3: $I^{4_{10}}, I^{4_{11}}, I^{12_1}, I^{12_2}$, F 13_3: I^{5_2}

F 14_3: I^{5_7}, I^{5_9}, III^{10_1}, III^{10_2}, III^{10_3}, III^{10_4}, III^{10_5}

F 15_3: $I^{5_{12}}$, $I^{5_{13}}$, III^{1_9}, III^{4_1}, III^{4_2}, III^{12_2}

F 16_3: I^{12_9}, III^{11_9}, III^{12_5}, $III^{11_{11}}$

F 17_3: $I^{12_{10}}$, $I^{12_{11}}$

F 18_3: III^{1_1}, III^{11_1}, III^{11_2}

F 19_3: III^{1_2}.

F 20_3: III^{1_3}, III^{1_4},

F 21_3: III^{1_5}, III^{11_7}, III^{11_8}, III^{12_6}, III^{12_7}

F 22_3: III^{1_8}, III^{4_3}, III^{4_4}, III^{4_6}, III^{4_7}

F 23_3: III^{4_5}

F24_3: III^{4_8}, III^{4_9}, III^{11_3}, III^{11_5}

F 25_3: III^{10_6}, III^{10_8}, III^{10_9}, $III^{10_{10}}$

F 26_3: I^{4_1}, I^{4_3}, I^{5_1}, I^{5_3}, I^{5_4}, I^{5_5}, III^{12_1}, III^{1_6}.

F 27_3: $III^{11_{10}}$

F 28_3: III^{12_8}

F 29_3: III^{12_9}

As quais são representadas por:
III^{1_1}, III^{1_2}, III^{1_3}, III^{1_5}, III^{1_8}, III^{4_5}, III^{4_8}, I^{2_5}, III^{10_6}, $III^{1_{10}}$ I^{1_1}, I^{2_1}, I^{2_3}, I^{3_1}, I^{3_3}, I^{3_4}, I^{4_3}, I^{4_6}, $I^{4_{10}}$, I^{5_2}, I^{5_7}, $I^{5_{12}}$, I^{12_8}, I^{12_9}, $I^{12_{10}}$, $I^{1_{10}}$

6.1.3 Grafos com 4 vértices e 7 arestas:

Nesta seção serão determinados e discriminados os grafos com quatro vértices e sete arestas, sobre o Bitoro, que podem ser retraídos no I_4. A fim de determinar tais grafos, basta determinar todas as extensões para cada representante de família.

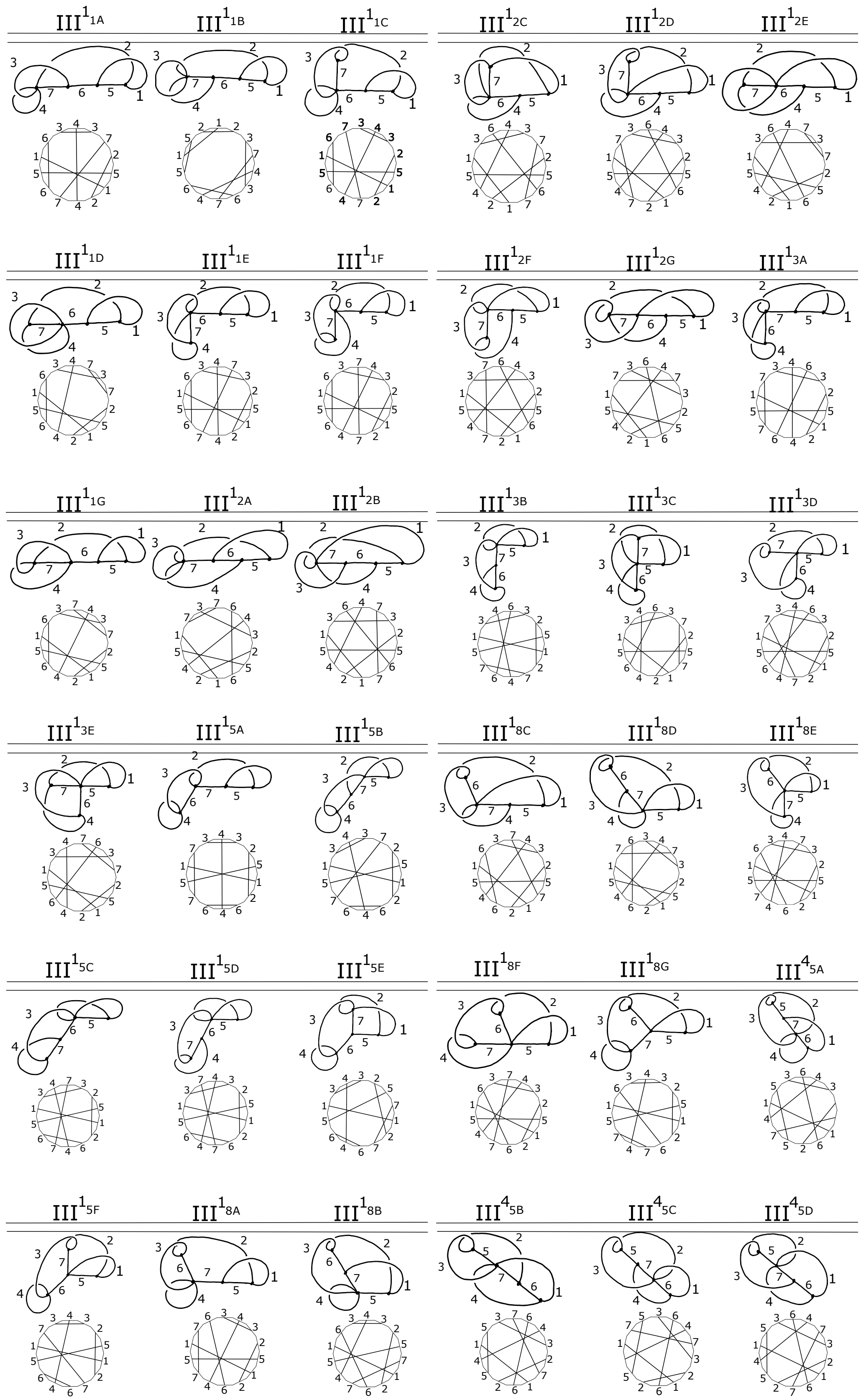


Figura 6.4: Grafos com 4 vértices

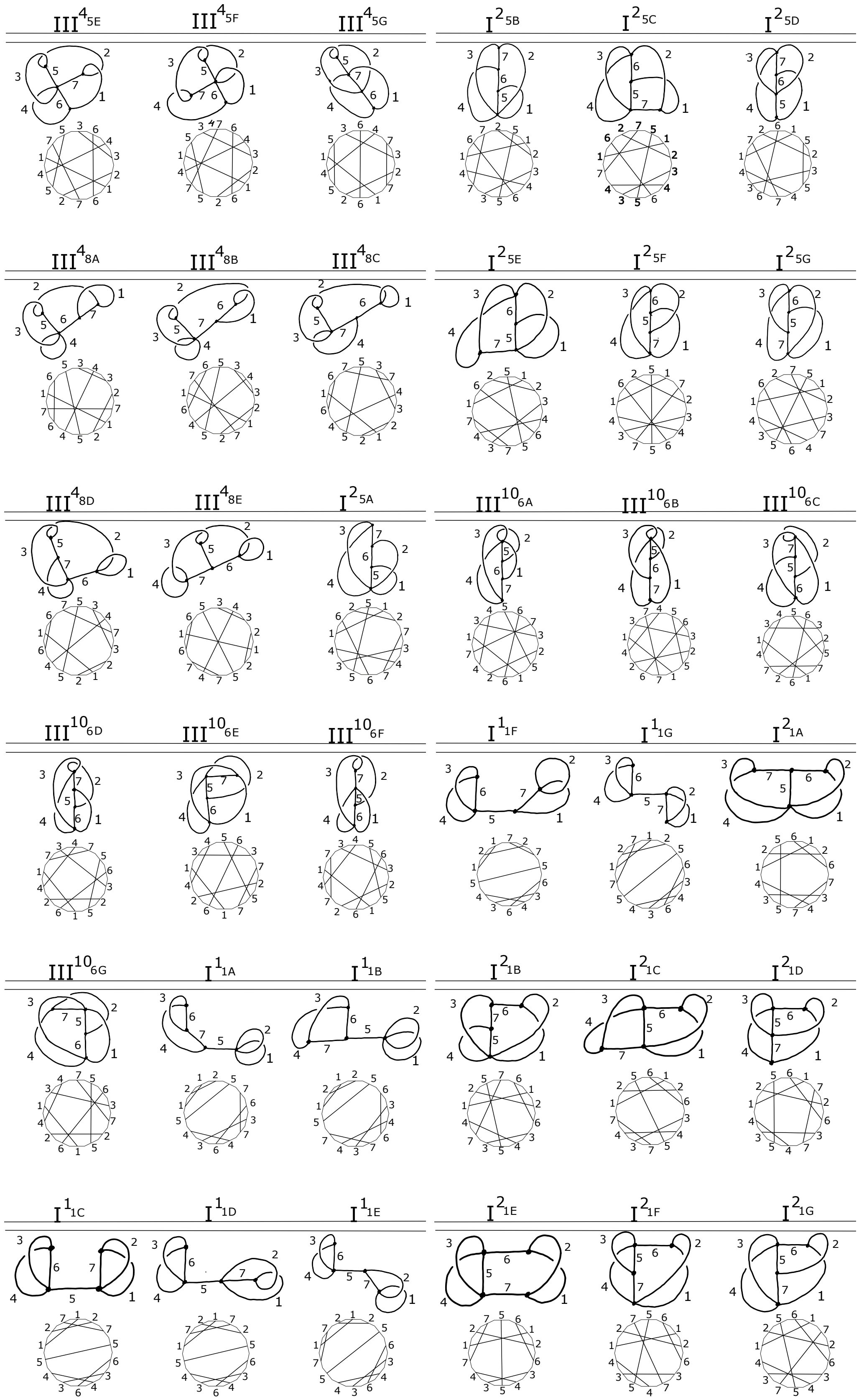


Figura 6.5: Grafos com 4 vértices

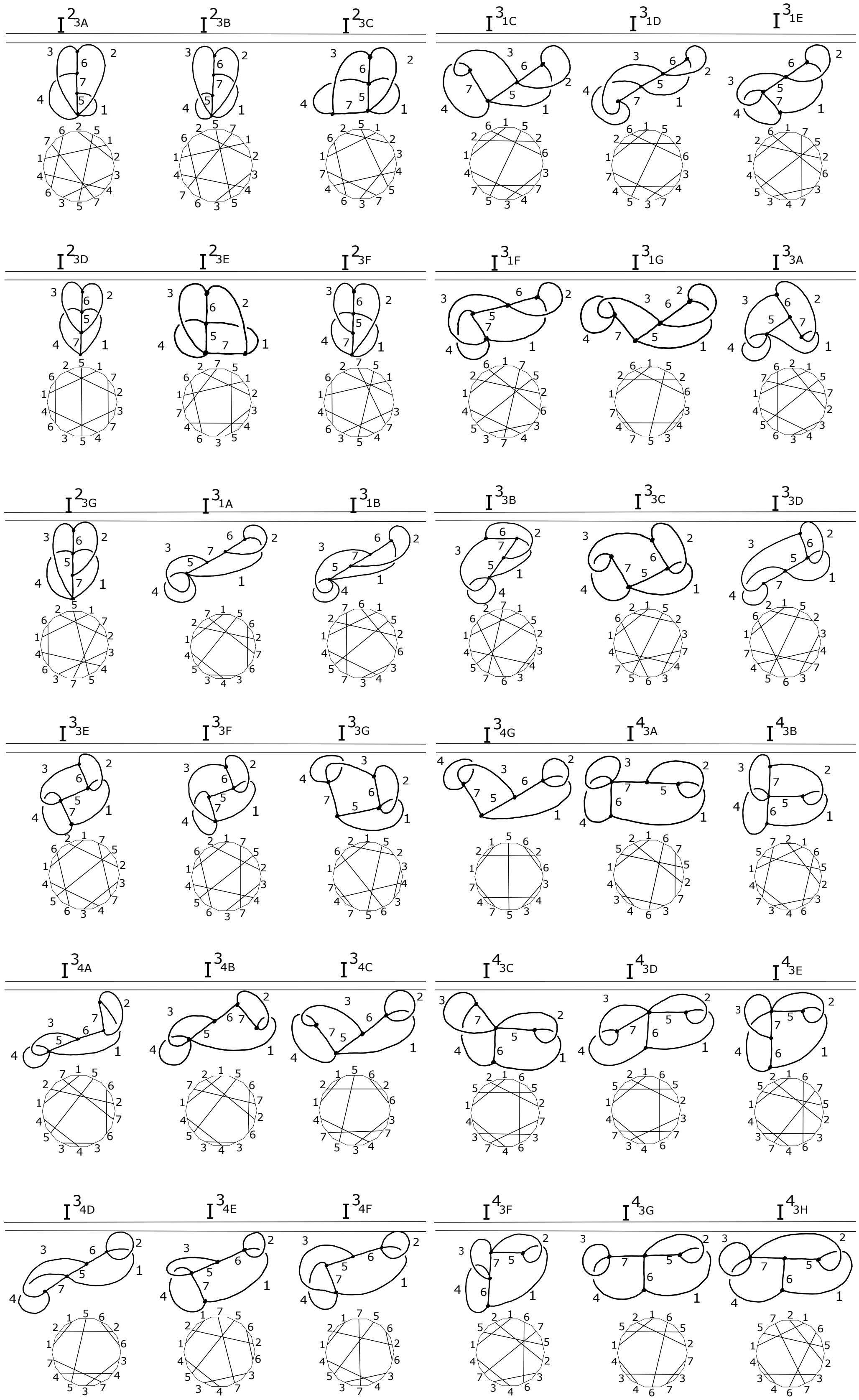


Figura 6.6: Grafos com 4 vértices

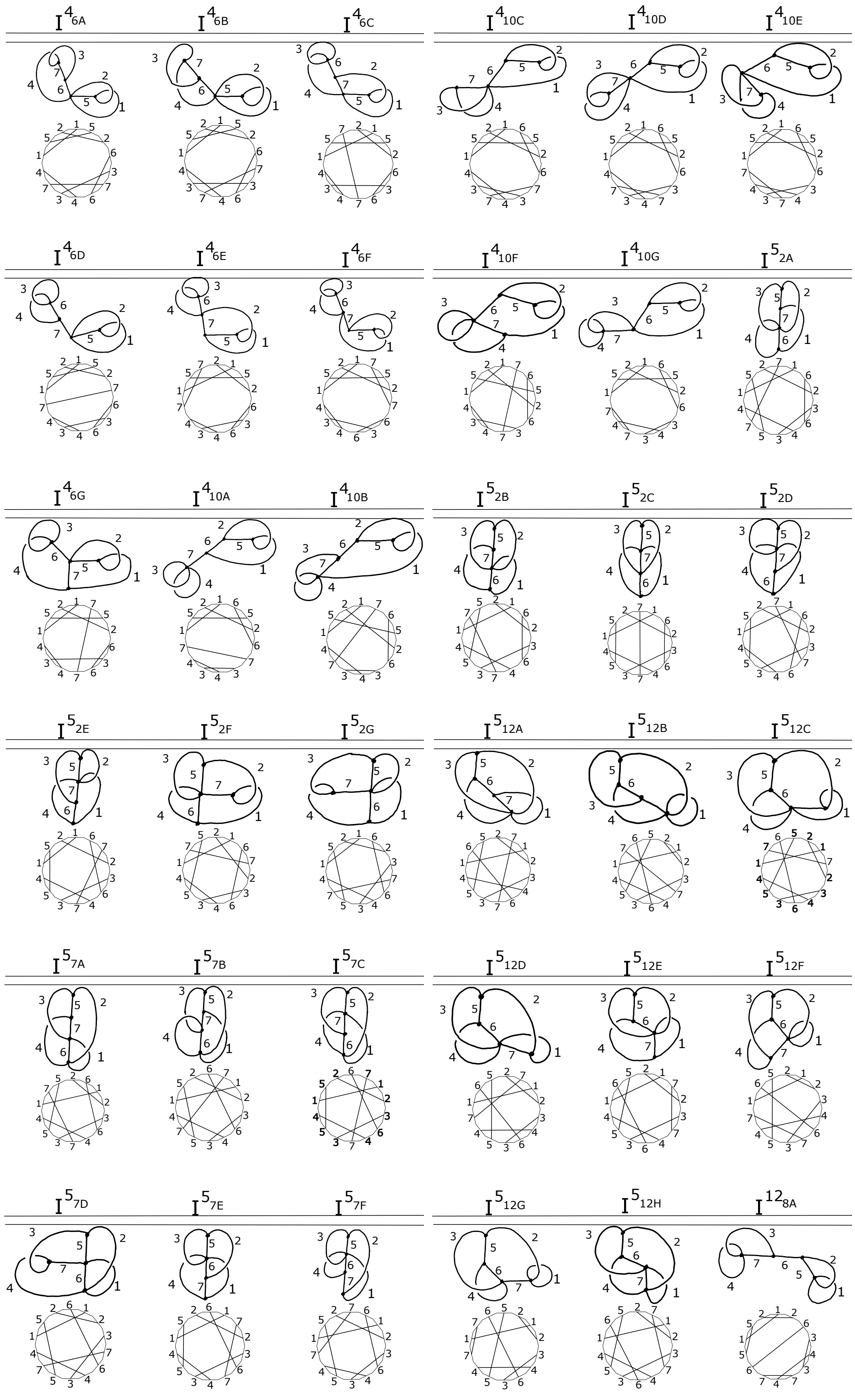


Figura 6.7: Grafos com 4 vértices

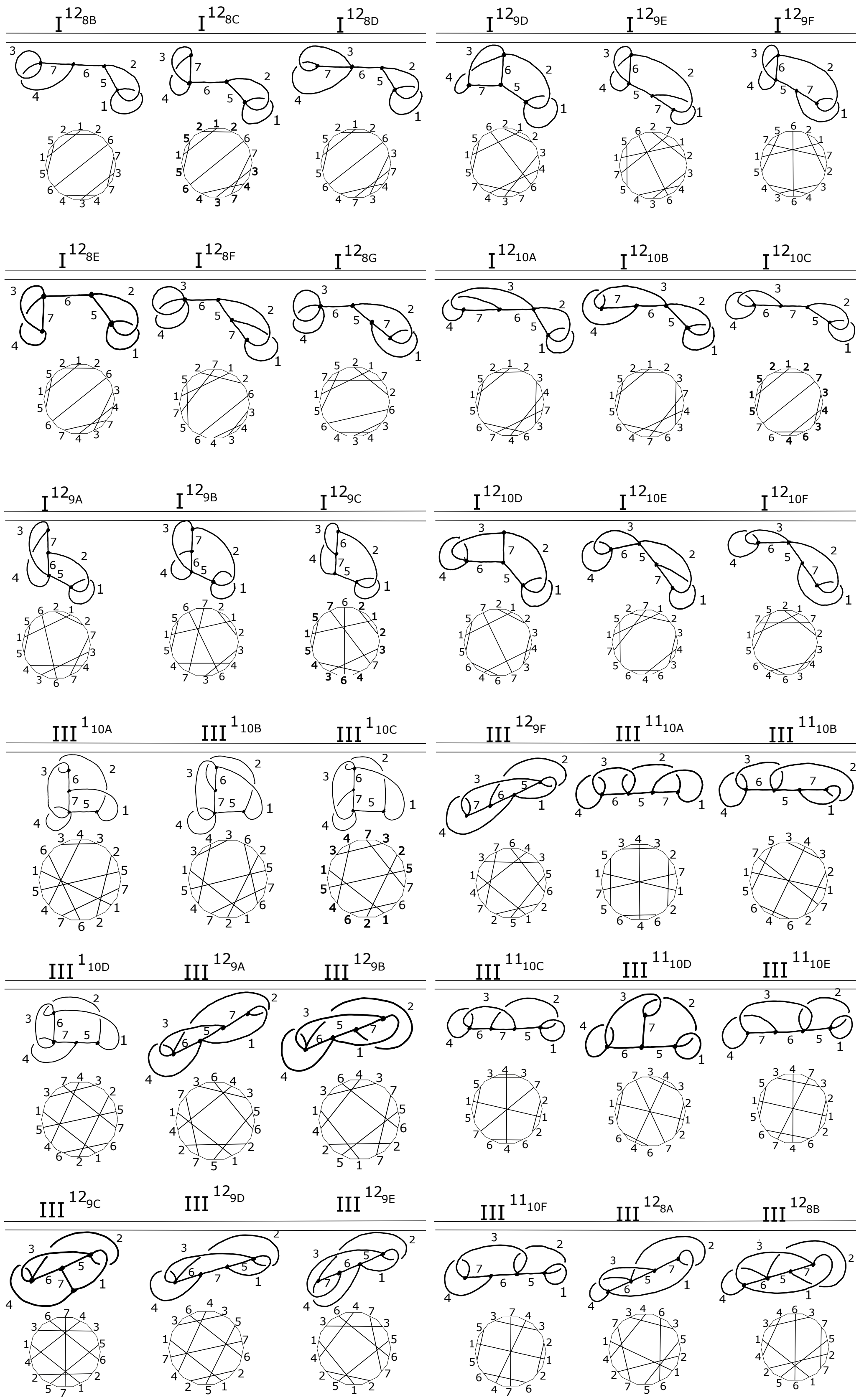


Figura 6.8: Grafos com 4 vértices

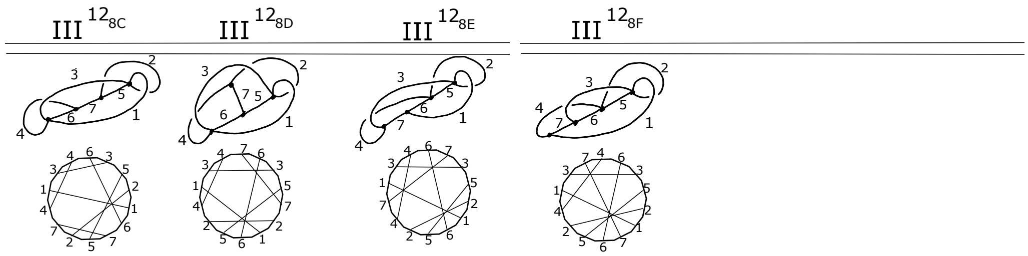


Figura 6.9: Grafos com 4 vértices

Como visto nas Figuras 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9 exitem 189 formas de mergulhar grafos com quatro vértices e sete arestas. Porém, apenas 37 dessas são distintas.

As famílias referentes aos grafos de três vértices e seis arestas são:

F 1_4 : $I^{1_{1A}}, I^{1_{1B}}, I^{4_{10A}}, I^{12_{8F}}, I^{12_{8G}}, III^{1_{1B}}$

F 2_4: $I^{1_{1C}}, I^{1_{1D}}, I^{1_{1G}},$

F 3_4: $I^{1_{1E}}, I^{1_{1F}}, I^{4_{6D}}, I^{4_{10G}}, I^{12_{8C}}, I^{12_{8D}}, I^{12_{8E}}$

F 4_4: $I^{2_{1A}}, I^{4_{3C}}, I^{4_{3D}}, I^{4_{1D}}$

F 5_4: $I^{2_{1B}}, I^{3_{3E}}, I^{4_{3E}}, I^{5_{12C}}, I^{5_{12D}}, I^{2_{5A}}, I^{4_{1C}}, III^{1_{3C}}, III^{1_{3E}}, III^{1_{8D}}, III^{12_{8B}}, III^{12_{8C}}$

F 6_4: $I^{2_{1C}}, I^{3_{1C}}, I^{3_{1D}}$

F 7_4: $I^{2_{1D}}, I^{2_{3C}}, I^{2_{3E}}, I^{5_{7A}}, I^{5_{7D}}, I^{5_{12H}}, I^{11_{6D}}$

F 8_4: $I^{2_{1E}}, I^{12_{9E}}, I^{12_{9F}}, III^{1_{1G}},$

F 9_4: $I^{2_{1F}}, I^{3_{1E}}, I^{3_{3C}}, I^{3_{3D}}, I^{4_{3F}}, I^{4_{1B}}, I^{3_{1F}}, I^{2_{5E}}$

F 10_4: $I^{2_{1G}}, I^{2_{5C}}, I^{1_{1A}}, III^{1_{2G}}, III^{12_{8E}}$

F 11_4:$I^{2_{3A}}, I^{2_{3B}}, I^{5_{12A}}, I^{2_{5B}}, III^{1_{2C}}, III^{1_{2D}}, III^{1_{8C}}, III^{4_{5A}}, III^{4_{5B}}, III^{4_{5C}}, III^{4_{5D}}, III^{4_{5E}}, III^{4_{5F}}$

F 12_4: $I^{2_{3D}}, I^{5_{2C}},$

F 13_4: $I^{2_{3F}}, I^{2_{3G}}, I^{5_{7B}}, I^{5_{7C}}, III^{10_{6C}}, III^{10_{6F}}, III^{10_{6G}}, III^{12_{8A}}, III^{12_{8D}}$
$III^{12_{9A}}, III^{12_{9B}}, III^{12_{9E}}, III^{12_{9F}}$

F 14_4: $I^{3_{1A}}, I^{4_{3A}}, I^{4_{10B}}, I^{4_{10F}}, I^{3_{4A}}, I^{3_{4B}}, I^{4_{1A}}$

F 15_4: $I^{3_{1B}}, I^{3_{3A}}, I^{4_{3H}}, I^{5_{12F}}, III^{1_{2A}}, III^{1_{2E}}, III^{1_{10B}}$

F 16_4: $I^{3_{1G}}, I^{4_{3G}}, I^{4_{6C}}, I^{4_{6G}}, I^{12_{9A}}, I^{12_{9D}}, I^{3_{4C}}, I^{3_{4D}}, III^{1_{1D}}$

F 17_4: $I^{3_{3B}}, I^{5_{12B}}, III^{1_{8B}}, III^{1_{10A}}$

F 18_4: $III^{4_{5G}}, III^{10_{6E}}, III^{1_{10C}}, III^{12_{9D}}, I^{3_{3F}}$

F 19_4: $I^{3_{3G}}, I^{3_{4E}}, III^{4_{8C}},$

F 20_4: $I^{4_{3B}}, I^{5_{2A}}, I^{5_{2B}}, I^{5_{2D}}, I^{5_{2E}}, I^{5_{2F}}, I^{5_{2G}}, I^{5_{7E}}, I^{5_{7F}}, I^{5_{12E}}$

F21_4: $I^{4_{6A}}, I^{4_{6B}}, I^{4_{10C}}, I^{4_{10D}}, I^{4_{10E}},$

F 22_4: $I^{4_{6E}}, I^{4_{6F}}, I^{12_{10A}}, I^{12_{10B}}, I^{12_{10E}}, I^{12_{10F}}$

F 23_4: $I^{5_{12G}}, I^{12_{9B}}, I^{12_{9C}}, I^{3_{4F}}, III^{1_{5E}}, III^{5_{8D}}$

F 24_4: $I^{12_{8A}}$, $I^{12_{8C}}$, $I^{12_{10C}}$

F 25_4: $I^{12_{9D}}$

F 26_4: $I^{2_{5F}}$, $III^{12_{8F}}$

F 27_4: $I^{2_{5G}}$, $III^{12_{9C}}$

F 28_4: $I^{3_{4G}}$

F 29_4: $III^{1_{1A}}$, $III^{1_{1C}}$, $III^{1_{8A}}$, $III^{4_{8A}}$, $III^{4_{8B}}$

F 30_4: $III^{1_{1E}}$, $III^{1_{1F}}$, $III^{1_{3^A}}$, $III^{1_{3B}}$, $III^{1_{5C}}$, $III^{1_{5D}}$

F 31_4: $III^{1_{2B}}$, $III^{1_{2F}}$, $III^{10_{6A}}$, $III^{10_{6B}}$

F 32_4: $III^{1_{3D}}$, $III^{1_{8E}}$, $III^{1_{8F}}$

F 33_4: $III^{1_{5A}}$, $III^{11_{10A}}$, $III^{11_{10B}}$, $III^{11_{10E}}$, $III^{11_{10F}}$

F 34_4: $III^{1_{5B}}$, $III^{1_{5F}}$, $III^{1_{8G}}$

F 35_4: $III^{4_{8E}}$, $III^{11_{10C}}$, $III^{11_{10D}}$

F 36_4: $III^{1_{10D}}$

As quais estão representadas por:

$III^{1_{1A}}$, $III^{1_{1E}}$, $III^{2_{1B}}$, $III^{1_{3D}}$, $III^{1_{5A}}$, $III^{1_{5B}}$, $III^{4_{5G}}$, $III^{8_{8E}}$, $III^{1_{10_D}}$, $I^{3_{4G}}$, $I^{1_{1A}}$, $I^{1_{1C}}$, $I^{1_{1E}}$, $I^{2_{1A}}$, $I^{2_{1B}}$, $I^{2_{1C}}$, $I^{2_{1D}}$, $I^{2_{1E}}$, $I^{2_{1F}}$, $I^{2_{1G}}$, $I^{2_{3A}}$, $I^{2_{3D}}$, $I^{2_{3F}}$, $I^{3_{1A}}$, $I^{3_{1B}}$, $I^{3_{1E}}$, $I^{3_{1G}}$, $I^{3_{3B}}$, $I^{3_{3E}}$, $I^{3_{3G}}$, $I^{4_{3B}}$, $I^{4_{6A}}$, $I^{4_{6E}}$, $I^{5_{12G}}$, $I^{12_{8A}}$, $I^{12_{9D}}$, $I^{2_{5F}}$, $I^{2_{5G}}$

6.1.4 Grafos com 5 vértices e 8 arestas:

Nesta seção serão descritos e discriminados todos os grafos de cinco vértices e oito arestas, sobre o Bitoro, que podem ser retraídos no I_4. A fim de determinar tais grafos, basta determinar todas as extensões para cada representante de família.

Em [5] *Jørgensen e Näätänen*, na página 461, exibem 20 códigos referentes aos diagramas de emparelhamento, representando as 20 famílias existentes nesse caso. Porém, os mesmos não exibem os grafos associados a tais diagramas.

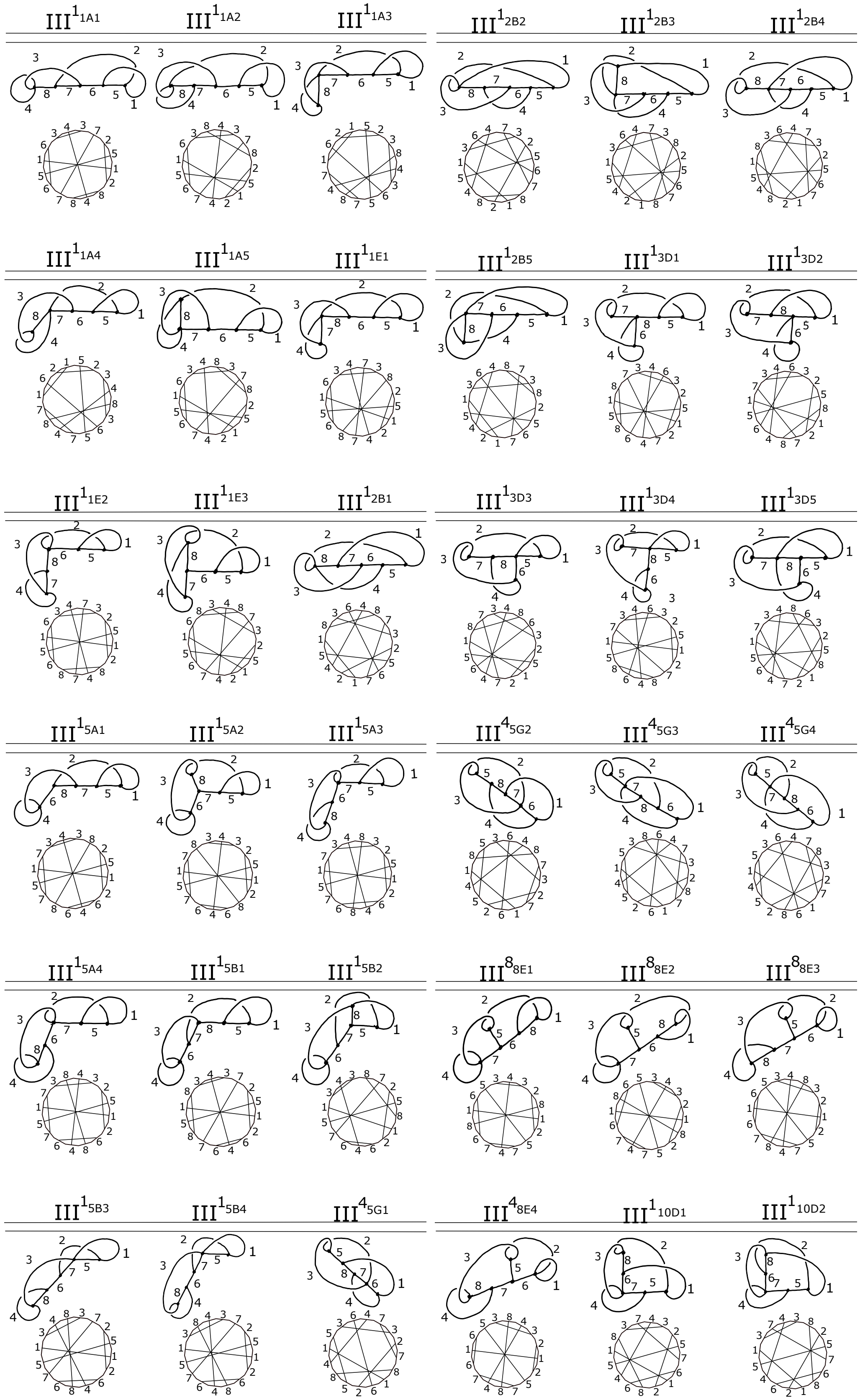


Figura 6.10: Grafos com 5 vértices

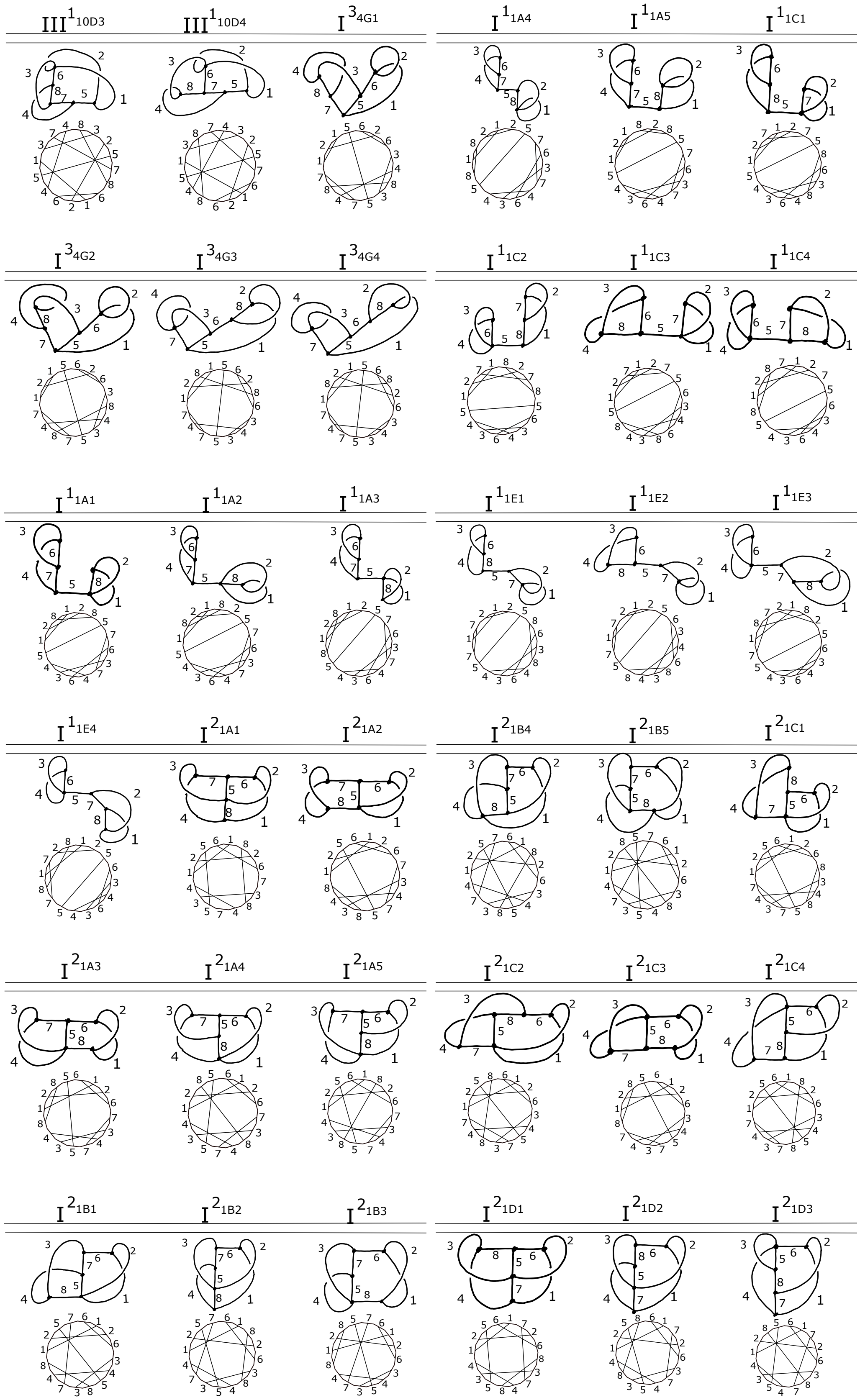


Figura 6.11: Grafos com 5 vértices

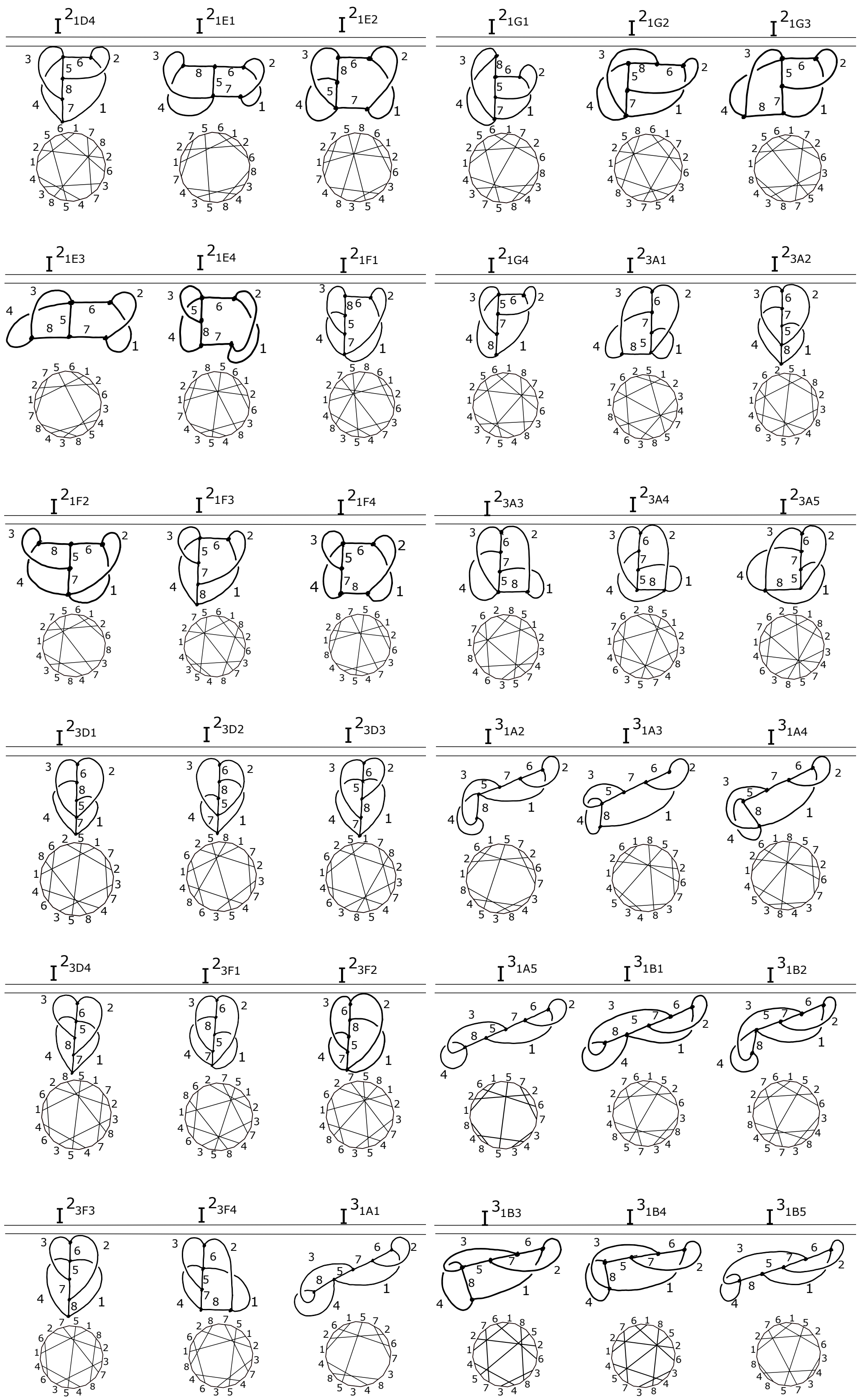


Figura 6.12: Grafos com 5 vértices

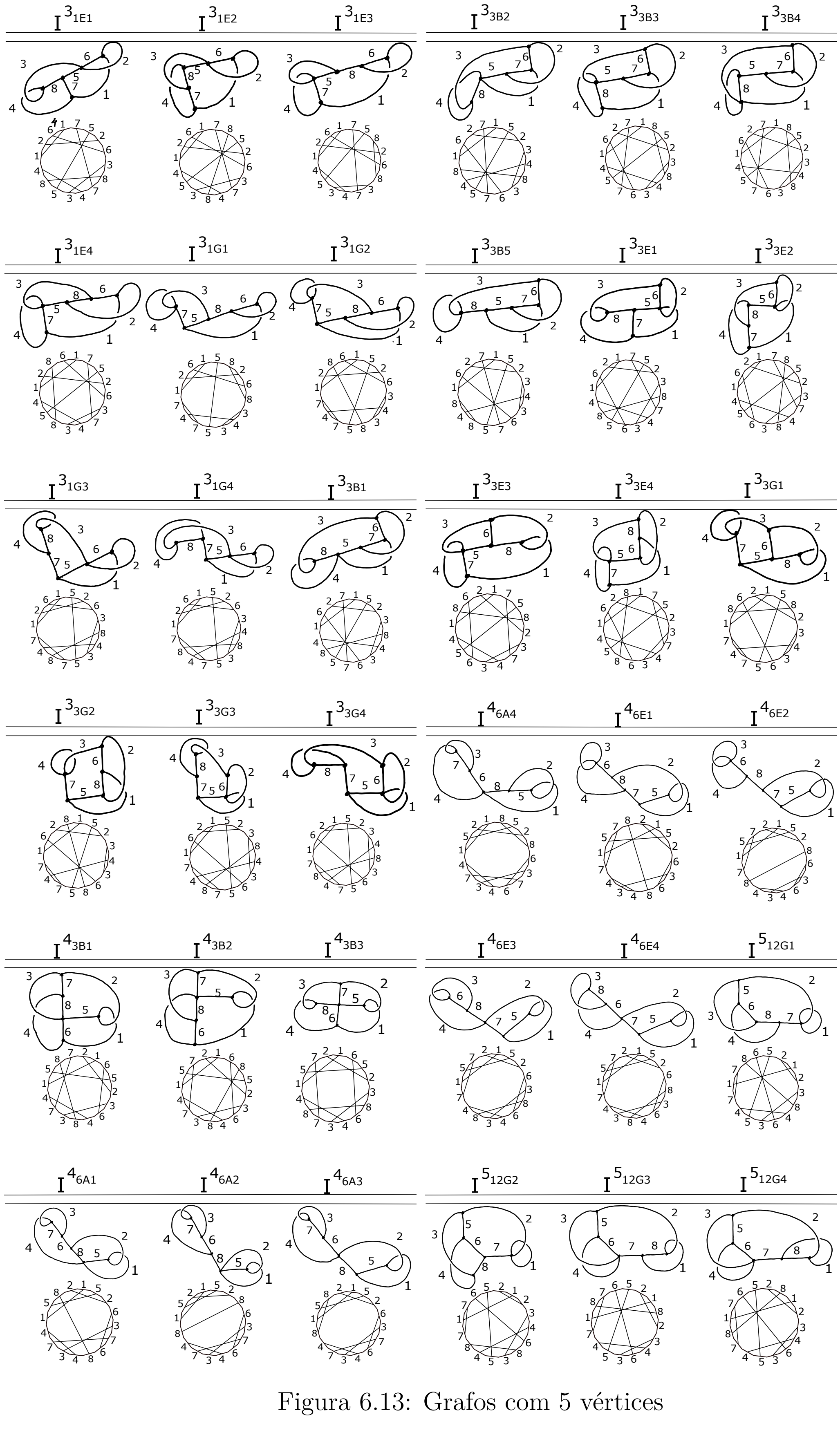


Figura 6.13: Grafos com 5 vértices

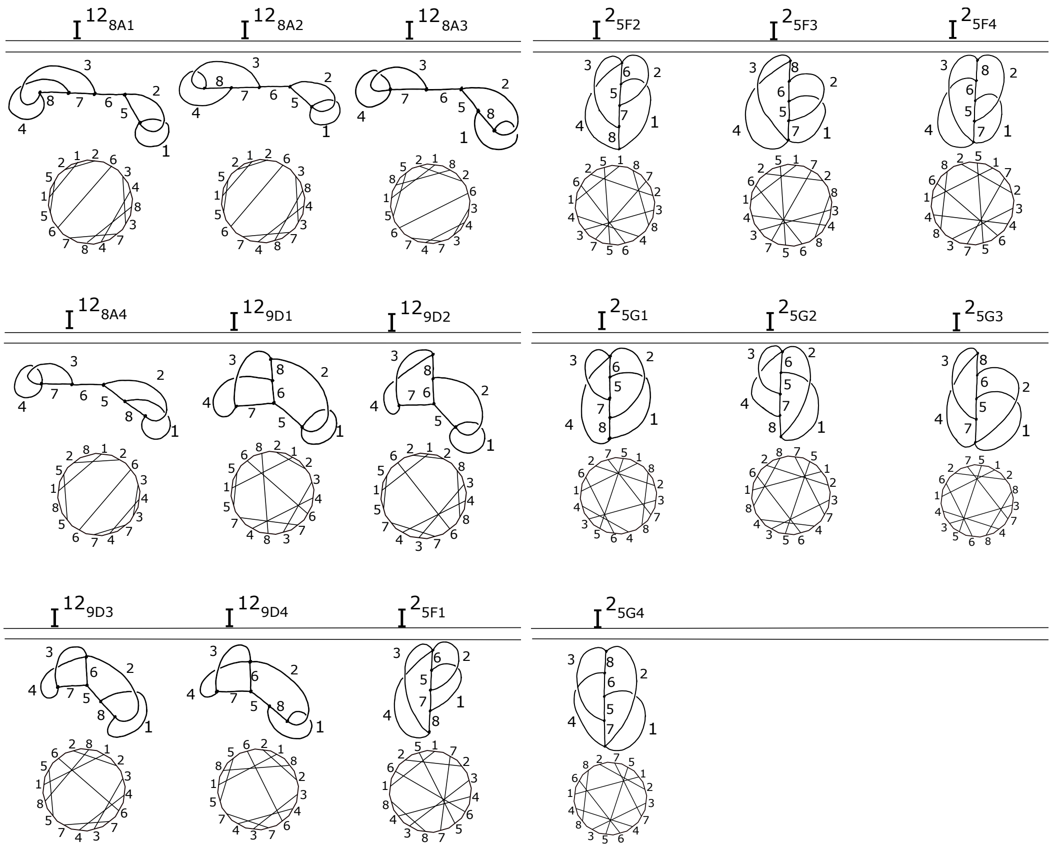


Figura 6.14: Grafos com 5 vértices

Como visto nas Figuras 6.10, 6.11, 6.12, 6.13 e 6.14 exitem 164 formas de mergulhar grafos com cinco vértices e oito arestas. Porém, apenas 20 dessas são distintas.

As famílias referentes aos grafos de três vértices e seis arestas são:

F1_5: I^{1}_{1A1}, I^{1}_{1A2}, I^{1}_{1A3}, I^{1}_{1C1}, I^{1}_{1C2}, I^{1}_{1C3}, I^{1}_{1C4}, I^{1}_{1E3}, I^{1}_{1E4}, I^{4}_{6A2}

F 2_5: I^{1}_{1A4}, I^{1}_{1A5}, I^{1}_{1E1}, I^{1}_{1E2}, I^{4}_{6E3}, I^{12}_{8A1}, I^{12}_{8A2}, I^{12}_{8A3}, I^{12}_{8A4}

F 3_5: I^{2}_{1A1}, I^{2}_{1D1}, I^{3}_{3B3},

F 4_5: I^{2}_{1A2}, I^{2}_{1A3}, I^{2}_{1C1}, I^{2}_{1C3}, I^{2}_{1E1}, I_{1E3}, I^{3}_{1A1}, I^{3}_{1G3}, I^{3}_{1G4}, I^{4}_{6A1}, I^{12}_{9D3}, I^{12}_{9D4}

F 5_5:I^{2}_{1A4}, I^{2}_{1A5}, I^{2}_{1B1}, I^{2}_{1C2}, I^{2}_{1C4}, I^{2}_{1D2}, I^{2}_{1F2}, I^{2}_{1G1}, I^{2}_{1G3}, I^{3}_{1B1}, I^{3}_{1B2}, I^{3}_{1E1}

F 6_5: I^{2}_{1B2}, I^{2}_{3F4}, I^{3}_{3B1}, I^{3}_{3B2}

F 7_5: I^{2}_{1B3}, I^{2}_{1E2}, I^{2}_{1E4}, I^{2}_{1F4}, I^{3}_{1A4}, I^{5}_{12G3}, I^{5}_{12G4}, III^{1}_{1A2}, III^{1}_{1E3}

F 8_5: I^{2}_{1B4}, I^{2}_{1D4}, I^{2}_{1G2}, I^{2}_{1G4}, I^{2}_{3A3}, I^{2}_{3A4}, I^{2}_{3F1}, I^{2}_{5G1}, I^{2}_{5G2}, I^{2}_{5G3}, I^{2}_{5G4}, I^{1}_{1A1}, III^{1}_{2B1}

F 9_5: I^{2}_{1B5}, I^{2}_{1F1}, I^{3}_{1E2}, I^{3}_{3B1}, I^{3}_{3B2}, I^{2}_{5F1}, I^{2}_{5F3}, III^{1}_{3D2}, III^{1}_{3D3}

F 10_5:I^{2}_{1D3}, I^{2}_{1F3}, I^{2}_{3A1}, I^{3}_{1B4}, I^{3}_{3B4}, I^{3}_{3F1}, I^{3}_{3F2}, III^{1}_{2B2}, III^{1}_{2B4}, III^{1}_{2B5}, III^{4}_{5G3}, III^{4}_{5G4}, III^{1}_{10D1}, III^{1}_{10D2}, III^{1}_{10D3}, III^{1}_{10D4g}

F 11_5: I^{2}_{3A2}, I^{2}_{3D1}, I^{2}_{3D2}, I^{2}_{3D3}, I^{2}_{3D4}, I^{2}_{3F3}, I^{3}_{1B3}, I^{3}_{1E4}, I^{3}_{3B3}, I^{3}_{3E1}, I^{3}_{3E2}, I^{3}_{3E3}, I^{3}_{3E4}, I^{3}_{3F3}, I^{3}_{3F4}, III^{4}_{5G1}, III^{4}_{5G2}

F 12_5: I^{2}_{3A5}, I^{2}_{3F2}, I^{2}_{5F2}, I^{2}_{5F4}, III^{1}_{2B3}, III^{1}_{3D5}

F 13_5: I^{3}_{1A3}, I^{3}_{1E3}, I^{3}_{3G3}, I^{3}_{3G4}, III^{1}_{1A3}, III^{1}_{1A4}, III^{1}_{1A5}

F 14_5: I^{3}_{1A5}, I^{3}_{1G1}, I^{4}_{6E1}, I^{12}_{9D2}, I^{3}_{4G1}, I^{3}_{4G2}, I^{3}_{4G3}, I^{3}_{4G4}

F 15_5: I^{3}_{1B5}, I^{3}_{1G2}, I^{3}_{3G1}, I^{5}_{12G2}, I^{12}_{9D1}

F 16_5: I^{3}_{3B5}, I^{3}_{3G2}, I^{5}_{12G1}, III^{1}_{5B2}

F 17_5: I^{4}_{6A3}, I^{4}_{6A4}, I^{4}_{6E3}, I^{4}_{6E4}

F 18_5: III^{1}_{1A1}, III^{1}_{5A1}, III^{1}_{5A2}, III^{1}_{5B1}, III^{4}_{8E1}, III^{4}_{8E2}, III^{4}_{8E3}, III^{8}_{8E4}

F 19_5: III^{1}_{1E1}, III^{1}_{3D1}, III^{1}_{3D4}, III^{1}_{5B3}, III^{1}_{5B4}

F 20_5: III^{1}_{1E2}, III^{1}_{5A3}, III^{1}_{5A4}

As quais serão representadas por:

III^{1}_{1A1}, III^{1}_{1E1}, III^{1}_{1E2}, I^{1}_{1A1}, I^{1}_{1A4}, I^{2}_{1A1}, I^{2}_{1A2}, I^{2}_{1A4}, I^{2}_{1B2}, I^{2}_{1B3}, I^{2}_{1B4}, I^{2}_{1B5}, I^{2}_{1D3}, I^{2}_{3A2}, I^{2}_{3A5}, I^{3}_{1A3}, I^{3}_{1A5}, I^{3}_{1B5}, I^{3}_{3B5}, I^{4}_{6A3}