FERNANDO ALEJANDRO ZAPATA SANTAMARIA

MÓDULOS DE WEYL E DE DEMAZURE PARA ÁLGEBRAS DE LIE DE CORRENTES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Marinês Guerreiro

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T

Z35m
2020

Zapata Santamaría, Fernando Alejandro, 1992-
Módulos de Weyl e de Demazure para álgebras de Lie de correntes / Fernando Alejandro Zapata Santamaría. – Viçosa, MG, 2020.
87 f. ; 29 cm.

Orientador: Marinês Guerreiro.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 85-87.

1. Lie, Álgebra de. 2. Álgebra de correntes. 3. Módulos (Álgebra). 4. Módulos de fusão . I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 512.482

FERNANDO ALEJANDRO ZAPATA SANTAMARIA

MÓDULOS DE WEYL E DE DEMAZURE PARA ÁLGEBRAS DE LIE DE CORRENTES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 6 de Março de 2020.

Assentimento:

Fernando

Fernando Alejandro Zapata Santamaría
Autor

Marinês Guerreiro

Dra. Marinês Guerreiro
Orientadora

Dedico este trabalho a Deus.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela oportunidade de realizar este trabalho. Graças à ele conheci pessoas que me ajudaram nesta importante etapa da minha vida acadêmica. Agradeço à minha família pelo apoio, aos meus pais pela compreensão e esforço durante esses dois anos que estive longe de casa. Agradeço à minha orientadora, a professora Marinês, pelos conselhos e por me apresentar à essa área da álgebra. Agradeço à Michele, pelos momentos alegres ao longo do mestrado e por me ajudar sempre que precisei.

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro indispensável. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“ The two most important days in your life are the day you are born and the day you find out why.”

Mark Twain

Resumo

SANTAMARIA, Fernando Alejandro Zapata, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2020. **Módulos de Weyl e de Demazure para álgebras de Lie de correntes.** Orientadora: Marinês Guerreiro.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre o conjunto dos números complexos e $\mathfrak{sl}_{r+1}$ o conjunto das matrizes de ordem $(r+1) \times (r+1)$ com traço zero. Neste trabalho apresentamos uma família de módulos integráveis, denotados por $W(\lambda)$, para a álgebra de Lie afim estendida, com λ um peso dominante inteiro de $\mathfrak{g}$ e definimos os módulos de Weyl para as álgebras de *loop* $L(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, segundo um artigo de Chari e Pressley, como sendo quocientes dos módulos $W(\lambda)$. Esses módulos de Weyl são de peso máximo, parametrizados por uma r-upla de polinômios π, com r denotando o posto de $\mathfrak{g}$. Além disso, provamos algumas propriedades universais dos módulos $W(\lambda)$ e $W(\pi)$. Outro objeto de nosso estudo foi a família dos módulos de Demazure, os quais definimos sobre a álgebra de correntes $\mathfrak{g}[t]$, quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$, e provamos que, em representações integráveis de peso máximo da álgebra de Lie afim associada a $\mathfrak{g}$, eles são quocientes dos módulos de Weyl. A partir da noção de módulos de fusão, segundo um artigo de Chari e Loktev, apresentamos uma relação entre os módulos de Weyl, os módulos de fusão da álgebra de correntes $\mathfrak{g}[t]$, quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$, e os módulos de Demazure da correspondente álgebra de Lie afim. Além disso, como uma consequência da relação anterior, apresentamos um caso especial de uma conjectura de Chari e Loktev sobre a estrutura e caracter dos módulos fusão.

Palavras-chave: Álgebra de Lie afim. Álgebra de correntes. Módulos de Weyl. Módulos de Demazure. Módulos de fusão.

Abstract

SANTAMARIA, Fernando Alejandro Zapata, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2020. **Weyl and Demazure modules for current Lie algebras**. Advisor: Marinês Guerreiro.

Let $\mathfrak{g}$ be a simple Lie algebra of finite dimension over the complex numbers and $\mathfrak{sl}_{r+1}$ be the Lie algebra of $(r+1) \times (r+1)$-matrices of trace zero. In this work we present a family of integrable modules, denoted by $W(\lambda)$ for the extended affine Lie algebra, with λ an entire dominant weight of $\mathfrak{g}$ and we define the Weyl modules for the *loop* algebras $L(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, according to an article by Chari and Pressley, as quotients of the modules $W(\lambda)$. These Weyl modules are of maximum weight, parametrized by an r-tuple of polynomials π, with r denoting the rank of $\mathfrak{g}$. Besides, we proved some universal properties of the modules $W(\lambda)$ and $W(\pi)$. Another object of our study was the family of the Demazure modules, which we define on the current algebra $\mathfrak{g}[t]$, when $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$, and we prove that, in integrable representations of maximum weight of the related Lie algebra associated with $\mathfrak{g}$, they are quotients of the Weyl modules. From the notion of fusion modules, according to an article by Chari and Loktev, we present a relation between Weyl modules and the fusion modules of current Lie algebra $\mathfrak{g}[t]$, for $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$, and the Demazure modules of the corresponding affine Lie algebra. Furthermore, as a consequence of the previous relation, we establish special cases of a conjecture by Chari and Loktev on the structure and character of the fusion modules.

Keywords: Affine Lie algebras. Current Lie algebras. Weyl modules. Demazure modules. Fusion modules.

Sumário

Introdução **10**

1 Álgebras de Lie **12**

1.1 Conceitos básicos 12

1.2 Álgebras de Lie semissimples 16

1.2.1 Subálgebras torais maximais 21

1.2.2 Decomposição de Cartan 21

1.2.3 Sistema de raízes 25

1.3 Álgebras envolventes universais 27

1.3.1 Construção de $U(\mathfrak{g})$ 28

1.3.2 Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) 29

2 Teoria de Representações de Álgebras de Lie **31**

2.1 Representações 31

2.2 Representações de álgebras semissimples 35

2.2.1 Espaços de peso 35

2.2.2 Módulos cíclicos *standard* 36

2.2.3 Módulos Verma 38

2.2.4 Módulos irredutíveis de dimensão finita 39

3 Módulos de Weyl **41**

3.1 Álgebras de *loop* 41

3.2 Álgebra Envolvente Universal da Álgebra de *loop* 42

3.3 Módulos Integráveis 47

3.4 Módulos de Weyl sobre álgebras de *loop* 55

3.5 Um teorema de produto tensorial para $W(\pi)$ 62

4 Módulos de Weyl e de Demazure para álgebras de Lie de correntes 70

4.1 Preliminares 70

4.1.1 Álgebras de correntes 71

4.2 Módulos de Weyl para álgebras de correntes 73

4.3 Módulos de Demazure 74

4.4 Módulos de fusão 78

Considerações Finais 84

Introdução

O conceito de módulo de Weyl teve sua origem no estudo das representações irredutíveis das álgebras afins quânticas denotadas por $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Em [11] Chari e Pressley tentaram resolver o problema de estudar estas representações a partir do limite clássico delas. Sabe-se que as representações das álgebras afins quânticas e suas subálgebras têm sido tema de muitos artigos recentes (veja [1], [11], [10], [20]). No entanto, a estrutura destas representações é ainda desconhecida, com exceção de alguns casos particulares.

O estudo das representações das álgebras afins quânticas $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ é feito a partir de uma classe apropriada de representações da álgebra de Lie afim $\hat{\mathfrak{g}}$. A teoria de representação dessas álgebras afins tem despertado muito interesse desde sua introdução, há 40 anos, e está relacionada a uma variedade de tópicos algébricos e geométricos em Matemática e em Física Matemática, incluindo bases de cristais, álgebras de operadores de vértices, teoria de campos conformes, modelos de reticulado solucionável e soluções para a equação de Yang – Baxter. As representações irredutíveis de dimensão finita de $\hat{\mathfrak{g}}$ foram classificadas em [4, 8]. Nestes artigos se provou que tais representações são de *peso máximo* num certo sentido, sendo este peso máximo uma r-upla de polinômios π, com r denotando o posto de $\mathfrak{g}$. De fato, foi provado que, correspondendo a cada representação $V(\pi)$ irredutível de dimensão finita, existe (a menos de isomorfismo) um único módulo de peso máximo de dimensão finita $W(\pi)$ com a propriedade que *qualquer* módulo de peso máximo V com peso máximo π é um quociente de $W(\pi)$. Estes módulos $W(\pi)$ são os chamados módulos de Weyl.

Por outro lado, além de conhecer a estrutura das representações da álgebra de Lie afim $\hat{\mathfrak{g}}$, é necessário compreender as representações irredutíveis de peso máximo da álgebra universal quantizada $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Para isto, podemos tomar como referência o estudo feito em [9]. Chari e Pressley provam neste artigo que as representações irredutíveis de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ também são de peso máximo e que suas classes de isomorfismo são parametrizadas por r-uplas de polinômios π_q, com coeficientes em $\mathbb{C}(q)$ (o espaço das funções racionais complexas na indeterminada q). Sob uma condição natural sobre π_q, a correspondente representação $V_q(\pi_q)$ de $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ se especializa, quando $q \longrightarrow 1$, a uma representação $\overline{U_q(\hat{\mathfrak{g}})}$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ e é um quociente de $W(\pi)$, com π obtido a partir de π_q fazendo-se $q = 1$.

Em [11], Chari e Pressley conjecturaram que todo módulo de Weyl $W(\pi)$ é o limite clássico de um módulo irredutível sobre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ e fizeram a prova desta conjectura para o caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Esta é a importância dos módulos $W(\pi)$. Eles são os objetos universais com relação à propriedade de serem de dimensão finita, ou seja, qualquer outro módulo satisfazendo essa propriedade é um quociente de um módulo de Weyl. Além disso, subs-

tituem em grande parte o papel desempenhado pelos módulos Verma na Categoria $\mathcal{O}$ de Bernstein-Gelfand-Gelfand.

Este trabalho está organizado como segue: no Capítulo 1 apresentamos os conceitos e resultados básicos da Teoria de Álgebras de Lie e no Capítulo 2, os principais resultados da Teoria de Representações destas álgebras que são utilizados nesta dissertação, com as notações pertinentes. No Capítulo 3 apresentamos uma família de módulos integráveis, denotados por $W(\lambda)$, para a álgebra de Lie afim estendida em correspondência com cada peso dominante inteiro de $\mathfrak{g}$ e definimos os módulos de Weyl para as álgebras de *loop* $L(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, segundo [11], como sendo quocientes dos módulos $W(\lambda)$. Esta é a parte principal do Capítulo 3. Além disso, mostramos algumas propriedades universais dos módulos $W(\lambda)$ e $W(\pi)$. No Capítulo 4 apresentamos os módulos de fusão, segundo [16], provamos que os módulos de Demazure são quocientes dos módulos de Weyl e estabelecemos uma relação entre os módulos de Weyl, os módulos de fusão da álgebra corrente $\mathfrak{g}[t]$, quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$, e os módulos de Demazure em representações da correspondente álgebra de Lie afim. Além disso, como uma consequência da relação anterior, estabelecemos um caso especial da conjectura dada em [16] sobre a estrutura e caracter dos módulos de fusão.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

A teoria das álgebras de Lie foi iniciada pelo matemático norueguês Marius Sophus Lie e algumas das principais terminologias dessa teoria foram introduzidas por Hermann Weyl. Lie descobriu duas classes fundamentais de objetos da matemática moderna, que agora levam seu nome: os grupos de Lie e álgebras de Lie. Além disso, ele construiu uma boa correspondência entre estes dois conceitos. Os grupos de Lie atualmente são bastante utilizados na Geometria Diferencial, enquanto as álgebras de Lie evoluíram com um caráter puramente algébrico. Os primeiros resultados mais notáveis na teoria das álgebras de Lie complexas foram obtidos por É. Cartan, F. Engel e W. K. J. Killing de 1888 a 1894.

O objetivo deste capítulo é apresentar uma breve introdução à teoria básica das álgebras de Lie. Omitiremos a maior parte das demonstrações que podem ser consultadas em [25] e [33].

1.1 Conceitos básicos

Seja $\mathbb{K}$ um corpo que, ao longo deste trabalho assumiremos de característica zero, a menos de menção ao contrário.

Definição 1.1.1 *Uma* **álgebra de Lie** *consiste de um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *munido de um produto(colchete ou comutador)*

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

com as seguintes propriedades

(i) $[\ ,\ ]$ *é bilinear,*

(ii) $[\ ,\ ]$ *é antisimétrico, isto é,* $[x, x] = 0$, *para todo* $x \in \mathfrak{g}$ *(o que implica* $[x, y] = -[y, x]$, *para todo* $x, y \in \mathfrak{g}$*),*

(iii) $[\ ,\ ]$ *satisfaz a identidade de Jacobi, isto é,*

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \text{ para quaisquer } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Em geral, uma álgebra é um espaço vetorial A sobre um corpo $\mathbb{K}$ munido de um produto, isto é, uma aplicação de $A \times A$ em A. Qualquer aplicação deste tipo que mereça o nome de "produto" deve ser bilinear.

Se este produto é comutativo, dizemos que a álgebra é **comutativa** e se o produto é associativo, dizemos que a álgebra é **associativa.** A antissimetria e a identidade de Jacobi são características das álgebras de Lie.

Observação 1.1.2 *O colchete de Lie não é em geral associativo, pois em qualquer circunstância* $[[x,x],y] = 0$, *mas nem sempre* $[x,[x,y]]$ *é zero.*

Uma álgebra de Lie é dita **abeliana** se, e somente se, $[x,y] = 0$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. A **dimensão** de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a dimensão de $\mathfrak{g}$ como espaço vetorial.

Observação 1.1.3 *Uma álgebra associativa A sobre $\mathbb{K}$ pode ser munida de uma estrutura de álgebra de Lie, definindo o colchete de Lie por*

$$[x,y] = xy - yx, \quad \textit{para todos} \;\; x, y \in A.$$

Exemplo 1.1.4 *Seja $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Como $M_n(\mathbb{K})$ é uma álgebra associativa, podemos muni-la do colchete*

$$[A,B] = AB - BA, \;\; \textit{para todos } A, B \in M_n(\mathbb{K}).$$

Dessa forma, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possui uma estrutura de álgebra de Lie que, a partir de agora, denotaremos por $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ ou simplesmente $\mathfrak{gl}_n$. Esta álgebra pode ser identificada com $End_{\mathbb{K}}(V)$, a álgebra dos operadores $\mathbb{K}$-lineares do espaço vetorial V de dimensão n que, visto como uma álgebra de Lie, será denotada por $\mathfrak{gl}(V)$.

Definição 1.1.5 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um subconjunto $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é uma* **subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$** *se $\mathfrak{h}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ e $[x,y] \in \mathfrak{h}$, para todo $x, y \in \mathfrak{h}$.*

Exemplo 1.1.6 *Algumas subálgebras de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$*

(i) $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : x + x^t = 0\}$, *com x^t a matriz transposta de x;*

(ii) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : Tr\, x = 0\}$, *com Tr denotando a função traço de matrizes;*

(iii) A subálgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal

$$\left\{ x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}); \; x = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definição 1.1.7 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e X um subconjunto de $\mathfrak{g}$.*
O **centralizador de** X *é definido como*

$$C_{\mathfrak{g}}(X) = \{v \in \mathfrak{g} : [v,x] = 0, \textit{para todo } x \in X\}.$$

Definição 1.1.8 *Uma subálgebra* $\mathfrak{h}$ *de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é um* **ideal** *se, para quaisquer* $x \in \mathfrak{g}$ *e* $y \in \mathfrak{h}$*, temos* $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

Nesta teoria os ideais desempenham uma função análoga aos subgrupos normais na teoria de grupos e aos ideais bilaterais na teoria de anéis.

Observação 1.1.9 *Seja* $\mathfrak{h}$ *um ideal de* $\mathfrak{g}$*. Como* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$*, não há distinção entre ideais à esquerda e à direita.*

Exemplo 1.1.10 *O* **centro** $Z(\mathfrak{g})$ *de* $\mathfrak{g}$*, dado por*

$$Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0, \ \textit{para todo} \ y \in \mathfrak{g}\}$$

é um ideal de $\mathfrak{g}$*. Para verificar isto, basta utilizar a identidade de Jacobi.*

Exemplo 1.1.11 *A* **álgebra derivada** *de* $\mathfrak{g}$ *dada por*

$$\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle [x, y] : x, y \in \mathfrak{g} \rangle$$

é o ideal de $\mathfrak{g}$ *gerado por todos os elementos* $[x, y]$ *tais que* $x, y \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.1.12 *A subálgebra* $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ *é um ideal de* $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$*. De fato, dados* $x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$*,* $y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$*, temos*

$$Tr([x, y]) = Tr(xy - yx) = Tr(xy) - Tr(yx) = 0.$$

Portanto, $[x, y] \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$*. Além disso,* $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ *é a álgebra derivada de* $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Definição 1.1.13 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie tal que* $dim\, \mathfrak{g} > 1$*. Se* $\mathfrak{g}$ *não possui ideais não triviais, dizemos que* $\mathfrak{g}$ *é* **simples**.

Exemplo 1.1.14 *Se* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ *e* $car\,(\mathbb{K}) \neq 2$*, então* $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra simples.*

Definição 1.1.15 *Uma transformação linear* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$*, com* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *álgebras de Lie sobre* $\mathbb{K}$*, é um* **homomorfismo** *de álgebras de Lie se* $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$*, para todos* $x, y \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.1.16 *Seja* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *um homomorfismo de álgebras de Lie. O* **núcleo** *de* ϕ *é o conjunto*

$$ker\,(\phi) = \{x \in \mathfrak{g} : \phi(x) = 0\}$$

e a **imagem** *de* ϕ *é o conjunto*

$$Im\,(\phi) = \{y \in \mathfrak{h} : \textit{existe}\, x \in \mathfrak{g} \ \textit{tal que} \ \phi(x) = y\}.$$

O núcleo de um homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, pois se $x \in \mathfrak{g}$ e $z \in Ker\,(\phi)$, então $\phi([x,z]) = [\phi(x), \phi(z)] = [\phi(x), 0] = 0$.

A imagem de ϕ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$, pois se $y_1, y_2 \in Im\,(\phi)$ então existem $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$ tais que $\phi(x_1) = y_1$ e $\phi(x_2) = y_2$, daí $[y_1, y_2] = [\phi(x_1), \phi(x_2)] = \phi([x_1, x_2]) \in Im\,(\phi)$.

Definição 1.1.17 *Seja $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um homomorfismo de álgebras de Lie.*

(*i*) *Se $ker\,(\phi) = \{0\}$, ϕ é dito* **monomorfismo** *de álgebras de Lie;*

(*ii*) *se $Im\,(\phi) = \mathfrak{h}$, ϕ é dito um* **epimorfismo** *de álgebras de Lie;*

(*iii*) *se ϕ for simultaneamente, um monomorfismo e um epimorfismo de álgebras de Lie, ϕ é dito um* **isomorfismo** *de álgebras de Lie e, neste caso, as álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são ditas* **isomorfas***;*

(*iv*) *Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ e ϕ é um isomorfismo de álgebras de Lie, ϕ é dito um* **automorfismo** *da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 1.1.18 *Os homomorfismos entre as álgebras abelianas são as transformações lineares e duas álgebras abelianas são isomorfas se, e somente se, elas têm a mesma dimensão.*

Exemplo 1.1.19 *A aplicação traço $Tr : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{K}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, pois $Tr([x,y]) = Tr(xy - yx) = 0$, já que $Tr(xy) = Tr(yx)$, para quaisquer $x, y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e $[Tr(x), Tr(y)] = 0$, uma vez que $\mathbb{K}$ é uma álgebra abeliana. Observe que $Ker\,(Tr) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ e $Im\,(Tr) = \mathbb{K}$.*

Definição 1.1.20 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal. No espaço vetorial quociente $\dfrac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$, com $\overline{x} = x + \mathfrak{h}$, definimos*

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x,y]}.$$

É fácil verificar que esta definição independe da escolha dos representantes das classes e define em $\dfrac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ uma estrutura de álgebra de Lie. Além disso, a projeção canônica

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \dfrac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \\ & x & \longmapsto & \overline{x} \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejetor de álgebras de Lie.

Relacionados com os homomorfismos e as álgebras quocientes, existem os

Teorema 1.1.21 [14, Teorema 2.2] *Teoremas de Isomorfismo*

(i) Se $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então

$$\mathfrak{g}/ker(\psi) \simeq Im(\psi).$$

(ii) Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ são ideais de $\mathfrak{g}$, então

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2).$$

(iii) Se $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ são ideais de $\mathfrak{g}$ tais que $\mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{h}_2$, então $\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1$ é um ideal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1$ e

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1)/(\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_2.$$

Definição 1.1.22 *Sejam A uma álgebra sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\varphi : A \to A$ uma aplicação linear. Logo, φ é dita uma* **derivação** *de A se satisfaz a regra de Leibniz*

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + \varphi(x)y, \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Seja $Der(A)$ o conjunto das derivações de A. Este conjunto é fechado para a adição, para a multiplicação por escalar e contém a aplicação nula. Portanto, $Der(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}(A)$. Além disso, $Der(A)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$.

Exemplo 1.1.23 *Toda transformação linear de uma álgebra de Lie abeliana é uma derivação.*

Exemplo 1.1.24 *A aplicação linear*

$$\begin{array}{rccc} ad_x : & \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ & y & \mapsto & ad_x(y) = \ [x, y] \end{array}$$

é uma derivação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com $x \in \mathfrak{g}$, chamada **adjunta de** *x.*

As derivações da forma ad_x, $x \in \mathfrak{g}$, são chamadas **derivações internas** de $\mathfrak{g}$ e o espaço destas, que é um ideal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, é denotado por $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$.

1.2 Álgebras de Lie semissimples

Começamos esta seção apresentando conceitos e resultados relacionados ao estudo das álgebras de Lie semissimples que, posteriormente, serão utilizadas. As seguintes definições e proposições podem ser encontradas em [33]. Omitimos as demonstrações, mas fazemos referência à bibliografia pertinente.

Definição 1.2.1 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Definem-se, recursivamente, os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:*

$$\begin{gathered}\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ \vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]\end{gathered}$$

Estes subespaços são ideais de $\mathfrak{g}$. Esta sequência de ideais é chamada ***série derivada de*** $\mathfrak{g}$ *e suas componentes são as* ***álgebras derivadas de*** $\mathfrak{g}$.

Definição 1.2.2 *A* ***série central descendente da álgebra*** $\mathfrak{g}$ *é definida, recursivamente, por:*

$$\begin{gathered}\mathfrak{g}^{1} = \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{2} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{'} \\ \vdots \\ \mathfrak{g}^{k} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]\end{gathered}$$

Estes subespaços satisfazem

$$\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}^{1} \supseteq \mathfrak{g}^{2} \supseteq \dots .$$

Definição 1.2.3 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie não nula.*

(i) Dizemos que $\mathfrak{g}$ é ***solúvel*** *se $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$, para algum $n \geq 1$.*

(ii) O único ideal solúvel maximal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é denominado ***radical de*** *$\mathfrak{g}$ e é denotado por $Rad(\mathfrak{g})$.*

(iii) Dizemos que $\mathfrak{g}$ é ***nilpotente*** *se $\mathfrak{g}^{n} = 0$, para algum $n \geq 1$.*

Lema 1.2.4 [14, Lema 4.4] *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie não nula.*

(i) Se $\mathfrak{g}$ é solúvel, então todas as subálgebras e imagens homomórficas de $\mathfrak{g}$ são solúveis.

(ii) Se I é um ideal solúvel de $\mathfrak{g}$ tal que $\dfrac{\mathfrak{g}}{I}$ é solúvel, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.

(iii) Se I, J são ideais solúveis de $\mathfrak{g}$, então $I + J$ também o é.

(iv) Se $\mathfrak{g}$ é solúvel e R é um ideal de $\mathfrak{g}$, então $\dfrac{\mathfrak{g}}{R}$ é solúvel.

Proposição 1.2.5 [25, Proposição 3.2] *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*

(i) Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então também o são todas as subálgebras e imagens homomórficas de $\mathfrak{g}$.

(*ii*) *Se* $\dfrac{\mathfrak{g}}{Z(\mathfrak{g})}$ *é nilpotente, então* $\mathfrak{g}$ *também o é.*

(*iii*) *Se* $\mathfrak{g}$ *é nilpotente e* $\mathfrak{g} \neq 0$*, então* $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.

(*iv*) *Se* $\mathfrak{g}$ *é nilpotente e* I *é um ideal de* $\mathfrak{g}$*, então* $\dfrac{\mathfrak{g}}{I}$ *é nilpotente.*

Definição 1.2.6 *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é dita* ***semissimples*** *se* $Rad(\mathfrak{g})$ *for nulo.*

Proposição 1.2.7 [33, Proposição 1.33] *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie não solúvel e* $H \subset \mathfrak{g}$ *um ideal solúvel. A álgebra de Lie* $\dfrac{\mathfrak{g}}{H}$ *é semissimples se, e só se,* $H = Rad(\mathfrak{g})$.

Proposição 1.2.8 [33, Proposição 1.19] *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Então a série derivada decresce mais rápido que a série central descendente, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}, \text{ para todo } k \geq 0.$$

Observação 1.2.9 *Pela Proposição 1.2.8, toda álgebra de Lie nilpotente é solúvel.*

Lema 1.2.10 [25, Proposição 3.2.1] Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente (isto é, $\mathfrak{g}^n = 0$, para algum n). Então, para quaisquer $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathfrak{g}$, temos

$$ad(x_n) \circ ad(x_{n-1}) \circ \cdots \circ ad(x_1)(x_0) = 0.$$

Definição 1.2.11 *Seja* x *um elemento de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*. Dizemos que* x *é* ***ad-nilpotente*** *se* $ad(x)$ *é um endomorfismo nilpotente.*

Observação 1.2.12 *Em particular, no Lema 1.2.10, se* $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*, então*

$$ad(x)^n = 0, \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}.$$

Portanto, se $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Lie nilpotente, então todos seus elementos são* ***ad-nilpotentes****.*

Teorema 1.2.13 (Teorema de Engel) [25, Teorema 3.2] *Se todos os elementos de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g} \neq 0$ *são ad-nilpotentes, então* $\mathfrak{g}$ *é nilpotente.*

Teorema 1.2.14 (Teorema de Lie) [25, Teorema 4.1] *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma subálgebra solúvel de* $\mathfrak{gl}(V)$*, com* V *um espaço vetorial de dimensão finita. Se* $V \neq 0$ *então* V *contém um autovetor comum para todos os endomorfimos em* $\mathfrak{g}$.

Apresentamos agora, de um modo breve, a decomposição de Jordan-Chevalley. Consideremos $\mathbb{K}$ um corpo arbitrário e V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$.

Definição 1.2.15 *Seja* $x \in End(V)$*. O elemento* x *é dito* ***semissimples*** *se, e só se,* x *é um operador diagonalizável.*

Proposição 1.2.16 [25, Proposição 4.2] *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $x \in End(V)$. Logo,*

(i) *existem únicos $x_s, x_n \in End(V)$ satisfazendo as condições: $x = x_s + x_n$, x_s é semissimples, x_n é nilpotente, x_s e x_n comutam entre si.*

(ii) *existem polinômios $p(T), q(T)$ em uma indeterminada, sem termo constante, tais que $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Em particular, x_s e x_n comutam com qualquer endomorfismo que comuta com x.*

(iii) *Se $A \subset B \subset V$ são subespaços, e $x(b) \in A$, para todo $b \in B$, então $x_s(b) \in A$ e $x_n(b) \in A$, para todo $b \in B$.*

A decomposição $x = x_s + x_n$ é chamada ***decomposição de Jordan-Chevalley*** de x ou simplesmente ***decomposição de Jordan***.

Lema 1.2.17 [25, Lema 4.4] *Sejam A, B dois subespaços de $\mathfrak{gl}(V)$, $A \subset B$, $dim(V) < \infty$ e $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V);\ [x, b] \subset A$, para todo $b \in B\}$. Se $x \in M$ satisfaz $Tr(xy) = 0$, para todo $y \in M$, então x é nilpotente.*

Teorema 1.2.18 (Critério de Cartan) [25, Teorema 4.4] *Seja $\mathfrak{g}$ uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, com $dim(V) < \infty$. Se $Tr(xy) = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}', y \in \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Definição 1.2.19 (Forma de Killing) *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie qualquer. Se $x, y \in \mathfrak{g}$ definimos*

$$\begin{array}{rccc} k: & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x, y) & \longmapsto & k(x, y) = Tr(ad(x)ad(y)). \end{array}$$

*A aplicação k é uma forma bilinear simétrica de $\mathfrak{g}$, chamada **forma de Killing.***

A forma de Killing é associativa em relação ao colchete, isto é:

$$\begin{aligned} k([x, y], z) &= Tr(ad([x, y])ad(z)) \\ &= Tr([ad(x), ad(y)]ad(z) \\ &= Tr(ad(x)ad(y)ad(z)) - Tr(ad(y)ad(x)ad(z)) \\ &= Tr(ad(x)ad(y)ad(z)) - Tr(ad(x)ad(z)ad(y)) \\ &= Tr(ad(x)[ad(y), ad(z)]) \\ &= k(x, [y, z]), \quad \text{para todos } x, y, z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Em geral, uma forma bilinear simétrica β é chamada ***não degenerada*** se seu radical S é 0, com S definido por

$$S = \{x \in \mathfrak{g};\ \beta(x, y) = 0, \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}.$$

Assim como a forma de Killing é associativa, seu radical S é mais que só um subespaço, ele é um ideal de $\mathfrak{g}$. Com alguns resultados da Álgebra Linear, temos um modo de testar se uma forma bilinear é degenerada ou não.

Teorema 1.2.20 [32, Teorema 4.8] *Seja $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica, com V espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$. Então f é não degenerada se, e só se, sua matriz associada respeito a qualquer base tem determinante não nulo.*

Assim, fixada uma base $\beta = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de $\mathfrak{g}$, temos que a forma bilinear simétrica k é não degenerada se, e só se, a matriz de ordem $n \times n$, cuja (ij)-ésima entrada é $k(x_i, x_j)$, tem determinante não nulo.

Exemplo 1.2.21 *Consideremos a forma de Killing k da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ e a base canônica $\beta = \{x, h, y\}$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$:*

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \; ; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$ad(x) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad ad(h) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \; ; \quad ad(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, k tem matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com determinante -128 e, desta forma, k é não degenerada.

A seguir, apresentamos um teorema que nos da uma condição suficiente e necessária para uma álgebra de Lie ser semissimples em relação à forma de Killing.

Teorema 1.2.22 [25, Teorema 5.1] Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então $\mathfrak{g}$ é semissimples se, e somente se, sua forma de Killing k é não degenerada.

Vejamos agora um resultado que torna mais precisa a caracterização de uma álgebra de Lie semissimples e seus ideais.

Teorema 1.2.23 [25, Teorema 5.2] *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples. Então existem ideais simples $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots, \mathfrak{g}_t$ de $\mathfrak{g}$ tais que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_t$ e todo ideal simples de $\mathfrak{g}$ coincide com algum dos $\mathfrak{g}_i$. Além disso, a forma de Killing de $\mathfrak{g}_i$ é a restrição de k à $\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i$.*

1.2.1 Subálgebras torais maximais

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples não nula. Se $\mathfrak{g}$ está formada inteiramente por elementos nilpotentes (i.e, ad-nilpotentes), então $\mathfrak{g}$ é nilpotente(pelo Teorema de Engel), mas isto não pode acontecer, pois sendo nilpotente seria solúvel. Isto significa que $\mathfrak{g}$ possui elementos semissimples (i.e, ad-semissimples), os quais geram subálgebras de $\mathfrak{g}$ consistindo unicamente de elementos semissimples. Estas subálgebras são chamadas **subálgebras torais**.

Teorema 1.2.24 [25, Teorema 8.1] *Uma subálgebra toral T de uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ é abeliana.*

Pela Definição 6.1.1 em [12], uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semissimples pode conter diferentes subálgebras torais. Algumas podem estar contidas em outras. Um subálgebra toral é chamada **maximal** se ela não é uma subálgebra própria de qualquer outra subálgebra toral. Para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita, a subálgebra toral maximal existe. Escolhemos em $\mathfrak{g}$ uma subálgebra toral maximal e a denotaremos por $\mathfrak{h}$. Note que $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$, de outra forma $\mathfrak{g}$ poderia ser abeliana. No entanto, a subálgebra toral maximal não é única. Uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ sempre tem automorfismos não triviais. Se ϕ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$, então $\phi(\mathfrak{h})$ é também uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.2.25 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal. Então*

$$r = dim(\mathfrak{h})$$

é chamado o **posto** *de $\mathfrak{g}$.*

Observação 1.2.26 *Em quase toda a literatura sobre álgebras de Lie encontramos, em lugar de subálgebra toral, o conceito de* **subálgebra de Cartan**. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, não necessariamente semissimples, uma subálgebra de Cartan C é uma subálgebra nilpotente tal que $N_{\mathfrak{g}}(C) = C$. Este conceito é mais geral que o conceito de subálgebra toral. Além disso, é mais difícil provar que subálgebras de Cartan existem. Para álgebras de Lie semissimples, no entanto, uma subálgebra toral maximal é uma subálgebra de Cartan. Para mais detalhes, consulte a Seção 15 de* [25].

1.2.2 Decomposição de Cartan

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita. Fixemos agora uma subálgebra toral maximal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ com dimensão r, a qual é abeliana. Em particular, $ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ é uma família de endomorfismos diagonalizáveis que comutam entre si. Logo, $\mathfrak{g}$ possui uma base formada por autovetores simultâneos relacionados ao conjunto de operadores $\{ad(h) : h \in \mathfrak{h}\}$. Isto significa que $\mathfrak{g}$ se decompõe como soma direta de subespaços. Estes subespaços, que denotaremos por $\mathfrak{g}_\alpha$, são chamados **espaços raízes** e são formados pelos vetores $x \neq 0$ em $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ que são, por definição, autovetores de $ad(h)$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. No entanto, devemos distinguir os autovalores dos diferentes operadores $ad(h)$. Denotando o

autovalor de $ad(h)$ por $\alpha(h)$ obtemos, para todo $h \in \mathfrak{h}$,

$$ad(h)(x) = \alpha(h)x,$$

com $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, a qual associa o autovalor $\alpha(h)$ do autovetor x ao elemento $h \in \mathfrak{h}$. Portanto,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : ad(h)(x) = \alpha(h)x, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Alem disso, $\mathfrak{g}_0$ é o centralizador de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ denotado por $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ e, pela Proposição 8.2, em [25] temos $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. O conjunto de todos os $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ não nulos, tais que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ é denotado por Φ e tais elementos são chamados **raízes** de $\mathfrak{g}$ em relação a $\mathfrak{h}$. Observe que Φ é um conjunto finito. Com esta notação, podemos escrever a **decomposição do espaço por raízes** ou também chamada **decomposição de Cartan** de $\mathfrak{g}$ do seguinte modo

$$\mathfrak{g} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Pode ser mostrado(ver [25], seção IV e V) que Φ (assim como a decomposição de Cartan) não depende de uma escolha particular de $\mathfrak{h}$.

A seguir, apresentamos algumas propriedades da decomposição de Cartan de uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$.

Proposição 1.2.27 [25, Proposição 8.1] *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ é a decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$. Então*

(i) para todos $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, temos $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(ii) Se $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \neq 0$, então $ad(x)$ é nilpotente.

(iii) Se $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, com $\alpha + \beta \neq 0$, então $\mathfrak{g}_\alpha$ é ortogonal à $\mathfrak{g}_\beta$ com respeito à forma de Killing, isto é, $k(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.

(iv) A restrição da forma de Killing k (da álgebra $\mathfrak{g}$) à $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ é não degenerada.

Corolário 1.2.28 [25, Corolario 8.1] A restrição da forma de Killing k a $\mathfrak{h}$ é não degenerada.

O Corolário 1.2.28 nos permite identificar $\mathfrak{h}$ com $\mathfrak{h}^*$ assim,

$$\begin{array}{ccl} \mathfrak{h}^* & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ \alpha & \longmapsto & t_\alpha, \quad \text{tal que } \alpha(h) = k(t_\alpha, h), \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}. \end{array} \tag{1.1}$$

Em particular, Φ é identificado com $\{t_\alpha : \alpha \in \Phi\} \subset \mathfrak{h}$.

As seguintes proposições nos fornecem propriedades de ortogonalidade e integralidade entre os espaços de raízes.

Proposição 1.2.29 [25, Proposição 8.3] *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ o conjunto de raízes de $\mathfrak{g}$ em relação à $\mathfrak{h}$ e k a forma de Killing de $\mathfrak{g}$.*

(i) *O conjunto Φ gera o espaço $\mathfrak{h}^*$.*

(ii) *Se $\alpha \in \Phi$, então $-\alpha \in \Phi$.*

(iii) *Seja $\alpha \in \Phi$. Se $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $[\,x, y\,] = k(x, y)t_\alpha$, com t_α como em (1.1).*

(iv) *Se $\alpha \in \Phi$, então $[\,\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}\,]$ tem dimensão 1, com base t_α.*

(v) *Para todo $\alpha \in \Phi$, temos $\alpha(t_\alpha) = k(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.*

(vi) *Se x_α é um elemento não nulo em $\mathfrak{g}_\alpha$, então existe $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que x_α, y_α, $h_\alpha = [\,x_\alpha, y_\alpha\,]$ geram uma subálgebra simples com dimensão 3 de $\mathfrak{g}$ isomorfa à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, que denotaremos por S_α. O isomorfismo entre S_α e $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ é dado por*

$$x_\alpha \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y_\alpha \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_\alpha \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(vii) $h_\alpha = \dfrac{2t_\alpha}{k(t_\alpha, t_\alpha)}$ *e* $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

Proposição 1.2.30 [25, Proposição 8.4]

(i) *Se $\alpha \in \Phi$, então $dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$. Em particular,*

$$S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathfrak{h}_\alpha, \ (\textit{com } \mathfrak{h}_\alpha = [\,\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}\,]),$$

e, para qualquer x_α não nulo em $\mathfrak{g}_\alpha$, existe um $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[\,x_\alpha, y_\alpha\,] = h_\alpha$.

(ii) *Se $\alpha \in \Phi$, então os únicos múltiplos escalares de α que são raízes são $\pm\alpha$.*

(iii) *Se $\alpha, \beta \in \Phi$, então $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ e $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$. (Os números $\beta(h_\alpha)$ são chamados **inteiros de Cartan**).*

(iv) *Se $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, então $[\,\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta\,] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

(v) *Sejam $\alpha, \beta \in \Phi$ com $\beta \neq \pm\alpha$. Sejam r e q, respectivamente, os maiores inteiros não negativos para os quais $\beta - r\alpha$ e $\beta + q\alpha$ são raízes. Então $\beta + i\alpha \in \Phi$ para todo $i = -r, \cdots, q$ e $\beta(h_\alpha) = r - q$.*

(vi) *A álgebra $\mathfrak{g}$ é gerada, como álgebra de Lie, pelos espaços de raízes $\mathfrak{g}_\alpha$.*

Pelo Corolário 1.2.28, podemos transferir a forma de Killing para $\mathfrak{h}^*$ definindo

$$(\beta, \alpha) = k(t_\beta, t_\alpha), \quad \text{para todos } \beta, \alpha \in \mathfrak{h}^*.$$

Observe que, para β e α em Φ, os números de Cartan podem ser expressos em função da forma $(\,,\,)$ para $\mathfrak{h}^*$

$$\beta(h_\alpha) = k(t_\beta, h_\alpha) = k\left(t_\beta, \frac{2t_\alpha}{k(t_\alpha, t_\alpha)}\right) = \frac{2k(t_\beta, t_\alpha)}{k(t_\alpha, t_\alpha)} = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}. \tag{1.2}$$

Sabemos que Φ gera $\mathfrak{h}^*$, o que nos permite escolher uma base $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ de $\mathfrak{h}^*$ consistindo unicamente de raízes α_i em Φ. É claro que, se $\beta \in \Phi$, então podemos escrever

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i, \text{ com } n_i \in \mathbb{C}.$$

É possível provar que $n_i \in \mathbb{Q}$ (ver [25], Seção 8.2). Logo, podemos considerar o subespaço vetorial $E_\mathbb{Q}$ (sobre $\mathbb{Q}$) de $\mathfrak{h}^*$ dado por

$$E_\mathbb{Q} = \left\{ \sum_{\alpha \in \Phi} q_\alpha \alpha : \; q_\alpha \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Lema 1.2.31 [12, Lema 7.5.5]

(*i*) *A dimensão de $E_\mathbb{Q}$, considerado como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, é igual a $r = dim(\mathfrak{h}^*)$.*

(*ii*) *A forma bilinear $(\,,\,)$ de $\mathfrak{h}^*$ restrita à $E_\mathbb{Q}$ assume valores racionais, isto é, para todos $\alpha, \mu \in E_\mathbb{Q}$, temos $(\,\alpha, \mu\,) \in \mathbb{Q}$.*

(*iii*) *A forma bilinear $(\,,\,)$ de $\mathfrak{h}^*$ restrita à $E_\mathbb{Q}$ é não degenerada e definida positiva.*

Agora vamos considerar a extensão do subespaço $E_\mathbb{Q}$ de $\mathfrak{h}^*$ ao espaço vetorial real E, dado por

$$E = \left\{ \sum_{\alpha \in \Phi} q_\alpha \alpha : \; q_\alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

A forma bilinear não degenerada definida positiva de $E_\mathbb{Q}$ tem uma extensão natural à E. Ela é a restrição da forma $(\,,\,)$ de $\mathfrak{h}^*$ a E. Desta forma, obtemos um subespaço euclidiano E de $\mathfrak{h}^*$, de modo que $\dim_\mathbb{R}(E) = \dim_\mathbb{C}(\mathfrak{h}^*) = r$. (Para mais detalhes, consulte [25], Seção 8.5).

O seguinte teorema resume os fatos básicos sobre Φ.

Teorema 1.2.32 [12, Teorema 7.5.6], [25, Teorema 8.5]. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan e Φ o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ em relação à $\mathfrak{h}$.*

(*i*) *O espaço dual $\mathfrak{h}^*$ é gerado por Φ e $0 \notin \Phi$.*

(*ii*) *O espaço dual $\mathfrak{h}^*$ contém um subespaço euclidiano real E gerado por Φ e sua dimensão é dada por: $dim_\mathbb{R}(E) = dim_\mathbb{C}(\mathfrak{h}^*) = r$.*

(*iii*) *Seja $\alpha \in \Phi$. O único múltiplo de α que pertence a Φ é $-\alpha$.*

(*iv*) *Se* $\alpha, \beta \in \Phi$, *então* $\beta - \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$.

(*v*) *Se* $\alpha, \beta \in \Phi$, *então* $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

(*vi*) *A restrição da forma não degenerada* $(\ ,\ )$ *sobre* $\mathfrak{h}^*$ *ao subespaço euclidiano* E *é definida positiva. Isto significa que a restrição a* E *é um produto interno.*

1.2.3 Sistema de raízes

Nesta seção apresentaremos o conceito de sistema de raízes de um modo abstrato e independente da Teoria de Álgebras de Lie. Consideraremos um espaço euclidiano fixo E (isto é, um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com dimensão finita) e denotaremos por $(\ ,\ )$ sua forma bilinear simétrica definida positiva.

Uma *reflexão* em E é uma transformação linear invertível fixando pontualmente algum hiperplano (subespaço de codimensão 1) e levando qualquer vetor ortogonal a esse hiperplano em seu oposto. Assim, observamos que todo $\alpha \in E$ define uma reflexão σ_α em E dada por

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,$$

que fixa o hiperplano $P_\alpha = \{\beta \in E : (\beta,\alpha) = 0\}$ e leva α em $-\alpha$. Já que os números $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ aparecem frequentemente, vamos usar a notação

$$\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}.$$

Observe que $\langle \beta, \alpha \rangle$ é linear só na primeira variável. Uma característica muito útil das reflexões é dada no seguinte lema.

Lema 1.2.33 [25, Lema 9.1] *Seja* Φ *um conjunto finito o qual gera* E. *Suponha que todas as reflexões* σ_α *(com* $\alpha \in \Phi$*) deixam* Φ *invariante. Se* $\sigma \in GL(E)$ *(conjunto dos operadores lineares invertíveis em* E*) deixa* Φ *invariante, fixa pontualmente um hiperplano* P *de* E *e envia algum* $\alpha \in \Phi$ *(com* $\alpha \neq 0$*) em* $-\alpha$, *então* $\sigma = \sigma_\alpha$ *e* $P = P_\alpha$.

Definição 1.2.34 *Um subconjunto* Φ *de um espaço euclidiano* E *é chamado* ***sistema de raízes*** *se os seguintes axiomas são satisfeitos*

(*i*) *O conjunto* Φ *é finito, gera* E, *e* $0 \notin \Phi$.

(*ii*) *Se* $\alpha \in \Phi$, *os únicos múltiplos de* α *em* Φ *são* $\pm\alpha$.

(*iii*) *Se* $\alpha \in \Phi$, *então a reflexão* σ_α *deixa* Φ *invariante.*

(*iv*) *Se* $\alpha, \beta \in \Phi$, *então* $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Os elementos de Φ são chamados *raízes*. De (ii) e (iii) obtemos $\Phi = -\Phi$. Chamaremos $l = dim(E)$ de ***posto*** do sistema de raízes Φ. Para cada $\alpha \in E$, definimos $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ e $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee : \alpha \in \Phi\}$.

Lema 1.2.35 [25, Lema 9.2.1] O conjunto $\Phi^\vee$ é um sistema de raízes em E.

Definição 1.2.36 *Seja Φ um sistema de raízes de E. O subgrupo $\mathcal{W} \subset GL(E)$ gerado por todas as reflexões σ_α (com $\alpha \in \Phi$) é chamado* **grupo de Weyl**.

Pelo item (iii) da Definição 1.2.34, $\mathcal{W}$ permuta o conjunto Φ, o qual por (i), da mesma definição, é finito e gera Φ. É possível identificar $\mathcal{W}$ com um subgrupo do grupo simétrico de Φ; em particular $\mathcal{W}$ é finito. Existe a noção de isomorfismo entre sistemas de raízes Φ, Φ' dos respectivos espaços euclidianos E, E': Dizemos que (Φ, E) e (Φ', E') são ***isomorfos*** se existe um isomorfismo de espaços vetoriais (não necessariamente uma isometria) $\phi : E \longrightarrow E'$ enviando Φ em Φ' tal que $\langle\phi(\beta), \phi(\alpha)\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle$, para cada par de raízes β, α em Φ.

Definição 1.2.37 *Seja Φ um sistema de raízes com posto l em um espaço euclidiano E com grupo de Weyl $\mathcal{W}$. Um conjunto $\Delta \subset \Phi$ é chamado* ***base de*** *Φ se:*

(i) *O conjunto Δ é uma base de E.*

(ii) *Cada raiz $\beta \in \Phi$ pode ser escrita como $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ com coeficientes inteiros k_α todos não negativos ou não positivos, para cada β.*

As raízes em Δ são chamadas ***raízes simples***. Em vista do item (i), da Definição 1.2.37, a cardinalidade de Δ é l e a expresão para β em (ii) é única. Além disso, podemos definir $\Delta^\vee$ de modo análogo ao caso de $\Phi^\vee$.

Corolário 1.2.38 [25, Corolario 13.1.1] Se Δ é uma base de Φ, então $\Delta^\vee$ é uma base de $\Phi^\vee$.

Definição 1.2.39 *A* ***altura*** *de uma raíz $\beta \in \Phi$, em relação à Δ, é dada por*

$$\mathrm{ht}\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha.$$

Se todos os $k_\alpha \geq 0$ (respectivamente todos os $k_\alpha \leq 0$), dizemos que β é ***positiva*** *(respectivamente,* ***negativa****).*

As coleções das raízes positivas e negativas, em relação à Δ, são usualmente denotadas por Φ^+ e Φ^-. Logo, $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.

Consideremos o conjunto $\Lambda = \{\lambda \in E : \langle\lambda, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}, \alpha \in \Phi\}$. Cada $\lambda \in \Lambda$ é chamado ***peso***. Já que $\langle\lambda, \alpha\rangle = \dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ depende linearmente sobre λ, Λ é um subgrupo de E que

contém Φ (pelo item (iv) da Definição 1.2.34). Denotemos Λ_r o reticulado das raízes (= subgrupo de Λ gerado por Φ):

$$\Lambda_r = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}\alpha_i.$$

Definição 1.2.40 *Fixemos uma base $\Delta \subset \Phi$. O elemento $\lambda \in \Lambda$ é chamado*

(i) ***peso dominante*** *se $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, para todo $\alpha \in \Delta$.*

(ii) ***peso fortemente dominante*** *se $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}_{>0}$, para todo $\alpha \in \Delta$.*

Fixemos uma base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$ de Φ, em que $l = dim(E)$. Logo, os vetores $\dfrac{2\alpha_i}{(\,\alpha_i, \alpha_i\,)}$, com $i = 1, 2, \cdots, l$, formam outra base para E. Seja $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_l\}$ a base dual (em relação ao produto interno $(\ ,\ )$ sobre E), então

$$\frac{2(\omega_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{i,j}, \text{ com } 1 \leq i, j \leq l, \quad \text{ ou seja, } \quad \langle\, \omega_i, \alpha_j \,\rangle = \delta_{i,j}, \text{ com } 1 \leq i, j \leq l.$$

Já que $\langle \omega_i, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, para todo $\alpha \in \Delta$, cada ω_i é um peso dominante. Chamaremos estes ω_i, com $1 \leq i \leq l$, de ***pesos dominantes fundamentais*** (em relação à Δ).

1.3 Álgebras envolventes universais

Nesta seção vamos associar, a cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, uma álgebra associativa U com unidade $1 \in \mathbb{K}$, que seja o mais "livre" possível, sujeita às relações de comutação de $\mathfrak{g}$. Esta é denominada a **álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$** e tem um papel fundamental na Teoria de Representações das Álgebras de Lie. A função principal de U é que reduz a teoria de representações de $\mathfrak{g}$ à teoria de representações da álgebra associativa U. Além disso, veremos que toda álgebra de Lie está "contida" em sua álgebra envolvente universal. Para mais detalhes, consulte [13] e [3].

Definição 1.3.1 *A **álgebra envolvente universal** de $\mathfrak{g}$ é um par (U, i) consistindo de uma álgebra associativa U com unidade e de um homomorfismo injetor $i : \mathfrak{g} \to U$ satisfazendo*

(i) A condição

$$i([x, y]) = i(x)(y) - i(y)i(x), \tag{1.3}$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, e que a imagem $i(\mathfrak{g})$ gera U como álgebra associativa.

(ii) A seguinte propriedade universal: dada uma álgebra associativa L com unidade e qualquer homomorfismo de álgebras $\rho : \mathfrak{g} \to L$, (satisfazendo (1.3)), existe um único homomorfismo de álgebras $\widetilde{\rho} : U \to L$ tal que

$$\widetilde{\rho} \circ i(x) = \rho(x),$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Aqui $\widetilde{\rho}$ é um homomorfismo de álgebras associativas, isto é, satisfaz

$$\widetilde{\rho}(xy) = \widetilde{\rho}(x)\widetilde{\rho}(y).$$

Em outras palavras, U é uma álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$, se para todo homomorfismo de álgebras ρ,(satisfazendo (1.3)) existe um único homomorfismo de álgebras $\widetilde{\rho}$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\rho"'] & U \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\rho}"] \\ L & \end{tikzcd}$$

Um objeto definido por meio da propriedade universal é único, a menos de isomorfismos, logo duas álgebras envolventes universais de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ são isomorfas como álgebras associativas. Assim, precisamos dar uma construção concreta para garantir a existência de tal objeto. Denotaremos a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$ (que é única, a menos de isomorfismo) por $U(\mathfrak{g})$.

1.3.1 Construção de $U(\mathfrak{g})$

Nosso objetivo agora é construir $U(\mathfrak{g})$. Seja $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ a álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$, isto é,

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = T^0 \oplus T^1 \oplus T^2 \oplus T^3 \oplus \cdots \oplus T^n \oplus \cdots ,$$

com $T^n = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}$ (n-vezes $\mathfrak{g}$). Em particular, $T^0 = \mathbb{K}$ e $T^1 = \mathfrak{g}$.

O produto em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ é simplesmente o produto associativo definido sobre os geradores homogêneos de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$.

Seja J o ideal bilateral de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ gerado pelos tensores

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \text{ para todos } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Denotamos por $U(\mathfrak{g})$ a álgebra quociente $\mathcal{T}(\mathfrak{g})/J$ e consideramos a projeção canônica

$$\pi : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}).$$

Observamos que J não contém os escalares $T^0 = \mathbb{K}$. Logo π leva $\mathbb{K}$ isomorficamente em $U(\mathfrak{g})$. Além disso, π também leva $\mathfrak{g}$ isomorficamente em $U(\mathfrak{g})$. De fato, definindo $i : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ como a restrição de $\pi : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ à $T^1 = \mathfrak{g}$, afirmamos que i é injetora, pois como J só contém elementos de grau maior ou igual a dois, temos $\mathfrak{g} \cap J = 0$. Portanto, $\mathfrak{g}$ está "contido"em $U(\mathfrak{g})$.

A demonstração de que o par $(U(\mathfrak{g}), i)$ é a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$ é bastante técnica e pode ser vista com detalhes em [25, Seção 17.2].

Exemplo 1.3.2 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra abeliana. Vamos obter $U(\mathfrak{g})$ a partir da álgebra tensorial $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Como $\mathfrak{g}$ é uma álgebra abeliana, temos $[X, Y] = 0$. Logo, em $U(\mathfrak{g})$ temos a identificação*

$$x \otimes y = y \otimes x, \quad \textit{para todos} \quad x, y \in \mathfrak{g},$$

o que significa que $U(\mathfrak{g})$, na verdade, é a álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$ [1] de $\mathfrak{g}$, que é abeliana.

Seja $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base ordenada de $\mathfrak{g}$. Os elementos de $U(\mathfrak{g})$ são combinações lineares de monômios do tipo

$$x_{i_1} \ldots x_{i_k}.$$

Esta implícito que o produto aqui é o produto tensorial dos elementos $x_{i_j} \in \beta$, com $1 \leq i_j \leq n$(o símbolo $\otimes$ de produto tensorial é omitido tanto por razões de economia de notação quanto para enfatizar que o produto é obtido por justaposição formal dos elementos de $\mathfrak{g}$). Como dois elementos de $\mathfrak{g}$ quaisquer comutam, pois $\mathfrak{g}$ é abeliana, é possível reescrever os monômios como

$$x_1^{s_1} \ldots x_n^{s_n},$$

com $s_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. O produto de dois desses monômios é dado como o produto de dois monômios comutativos nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Portanto, $U(\mathfrak{g})$ é isomorfa a uma álgebra de polinômios.

1.3.2 Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW)

Vamos tornar mais evidente a estrutura da álgebra $U(\mathfrak{g})$, mostrando que esta contém uma imagem isomórfica de $\mathfrak{g}$ e encontrando explicitamente uma base. No Exemplo 1.3.2, vimos que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie abeliana, uma base de $U(\mathfrak{g})$ é dada a partir de produtos ordenados de elementos de uma base de $\mathfrak{g}$. Na verdade, algo assim acontece não só com uma álgebra abeliana. Um resultado importante sobre as álgebras envolventes universais é o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Este teorema parte de bases ordenadas de $\mathfrak{g}$ e obtém, a partir da ordenação de monômios, bases de $U(\mathfrak{g})$. Formalmente, temos o seguinte:

Teorema 1.3.3 [25, Teorema 17.3.C] *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ uma base ordenada arbitrária de $\mathfrak{g}$. Então os monômios do tipo*

$$x_{i(1)} x_{i(2)} \cdots x_{i(m)},$$

juntamente com $1 \in \mathbb{K}$, formam uma base de $U(\mathfrak{g})$, com

$$x_{i(1)} x_{i(2)} \cdots x_{i(m)} = \pi(x_{i(1)} \otimes x_{i(2)} \otimes \cdots \otimes x_{i(m)}), \ \textit{para} \ m \in \mathbb{Z}_+, \ i(1) \leq \cdots \leq i(m).$$

Proposição 1.3.4 [13, Proposição 2.2.1] *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ com unidade, uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ e $\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$ uma aplicação linear que satisfaz*

$$\tau(x)\tau(y) - \tau(y)\tau(x) = \tau([x, y]),$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Então τ pode ser estendida unicamente a um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$ em $\mathcal{A}$, o qual leva $1_{U(\mathfrak{g})}$ em $1_{\mathcal{A}}$.

[1] Esta é quociente de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ pelo ideal bilateral $I = \langle x \otimes y - y \otimes x \,;\, x, y \in \mathfrak{g} \rangle$.

Proposição 1.3.5 [13, Proposição 2.2.4] *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ duas álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Então existe um e apenas um homomorfismo de álgebras $\psi : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}')$, o qual é uma extensão de φ tal que $\psi(1_{U(\mathfrak{g})}) = 1_{U(\mathfrak{g}')}$.*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{g}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\psi} & U(\mathfrak{g}') \end{array}$$

Este diagrama representa a única extensão de φ.

Vejamos um caso particular da Proposição 1.3.5. Se consideramos $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ e o homomorfismo injetor de álgebras de Lie $i : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tal que $i(x) = x$, para todo $x \in \mathfrak{h}$, então $U(i) : U(\mathfrak{h}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ é um homomorfismo injetor. Por este motivo, se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, podemos dizer que $U(\mathfrak{h})$ é uma subálgebra de $U(\mathfrak{g})$. Isto será muito útil nas próximas seções.

Proposição 1.3.6 [13, Proposição 2.2.10] Sejam $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3 \cdots, \mathfrak{g}_n$ subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ tais que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. Então existe um e apenas um isomorfismo entre as álgebras $U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2) \otimes U(\mathfrak{g}_3) \otimes \cdots \otimes U(\mathfrak{g}_n)$ e $U(\mathfrak{g})$ dado por

$$\begin{array}{rcl} f : U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2) \otimes U(\mathfrak{g}_3) \otimes \cdots \otimes U(\mathfrak{g}_n) & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \\ f(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \otimes \cdots \otimes u_n) & \longmapsto & u_1 u_2 u_3 \cdots u_n. \end{array}$$

Pelo isomorfismo dado na Proposição 1.3.6, às vezes identificaremos os espaços vetoriais $U(\mathfrak{g})$ e $U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2) \otimes U(\mathfrak{g}_3) \otimes \cdots \otimes U(\mathfrak{g}_n)$ entre si.

Capítulo 2

Teoria de Representações de Álgebras de Lie

A teoria de representações nos permite observar uma álgebra de Lie de dimensão finita como uma subálgebra da álgebra de Lie de endomorfismos de um espaço vetorial. Em aplicações destas álgebras na física e na matemática, não se trabalha com a álgebra de Lie propriamente, mas com suas representações lineares.

2.1 Representações

Nesta seção, vamos apresentar os conceitos e resultados fundamentais desta teoria. Para mais detalhes, consulte [25], [14] e [3].

Definição 2.1.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ dos operadores lineares de V e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma* ***representação de $\mathfrak{g}$ em*** *V é um homomorfismo de álgebras de Lie*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),$$

com V denotando ***o espaço de representação****. A dimensão de V será dita a* ***dimensão da representação****.*

Observação 2.1.2 *A representação ρ é dita* ***fiel*** *se $ker(\rho) = \{0\}$.*

Exemplo 2.1.3

(i) Se $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ é uma subálgebra, a inclusão define, trivialmente, uma representação de $\mathfrak{g}$ em V denominada ***representação canônica****:*

$$\begin{aligned} I : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

(ii) A aplicação $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, *com* $dim(V) = 3$ *definida por:*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{bmatrix}$$

é uma representação de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Exemplo 2.1.4 Representação adjunta

Seja $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. A aplicação linear* $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, *dada por*

$$\begin{array}{rccccccc} ad: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) & & & & \\ & x & \longmapsto & ad(x): & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & & & & y & \longmapsto & ad(x)(y) = [x, y], \end{array}$$

é uma representação de $\mathfrak{g}$ *em* $\mathfrak{g}$ *chamada* **representação adjunta** *de* $\mathfrak{g}$. *O núcleo da representação adjunta é denominado* ***centro*** *de* $\mathfrak{g}$, *denotado por* $Z(\mathfrak{g})$:

$$Ker(ad) := Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g}; ad(x)(y) = 0, \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}.$$

Veremos que é muito conveniente estudar a teoria de representações de álgebras de Lie utilizando a linguagem de módulos.

Definição 2.1.5 *Um* ***módulo*** *sobre uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *(ou um* $\mathfrak{g}$*-módulo) é um espaço vetorial* V *munido de uma ação* $\mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$, *denotada por* $(x, v) \longrightarrow x \cdot v$, *que satisfaz para todos* $x, y \in \mathfrak{g}, u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$, *as seguintes propriedades:*

1. $(x + y) \cdot v = x \cdot v + y \cdot v$.
2. $x \cdot (u + v) = x \cdot u + x \cdot v$.
3. $\alpha x \cdot v = x \cdot (\alpha v)$.
4. $[x, y] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v$.

Se $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V, então V pode ser visto como um $\mathfrak{g}$-módulo através da ação:

$$\begin{array}{rcccl} \mathfrak{g} \times & V & \longrightarrow & V & \\ & (x, v) & \longmapsto & x \cdot v \overset{def}{=} & \psi(x)(v). \end{array}$$

Da mesma forma, se temos um $\mathfrak{g}$-módulo V, então podemos definir uma representação de $\mathfrak{g}$ em V por

$$\begin{array}{rcccccc} \rho: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V) & & & \\ & x & \longmapsto & \rho(x): & V & \longrightarrow & V \\ & & & & v & \longmapsto & \rho(x)(v) \overset{def}{=} x \cdot v, \quad \text{para todo } v \in V. \end{array}$$

Portanto, os conceitos de módulo e representação são, essencialmente, a mesma coisa.

Definição 2.1.6 *Seja $V \neq 0$ um $\mathfrak{g}$-módulo.*

(i) Um subespaço $W \subset V$ é dito um **$\mathfrak{g}$-submódulo** *de V, se W é um $\mathfrak{g}$-módulo.*

(ii) Dizemos que V é **irredutível** *se V possui exatamente dois $\mathfrak{g}$-submódulos, V e $\{0\}$.*

(iii) O $\mathfrak{g}$-módulo V é dito ***completamente redutível*** *se V é uma soma direta de $\mathfrak{g}$-submódulos irredutíveis.*

(iv) O $\mathfrak{g}$-módulo V é dito ser **indecomponível** *se não existem submódulos de V não nulos W e W', tais que $V = W \oplus W'$.*

Exemplo 2.1.7

(i) Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo com $dim(V) = 1$, então V é um módulo irredutível.

(ii) Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples, então $\mathfrak{g}$ visto como um $\mathfrak{g}$-módulo por meio de sua representação adjunta é irredutível.

Proposição 2.1.8 (Lema de Schur) [25, Proposição 6.1] *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação irredutível. Então os únicos endomorfismos de V que comutam com todos $\phi(x)$, (para todo $x \in \mathfrak{g}$) são múltiplos escalares da identidade.*

Teorema 2.1.9 (Teorema de Weyl) [25, Teorema 6.3] *Seja $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de dimensão finita da álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$. Então ϕ é completamente redutível.*

O teorema de Weyl é obviamente fundamental para o estudo de representações de uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$. Oferecemos aqui uma aplicação mais imediata, ao problema de mostrar que a decomposição abstrata de Jordan é compatível com as diversas representações lineares de $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.1.10 [25, Teorema 6.4] *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, com $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Então $\mathfrak{g}$ contém as partes semissimples e nilpotentes em $\mathfrak{gl}(V)$ de todos seus elementos. Em particular, a decomposição usual e a decomposição abstrata de Jordan coincidem.*

Teorema 2.1.11 [14, Teorema 9.16] *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de dimensão finita de $\mathfrak{g}$. Se $x = d + n$ é a decomposição abstrata de Jordan de $x \in \mathfrak{g}$, então $\phi(x) = \phi(d) + \phi(n)$ é a decomposição usual de Jordan de $\phi(x)$.*

Definição 2.1.12 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ representações de $\mathfrak{g}$ em $V_1, V_2, ..., V_n$, respectivamente. Definindo*

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V_1 \oplus ... \oplus V_n) \\ & x & \longmapsto & \rho_1(x) \oplus ... \oplus \rho_n(x), \end{array}$$

podemos afirmar que ρ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $V_1 \oplus ... \oplus V_n$, que será denominada a ***soma direta das representações*** *ρ_i, com $i = 1, ..., n$.*

Definição 2.1.13 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ representações de $\mathfrak{g}$ em $V_1, V_2, ..., V_n$, respectivamente. Definimos*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V_1 \otimes ... \otimes V_n) \\ & x & \longmapsto & \rho_1(x) \otimes 1 \otimes ... \otimes 1 + ... + 1 \otimes ... \otimes \rho_n(x), \end{array}$$

com 1 representando a identidade em cada um dos espaços. Assim, ρ define uma representação de $\mathfrak{g}$ em $V_1 \otimes ... \otimes V_n$ e é denominada o ***produto tensorial das representações*** *ρ_i, com i=1,...,n.*

Apresentamos agora o conceito de *pull back*.

Definição 2.1.14 [22, Definição 4.1.10] Sejam $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Se $\rho : \mathfrak{g}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}_2$, então $\rho \circ \phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}_1$ pelo ***pull back*** de V através de ϕ.

Caso particular: Se $\mathfrak{g}_1$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}_2$ e $i : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ é o homomorfismo inclusão, então o *pull back* de V através de i é simplesmente a restrição de ρ para $\mathfrak{g}_1$ denotada por

$$\mathrm{res}_{\mathfrak{g}_1}^{\mathfrak{g}_2} V = \rho \circ i.$$

Observação 2.1.15 *A aplicação inclusão $i : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$, pela Proposição 1.3.5, induz uma aplicação $i : U(\mathfrak{g}_1) \longrightarrow U(\mathfrak{g}_2)$. Pelo Teorema 1.3.3, esta é uma inclusão (tomando uma base de $\mathfrak{g}_1$ e fazendo uma extensão para uma base de $\mathfrak{g}_2$). Logo, $res_{\mathfrak{g}_1}^{\mathfrak{g}_2} V$ corresponde à restrição usual do $U(\mathfrak{g}_2)$-módulo V para o $U(\mathfrak{g}_1)$-módulo V.*

Para mais detalhes sobre o que segue, consulte [30, Capítulo 8, seção 7].

Definição 2.1.16 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{K}$, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Lie e $\rho : \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{b}$. O $U(\mathfrak{g})$-**módulo induzido** de $U(\mathfrak{b})$ para $U(\mathfrak{g})$ é definido como*

$$Ind_{U(\mathfrak{b})}^{U(\mathfrak{g})} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} V,$$

com $U(\mathfrak{g})$ atuando pela multiplicação à esquerda. Em particular, $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} V$ é um $U(\mathfrak{b})$-módulo à esquerda.

Proposição 2.1.17 (Propriedade universal) *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{K}$, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Lie. Se M, N são $U(\mathfrak{b})$-módulos e $f : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de $U(\mathfrak{b})$-módulos, então existe um único homomorfismo $\bar{f}: U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} M \longrightarrow N$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} M \arrow[dr, dashed, "\bar{f}"] & \\ M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

com $\varphi(m) = 1 \otimes m$, para todo $m \in M$.

2.2 Representações de álgebras semissimples

Nesta seção apresentamos brevemente o estudo das representações de dimensão finita das álgebras de Lie semissimples. Graças ao teorema de Weyl sobre redutibilidade completa, são os módulos irredutíveis os que desempenham um papel de controle no caso de dimensão finita.

2.2.1 Espaços de peso

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado de característica zero e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan fixa de $\mathfrak{g}$ cujo conjunto de raízes é R. Em R escolhemos um sistema de raízes simples

$$\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\},$$

com $r = dim(\mathfrak{h})$. Sejam R^+ o conjunto das raízes positivas, R^- o conjunto das raízes negativas (ambas em relação à Δ) e $\mathcal{W}$ o grupo de Weyl de R. Considere a **decomposição triangular** de $\mathfrak{g}$ dada por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+, \tag{2.1}$$

com

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in R^-} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Observe que $\mathfrak{n}^-$ e $\mathfrak{n}^+$ são subálgebras de $\mathfrak{g}$ nilpotentes pelo fato que $\mathfrak{g}$ possui uma quantidade finita de raízes e $[\,\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta\,] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, se $\alpha + \beta$ é uma raiz ou zero, caso contrário. Além do mais, a subálgebra

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$$

é a subálgebra solúvel maximal de $\mathfrak{g}$. A subálgebra $\mathfrak{b}$ é chamada ***subálgebra de Borel***.

Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Segue do Teorema 2.1.10 que $\mathfrak{h}$ atua diagonalmente sobre V. Assim,

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

com $V_\lambda = \{v \in V : \ h \cdot v = \lambda(h)\, v, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}$.

Para um $\mathfrak{g}$-módulo V arbitrário, os subespaços V_λ também são definidos deste modo. Se $V_\lambda \neq 0$, para algum $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, então λ é chamado um **peso de** V(ou mais precisamente, um peso de $\mathfrak{h}$ sobre V), V_λ é chamado um **espaço de peso** e qualquer vetor $v \in V_\lambda$ é chamado **vetor de peso** λ. A ***multiplicidade*** de um peso λ é a dimensão do subespaço de peso V_λ.

Lema 2.2.1 [25, Lema 20.1] *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo arbitrário. Então*

(*i*) $\mathfrak{g}_\alpha$ *transforma V_λ em $V_{\lambda+\alpha}$, para todos $\lambda \in \mathfrak{h}^*, \alpha \in R$.*

(*ii*) *A soma* $V' = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ *é direta e* V' *é um* $\mathfrak{g}$*-submódulo de* V.

(*iii*) *Se* V *tem dimensão finita, então* $V = V'$.

Demonstração:

(*i*) Sejam $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v \in V_\lambda$ e $h \in \mathfrak{h}$. Como existe uma ação de $\mathfrak{g}$ sobre V, então

$$[h, x] \cdot v = h \cdot x \cdot v - x \cdot h \cdot v$$

Logo

$$\begin{aligned} h \cdot (x \cdot v) &= x \cdot h \cdot v + [h, x] \cdot v = \; x \cdot (\, \lambda(h) v \,) + (\, \alpha(h) x \,) \cdot v \\ &= \lambda(h)(x \cdot v) + \alpha(h)(x \cdot v) = \; (\lambda + \alpha)(h)(x \cdot v) \end{aligned}$$

o que implica $(x \cdot v) \in V_{\lambda+\alpha}$, ou seja, $\mathfrak{g}_\alpha \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$.

(*ii*) Pela parte (*i*), é claro que V' é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Mostraremos que a soma dos V_λ, com $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, é direta.
Seja $v \in V_\lambda \cap V_\mu$, com $\lambda, \mu \in h^*$ e $\lambda \neq \mu$. Já que $\lambda \neq \mu$, existe pelo menos um $h \in \mathfrak{h}$ tal que $\lambda(h) \neq \mu(h)$. Logo

$$h \cdot v = \lambda(h) v \quad \text{ e } \quad h \cdot v = \mu(h) v.$$

Então

$$\lambda(h) v = \mu(h) v,$$

o que implica $v = 0$. Portanto, a soma dos V_λ, com $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, é direta.

(*iii*) Se a dimensão de V é finita, então V é soma direta de seus espaços de peso. Logo $V = V'$.

■

Definição 2.2.2 *Com as notações acima, um* $\mathfrak{g}$*-módulo* V *é chamado* ***módulo de peso*** *se* $V = V'$.

2.2.2 Módulos cíclicos *standard*

Para estudar $\mathfrak{g}$-módulos irredutíveis de dimensão finita é muito útil estudar primeiro uma classe maior de $\mathfrak{g}$-módulos gerados por um vetor maximal.

Definição 2.2.3 [25, Definição 20.2.1] Um **vetor de peso máximo** λ em um $\mathfrak{g}$-módulo V é um vetor não nulo $v^+ \in V$ tal que

$$\mathfrak{g}_\alpha \cdot v^+ = o, \text{ para todo } \alpha \in R^+ \qquad \text{ e } \qquad h \cdot v^+ = \lambda(h)\, v^+, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}.$$

Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo, com $dim(V) < \infty$, então, pelo Teorema 1.2.14, a subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$ possui um autovetor comum v tal que $\mathfrak{g}_\alpha \cdot v = 0$, para todo $\alpha \in R^+$. Logo, podemos afirmar: se $dim(V) < \infty$, então V possui ao menos um vetor maximal. Por outro lado, pelo fato de $(U(\mathfrak{g}), i)$ satisfazer a propriedade universal (dada na Definição 1.3.1), uma representação de $\mathfrak{g}$ em V induz uma representação de $U(\mathfrak{g})$ em V. Dado $v \in V$, o conjunto

$$U(\mathfrak{g})v = \{a \cdot v : a \in U(\mathfrak{g})\} \subset V$$

é o menor subespaço $\mathfrak{g}$-invariante de V que contém v, isto é, $x \cdot (a \cdot v) \in U(\mathfrak{g})v$, para todos $x \in \mathfrak{g}$, $a \in U(\mathfrak{g})$, $v \in V$.

Definição 2.2.4 [25, Definição 20.2.2] Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Um $\mathfrak{g}$-módulo V é chamado um ***módulo cíclico standard*** com peso máximo λ se existe $v_\lambda \in V$, com $v_\lambda \neq 0$, tal que

$$\mathfrak{n}^+ \cdot v_\lambda = 0, \quad h \cdot v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda, \text{ para todo } \ h \in \mathfrak{h}, \ \ V = U(\mathfrak{g}) \cdot v_\lambda. \tag{2.2}$$

Observação 2.2.5 *De (2.1) temos $V = U(\mathfrak{n}^-) \cdot v_\lambda$. Logo,*

$$V = \bigoplus_{\mu \leqslant \lambda} V_\mu, \ \ V_\lambda = \mathbb{K}v_\lambda, \ \ dim(V_\mu) < \infty, \ \textit{para todo } \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Definição 2.2.6 *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo. Um elemento $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, com $V_\lambda \neq 0$ é dito um* **peso máximo** *de V se, para todo $v \in V_\lambda$, temos $\mathfrak{n}^+ \cdot v = 0$.*

O seguinte teorema caracteriza os módulos cíclicos *standard*.

Teorema 2.2.7 [25, Teorema 20.2] *Sejam V um módulo cíclico standard com vetor maximal $v_\lambda \in V_\lambda$ e $R^+ = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$. Então*

(i) V é gerado pelos vetores $y_{\beta_1}^{i_1} y_{\beta_2}^{i_2} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} v_\lambda$, com $i_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $y_{\beta_i} \in \mathfrak{g}_{-\beta_i} \subset \mathfrak{n}^-$. Em particular, V é soma direta de seus espaços de peso.

(ii) Os pesos de V são da forma $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i$, com $k_i \in \mathbb{Z}^+$, isto é, todo peso satisfaz $\mu \prec \lambda$.

(iii) Para cada $\mu \in \mathfrak{h}^*$, $dim(V_\mu) < \infty$ e $dim(V_\lambda) = 1$.

(iv) Cada submódulo de V é soma direta de seus espaços de peso.

(v) V é um $\mathfrak{g}$-módulo indecomponível com um único submódulo maximal (próprio) e um único quociente irredutível correspondente.

(vi) Qualquer imagem homomórfica não-nula de V é também um módulo cíclico standard de peso λ.

(vii) Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível, então v_λ é o único vetor de peso máximo de V (a menos de múltiplos escalares).

Corolário 2.2.8 [25, Corolario 20.2] *Seja V um módulo cíclico standard com vetor maximal $v_\lambda \in V_\lambda$. Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível, então v_λ é o único vetor maximal em V, a menos de múltiplos escalares.*

Queremos mostrar que, para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, existe um único (a menos de isomorfismos) $\mathfrak{g}$-módulo cíclico *standard* irredutível de peso máximo λ que pode ser de dimensão infinita. Para isso, precisamos do conceito de módulo Verma.

2.2.3 Módulos Verma

Considere $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples não trivial e $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $J(\lambda)$ o ideal esquerdo de $U(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos x_α, $\alpha \in R^+$ e $h_i - \lambda(h_i)1$, com $i = 1, 2, \cdots, r$, isto é,

$$J(\lambda) = \sum_{\alpha \in R^+} U(\mathfrak{g})x_\alpha + \sum_{i=1}^{r} U(\mathfrak{g})(h_i - \lambda(h_i)1.$$

Seja

$$M(\lambda) = \frac{U(\mathfrak{g})}{J(\lambda)}.$$

O quociente $M(\lambda)$ possui uma estrutura natural de $U(\mathfrak{g})$-módulo à esquerda e é chamado ***módulo Verma*** determinado por λ. Consideremos o homomorfismo canônico de $U(\mathfrak{g})$-módulos à esquerda.

$$\psi : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow M(\lambda) = \frac{U(\mathfrak{g})}{J(\lambda)}.$$

Seja $\psi(1) = v_\lambda$, com 1 o elemento unidade em $U(\mathfrak{g})$. Então

$$x_\alpha \cdot v_\lambda = 0, \text{ para todo } \alpha \in R^+,$$

$$h_i \cdot v_\lambda = \lambda(h_i)v_\lambda, \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, r. \tag{2.3}$$

Já que cada elemento $u \in U(\mathfrak{g})$ satisfaz $u = u1$, cada elemento de $M(\lambda)$ tem a forma uv_λ, para algum $u \in U(\mathfrak{g})$. Logo, $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \cdot v_\lambda$. Portanto, podemos afirmar agora que $M(\lambda)$ é um módulo cíclico *standard* com peso máximo λ e vetor de peso máximo denotado por v_λ.

Outra maneira de construir o módulo Verma é partindo do fato que um módulo cíclico *standard*, visto como um $U(\mathfrak{b})$-módulo (com $\mathfrak{b}$ a subálgebra de Borel), contém um submódulo de dimensão 1 gerado pelo vetor maximal. Por tal razão, consideraremos D_λ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com base v_λ. Definimos uma ação de $\mathfrak{b}$ sobre D_λ como segue:

$$x_\alpha \cdot v_\lambda = 0, \text{ para todo } \alpha \in R^+, \quad h \cdot v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \text{ para todo } h \in \mathfrak{h} \text{ e } \lambda \in \mathfrak{h}^* \text{ fixo.}$$

Então, através da representação induzida, obtemos

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} D_\lambda.$$

Pela decomposição triangular de $\mathfrak{g}$ dada em (2.1) e pela Proposição 1.3.6, temos

$$U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}^+). \tag{2.4}$$

Logo, a restrição da aplicação ψ a $U(\mathfrak{n}^-)$ é um homomorfismo de $U(\mathfrak{n}^-)$-módulos à esquerda. Pela Teorema P.B.W, a aplicação $u \longmapsto u \otimes v_\lambda$ é bijetora. Portanto,

$$U(\mathfrak{n}^-) \cong M(\lambda) \text{ como } U(\mathfrak{n}^-)\text{-módulos.}$$

Lema 2.2.9 *Qualquer módulo cíclico standard é um quociente de um módulo Verma.*

Demonstração:

Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo cíclico *standard* com vetor de peso máximo λ representado por v_λ. Então $\mathfrak{n}^+ \cdot v_\lambda = 0$ e $(h - \lambda(h) \cdot 1) \cdot v_\lambda = 0$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. Consideremos o homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos à esquerda ϕ tal que

$$\begin{array}{rccc} \phi: & U(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & V \\ & 1 & \longmapsto & \phi(1) := \ v_\lambda. \end{array}$$

Então $\phi(u) = u\, v_\lambda$, para todo $u \in U(\mathfrak{g})$. Logo, o ideal à esquerda $J(\lambda)$ de $U(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos x_α, $\alpha \in R^+$ e $h_i - \lambda(h_i) \cdot 1$, com $i = 1, 2, \cdots, r$, está contido no $ker(\phi)$. Logo, esta aplicação se fatora através de $M(\lambda)$, isto é,

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"'] & M(\lambda) \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\phi}"] \\ V & \end{tikzcd}$$

$\widetilde{\phi} \circ \pi(u) = u\, v_\lambda = \phi(u)$, para todo $u \in U(\mathfrak{g})$. Já que v_λ gera V, a aplicação induzida $\widetilde{\phi}$ de $M(\lambda)$ à V é sobrejetora. Portanto, V é um quociente de $M(\lambda)$. ■

Notamos que o módulo de dimensão infinita $M(\lambda)$ não é completamente redutível. Pode ser mostrado (ver [24]) que $M(\lambda)$ possui um único submódulo maximal $N(\lambda)$. Definindo

$$V(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{N(\lambda)},$$

temos que $V(\lambda)$ é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível. O módulo $V(\lambda)$ é chamado **módulo irredutível de peso máximo λ.**

2.2.4 Módulos irredutíveis de dimensão finita

A maioria dos módulos irredutíveis $V(\lambda)$ construídos acima como o quociente de um módulo Verma são de dimensão infinita. Se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ é tal que

$$\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}^+, \text{ para todo } i \in I,$$

então o módulo $V(\lambda)$ é de dimensão finita. Estes λ são chamados ***pesos dominantes integrais***.

Teorema 2.2.10 [24, Teorema 5.5]

(*i*) *A dimensão de $V(\lambda)$ é finita se, e só se, λ é um peso dominante inteiro.*

(*ii*) *Qualquer $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de dimensão finita tem a forma de $V(\lambda)$, para algum peso dominate inteiro $\lambda \in \mathfrak{h}^*$*

A demonstração de (*i*) se encontra em [25, Seção 21]. Para (*ii*), a ideia da demonstração é: dado V um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de dimensão finita, da mesma forma como acontece através da representação adjunta, é possível mostrar que a ação de $\mathfrak{h}$ sobre V é simultaneamente diagonalizável. Logo, V se decompõe em soma direta de espaços de peso. Já que um módulo irredutível de dimensão finita tem apenas um número finito de pesos, um dos vetores máximos gera todo o módulo V.

Este teorema nos dá uma bijeção entre o conjunto dos $\mathfrak{g}$-módulos irredutíveis de dimensão finita e o conjunto dos pesos dominantes integrais.
Para $i = 1, 2, 3, \cdots, r$, define-se $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$ por

$$\omega_i(h_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

com $h_j = h_{\alpha_j}$, para todo $j = 1, 2, \cdots, r$. É claro que estes ω_i são pesos dominantes integrais. Eles são chamados ***pesos fundamentais***. Definimos

$$\mathrm{P} := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\,\omega_i \quad , \quad \mathrm{P}^+ := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}^+\omega_i. \tag{2.5}$$

O conjunto P é chamado o ***reticulado dos pesos*** e P^+ o ***reticulado dos pesos positivos***. Afirmamos que o conjunto $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r\}$ é uma base para $\mathfrak{h}^*$. Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Então podemos representar λ da seguinte forma

$$\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_r\omega_r.$$

Note que os coeficientes podem ser calculados avaliando λ em h_i. Assim, Portanto

$$\lambda = \sum_{j=1}^{r} \lambda(h_j)\,\omega_j. \tag{2.6}$$

A igualdade (2.6) significa que λ é um peso dominante integral se, e só se, é uma combinação linear de pesos fundamentais com coeficientes inteiros não negativos. Em resumo, para $\lambda = \sum_{i=1}^{r} m_i\,\omega_i \in \mathrm{P}^+$ denotaremos por $V(\lambda)$ o $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de dimensão finita com peso máximo λ e vetor de peso máximo v_λ. Isto é, $V(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \cdot v_\lambda$ com relações de definição

$$\mathfrak{n}^+ \cdot v_\lambda = 0, \qquad h \cdot v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda, \qquad (x_i^-)^{m_i+1} \cdot v_\lambda = 0, \text{ para todos } i \in I,\ h \in \mathfrak{h}.$$

Capítulo 3

Módulos de Weyl

A noção de módulo de Weyl foi originalmente introduzida por Chari e Pressley em [11] para as álgebras de *loop*, em resposta ao problema de estudar as representações irredutíveis de dimensão finita das álgebras afins quânticas através de seu limite clássico. Estes módulos podem ser descritos em termos de geradores e relações, e são caracterizados pela seguinte propriedade universal: qualquer módulo de peso máximo de dimensão finita que é gerado por um espaço de peso máximo unidimensional é um quociente de um módulo de Weyl. Neste capítulo apresentamos as álgebras de *loop* seguido de sua álgebra envolvente universal. Posteriormente, definimos os módulos integráveis e, através deles, apresentamos os módulos de Weyl para as álgebras de *loop* que, em suma, são módulos integravéis maximais de peso máximo, segundo [11]. Além disso, mostramos algumas de suas propriedades universais. Finalizamos este capítulo mostrando que o produto tensorial de módulos de Weyl é outro módulo de Weyl sempre que os polinômios associados a eles sejam coprimos.

3.1 Álgebras de *loop*

Uma das estruturas algébricas que utilizamos neste trabalho é a álgebra de *loop*. Nesta seção, apresentamos sua definição e extensão por meio de uma derivação d. Para mais detalhes, consulte [26] e [8].

Dado qualquer espaço vetorial complexo V, representaremos por $L(V)$ o espaço das aplicações algébricas

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow V,$$

com $\mathbb{C}^*$ o conjunto dos números complexos não nulos. O espaço $L(V)$ é isomorfo à $V \otimes_{\mathbb{C}} L$, com $L = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ o anel de polinômios de Laurent em uma indeterminada t. De acordo com [26], o isomorfismo é definido associando-se ao elemento

$$\sum_{i \in \mathbb{Z},\, x_i \in V} x_i \otimes t^i \in V \otimes_{\mathbb{C}} L$$

a aplicação

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow V, \text{ dada por } f(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} z^i x_i.$$

Definição 3.1.1 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples complexa. A* **álgebra de *loop* de $\mathfrak{g}$** *é $L(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[t,t^{-1}]$. Um elemento de $L(\mathfrak{g})$ é uma soma de elementos da forma $x\otimes f(t)$, com $x \in \mathfrak{g}$ e $f(t) = \sum a_n t^n$ tal que $n \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{C}$.*

Podemos munir $L(\mathfrak{g})$ de uma estrutura de álgebra de Lie definindo seu colchete por

$$[x \otimes f(t), y \otimes s(t)]_{L(\mathfrak{g})} = [x, y]_{\mathfrak{g}} \otimes f(t)s(t), \text{ para todos } x, y \in \mathfrak{g},\ f(t), s(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}].$$

Aqui os subíndices indicam em que álgebra está definido o colchete.

Uma derivação d de $L(\mathfrak{g})$, dada por

$$d(x \otimes t^n) = nx \otimes t^n, \quad \text{para todos } x \in \mathfrak{g}, n \in \mathbb{Z},$$

nos permite considerar a **álgebra de *loop* estendida**

$$L^e(\mathfrak{g}) = L(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}d, \quad \text{com} \quad \mathbb{C}d = \{ad : a \in \mathbb{C}\}.$$

Assim, $L^e(\mathfrak{g})$ tem uma estrutura natural de álgebra de Lie dada pelo colchete

$$[f_1 + a_1 d, f_2 + a_2 d]_{L^e(\mathfrak{g})} = [f_1, f_2]_{L(\mathfrak{g})} + a_1 d(f_2) - a_2 d(f_1), \tag{3.1}$$

para todos $f_1, f_2 \in L(\mathfrak{g}),\ a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Como um caso particular, temos

$$[x \otimes t^r, y \otimes t^s] = [x, y] \otimes t^{r+s}, \quad [d, x \otimes t^r] = rx \otimes t^r, \quad [d, d] = 0.$$

Deste modo, podemos afirmar que a álgebra de *loop* $L(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra de Lie da álgebra de *loop* estendida $L^e(\mathfrak{g})$.

3.2 Álgebra Envolvente Universal da Álgebra de *loop*

Primeiro estabelecemos a notação que utilizaremos de agora em diante. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples não trivial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, com $dim(\mathfrak{h}) = r$.

Sejam $I = \{1, 2, \cdots, r\}$, R o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ com respeito à $\mathfrak{h}$, R^+ o sistema de raízes positivas de $\mathfrak{g}$, $\Delta = \{\alpha_i, i \in I\}$ o conjunto de raízes simples. Seja $\theta \in R^+$ a raiz máxima em R. Para $\alpha \in R$ temos a correspondente co-raiz $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ e seja $\mathfrak{g}_\alpha$ o correspondente espaço raiz de $\mathfrak{g}$, com $dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$, para todo $\alpha \in R$.

Para cada $\alpha \in R^+$, fixemos $x_\alpha^+ \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $x_\alpha^- \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tais que $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha$. Continuamos com a mesma notação ω_i, $i \in I$, para os pesos fundamentais, como na Seção 2.2.4.

Sejam

$$\mathrm{Q} := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\alpha_i, \quad \text{e} \quad \mathrm{Q}^+ := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}^+\alpha_i. \tag{3.2}$$

O conjunto Q é chamado o ***reticulado das raízes*** e Q^+ o ***reticulado das raízes positivas***. Tomando $\eta \in \mathrm{Q}^+$, podemos escrever $\eta = \sum_{i=1}^{r} s_i\,\alpha_i$, com $s_i \in \mathbb{Z}^+$. Definimos a altura de η por

$$\mathrm{ht}\,(\eta) = \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

Além disso, tomamos também P e P^+ como foram definidos em (2.5)

Seja $\langle\,,\,\rangle$ uma forma bilinear sobre P tal que $\langle \alpha_i, \omega_j\rangle = \delta_{ij}$ (função delta de Kronecker). Definimos $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j\rangle$, para todos $i, j \in I$. Para uma raiz $\alpha \in R$, definimos $d_\alpha = \frac{1}{2}\langle \alpha, \alpha\rangle$. A forma bilinear $\langle\,,\,\rangle$ induz um isomorfismo entre $\mathfrak{h}^*$ e $\mathfrak{h}$, tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ \beta = \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i \in R^+ & \longmapsto & h_\beta = \sum_{j=1}^{r} \frac{d_j n_j}{d_\beta} h_j, \end{array} \tag{3.3}$$

com $d_j = d_{\alpha_j}$, $h_j = h_{\alpha_j}$ para todo $j \in I$.

Seja $\mathcal{W} \subset Aut(\mathfrak{h}^*)$ o grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$. Pela definição 1.2.36 é possível afirmar que $\mathcal{W}$ é gerado por reflexões simples σ_{α_i}, com $\alpha_i \in \Delta$. Lembremos que a álgebra de loop estendida $L^e(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie

$$L^e(\mathfrak{g}) = L(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}d = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}d,$$

com colchete dado por 3.1. Pela identificação de $\mathfrak{h}$ com $\mathfrak{h} \otimes 1$ por meio de $x \longmapsto x \otimes 1$, para todo $x \in \mathfrak{h}$, podemos afirmar que $\mathfrak{h}^e = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}d$, é uma subálgebra de Lie abeliana de $L^e(\mathfrak{g})$. Definimos $\delta \in (\mathfrak{h}^e)^*$ por

$$\delta(d) = 1, \quad \delta(h) = 0, \ \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}.$$

Além disso, consideramos os elementos $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ como elementos de $(\mathfrak{h}^e)^*$ definindo $\lambda(d) = 0$. Assim, podemos afirmar que $\Delta \subset (\mathfrak{h}^e)^*$.

Sejam

$$\mathrm{P}^e = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\,\omega_i \oplus \mathbb{Z}\delta \quad \text{e} \quad \mathrm{P}^e_+ = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}^+\omega_i \oplus \mathbb{Z}\delta$$

Consideramos $\mathcal{W}$ agindo sobre $(\mathfrak{h}^e)^*$ da seguinte forma:

$$w(\delta) = \delta, \ \text{ para todo } w \in \mathcal{W}.$$

Para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$, $m \in \mathbb{Z}$, denotamos por x_m o elemento $x \otimes t^m$, isto é,

$$x_m := x \otimes t^m \in L(\mathfrak{g}) \subset L^e(\mathfrak{g}).$$

Deste modo, para $x_\alpha^+ \in \mathfrak{g}_\alpha,\ x_\alpha^- \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *e* $m \in \mathbb{Z}$, temos

$$x_{\alpha,m}^+ := x_\alpha^+ \otimes t^m, \quad x_{\alpha,m}^- := x_\alpha^- \otimes t^m. \tag{3.4}$$

Definindo

$$e_i^+ := x_{\alpha_i}^+ \otimes 1, \quad e_i^- := x_{\alpha_i}^- \otimes 1,$$
$$e_0^+ := x_\theta^- \otimes t^{+1}, \quad e_0^- := x_\theta^+ \otimes t^{-1}.$$

os elementos e_i^+, e_i^-, (com $i = 0, 1, 2, \cdots, r$) junto com d geram $L^e(\mathfrak{g})$. Os elementos e_i^+, e_i^-, com $i \in I \cup \{0\}$, são chamados ***os geradores de Chevalley de*** U^e.

Para qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{a}$, a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{a}$ é denotada por $U(\mathfrak{a})$. Usaremos, a partir de agora, as seguintes notações:

$$U(L^e(\mathfrak{g})) := U^e, \quad U(L(\mathfrak{g})) := U, \quad U(\mathfrak{g}) := U^{fin}.$$

Consideramos agora as subálgebras de U

$$U(<) := \langle x_{\alpha_i,m}^- : i \in I,\ m \in \mathbb{Z}\rangle,$$

$$U(>) := \langle x_{\alpha_i,m}^+ : i \in I,\ m \in \mathbb{Z}\rangle,$$

$$U(0) := \langle h_{\alpha,m} : \alpha \in R,\ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\rangle.$$

Além disso, definimos

$$U^{fin}(<) := U(<) \cap U^{fin} \quad \text{e} \quad U^{fin}(>) := U(>) \cap U^{fin}. \tag{3.5}$$

Logo, pela identificação $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes 1$ obtemos uma representação mais clara dos espaços definidos em (3.5).

$$\begin{aligned} U^{fin}(<) &:= \langle x_{\alpha_i}^- \otimes t^n : n \in \mathbb{Z}\rangle \cap U^{fin} \cong \langle x_{\alpha_i}^- \otimes t^n : n \in \mathbb{Z}\rangle \cap U(\mathfrak{g} \otimes 1) \\ &\cong \langle x_{\alpha_i}^- \otimes 1\rangle \cong U(\mathfrak{n}^- \otimes 1) \cong U(\mathfrak{n}^-) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ U^{fin}(<) \cong U(\mathfrak{n}^-). \tag{3.6}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} U^{fin}(>) &:= \langle x_{\alpha_i}^+ \otimes t^n : n \in \mathbb{Z}\rangle \cap U^{fin} \cong \langle x_{\alpha_i}^+ \otimes t^n : n \in \mathbb{Z}\rangle \cap U(\mathfrak{g} \otimes 1) \\ &\cong \langle x_{\alpha_i}^+ \otimes 1\rangle \cong U(\mathfrak{n}^+ \otimes 1) \cong U(\mathfrak{n}^+) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ U^{fin}(>) \cong U(\mathfrak{n}^+). \tag{3.7}$$

De (2.4), temos $U^{fin} \cong U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}^+)$. Logo, por (3.6) e (3.7), obtemos $U^{fin} = U^{fin}(<) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U^{fin}(>)$, ou equivalentemente,

$$U^{fin} = U^{fin}(<)\, U(\mathfrak{h})\, U^{fin}(>).$$

Por outro lado, como $L^e(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}_d$, então

$$L^e(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{n}^- \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus (\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}_d) \oplus (\mathfrak{n}^+ \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]).$$

Usando a Proposição 1.3.6, obtemos

$$\begin{aligned}
U^e &\cong U(\mathfrak{n}^- \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]) \otimes U(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}_d) \otimes U(\mathfrak{n}^+ \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]) \\
&\cong \langle x^-_{\alpha_i} \otimes t^n : n \in \mathbb{Z}\rangle \otimes U(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}_d) \otimes \langle x^+_{\alpha_i} \otimes t^n : n \in \mathbb{Z}\rangle \\
&\cong \langle x^-_{\alpha_i} \otimes t^n : n \in \mathbb{Z}\rangle \otimes U(0) \otimes U(\mathfrak{h} \otimes 1) \otimes U(\mathbb{C}_d) \otimes \langle x^+_{\alpha_i} \otimes t^n : n \in \mathbb{Z}\rangle \\
&\cong \langle x^-_{\alpha_i} \otimes t^n : n \in \mathbb{Z}\rangle \otimes U(0) \otimes U(\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}_d) \otimes \langle x^+_{\alpha_i} \otimes t^n : n \in \mathbb{Z}\rangle \\
&\cong U(<) \otimes U(0) \otimes U(\mathfrak{h}^e) \otimes U(>),
\end{aligned}$$

ou equivalentemente, $U^e = U(<)\,U(0)\,U(\mathfrak{h}^e)\,U(>)$.

Por um processo análogo ao feito para U^e, obtemos

$$U = U(<)\,U(0)\,U(\mathfrak{h})\,U(>). \tag{3.8}$$

Lema 3.2.1 *A aplicação $\phi : U \longrightarrow U$, dada por*

$$\phi(x^{\pm}_{\alpha_i,\,m}) = x^{\pm}_{\alpha_i,\,m\pm 1}, \text{ para todos } i \in I, m \in \mathbb{Z},$$

é um automorfismo de álgebras.

Demonstração:

Como $\{x^+_{\alpha_i}, x^-_{\alpha_i}, [x^+_{\alpha_i}, x^-_{\alpha_i}] = h_{\alpha_i}, \text{ com } i \in I\}$ é um conjunto *standard* de geradores para $\mathfrak{g}$ (segundo [25], p. 74), então

$$\{x^-_{\alpha_i} \otimes t^j, x^+_{\alpha_i} \otimes t^l, [x^+_{\alpha_i} \otimes t^j, x^-_{\alpha_i} \otimes t^l], \text{ com } j,\, l \in \mathbb{Z}, i \in I\}$$

é um conjunto de geradores para $L(\mathfrak{g})$. Logo, usando a notação dada em (3.4), $L(\mathfrak{g})$ tem como base $\{x^-_{\alpha_i,\,j},\, h_{\alpha_i,\,k},\, x^+_{\alpha_i,\,l}, \text{ com } j,\, k,\, l \in \mathbb{Z},\, i \in I\}$. Pelo Teorema PBW, podemos afirmar que U está formada por combinações lineares de monômios da forma

$$(x^-_{\alpha_1,j_1})^{a_1} \cdots (x^-_{\alpha_r,j_r})^{a_r} (h_{\alpha_1,k_1})^{b_1} \cdots (h_{\alpha_r,k_r})^{b_r} (x^+_{\alpha_1,l_1})^{c_1} \cdots (x^+_{\alpha_r,l_r})^{c_r},$$

com $a_i,\, b_i,\, c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, j_i,\, k_i,\, l_i \in \mathbb{Z},\, i \in I$. Assim, estendendo a definição de ϕ linearmente à todo U, podemos afirmar que a aplicação $\phi : U \longrightarrow U$ é um automorfismo de U. ■

As relações que os elementos da base de U^e satisfazem são expressas a partir de algumas identidades em U^e que são mais convenientemente declaradas usando séries. Assim, para qualquer $\beta \in R^+$, introduzimos as seguintes séries em uma indeterminada u.

$$\widetilde{X}^-_{\beta}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^-_{\beta,\,m}\, u^{m+1}, \quad X^-_{\beta}(u) = \sum_{m=1}^{\infty} x^-_{\beta,\,m}\, u^{m},$$

$$X^+_{\beta}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} x^+_{\beta,\,m}\, u^{m}, \quad X^-_{\beta,\,0}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} x^-_{\beta,\,m}\, u^{m+1},$$

$$\widetilde{H}_{\beta}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{\beta,\,m}\, u^{m+1}, \quad \Lambda^{\pm}_{\beta}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \Lambda_{\beta,\,\pm m}\, u^{m} = exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{\beta,\,\pm k}}{k} u^k\right).$$

Para simplificar as notações consideraremos

$$x^{\pm}_{\alpha_i} = x^{\pm}_i, \quad x^{\pm}_{\alpha_i,\,m} = x^{\pm}_{i,\,m}, \quad h_{\alpha_i} = h_i, \quad \Lambda^{\pm}_{\alpha_i} = \Lambda^{\pm}_i, \quad \Lambda^{\pm}_{\alpha_i,\,m} = \Lambda^{\pm}_{i,\,m},$$

com $1 \leq i \leq r,\ m \in \mathbb{Z}$.

Como $U(0) = \langle h_{\alpha,n} : n \in \mathbb{Z} - \{0\},\ \alpha \in R\rangle \subset U$, consideramos os elementos $\alpha_i \in \Delta$, (com $i \in I$) e tomamos $h_{\alpha_i,n}$, (com $n \in \mathbb{Z}$) para gerar o espaço $U(0)$. Logo, aproveitando as séries já definidas, temos

$$\Lambda^{\pm}_{\alpha_i}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \Lambda_{\alpha_i,\,\pm m}\, u^m = exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{\alpha_i,\,\pm k}}{k} u^k\right).$$

Nestas séries aparecem os termos $h_{\alpha_i,\pm k}$, com $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Portanto, como os elementos $\Lambda_{\alpha_i,m}$ (com $m \in \mathbb{Z}, i \in I$) dependen dos elementos $h_{\alpha_i,\pm k}$ (com $k \in \mathbb{Z}_{>0}$), podemos dizer que os elementos $\Lambda_{\alpha_i,m}$ geram $U(0)$. Isto justifica o seguinte lema.

Lema 3.2.2 *A subálgebra $U(0)$ de U é gerada pelos elementos $\Lambda_{i,\,m}$, para $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}$.*

Para qualquer série de potências f em u com coeficientes em uma álgebra A, seja f_m o coeficiente de u^m, com $m \in \mathbb{Z}$, e seja $f^{'}$ a derivada de f com respeito à u. Para $x \in U$, $r \in \mathbb{Z}^+$, define-se

$$x^{(r)} = \frac{x^r}{r!}.$$

Para uma álgebra qualquer A denotaremos por A_+ o seu ***ideal de aumento***[1]. O seguinte lema é uma reformulação de um resultado em [21, Lema 7.5].

Lema 3.2.3 *Sejam $s \geq r \geq 1$, $\beta \in R^+$*

(i) $\quad (x^+_{\beta,\,0})^{(r)}\,(x^-_{\beta,\,1})^{(s)} = (-1)^r (X^-_{\beta}(u)^{(s-r)}\,\Lambda^+_{\beta}(u))_s \ \ mod\ U\,U(>)_+,$

(ii) $\quad (x^+_{\beta,\,1})^{(r)}\,(x^-_{\beta,\,0})^{(s)} = (-1)^r (X^-_{\beta,\,0}(u)^{(s-r)}\,\Lambda^+_{\beta}(u))_s \ \ mod\ U\,U(>)_+.$

Demonstração:

Usamos a identidade de [21, Lema 7.5] na forma dada em [10, Lema 5.1] para sua versão quântica. Assim, para $\beta \in R^+$, temos

$$(x^+_{\beta,0})^{(r)}(x^-_{\beta,1})^{(s)} = \sum_{t=0}^{r}\sum_{m=0}^{t}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \left(u^{-s+t}X^-_{\beta}(u)^{(s-t)}\right)_{t-m} \Lambda_{\beta,k} \left(X^+_{\beta}(u)^{(r-t)}\right)_{m-k}$$

Na soma do lado direito da igualdade, obtemos um elemento de $UU(>)_+$ a menos que $t = r$, $m = k$ e, por isso, temos

$$\begin{aligned}
(x^+_{\beta,0})^{(r)}(x^-_{\beta,1})^{(s)} &= (-1)^r \sum_{m=0}^{r} \left(u^{-s+r}X^-_{\beta}(u)^{(s-r)}\right)_{r-m} \Lambda_{\beta,m} \ \text{ mod } U\,U(>)_+ \\
&= \sum_{r=0}^{m}(-1)^r \left(X^-_{\beta}(u)^{(s-r)}\right)_{s-m} \Lambda^+_{\beta}(u)_m \ \text{ mod } U\,U(>)_+ \\
&= (-1)^r \left(X^-_{\beta}(u)^{(s-r)}\Lambda^+_{\beta}(u)\right)_s \ \text{ mod } U\,U(>)_+.
\end{aligned}$$

[1]Para mais detalhe, ver [34].

A identidade em (ii) segue da identidade em (i) aplicando o automorfismo $\phi : U \longrightarrow U$
■

3.3 Módulos Integráveis

Introduzimos agora o conceito de módulo integrável sobre a álgebra de Lie $L^e(\mathfrak{g})$. Este conceito será essencial para conhecer a estrutura de nosso módulo de Weyl que será definido na próxima seção.

Definição 3.3.1 *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e V um $\mathfrak{g}$-módulo. Dizemos que $x \in \mathfrak{g}$* **age *localmente nilpotentemente*** *em V se, para qualquer $v \in V$, existe um inteiro positivo N tal que $x^N \cdot v = 0$.*

Definição 3.3.2 *Seja $\rho : U^e \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de U^e. Dizemos que V é um* ***U^e-módulo integrável*** *se*

(i) os geradores de Chevalley de U^e, denotados por $\{e_i^{\pm} : i = 0, 1, 2, \cdots, r\}$, agem localmente nilpotentemente sobre V.

(ii) $\mathfrak{h}^e$ age diagonalmente sobre V, isto é,

$$V = \bigoplus_{\lambda \in (\mathfrak{h}^e)^*} V_\lambda,$$

com $V_\lambda = \{v \in V : h \cdot v = \lambda(h)\, v,$ para todo $h \in \mathfrak{h}^e\}$.

O seguinte resultado forma parte da teoria clássica de álgebras de Lie, por essa razão evitamos fazer sua demonstração. Ele nos permite afirmar que os elementos $x^{\pm}_{\beta,m}$ agem localmente nilpotentemente sobre V, para todos $\beta \in R^+$, $m \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.3.3 [23, Lema 2.4.1] Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, V um $\mathfrak{g}$-módulo e M um conjunto enumerável.

(i) Sejam $\{y_i : i \in M\}$ um conjunto de geradores de $\mathfrak{g}$ e $x \in \mathfrak{g}$. Se para cada $i \in M$ existe um inteiro positivo N_i tal que $ad(x)^{N_i}(y_i) = 0$, então $ad(x)$ atua localmente nilpotentemente sobre V.

(ii) Sejam $\{v_i : i \in M\}$ um conjunto de geradores de V e $x \in \mathfrak{g}$. Se para cada $i \in M$ existe um inteiro positivo N_i tal que $x^{N_i} v_i = 0$ e $ad(x)$ é localmente nilpotentemente sobre $\mathfrak{g}$, então x é localmente nilpotentemente sobre V.

Defina-se agora

$$V_\lambda^+ = \{v \in V_\lambda : x^+_{\beta,m} \cdot v = 0, \text{ para todos } \beta \in R^+,\, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Se V é um módulo integrável, então $V_\lambda \neq 0$ (respectivamente $V_\lambda^+ \neq 0$) apenas se $\lambda \in P^e$ (respectivamente $\lambda \in P_+^e$). Além disso, se $v \in V_\lambda^+$, então

$$(x_{\beta,m}^-)^{\lambda(h_\beta)+1} \cdot v = 0, \tag{3.9}$$

$$V_\lambda \neq 0 \Rightarrow V_{w\lambda} \neq 0, \text{ para todo } w \in \mathcal{W}. \tag{3.10}$$

Se $\lambda \in \mathrm{P}^+$, então denotamos por $V^{fin}(\lambda)$ o U^{fin}-módulo irredutível de dimensão finita com peso máximo λ. Se $\lambda \in \mathrm{P}_+^e$, a restrição de λ à $\mathfrak{h}^*$, também denotada por λ, está em P^+. Se V é um U^e-módulo integrável e $v \in V_\lambda^+$, com $v \neq 0$, então restringindo a ação de U^e à U^{fin}, temos V um U^{fin}-módulo e, por meio desta ação

$$\begin{array}{ccc} U^{fin} \times V & \longrightarrow & V \\ (U^{fin}, v) & \longmapsto & (U^{fin} \cdot v) \quad \subset V, \end{array}$$

obtemos $U^{fin} \cdot v$ um U^{fin}-submódulo de V. Já que

$$V^{fin}(\lambda) = U(\mathfrak{n}^-) \cdot v_\lambda \quad \text{e} \quad U^{fin} \cdot v = U(\mathfrak{n}^-) \cdot v, \ (\text{pois } v \in V_\lambda^+)$$

podemos fazer a identificação

$$U(\mathfrak{n}^-) \cdot v \longrightarrow U(\mathfrak{n}^-) \cdot v_\lambda$$

definindo $v \longmapsto v_\lambda$. Portanto, $U^{fin} \cdot v$ é um U^{fin}-submódulo de V isomorfo à $V^{fin}(\lambda)$.

A seguinte proposição mostra as propriedades que satisfazem certos elementos de U^e quando estes atuam sobre um vetor $v \in V_\lambda^+$ de peso $\lambda \in \mathrm{P}_+^e$ em um módulo integrável V.

Proposição 3.3.4 *Sejam V um U^e-módulo integrável, $\lambda \in \mathrm{P}_+^e$, $v \in V_\lambda^+$, $v \neq 0$ e $\beta \in R^+$. Então*

(i) $\Lambda_{\beta,m} \cdot v = 0$, *para todo* $m > \lambda(h_\beta)$;

(ii) para todo $r \geq 1$, $s \geq \lambda(h_\beta)$, *temos*

$$\left(X_\beta^-(u)^r \, \Lambda_\beta^+(u)\right)_s \cdot v = 0, \quad \left(X_{\beta,0}^-(u)^r \, \Lambda_\beta^+(u)\right)_s \cdot v = 0;$$

(iii) para todo $s \in \mathbb{Z}$, *temos*

$$\left(\widetilde{X}_\beta^-(u) \, \Lambda_\beta^+(u)\right)_s \cdot v = 0, \quad \left(\widetilde{H}_\beta(u) \, \Lambda_\beta^+(u)\right)_s \cdot v = 0;$$

(iv) $\Lambda_{\beta,-m} \cdot v = 0$, *para todo* $m > \lambda(h_\beta)$;

(v) para $0 \leq m \leq \lambda(h_\beta)$, *temos*

$$\Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)} \, \Lambda_{\beta,-m} \cdot v = \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m} \cdot v.$$

Demonstração:

(i) No lema 3.2.3, (i) consideramos $r = s = m$ e $m > \lambda(h_\beta)$. Assim,

$$(x^+_{\beta,0})^m (x^-_{\beta,1})^m = (-1)^m \left(\Lambda^+_\beta(u)\right)_m .$$

Logo, aplicando ambos lados desta equação em $v \in V^+_\lambda$, obtemos

$$(x^+_{\beta,0})^m (x^-_{\beta,1})^m \cdot v = (-1)^m \left(\Lambda^+_\beta(u)\right)_m \cdot v$$

e, usando (3.9), a equação anterior resulta em

$$0 = \Lambda_{\beta,m} \cdot v, \text{ com } m > \lambda(h_\beta).$$

(ii) Consideremos $s > r$, com $s - r = r_1 \geq 1$ e $s > \lambda(h_\beta)$ em (i) do Lema 3.2.3. Então

$$(x^+_{\beta,0})^{s-r_1} (x^-_{\beta,1})^s = (-1)^{s-r_1} \left(X^-_\beta(u)^{r_1} \Lambda^+_\beta(u)\right)_s .$$

Logo, aplicando ambos lados desta equação em $v \in V^+_\lambda$, obtemos

$$0 = (-1)^{s-r_1} \left(X^-_\beta(u)^{r_1} \Lambda^+_\beta(u)\right)_s \cdot v \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \left(X^-_\beta(u)^{r_1} \Lambda^+_\beta(u)\right)_s \cdot v.$$

De forma análoga, para provar a segunda parte, usamos o item (ii) do Lema 3.2.3 e obtemos

$$\left(X^-_{\beta,0}(u)^{r_1} \Lambda^+_\beta(u)\right)_s \cdot v = 0.$$

(iii) Consideramos $r = \lambda(h_\beta)$ e $s = \lambda(h_\beta) + 1$ no item (i) do Lema 3.2.3. Logo,

$$(x^+_{\beta,0})^{\lambda(h_\beta)} (x^-_{\beta,1})^{\lambda(h_\beta)+1} = (-1)^{\lambda(h_\beta)} \left(X^-_\beta(u) \Lambda^+_\beta(u)\right)_{\lambda(h_\beta)+1} .$$

Logo, aplicando ambos lados desta equação em $v \in V^+_\lambda$, obtemos

$$0 = \left(X^-_\beta(u) \Lambda^+_\beta(u)\right)_{\lambda(h_\beta)+1} \cdot v \tag{3.11}$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} x^-_{\beta,m+1} \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m} \cdot v = 0. \tag{3.12}$$

Aplicando $h_{\beta,k}$ (com $k \in \mathbb{Z}$) a equação acima, obtemos

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} h_{\beta,k} \left(x^-_{\beta,m+1} \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m}\right) \cdot v = 0.$$

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} \left([h_{\beta,k}, x^-_{\beta,m+1}] + x^-_{\beta,m+1} h_{\beta,k}\right) \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m} \cdot v = 0.$$

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} \left(-2x^-_{\beta,m+k+1} + x^-_{\beta,m+1} h_{\beta,k}\right) \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m} \cdot v = 0.$$

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} -2x^-_{\beta,m+k+1} \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m} \cdot v + \sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} x^-_{\beta,m+1} h_{\beta,k} \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m} \cdot v = 0.$$

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} -2x^-_{\beta,m+k+1}\Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m}\cdot v + \sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} x^-_{\beta,m+1}\Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m}h_{\beta,k}\cdot v = 0.$$

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} -2x^-_{\beta,m+k+1}\Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m}\cdot v + \left(X^-_\beta(u)\Lambda^+_\beta(u)\right)_{\lambda(h_\beta)+1} h_{\beta,k}\cdot v = 0. \tag{3.13}$$

Por outro lado, consideremos $x^+_{\beta,k}$, com $k\in\mathbb{Z}$, e $v\in V^+_\lambda$. Logo, por definição, temos

$$\begin{aligned}
[\,x^+_{\beta,k}\,,\,h_{\beta,k}\,]\cdot v &= (x^+_{\beta,k})(h_{\beta,k})\cdot v - (h_{\beta,k})(x^+_{\beta,k})\cdot v\\
-2x^+_{\beta,2k}\cdot v &= (x^+_{\beta,k})(h_{\beta,k})\cdot v - 0\\
0 &= (x^+_{\beta,k})(h_{\beta,k})\cdot v\\
&\Rightarrow\ (h_{\beta,k})\cdot v\in V^+_\lambda.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação (3.13) se reduz a

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} x^-_{\beta,m+k+1}\,\Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m}\cdot v = 0. \tag{3.14}$$

Observemos que, para $k\in\mathbb{Z}$, temos

$$\left(\widetilde{X}^-_\beta(u)\,\Lambda^+_\beta(u)\right)_{k+1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^-_{\beta,k-m}\,\Lambda_{\beta,m}.$$

Logo, pelo fato de $v\in V^+_\lambda$, temos

$$\left(\widetilde{X}^-_\beta(u)\Lambda^+_\beta(u)\right)_{k+1}\cdot v = \sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} x^-_{\beta,k-m}\,\Lambda_{\beta,m}\cdot v.$$

ou equivalentemente,

$$\left(\widetilde{X}^-_\beta(u)\,\Lambda^+_\beta(u)\right)_{k+1}\cdot v = \sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} x^-_{\beta,m+k-\lambda(h_\beta)}\,\Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m}\cdot v.$$

Para o termo $\lambda(h_\beta)+k+2$, com $k\in\mathbb{Z}$, temos

$$\left(\widetilde{X}^-_\beta(u)\,\Lambda^+_\beta(u)\right)_{\lambda(h_\beta)+k+2}\cdot v = \sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} x^-_{\beta,m+k+1}\,\Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m}\cdot v = 0, \text{ usando (3.14).}$$

Portanto,

$$\left(\widetilde{X}^-_\beta(u)\,\Lambda^+_\beta(u)\right)_{s}\cdot v = 0,\ \text{ para todo } s\in\mathbb{Z}.$$

Provaremos agora a segunda identidade em (iii). Aplicando $x^+_{\beta,-s-1}$, com $s\in\mathbb{Z}$, em (3.12), de modo análogo como se aplicou $h_{\beta,k}$, com $k\in\mathbb{Z}$, temos

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} h_{\beta,m-s}\,\Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m}\cdot v\ +\ \sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} x^-_{\beta,m+1}\,x^+_{\beta,-s-1}\Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m}\cdot v = 0.$$

Usando um processo de indução sobre m e pelo fato de $v \in V_\lambda^+$, podemos afirmar

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} x^-_{\beta,m+1}\, x^+_{\beta,-s-1} \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m} \cdot v = 0.$$

Então

$$\sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} h_{\beta,m-s}\, \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m} \cdot v = 0. \tag{3.15}$$

Por outro lado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$\left(\widetilde{H}_\beta(u)\, \Lambda^+_\beta(u)\right)_{k+1} \cdot v = \sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} h_{\beta,k-m}\, \Lambda_{\beta,m} \cdot v,$$

ou equivalentemente

$$\left(\widetilde{H}_\beta(u)\, \Lambda^+_\beta(u)\right)_{k+1} \cdot v = \sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} h_{\beta,m+k-\lambda(h_\beta)}\, \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m} \cdot v$$

Tomemos agora o caso particular para $\lambda(h_\beta) - s + 1$, com $s \in \mathbb{Z}$.

$$\left(\widetilde{H}_\beta(u)\, \Lambda^+_\beta(u)\right)_{\lambda(h_\beta)-s+1} \cdot v = \sum_{m=0}^{\lambda(h_\beta)} h_{\beta,m-s}\, \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)-m} \cdot v = 0, \text{ (usando (3.15))}.$$

Portanto, para $s \in \mathbb{Z}$ e $v \in V_\lambda^+$, podemos afirmar agora

$$\left(\widetilde{H}_\beta(u)\, \Lambda^+_\beta(u)\right)_{s} \cdot v = 0.$$

(iv) (v) Definimos $\Lambda_\beta = \Lambda^+_\beta$ e $\widetilde{\Lambda}_\beta(u) = \Lambda^-_\beta(u^{-1})$. Logo

$$\widetilde{\Lambda}_\beta(u) = exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{\beta,\,-k}}{k} u^{-k}\right).$$

Note que, como operadores sobre V_λ^+, acontece

$$\widetilde{H}_\beta = \left(\lambda(h_\beta) - u\frac{\Lambda'_\beta}{\Lambda_\beta} + u\frac{\widetilde{\Lambda}'_\beta}{\widetilde{\Lambda}_\beta}\right).$$

Logo, pela segunda identidade do item (iii), temos

$$\left(\widetilde{H}_\beta(u)\, \Lambda^+_\beta(u)\right)_{s} \cdot v = 0, \text{ para todo } s \in \mathbb{Z},$$

ou seja, $\left(\widetilde{H}_\beta(u)\, \Lambda^+_\beta(u)\right)_{s}$ atua sobre $v \in V_\lambda^+$ como zero, para todo $s \in \mathbb{Z}$. Portanto, podemos escrever

$$\Lambda_\beta(u)\left(\lambda(h_\beta) - u\frac{\Lambda'_\beta}{\Lambda_\beta} + u\frac{\widetilde{\Lambda}'_\beta}{\widetilde{\Lambda}_\beta}\right) = \Lambda_\beta(u)\, \widetilde{H}_\beta = \widetilde{H}_\beta\, \Lambda_\beta(u) = 0,$$

como operadores sobre V_λ^+. Já que $\Lambda_\beta(u) = \Lambda_\beta^+(u) = exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{\beta,k}}{k} u^k\right)$, então $\Lambda_\beta(u)$ é um elemento invertível. Portanto, podemos reduzir a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\Lambda_\beta(u)\left(\lambda(h_\beta) - u\frac{\Lambda_\beta'}{\Lambda_\beta} + u\frac{\widetilde{\Lambda}_\beta'}{\widetilde{\Lambda}_\beta}\right) &= 0\\
\Lambda_\beta(u)\left(\frac{\lambda(h_\beta)\,\Lambda_\beta - u\Lambda_\beta'}{\Lambda_\beta} + u\frac{\widetilde{\Lambda}_\beta'}{\widetilde{\Lambda}_\beta}\right) &= 0\\
\frac{\lambda(h_\beta)\Lambda_\beta\widetilde{\Lambda}_\beta - u\Lambda_\beta'\widetilde{\Lambda}_\beta + u\Lambda_\beta\widetilde{\Lambda}_\beta'}{\widetilde{\Lambda}_\beta} &= 0\\
\lambda(h_\beta)\Lambda_\beta\widetilde{\Lambda}_\beta - u\left(\Lambda_\beta'\widetilde{\Lambda}_\beta - \Lambda_\beta\widetilde{\Lambda}_\beta'\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\lambda(h_\beta)\Lambda_\beta(u)\widetilde{\Lambda}_\beta(u) = u\left(\Lambda_\beta'\widetilde{\Lambda}_\beta - \Lambda_\beta\widetilde{\Lambda}_\beta'\right). \tag{3.16}$$

Note que ambos lados da equação (3.16) fazem sentido como séries de potência em u, já que $\Lambda_\beta(u)$, conhecido por (i), envolve apenas potências positivas finitas de u. Portanto, como séries com apenas um número finito de potências positivas (mas possivelmente infinitas potências negativas), temos

$$\left(\frac{\Lambda_\beta}{\widetilde{\Lambda}_\beta}\right)' = \lambda(h_\beta)\,u^{-1}\left(\frac{\Lambda_\beta}{\widetilde{\Lambda}_\beta}\right)$$

e também

$$\frac{\Lambda_\beta(u)}{\widetilde{\Lambda}_\beta(u)} = A_\beta\,u^{\lambda(h_\beta)},$$

com A_β um operador sobre V_λ^+ independente de u. Os coeficientes de $u^{\lambda(h_\beta)}$ nas equações mostram que $A_\beta = \Lambda_{\beta,\lambda(h_\beta)}$ e, assim, a equação (de operadores sobre V_λ^+)

$$\Lambda_{\beta\,,\,\lambda(h_\beta)}(u)\widetilde{\Lambda}_\beta(u) = u^{-\lambda(h_\beta)}\Lambda_\beta(u)$$

prova ao mesmo tempo os items (iv) e (v).

■

Fixemos agora uma ordem total $\leq$ sobre R^+. A seguinte proposição mostra o que acontece com a forma dos pesos associados ao módulo integrável V se ele é gerado por um vetor $v \in V_\lambda^+$ de peso $\lambda \in \mathrm{P}_+^e$. Além disso, através desta proposição obtemos uma base para V com certas características.

Proposição 3.3.5 *Sejam V um U^e-módulo integrável, $\lambda \in \mathrm{P}_+^e$, $v \in V_\lambda^+$, $v \neq 0$ tal que $V = U^e \cdot v$.*

(i) Se $V_\mu \neq 0$, então $\mu = \lambda - \eta + r\delta$, para algum $\eta \in \mathrm{Q}^+$, $r \in \mathbb{Z}$, tais que $V^{fin}(\lambda)_{\lambda-\eta} \neq 0$,

(ii) V é gerado pelos elementos

$$x^-_{\beta_1,r_1}x^-_{\beta_2,r_2}\cdots x^-_{\beta_s,r_s}\,U(0)\cdot v_\lambda,$$

com $0\leq r_t<\lambda(h_\beta),\ \ 0\leq t\leq s,\ \ \beta_1\leq\beta_2\leq\cdots\leq\beta_s\in R^+$.

Demonstração:

(i) Já que $v\in V^+_\lambda$, então $U(>)_+\cdot v=0$. Como $U^e=U(<)\,U(0)\,U(\mathfrak{h}^e)\,U(>)$ e $V=U^e\cdot v$, então

$$V=U(<)\,U(0)\cdot v.$$

Lembramos que, segundo o Teorema PBW, uma base para $U(0)$ é constituída por monômios da forma

$$(h_{\beta_1,n_1})^{b_1}(h_{\beta_2,n_2})^{b_2}\cdots(h_{\beta_s,n_s})^{b_s},$$

com $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s\in R$, $b_1,b_2,\cdots b_s\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ n_1,n_2,\cdots,n_s\in\mathbb{Z}-\{0\}$. Do mesmo modo, uma base para $U(<)$ é constituída por monômios da forma

$$(x^-_{\alpha_{i_1},s_1})^{p_1}(x^-_{\alpha_{i_2},s_2})^{p_2}\cdots(x^-_{\alpha_{i_j},s_j})^{p_j},$$

com $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_j}\in\Delta\subset R$, $p_z\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ s_z\in\mathbb{Z}$, para todo $z=1,2,\cdots,j$.
Pelo Lema 2.2.1 e por $x^-_{\alpha_{i_j},m_j}\in\mathfrak{g}_{-\alpha_{i_j}}\otimes t^{m_j}$ e $h_{\beta_s,n_s}\in\mathfrak{h}\otimes t^{n_s}$, com $n_s\neq 0$, então um peso associado ao módulo V tem a forma

$$\lambda+\sum_{i=1}^{s}b_in_i\delta+\sum_{t=1}^{j}p_t\left(-\alpha_{i_r}+s_r\delta\right).$$

Resumindo a somatoria anterior, resulta que um peso u associado ao módulo V é da forma

$$u=\lambda-\eta+q\delta,\ \text{para alguns}\ \eta\in\mathrm{Q}^+,q\in\mathbb{Z}.$$

Agora tomemos $\sigma\in\mathcal{W}$ tal que $\sigma(\lambda-\eta)\in\mathrm{P}^+$. Já que V é um módulo integrável e $V_u\neq 0$, pela equação (3.10), temos $V_{\sigma(u)}\neq 0$. Logo, $\sigma(u)$ também é um peso e assim $\sigma(u)=\lambda-\eta_1+q_1\delta$, para algums $\eta_1\in\mathrm{Q}^+,q_1\in\mathbb{Z}$. Além disso,

$$\sigma(u)=\sigma(\lambda-\eta)+\sigma(q\delta),\ \ \text{ou seja},\ \ \sigma(u)=\sigma(\lambda-\eta)+q\delta.$$

Assim, $\sigma(\lambda-\eta)=\lambda-\eta_1$ (pois $\sigma(\lambda-\eta)\in\mathrm{P}^+$) e $q=q_1$. Como $\sigma(\lambda-\eta)\in\mathrm{P}^+$, então $\sigma(\lambda-\eta)$ é um peso para o módulo $V^{fin}(\lambda)$. Logo

$$V^{fin}(\lambda)_{\sigma(\lambda-\eta)}\neq 0.$$

Como $\mathcal{W}$ deixa invariante os pesos de $V^{fin}(\lambda)$, então $V^{fin}(\lambda)_{\lambda-\eta}\neq 0$.

(ii) Note primeiro que se $v\in V^+_\lambda$ e $V=U^e\cdot v$, então $V=U(<)\,U(0)\cdot v$. Logo, pelo Teorema PBW, elementos da forma

$$x^-_{\beta_1,r_1}x^-_{\beta_2,r_2}\cdots x^-_{\beta_s,r_s}\,U(0)\cdot v,\ \text{com}\ 0\leq t\leq s,\ \beta_t\in R^+,\ r_t\in\mathbb{Z},$$

geram o espaço V. Provaremos, por indução sobre s, que tais elementos pertencem ao espaço gerado pelos elementos da forma

$$x^-_{\gamma_1,\,k_1} x^-_{\gamma_2,\,k_2} \cdots x^-_{\gamma_m,\,k_m}\, U(0)\cdot v,$$

com $0 \le k_t < \lambda(h_{\gamma_t}),\ \gamma_1 \le \gamma_2 \le \cdots \le \gamma_m,\ 0 \le t \le m.$

Para $s = 1$ e $r_1 \ge \lambda(h_{\beta_1})$, tomando em $\left(\widetilde{X}^-_\beta(u)\,\Lambda^+_\beta(u)\right)$ o termo $r_1 + 1$, obtemos

$$\left(\widetilde{X}^-_\beta(u)\,\Lambda^+_\beta(u)\right)_{r_1+1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^-_{\beta_1,\,r_1-m}\,\Lambda_{\beta_1,m}.$$

Aplicando em $v \in V^+_\lambda$ e usando o item (iii) da Proposição 3.3.4, temos

$$\left(\widetilde{X}^-_\beta(u)\,\Lambda^+_\beta(u)\right)_{r_1+1}\cdot v = \sum_{m=0}^{\lambda(h_{\beta_1})} x^-_{\beta_1,\,r_1-m}\,\Lambda_{\beta_1,m}\cdot v = 0. \tag{3.17}$$

Para valores de m maiores que $\lambda(h_{\beta_1})$ o termo $\Lambda_{\beta_1,\,m}\cdot v$ se anula e, assim, a igualdade (3.17) pode ser expressa por

$$\sum_{m=0}^{r_1} x^-_{\beta_1,\,r_1-m}\,\Lambda_{\beta_1,m}\cdot v = 0.$$

Por uma mudança de variável escrevemos a igualdade anterior como segue

$$\sum_{m=0}^{r_1} x^-_{\beta_1,\,m}\,\Lambda_{\beta_1,r_1-m}\cdot v = 0,\ \text{ com } v \in V^+_\lambda. \tag{3.18}$$

Por outro lado, como $U(0) = \langle\ h_{\beta,\,m} : \beta \in R,\ m \in \mathbb{Z} - \{0\}\ \rangle$, então

$$U(0)\cdot v = \langle\ h_{\beta,\,m}\cdot v : \beta \in R,\ m \in \mathbb{Z} - \{0\}\ \rangle.$$

Já que $h_{\beta,\,m}\cdot v \in V^+_\lambda$, então $U(0)\cdot v \subset V^+_\lambda$. Portanto, usando a equação (3.18) obtemos

$$\sum_{m=0}^{r_1} x^-_{\beta_1,\,m}\,\Lambda_{\beta_1,r_1-m} U(0)\cdot v = 0,\ \text{ com } U(0)\cdot v \subset V^+_\lambda.$$

Como $\Lambda_{\beta_1,0} = 1$, então $x^-_{\beta_1,\,r_1} U(0)\cdot v$ pertence ao espaço gerado pelos elementos da forma $x^-_{\beta_1,\,r}\,U(0)\cdot v$, com $0 \le r < r_1$ na qual se satisfaz a afirmação inicial para $s = 1$.

Se $r_1 < 0$, usaremos a igualdade

$$\sum_{r=0}^{\lambda(h_{\beta_1})} x^-_{\beta_1,\,r+r_1}\,\Lambda_{\beta_1,\,\lambda(h_{\beta_1})-r}\cdot v = 0.$$

a qual segue dos itens (i) e (ii) da Proposição 3.3.4. Já que, pelo item (v) da Proposição 3.3.4, $\Lambda_{\beta,\,\lambda(h_\beta)}$ é invertível, então $x^-_{\beta_1,\,r_1}\cdot v$ pertence ao espaço gerado pelos elementos da forma $x^-_{\beta_1,\,r}\cdot v$, com $0 \ge r > r_1$. Fazendo indução, uma vez mais, obtemos o resultado desejado.

Suponha agora o resultado válido para $s \geq 1$. Sejam $\beta_t \in R^+$ e $r_t \in \mathbb{Z}$ para $0 \leq t \leq s$ tal que $0 \leq r_t < \lambda(h_{\beta_t})$, para todo t. Logo,

$$\begin{aligned} x^-_{\beta_0,\,r_0}\, x^-_{\beta_1,\,r_1}\, x^-_{\beta_2,\,r_2} \cdots x^-_{\beta_s,\,r_s} \cdot v &= x^-_{\beta_1,\,r_1}\, x^-_{\beta_0,\,r_0}\, x^-_{\beta_2,\,r_2} \cdots x^-_{\beta_s,\,r_s} \cdot v \\ &+ [x^-_{\beta_0,\,r_0},\, x^-_{\beta_1,\,r_1}] x^-_{\beta_2,\,r_2} \cdots x^-_{\beta_s,\,r_s} \cdot v \end{aligned}$$

Já que $[x^-_{\beta_0,\,r_0},\, x^-_{\beta_1,\,r_1}] \in \mathfrak{g} \otimes t^{r_0+r_1}$, a hipótese de indução se aplica ao segundo termo no lado direito da igualdade. Como para o primeiro termo, note que a hipótese de indução aplicada à $x^-_{\beta_0,\,r_0}\, x^-_{\beta_2,\,r_2} \cdots x^-_{\beta_s,\,r_s} \cdot v$ implica que este elemento pertence ao espaço gerado pelos elementos obtidos aplicando monômios ordenados em $x^-_{\gamma,\,k}$ a v, para $\gamma \in R^+$ e $0 \leq k < \lambda(h_\gamma)$. Portanto, devemos mostrar que qualquer elemento da forma

$$x^-_{\beta_1,\,r_1}\, x^-_{\gamma_1,\,k_1}\, x^-_{\gamma_2,\,k_2} \cdots x^-_{\gamma_m,\,k_m}\, U(0) \cdot v,$$

com $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_m$ e $0 \leq k_t < \lambda(h_{\gamma_t})$ e $1 \leq t \leq m$, pode ser escrito na forma desejada. Se $\beta_1 \leq \gamma_1$, temos nada para provar. De outra forma, temos

$$[x^-_{\beta_1,\,r_1},\, x^-_{\gamma_1,\,k_1}] \in \mathfrak{g}_{\beta_1+\gamma_1} \otimes t^{r_1+k_1}$$

e $\lambda(h_{\beta_1+\gamma_1}) \leq r_1+k_1$. Finalmente, usando a hipótese de indução obtemos o resultado desejado.

■

3.4 Módulos de Weyl sobre álgebras de *loop*

Esta seção é a principal do capítulo. Aqui apresentamos o conceito de módulo de Weyl, sobre $L(\mathfrak{g})$, definido por Chari e Pressley em [11]. Lembrando as propriedades expostas dos módulos integráveis sobre U^e, na Proposição 3.3.4, construímos o módulo integrável $W(\lambda)$ sobre U^e, para cada $\lambda \in \mathrm{P}^e_+$. Depois, para qualquer r-upla $\pi = (\pi_1(u), \pi_2(u), \cdots, \pi_r(u))$ de polinômios $\pi_i(u)$ em uma indeterminada u com termo constante 1 e grau $\lambda(h_i)$, definimos o módulo de Weyl sobre U, que denotaremos por $W(\pi)$, como um quociente de dimensão finita de $W(\lambda)$. Por esta razão, mostramos que os módulos de Weyl são módulos integráveis maximais de peso máximo. Além disso, apresentamos algumas propriedades universais dos módulos $W(\lambda)$ e $W(\pi.)$

Iniciamos definindo para $\lambda \in \mathrm{P}^e_+$ o ideal à esquerda I_λ na subálgebra $U(<)\,U(0)\,U(\mathfrak{h})$ de U^e gerado pelos seguintes elementos:

$$h - \lambda(h) \cdot 1,\ \forall h \in \mathfrak{h}, \qquad \Lambda_{i,\,m},\ i \in I,\ |m| > \lambda(h_i),$$

$$\Lambda_{i,\,\lambda(h_i)}\, \Lambda_{i,\,-m} - \Lambda_{i,\,\lambda(h_i)-m},\ \forall i \in I,\ 1 \leq m \leq \lambda(h_i)$$

$$(\widetilde{X}^-_i(u)\, \Lambda^+_i(u))_m\, U(0),\ \forall i \in I,\ m \in \mathbb{Z}$$

$$(X^-_{i,\,0}(u)^r\, \Lambda^+_i(u))_m\, U(0),\ \forall i \in I,\ r \geq 1,\ |m| > \lambda(h_i).$$

Seja $\widetilde{I}_\lambda$ o ideal à esquerda em U gerado por I_λ e $x^+_{i,m}$, para todo $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\widetilde{I}_\lambda = U\, I_\lambda + \sum_{i=1,\, m\in\mathbb{Z}}^{r} U\; x^+_{i,m}.$$

Seja $\widetilde{I}^e_\lambda$ o ideal à esquerda em U^e gerado pelos elementos $\widetilde{I}_\lambda$ e $d - \lambda(d)\cdot 1$, isto é,

$$\widetilde{I}^e_\lambda = U^e\, \widetilde{I}_\lambda + U^e\; (d - \lambda(d)\cdot 1)\,.$$

Podemos fazer a seguinte identificação

$$\frac{U^e}{\widetilde{I}^e_\lambda} \cong W(\lambda) \cong \frac{U}{\widetilde{I}_\lambda}. \tag{3.19}$$

Já que U^e é um U^e-módulo à esquerda e $\widetilde{I}^e_\lambda$ um ideal à esquerda, então $W(\lambda)$[2] herda uma estrutura natural de U^e-módulo à esquerda. De modo análogo, $W(\lambda)$ é um U-módulo à esquerda pela multiplicação à esquerda. Consideremos agora o homomorfismo natural de U-módulos à esquerda

$$\begin{array}{rccc} \phi: & U & \longrightarrow & W(\lambda) \\ & 1 & \longrightarrow & \phi(1) = w_\lambda, \end{array}$$

com $r = r1$, para todo $r \in U$. Como todo elemento de $W(\lambda)$ é da forma $m + \widetilde{I}_\lambda$, com $m \in U$, então

$$m + \widetilde{I}_\lambda = \phi(m) = \phi(m\cdot 1) = m\,\phi(1) = m\, w_\lambda \quad \Rightarrow \quad m + \widetilde{I}_\lambda = m\, w_\lambda,\; m \in U.$$

Assim,

$$W(\lambda) = U \cdot w_\lambda.$$

De modo análogo, obtemos $W(\lambda) = U^e \cdot w_\lambda$. Além disso, $U(>)_+ \cdot w_\lambda = 0$.

Sabemos que U é um $U(0)-$módulo à direita (por meio da multiplicação usual em U) e já que $\widetilde{I}_\lambda\, U(0) \subset \widetilde{I}_\lambda$, então $\widetilde{I}_\lambda$ é um $U(0)-$submódulo à direita de U. Assim, podemos considerar agora $W(\lambda)$ como um $U(0)$-módulo à direita. Por outro lado, como $W(\lambda)$ é também um U^e-módulo, então podemos considerar seus espaços de peso que são da forma

$$\lambda - \eta + r\delta, \text{ com } \eta \in \mathrm{Q}^+,\, r \in \mathbb{Z},\, \delta \in (\mathfrak{h}^e)^*.$$

Logo, fixando $\eta \in \mathrm{Q}^+$, definimos

$$W(\lambda)[\eta] = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} W(\lambda)_{\lambda-\eta+r\delta},$$

o qual é um espaço de peso associado a $W(\lambda)$ como U^e-módulo. Já que $W(\lambda) = U\, w_\lambda$ é um $U(0)-$módulo à direita, então por meio da identificação feita em (3.19) podemos

[2]Pela forma como $W(\lambda)$ foi construido, ele satisfaz as condições de um módulo integrável expostas na proposição 3.3.4. Logo, podemos afirmar que ele é o módulo maximal sobre U^e que satisfaz estas condições.

dizer que $W(\lambda) = U^e\, w_\lambda$ é um $U(0)-$módulo à direita. Logo, $W(\lambda)[\eta]$ é um $U(0)$-módulo à direita para todo $\eta \in \mathrm{Q}^+$. Portanto,

$$W(\lambda) = \bigoplus_{\eta \in \mathrm{Q}^+} W(\lambda)[\eta]$$

é um $U(0)$-módulo à direita.

Seja $I_\lambda(0) = I_\lambda \cap U(0)$. Pelo Teorema PBW, temos

$$\frac{U(0)}{I_\lambda(0)} \cong \mathbb{C}[\Lambda_{i,m},\, \Lambda^{-1}_{i,\,\lambda(h_i)} : i \in I,\, 1 \leq m \leq \lambda(h_i)],$$

em particular,

$$W(\lambda)[0] \cong \mathbb{C}[\Lambda_{i,m},\, \Lambda^{-1}_{i,\,\lambda(h_i)} : i \in I,\, 1 \leq m \leq \lambda(h_i)]$$

como um $U(0)$-módulo à direita. Segue do item (ii) da Proposição 3.3.4 que, para todo $\eta \in \mathrm{Q}^+$, $W(\lambda)[\eta]$ é um $U(0)$-módulo finitamente gerado.

Apresentamos agora o módulo de Weyl $W(\pi)$. Este módulo resulta, basicamente, de tomar o produto tensorial entre um módulo $W(\lambda)$, para algum $\lambda \in (\mathfrak{h}^e)^*$ e o espaço unidimensional $\mathbb{C}_\pi$, que definimos a seguir.

Seja $\pi = (\pi_1(u), \pi_2(u), \cdots, \pi_r(u))$ uma r-upla de polinômios em uma indeterminada u com termo constante 1. Para $a \in \mathbb{C}$, definimos o elemento $\lambda_{\pi,\,a} \in (\mathfrak{h}^e)^*$ estabelecendo $\lambda_{\pi,\,a}(h_i) = \partial(\pi_i)$ (isto é, o grau do polinômio π_i), com $i \in I$ e $\lambda_{\pi,\,a}(d) = a$.

Por outro lado, seja

$$\pi_i^+(u) = \pi_i(u)\ , \quad \pi_i^-(u) = \frac{u^{\partial(\pi_i)}\pi_i(u^{-1})}{u^{\partial(\pi_i)}\pi_i(u^{-1})\big|_{u=0}}, \text{ para todo } i \in I. \tag{3.20}$$

Isto é, se consideramos nosso polinômio $\pi_i(u)$ de grau n_i, representado por

$$\pi_i(u) = a_{in_i}u^{n_i} + a_{in_i-1}u^{n_i-1} + \cdots + a_{i1}u + 1, \text{ com } a_{in_i} \neq 0,\ a_{in_j} \in \mathbb{C},\ \text{ para todo } j \in I,$$

então

$$\begin{aligned}
\pi_i^+(u) &= a_{in_i}u^{n_i} + a_{in_i-1}u^{n_i-1} + \cdots + a_{i2}u^2 + a_{i1}u^1 + 1,\\
\pi_i^-(u) &= \frac{1}{a_{in_i}}u^{n_i} + \frac{a_{i1}}{a_{in_i}}u^{n_i-1} + \frac{a_{i2}}{a_{in_i}}u^{n_i-2} + \cdots + \frac{a_{in_i-1}}{a_{in_i}}u^1 + 1.
\end{aligned}$$

para todos $i \in I,\ n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Seja $I_\pi(0)$ o ideal maximal em $U(0)$ gerado por elementos da forma

$$(\,\Lambda_i^\pm(u) - \pi_i^\pm(u)\,)_s, \text{ para todos } i \in I,\ s \geq 0.$$

Definimos $\mathbb{C}_\pi := \dfrac{U(0)}{I_\pi(0)}$ como sendo o $U(0)$-módulo de dimensão 1 com gerador p. Logo,

$$(\,\Lambda_i^\pm(u) - \pi_i^\pm(u)\,)_s \cdot p = 0,\ \text{ para todo } s \geq 0.$$

Por outro lado, já que $W(\lambda)$ é um U-módulo gerado por w_λ, temos o caso análogo para $W(\lambda_{\pi,a})$, com $\lambda_{\pi,a} \in (\mathfrak{h}^e)^*$ e vetor gerador $w_{\lambda_{\pi,\,a}}$. Portanto, definimos o módulo de Weyl como o U-módulo à esquerda

$$W(\pi) := W(\lambda_{\pi,a}) \otimes_{U(0)} \mathbb{C}_\pi,$$

com $x \in U$ atuando como $x \otimes 1$, isto é,

$$\begin{array}{ccccc} U \times W(\pi) & \longrightarrow & W(\pi) & & \\ (x,\, b \otimes np) & \longmapsto & x \cdot (b \otimes np) & = x \cdot b \otimes 1 \cdot np, \end{array}$$

com $b \in W(\lambda_{\pi,\,a}),\ n \in \mathbb{C}$.

Consideremos o seguinte esquema que define w_π como imagem de 1 em $W(\pi)$ através da composição de f e g, homomorfismos de U-módulos à esquerda

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{f} & W(\lambda_{\pi,\,a}) & \xrightarrow{g} & W(\pi) \\ 1 & \longmapsto & 1 \cdot w_{\lambda_{\pi,\,a}} & \longmapsto & w_\pi := w_{\lambda_{\pi,\,a}} \otimes p. \end{array}$$

Notemos que $(\,\Lambda_i^{\pm}(u) - \pi_i^{\pm}(u)\,)_s \cdot w_\pi = w_{\lambda_{\pi,\,a}} \otimes (\,\Lambda_i^{\pm}(u) - \pi_i^{\pm}(u)\,)_s \cdot p = 0$, para todo $s \geq 0$. Logo, w_π é a imagem de $w_{\lambda_{\pi,\,a}}$ com a propriedade

$$\Lambda_i^{\pm}(u) \cdot w_\pi = \pi_i^{\pm}(u)\, w_\pi, \text{ para todo } i \in I.$$

Além disso, a correspondência $w_{\lambda_{\pi,\,a}} \longmapsto w_\pi$ se estende à um homomorfismo de U-módulos sobrejetor entre $W(\lambda_{\pi,\,a})$ e $W(\pi)$. Isto justifica a afirmação dada ao início desta seção de que o módulo de Weyl $W(\pi)$ sobre $L(\mathfrak{g})$ é um quociente de $W(\lambda_{\pi,\,a})$.

Lembremos que a álgebra de Lie afim denotada por $\widehat{\mathfrak{g}}$ é uma extensão da álgebra $L^e(\mathfrak{g})$ por meio de uma subálgebra central $\mathbb{C}_c$ de dimensão 1. Assim, qualquer representação de $L^e(\mathfrak{g})$ é uma representação de $\widehat{\mathfrak{g}}$ que faz c agir como zero. Definindo $h_0 = [e_0^+,\, e_0^-]$, obtemos

$$\begin{aligned} h_0 = [e_0^+,\, e_0^-] &= [x_\theta^-,\, x_\theta^+] \otimes t^{1-1} + 1\delta_{((1-1),0)}\, k(x_\theta^-,\, x_\theta^+)c, \\ h_0 = [e_0^+,\, e_0^-] &= -h_\theta \otimes 1 + c, \\ h_0 &= -h_\theta \otimes 1 + c, \\ \Rightarrow\ h_0 &= -h_\theta + c. \end{aligned}$$

O seguinte resultado está provado em [6, Teorema 3.2] e é necessário para provar depois, de uma forma mais direta, que o módulo $W(\lambda)$ é um módulo integrável.

Lema 3.4.1 *Seja V um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo gerado pelo vetor $v \in V_\lambda^+$, com $\lambda \in \mathrm{P}_+^e$, tal que*

$$(e_i^+)^{-\lambda(h_i)+1} \cdot v = 0 \quad se \quad \lambda(h_i) \leq 0,$$

$$(e_i^-)^{\lambda(h_i)+1} \cdot v = 0 \quad se \quad \lambda(h_i) \geq 0,$$

para todo $i \in I$. Então V é um $\widehat{\mathfrak{g}}$-módulo integrável.

Teorema 3.4.2 *(i) Seja $\lambda \in \mathrm{P}_+^e$. Então $W(\lambda)$ é um U^e-módulo integrável.*

(*ii*) *Seja π uma n-upla de polinômios com termo constante 1. Então $W(\pi)$ é um U-módulo de dimensão finita.*

Demonstração:

(*i*) Pelo Lema 3.4.1 é suficiente provar que

$$(e_i^+) \cdot w_\lambda = 0, \quad (e_i^-)^{\lambda(h_i)+1} \cdot w_\lambda = 0 \ \ (i \in I),$$

$$(e_0^-) \cdot w_\lambda = 0, \quad (e_0^+)^{\lambda(h_\theta)+1} \cdot w_\lambda = 0.$$

Suponha $i \in I$. Então $e_i^\pm = x_{i,0}^\pm$ e, da definição de $W(\lambda)$, segue $e_i^+ \cdot w_\lambda = 0$. Pelo item (*ii*) do Lema 3.2.3, temos

$$(x_{i,0}^-)^{\lambda(h_i)+1} \cdot w_\lambda = (X_{i,0}^-(u)^{\lambda(h_i)+1}\Lambda_i^+(u))_{\lambda(h_i)+1} \cdot w_\lambda = 0.$$

Em particular, já que $(x_{i,0}^-)^{\lambda(h_i)+1} \cdot w_\lambda = 0$, podemos afirmar que $U^{fin} \cdot w_\pi$ é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita.

Voltando ao caso $i = 0$, note que $e_0^- = x_{\theta,-1}^+$ é uma combinação linear de produtos da forma $x_{i,m}^+$, com $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}$. Logo, $e_0^- \cdot w_\pi = 0$. Para qualquer $m \geq 0$, definimos $w_m = (e_0^+)^{m+1} \cdot w_\lambda$. Suponha $w_m \neq 0$. Já que $[e_0^-, x_{\beta,0}^-] = 0$, segue que

$$U^{fin}(<) \cdot w_m = U^{fin}(<) \cdot \big((e_0^+)^{m+1} \cdot w_\lambda\big) = (e_0^+)^{m+1}\, U^{fin}(<) \cdot w_\lambda.$$

Sendo $U^{fin} \cdot w_\pi$ um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita, temos que $U^{fin}(<) \cdot w_m$ é de dimensão finita. Como $W(\lambda)[\eta] = 0$, exceto para um número finito de $\eta \in \mathrm{Q}^+$, segue que

$$W_m = U^{fin} \cdot w_m = U^{fin}(>)\, U(\mathfrak{h})\, U^{fin}(<) \cdot w_m$$

é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Como $w_m = (e_0^+)^{m+1} \cdot w_\lambda$, então ele pertence ao espaço de peso com peso dado por $\lambda + (\delta - \theta)(m+1)$. Logo,

$$(W_m)_{\lambda+(\delta-\theta)(m+1)} \neq 0.$$

Assim, para todo $\sigma \in \mathcal{W}$ (grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$), temos

$$(W_m)_{\sigma(\lambda-(m+1)\theta+(m+1)\delta))} \neq 0.$$

Agora, escolhamos σ tal que $\sigma(\theta) = -\alpha_i$, para algum $i \in I$. Então, pelo modo como $\mathcal{W}$ age em δ, temos

$$W(\lambda)_{\sigma(\lambda)+(m+1)\alpha_i+(m+1)\delta} \neq 0.$$

Mas isto acontece apenas para um número finito de valores de m. Isto mostra que $w_m = 0$, exceto para um número finito de valores de m. A subálgebra de Lie gerada por $e_0^\pm$, h_0 é isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$ e dessa forma fica provado que o correspondente $\mathfrak{sl}_2$-submódulo gerado por w_λ é de dimensão finita. Segue da teoria clássica, que $(e_0^+)^{\lambda(h_\theta)+1} \cdot w_\lambda = 0$.

(ii) É suficiente notar, usando o item (ii) da Proposição 3.3.5, que $W(\pi)$ é gerado pelos elementos da forma

$$x^-_{\beta_1,r_1} x^-_{\beta_2,r_2} \cdots x^-_{\beta_s,r_s} \otimes 1,$$

para $s \geq 0$, $0 \leq r_t < \lambda(h_{\beta_t})$, $\beta_t \in R^+$. Como R^+ é um conjunto finito, podemos dizer que $W(\pi)$ é gerado por um conjunto finito de elementos na forma dada acima. Portanto, $W(\pi)$ é um U-módulo de dimensão finita.

■

Os módulos $W(\lambda)$ e $W(\pi)$ possuem certas propriedades universais de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 3.4.3

(i) *Seja V um U^e-módulo integrável arbitrário gerado por um elemento não nulo $v \in V_\lambda^+$. Então V é um quociente de $W(\lambda)$.*

(ii) *Seja V um U-módulo quociente de dimensão finita de $W(\lambda)$ e assuma $dim\,(V_\lambda) = 1$. Então V é um quociente de $W(\pi)$, para alguma escolha de π.*

(iii) *Seja V um U-módulo de dimensão finita gerado pelo vetor $v \in V_\lambda^+$ tal que $dim\,(V_\lambda) = 1$. Então V é um quociente de $W(\pi)$, para algum π.*

Demonstração:

(i) Como V é um U^e-módulo integrável gerado por $v \in V_\lambda^+$, então v satisfaz as relações dadas na Proposição 3.3.4. Por outro lado, $W(\lambda)$ é um U^e-módulo integrável maximal satisfazendo também as relações da Proposição 3.3.4. Portanto, V é um quociente de $W(\lambda)$.

(ii) Sejam V um U-módulo quociente de $W(\lambda)$, com dimensão finita, e φ o homomorfismo de U-módulos à esquerda tal que

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & W(\lambda) & \longrightarrow & V \\ & w_\lambda & \longmapsto & \varphi(w_\lambda) \quad := v \end{array}$$

Como $W(\lambda)$ é um módulo integrável, então V também é um módulo integrável. Já que $\dim\,(V_\lambda) = 1$, temos

$$\Lambda_{\beta,\,m} \cdot v = \pi_{\beta,\,m}\, v, \quad \text{para alguns escalares } \pi_{\beta,\,m} \in \mathbb{C}, \text{ com } \beta \in R^+,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Pelo item (i) e (iv) da Proposição 3.3.4, temos

$$\pi_{\beta,m} = 0, \quad \text{para } |m| > \lambda(h_\beta).$$

Para $i \in I$, definimos

$$\pi_i(u) = \pi_{\alpha_i,\lambda(h_i)}\, u^{\lambda(h_i)} + \pi_{\alpha_i,\lambda(h_i)-1}\, u^{\lambda(h_i)-1} + \cdots + \pi_{\alpha_i,\,0}\, u^0.$$

Já que $\Lambda_{i,0} = 1$, temos $\pi_{\alpha_i,0} = 1$, para todo $i \in I$. Logo, temos uma r-upla de polinômios representada por $\pi = (\pi_1(u), \cdots, \pi_r(u))$, tais que $\pi_i(u)$ é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$, na indeterminada u, termo constante 1 e de grau $\lambda(h_i)$, para todo $i \in I$. Definimos também

$$\pi_i{}^+(u) = \pi_i(u),$$

$$\pi_i{}^-(u) = \frac{\pi_{\alpha_i,0}}{\pi_{\alpha_i,\lambda(h_i)}} u^{\lambda(h_i)} + \frac{\pi_{\alpha_i,1}}{\pi_{\alpha_i,\lambda(h_i)}} u^{\lambda(h_i)-1} + \cdots + \frac{\pi_{\alpha_i,\lambda(h_i)}}{\pi_{\alpha_i,\lambda(h_i)}} u^0.$$

Usando o item (i) da Proposição 3.3.4 obtemos

$$\Lambda_i^+(u) \cdot v = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \Lambda_{i,m}\, u^m \right) \cdot v = \sum_{m=0}^{\lambda(h_i)} (\Lambda_{i,m} \cdot v)\, u^m = \sum_{m=0}^{\lambda(h_i)} (\pi_{\alpha_i,m} \cdot v)\, u^m = \pi_i{}^+(u)\, v,$$

para todo $i \in I$. Por um processo similar ao feito para $\Lambda_i^+(u)$ e usando também o item (i) da Proposição 3.3.4, obtemos

$$\Lambda_i^-(u) \cdot v = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \Lambda_{i,-m}\, u^m \right) \cdot v = \sum_{m=0}^{\lambda(h_i)} (\Lambda_{i,-m} \cdot v)\, u^m. \tag{3.21}$$

Logo, usando o item (v) da Proposição 3.3.4, temos

$$\Lambda_{i,\lambda(h_i)} \cdot \Lambda_{i,-m} \cdot v = \pi_{i,\lambda(h_i)-m}\, v, \quad \text{com} \;\; 0 \leq m \leq \lambda(h_i),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Lambda_{i,\lambda(h_i)} \cdot \Lambda_{i,-m} \cdot v}{\pi_{i,\lambda(h_i)-m}} = v.$$

Usando a equação anterior, além de $\Lambda_{i,\lambda(h_i)} \cdot v = \pi_{i,\lambda(h_i)}\, v$, obtemos

$$\Lambda_{i,-m} \cdot v = \frac{\pi_{i,\lambda(h_i)-m}}{\pi_{i,\lambda(h_i)}}\, v, \quad \text{com} \;\; 0 \leq m \leq \lambda(h_i). \tag{3.22}$$

Substituindo (3.22) em (3.21), obtemos

$$\Lambda_i^-(u) \cdot v = \sum_{m=0}^{\lambda(h_i)} \left(\frac{\pi_{i,\lambda(h_i)-m}}{\pi_{i,\lambda(h_i)}}\, v \right) u^m = \pi_i{}^-(u)\, v, \text{ para todo } i \in I.$$

Portanto, pelo fato de V ser um quociente de $W(\lambda)$, temos que V é um quociente de $W(\pi)$, com $\pi = (\pi_1(u), \cdots, \pi_r(u))$ uma r-upla de polinômios.

(iii) Esta demonstração é análoga a que fizemos no item (ii).

■

3.5 Um teorema de produto tensorial para $W(\pi)$

Aqui estabelecemos uma condição para que o produto tensorial de módulos de Weyl seja outro módulo de Weyl em relação à suas respectivas r-uplas de polinômios. Iniciamos com o teorema principal desta seção, cuja demonstração decorre dos vários resultados provados a seguir.

Teorema 3.5.1 *Sejam $\pi = (\pi_1(u), \pi_2(u), \ldots, \pi_r(u))$ e $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\pi}_1(u), \widetilde{\pi}_2(u), \cdots, \widetilde{\pi}_r(u))$ duas r-uplas de polinômios com termo constante 1 tais que π_i e $\widetilde{\pi}_j$ sejam coprimos, para todos $1 \leq i,\, j \leq r$. Então*

$$W(\pi\widetilde{\pi}) \cong W(\pi) \otimes W(\widetilde{\pi})$$

como U-módulos, com

$$\pi\,\tilde{\pi} = (\pi_1\widetilde{\pi}_1, \pi_2\widetilde{\pi}_2, \cdots, \pi_r\widetilde{\pi}_r).$$

Para $\beta \in R^+$ e π como no teorema 3.5.1, definimos $\pi_\beta(u)$ como sendo o polinômio que satisfaz a relação

$$\Lambda_\beta^+(u) \cdot w_\pi = \pi_\beta(u) w_\pi. \tag{3.23}$$

Lema 3.5.2 *Seja $\beta = \sum_{i=1}^{r} r_i\,\alpha_i \in R^+$. Então*

$$\pi_\beta(u) = \prod_{i=1}^{r} \pi_i^{r_i d_i/d_\beta}(u).$$

Demonstração:

Seja $\beta = \sum_{i=1}^{r} r_i\,\alpha_i \in R^+$. Pela fórmula para h_β dada em (3.3), temos

$$h_\beta = \sum_{i=1}^{r} b_i\,h_i, \text{ com } b_i = \frac{r_i d_i}{d_\beta}, \text{ para todo } i \in I.$$

Por outro lado, substituindo h_β na definição de $\Lambda_\beta^+(u)$, temos

$$\begin{aligned}
\Lambda_\beta^+(u) &= \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{i=1}^{r} b_i\,h_i) \otimes t^k}{k}\,u^k\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_1 h_1 \otimes t^k}{k}\,u^k - \cdots - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_r h_r \otimes t^k}{k}\,u^k\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_1 \otimes t^k}{k}\,u^k\right)^{b_1} \cdots \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_r \otimes t^k}{k}\,u^k\right)^{b_r} \\
&= \left(\Lambda_1^+(u)\right)^{b_1} \cdot \left(\Lambda_2^+(u)\right)^{b_2} \cdot \cdots \cdot \left(\Lambda_r^+(u)\right)^{b_r}.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\Lambda_i^+(u) \cdot w_\pi = \pi_i(u)\,w_\pi$, para todo $i \in I$. Logo, aplicando $\Lambda_i^+(u)$, temos

$$\left(\Lambda_i^+(u)\right)^2 \cdot w_\pi = \Lambda_i^+(u) \cdot (\pi_i(u)\,w_\pi) = \pi_i(u)\,\left(\Lambda_i^+(u) \cdot w_\pi\right) = (\pi_i(u))^2\,w_\pi.$$

Por um processo indutivo, obtemos

$$\left(\Lambda_i^+(u)\right)^{b_i} \cdot w_\pi = (\pi_i(u))^{b_i}\, w_\pi, \text{ para todo } i \in I.$$

Logo, para $\beta = \sum_{i=1}^{r} r_i\alpha_i \in R^+ \in R^+$, temos

$$\begin{aligned}
\Lambda_\beta^+(u) \cdot w_\pi &= \left(\Lambda_1^+(u)\right)^{b_1} \cdot \left(\Lambda_2^+(u)\right)^{b_2} \cdot \cdots \cdot \left(\Lambda_r^+(u)\right)^{b_r} \cdot w_\pi \\
&= \left(\Lambda_1^+(u)\right)^{b_1} \cdot \left(\Lambda_2^+(u)\right)^{b_2} \cdot \cdots \cdot \left(\Lambda_{r-1}^+(u)\right)^{b_r-1} \cdot (\pi_r(u))^{b_r}\, w_\pi \\
&= \left(\Lambda_1^+(u)\right)^{b_1} \cdot \left(\Lambda_2^+(u)\right)^{b_2} \cdot \cdots \cdot \left(\Lambda_{r-2}^+(u)\right)^{b_r-2} \cdot (\pi_r(u))^{b_r}\, (\pi_{r-1}(u))^{b_r-1}\, w_\pi \\
&= (\pi_1(u))^{b_1}\, (\pi_2(u))^{b_2} \cdots (\pi_r(u))^{b_r}\, w_\pi.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi_\beta(u) = (\pi_1(u))^{b_1}\, (\pi_2(u))^{b_2} \cdots (\pi_r(u))^{b_r}\, w_\pi, \text{ com } b_i = \frac{r_i d_i}{d_\beta}.$$

■

A partir de agora assumiremos que, dado $\beta \in R^+$ e uma r-upla de polinômios π, temos definido um polinômio $\pi_\beta(u)$ pela fórmula dada em (3.23). Os polinômios $\pi_\beta^\pm(u)$ são definidos como em (3.20).

A seguir, $\partial(\pi_i)$ denota o grau do polinômio π_i.

Definição 3.5.3 *Seja $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r\}$ uma r-upla de polinômios em u com termo constante 1. Definimos $M(\pi)$ como sendo o U-módulo à esquerda obtido tomando o quociente de U pelo ideal à esquerda I_M gerado pelos seguintes elementos*

$$\begin{aligned}
&x_{i,k}^+\,, \quad h_{i,0} - \partial(\pi_i) \quad (i \in I, k \in Z), \\
&\left(\Lambda_i^\pm(u) - \pi_i^\pm(u)\right)_s \quad (i \in I, s \geq 0), \\
&\left(\pi_\beta(u)\widetilde{X}_\beta^-(u)\right)_s \quad (\beta \in R^+, s \in Z).
\end{aligned}$$

Considere o homomorfismo de U-módulos à esquerda $\phi : U \longrightarrow M(\pi)$. Seja $\phi(1) = m_\pi$. Como todo elemento em U é da forma $u \cdot 1$, com $u \in U$, então $M(\pi) = U \cdot m_\pi$. Dado λ_π[3], definimos $\lambda_\pi(h_i) = \partial(\pi_i)$, para todo $i \in I$.

Para todo $\beta \in R^+$ e todo $s \in \mathbb{Z}$, usando a equação (3.23), obtemos

$$\left(\Lambda_\beta^\pm(u) - \pi_\beta^\pm(u)\right)_s \cdot m_\pi = 0.$$

Além disso, pelo item (iii) da Proposição 3.3.4, pela definição de $M(\pi)$ e assumindo

[3]Note que λ_π está associado com o módulo de Weyl $W(\pi) = W(\lambda_\pi) \otimes C_\pi$.

$\pi_\beta(u) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\lambda_\pi(h_\beta)} n_m\, u^m$, com $n_m \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} 0 = \Big(\widetilde{H}_\beta(u)\,\Lambda_\beta^+(u)\Big)_s \cdot m_\pi &= \sum_{m=0}^{\lambda_\pi(h_\beta)} h_{\beta,\,s-1-m}\,\Lambda_{\beta,\,m}\cdot m_\pi \\ &= \sum_{m=0}^{\lambda_\pi(h_\beta)} h_{\beta,\,s-1-m}\;(n_m\, m_\pi) \\ &= \sum_{m=0}^{\lambda_\pi(h_\beta)} n_m\, h_{\beta,\,s-(1+m)}\cdot m_\pi \\ &= \Big(\pi_\beta(u)\,\widetilde{H}_\beta(u)\Big)_s \cdot m_\pi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Big(\pi_\beta(u)\,\widetilde{H}_\beta(u)\Big)_s \cdot m_\pi = 0, \text{ para todos } \beta \in R^+,\ s \in \mathbb{Z}.$$

Pela definição de $M(\pi)$, o seguinte lema fala que $M(\pi)$ se decompõe como soma direta de seus espaços de pesos e cada espaço de peso é de dimensão finita.

Lema 3.5.4 *Temos*

$$M(\pi) = \bigoplus_{\eta\in Q^+} M(\pi)_{\lambda_\pi-\eta},$$

e $\dim M(\pi)_{\lambda_\pi-\eta} < \infty$. *Além disso, para todo* $\beta \in R^+$, $s \in \mathbb{Z}$, *temos*

$$\Big(\pi_{\theta_s}(u)\widetilde{X}_{\overline{\beta}}^-(u)\Big)_s \cdot M(\pi) = 0.$$

Demonstração:

Como $\lambda_\pi(h_i) = \partial(\pi_i)$, para todo $i \in I$, temos $\lambda_\pi(h_\beta) = \partial(\pi_\beta)$, com $\beta \in R^+$. Logo, o conjunto

$$\{x_{\beta,r}^- : \beta \in R^+,\ 0 \le r < \lambda_\pi(h_\beta)\} \cup \{x_\beta^- \otimes t^m \pi_\beta(t) : \beta \in R^+,\ m \in \mathbb{Z}\}$$

é uma base de

$$\left(\bigoplus_{\beta\in R^+} \mathbb{C}x_\beta^-\right) \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] = \mathfrak{n}^-[t].$$

Pelo Teorema PBW, podemos escrever

$$U(<) = U_\pi\, U^\pi,$$

com U_π (respectivamente U^π) consistindo de monômios ordenados do primeiro (respectivamente segundo) conjunto. A relação

$$\Big(\pi_\beta(u)\tilde{X}_{\overline{\beta}}^-(u)\Big)_s \cdot m_\pi = 0,$$

para todo $s \in \mathbb{Z}$, implica $(U^\pi)_+ \cdot m_\pi = 0$. Usando novamente o Teorema PBW temos

$$M(\pi) \cong U_\pi$$

como espaços vetoriais. Além disso, este isomorfismo leva $M(\pi)_{\lambda_\pi - \eta}$ a

$$U_\pi(\eta) = \{x \in U_\pi : [h, x] = \eta(h)x, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Já que este espaço é de dimensão finita, a primeira afirmação do lema fica provada.

Para a segunda afirmação, mostraremos, por indução sobre $\operatorname{ht}\eta$, a igualdade

$$\left(\pi_{\theta_s}(u)\tilde{X}^-_\beta(u)\right)_s \cdot M(\pi)_{\lambda_\pi - \eta} = 0, \qquad \text{para todos } \beta \in R^+, s \in Z.$$

Lembremos que θ_s está representando a raiz curta máxima[4] de $\mathfrak{g}$. Para $\operatorname{ht}\eta = 0$, temos $\eta = 0$. Logo, o resultado é imediato pela definição de $M(\pi)$ e pela última parte do Lema 3.5.2. Sem perda de generalidade, tomamos como hipótese de indução

$$\left(\pi_{\theta_s}(u)\tilde{X}^-_\beta(u)\right)_s \cdot M(\pi)_{\lambda_\pi - \eta} = 0, \text{ sempre que } \operatorname{ht}\eta < \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i, \text{ com } \beta_i \in R^+,$$

para todos $\beta \in R^+, s \in \mathbb{Z}$. Pela definição de $M(\pi)$, será suficiente continuar com o processo indutivo considerando o elemento geral

$$x^-_{\beta_1,r_1} x^-_{\beta_2,r_2} \cdots x^-_{\beta_k,r_k} \cdot m_\pi \in M(\pi)_{\lambda_\pi - \eta}, \text{ com } \eta = \sum_i^k \beta_i \in \mathrm{Q}^+.$$

Assumindo $\pi_{\theta_s}(u) = \sum_{i=0}^{w} \theta_i\, u^i$, com $\theta_i \in \mathbb{C}$, $\theta_0 = 1$, temos

$$\left(\pi_{\theta_s}(u)\tilde{X}^-_\beta(u)\right)_s = \sum_{i=0}^{w} \theta_i\, x^-_{\beta,\, s-(1+i)}, \text{ para todo } s \in \mathbb{Z}.$$

Então

$$\begin{aligned}
&\left(\pi_{\theta_s}(u)\widetilde{X}^-_\beta(u)\right)_s x^-_{\beta_1,r_1} \cdots x^-_{\beta_k,r_k} \cdot m_\pi = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{w} \theta_i\, x^-_{\beta,\, s-(1+i)}\right) x^-_{\beta_1,r_1} \cdots x^-_{\beta_k,r_k} \cdot m_\pi \\
&= \sum_{i=0}^{w} \theta_i\, x^-_{\beta,\, s-(1+i)}\, x^-_{\beta_1,r_1} \cdots x^-_{\beta_k,r_k} \cdot m_\pi \\
&= \sum_{i=0}^{w} \left(\theta_i\, x^-_{\beta+\beta_1,\, s+r_1-(1+i)} + \theta_i\, x^-_{\beta_1,r_1} x^-_{\beta,\, s-(1+i)}\right) x^-_{\beta_2,r_2} \cdots x^-_{\beta_k,r_k} \cdot m_\pi \\
&= \sum_{i=0}^{w} \theta_i\, x^-_{\beta+\beta_1,\, s+r_1-(1+i)}\, x^-_{\beta_2,r_2} \cdots x^-_{\beta_k,r_k} \cdot m_\pi + x^-_{\beta_1,r_1} \sum_{i=0}^{w} \theta_i\, x^-_{\beta,\, s-(1+i)}\, x^-_{\beta_2,r_2} \cdots x^-_{\beta_k,r_k} \cdot m_\pi \\
&= \left(\pi_{\theta_s}(u)\widetilde{X}^-_{\beta+\beta_1}(u)\right)_{s+r_1} x^-_{\beta_2,r_2} \cdots x^-_{\beta_k,r_k} \cdot m_\pi + x^-_{\beta_1,r_1} \left(\pi_{\theta_s}(u)\widetilde{X}^-_\beta(u)\right)_s x^-_{\beta_2,r_2} \cdots x^-_{\beta_k,r_k} \cdot m_\pi \\
&= 0,
\end{aligned}$$

[4]Para mais detalhe, ver [25]

com $\widetilde{X}^-_{\beta+\beta_1}(u) = 0$, se $\beta + \beta_1 \notin R^+$. O lado direito da igualdade é zero pela hipótese de indução e, desta forma, a prova está completa. ■

O seguinte resultado fala que o módulo de Weyl $W(\pi)$ é um U-módulo de dimensão finita maximal em relação aos módulos quocientes de dimensão finita de $M(\pi)$.

Lema 3.5.5 *O módulo de Weyl $W(\pi)$, sobre U, é um quociente de $M(\pi)$ e qualquer quociente de dimensão finita de $M(\pi)$ é um quociente de $W(\pi)$.*

Demonstração:

Sendo $M(\pi)$ um U-módulo integrável com $x^+_{\alpha_i,k} \cdot m_\pi = 0$ e $h_{\alpha_i,0} \cdot m_\pi = \lambda_\pi(h_{\alpha_i,0})\, m_\pi$, temos, pelo item (i) da Proposição 3.4.3, $M(\pi)$ um quociente de $W(\lambda_\pi)$. Já que V é um U-módulo quociente de $M(\pi)$, então V é um quociente de $W(\lambda_\pi)$, com $\dim(V) < \infty$. Considere φ um homomorfismo de U-módulos à esquerda tal que

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & M(\pi) & \longrightarrow & V \\ & m_\pi & \longmapsto & \varphi(m_\pi) \quad := v. \end{array}$$

Já que $M(\pi)$ é um módulo cíclico *standard* e φ um homomorfismo, V também é um módulo cíclico *standard*, pelo item (vi) do Teorema 2.2.7. Representando λ_π apenas como λ, temos

$$\dim(V_\lambda) = \dim(M(\pi)_\lambda) = 1.$$

Pelo item (ii) da Proposição 3.4.3, V é um quociente de algum módulo de Weyl $W(\widetilde{\pi})$, tal que o peso máximo associado à este módulo tem a forma $\lambda = \lambda_{\widetilde{\pi}}$. Como V é gerado por v e $\dim(W(\widetilde{\pi}))_\lambda = 1$, então

$$v = p\,\phi(w_{\widetilde{\pi}}), \quad \text{com} \quad p \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \phi : W(\widetilde{\pi}) \longrightarrow V \text{ homomorfismo de } U\text{-módulos.}$$

Assim, pela ação de $\Lambda^\pm_i(u)$ sobre $w_{\widetilde{\pi}}$ e sobre m_π, temos

$$\Lambda^\pm_i(u) \cdot w_{\widetilde{\pi}} = \widetilde{\pi}^\pm(u)\, w_{\widetilde{\pi}} \quad \text{e} \quad \Lambda^\pm_i(u) \cdot m_\pi = \pi^\pm(u)\, m_\pi.$$

Aplicando os homomorfismos ϕ e φ às equações acima, respectivamente, temos

$$\Lambda^\pm_i(u) \cdot v = \widetilde{\pi}^\pm(u)\, v \quad \text{e} \quad \Lambda^\pm_i(u) \cdot v = \pi^\pm(u)\, v.$$

Portanto, $\pi = \widetilde{\pi}$.

Para mostrar que $W(\pi)$ é um quociente de $M(\pi)$, pelas definições destes módulos, apenas será preciso mostrar a igualdade

$$\Big(\pi_\beta(u)\, \widetilde{X}^-_\beta(u)\Big)_s \cdot w_\pi = 0, \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{Z}.$$

Já que $W(\pi)$ é um quociente de $W(\lambda_{\pi,0})$, podemos afirmar que $W(\pi)$ é um U-módulo integrável com $x^+_{\alpha_i,k} \cdot w_\pi = 0$ e $h_{\alpha_i,0} \cdot w_\pi = \lambda_{\pi,0}(h_{\alpha_i,0})\, w_\pi$. Então, pelo item (iii) da

Proposição 3.4.3 e assumindo $\pi_\beta(u) = \sum_{m=0}^{\lambda_{\pi,0}(h_\beta)} n_m\, u^m$, com $n_m \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} 0 = \Big(\widetilde{X}_\beta(u)\,\Lambda_\beta^+(u)\Big)_s \cdot w_\pi &= \sum_{m=0}^{\lambda_{\pi,0}(h_\beta)} x^-_{\beta,\,s-1-m}\,\Lambda_{\beta,\,m}\cdot w_\pi \\ &= \sum_{m=0}^{\lambda_{\pi,0}(h_\beta)} x^-_{\beta,\,s-1-m}\,(n_m\, w_\pi) \\ &= \sum_{m=0}^{\lambda_{\pi,0}(h_\beta)} n_m\, x^-_{\beta,\,s-(1+m)}\cdot w_\pi \\ &= \Big(\pi_\beta(u)\,\widetilde{X}_\beta(u)\Big)_s \cdot w_\pi. \end{aligned}$$

Portanto, a prova do lema está completa. ■

Denote por $\Delta : U \longrightarrow U \otimes U$ a comultiplicação[5] de U definida estendendo a seguinte correspondência

$$x \longmapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x, \text{ para todo } x \in L(\mathfrak{g})$$

à um homomorfismo de álgebras. O seguinte lema está provado em [21, Apêndice, p. 549].

Lema 3.5.6 *Para todo $\beta \in R^+$,*

$$\Delta(\Lambda_\beta^\pm) = \Lambda_\beta^\pm \otimes \Lambda_\beta^\pm,$$

com

$$\Lambda_\beta^\pm \otimes \Lambda_\beta^\pm = \sum_{k,m\geq 0} (\Lambda_{\beta,\pm k} \otimes \Lambda_{\beta,\pm m}) u^{k+m}.$$

Finalmente, o Teorema 3.5.1 é uma consequência da seguinte proposição.

Proposição 3.5.7 *Sejam $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_r\}$ e $\widetilde{\pi} = \{\widetilde{\pi}_1, \widetilde{\pi}_2, \cdots, \tilde{\pi}_r\}$ r-uplas de polinômios com termo constante 1 tais que π_i e $\widetilde{\pi}_j$ sejam coprimos, para todos $1 \leq i,\, j \leq r$. Então*

(i) $M(\pi\tilde{\pi}) \cong M(\pi) \otimes M(\tilde{\pi})$,

(ii) qualquer U-módulo quociente de dimensão finita de $M(\pi) \otimes M(\widetilde{\pi})$ é um quociente de $W(\pi) \otimes W(\widetilde{\pi})$.

Demonstração:

(i) Seja $\lambda = \lambda_\pi + \lambda_{\widetilde{\pi}}$. Usando a demonstração do Lema 3.5.4, temos

$$M(\pi\,\widetilde{\pi})_{\lambda-\eta} \cong (M(\pi) \otimes M(\widetilde{\pi}))_{\lambda-\eta}$$

como espaços vetoriais de dimensão finita. Para provar o item (i) é suficiente mostrar que existe um homomorfismo sobrejetor de U-módulos entre $M(\pi\,\widetilde{\pi})$ e $M(\pi) \otimes$

[5]Para mais detalhes, ver [23].

$M(\widetilde{\pi})$. Pelo Lema 3.5.6, o elemento $m_\pi \otimes m_{\widetilde{\pi}}$ satisfaz as relações de definição de $M(\pi\,\widetilde{\pi})$. Desta forma, podemos afirmar que existe $f : M(\pi\,\widetilde{\pi}) \longrightarrow M(\pi) \otimes M(\widetilde{\pi})$ que transforma $m_{\pi\widetilde{\pi}}$ em $m_\pi \otimes m_{\widetilde{\pi}}$. Assim, para provar (i), devemos mostrar que se π_i e $\widetilde{\pi}_j$ não tem raízes em comum, então o elemento $m_\pi \otimes m_{\widetilde{\pi}}$ gera o espaço $M(\pi) \otimes M(\widetilde{\pi})$ como um U-módulo.

Seja

$$N = U \cdot (m_\pi \otimes m_{\widetilde{\pi}}).$$

Suponha que, para todo $\eta = \sum_i r_i\alpha_i$ e $\widetilde{\eta} = \sum_i \widetilde{r}_i\alpha_i$, com $\operatorname{ht}\eta = \sum_i r_i < s$ e $\operatorname{ht}\widetilde{\eta} = \sum_i \widetilde{r}_i < s$, se tenha

$$M(\pi)_{\lambda_\pi - \eta} \otimes M(\widetilde{\pi})_{\lambda_{\widetilde{\pi}} - \widetilde{\eta}} \subset N.$$

Provaremos as inclusões

$$\left(x^-_{i,m} \cdot M(\pi)_{\lambda_\pi - \eta}\right) \otimes M(\widetilde{\pi})_{\lambda_{\widetilde{\pi}} - \widetilde{\eta}} \subset N \qquad \text{e} \qquad M(\pi)_{\lambda_\pi - \eta} \otimes x^-_{i,m} \cdot (M(\widetilde{\pi})_{\lambda_{\widetilde{\pi}} - \widetilde{\eta}}) \subset N,$$

para todos $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}$. Isto provará

$$M(\pi)_{\lambda_\pi - \eta} \otimes M(\widetilde{\pi})_{\lambda_{\widetilde{\pi}} - \widetilde{\eta}} \subset N,$$

quando $\operatorname{ht}\eta \leq s$, $\operatorname{ht}\widetilde{\eta} \leq s$ e daí, usando indução sobre s, provará a igualdade $N = M(\pi) \otimes M(\widetilde{\pi})$.

Já que π_{θ_s} e $\widetilde{\pi}_{\theta_s}$ são coprimos, então podemos escolher polinômios $R(u), \widetilde{R}(u)$ tais que

$$R\pi_{\theta_s} + \widetilde{R}\widetilde{\pi}_{\theta_s} = 1.$$

Pela segunda parte do Lema 3.5.4, obtemos

$$\left(R\pi_{\theta_s}\widetilde{X}_i^-(u)\right)_m \cdot w = 0 \qquad \text{e} \qquad \left(\widetilde{R}\widetilde{\pi}_{\theta_s}\widetilde{X}_i^-(u)\right)_m \cdot w = 0,$$

para todos $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}$, $w \in M(\pi)$, $\widetilde{w} \in M(\widetilde{\pi})$. Logo,

$$\begin{aligned}\left(R\pi_{\theta_s}\widetilde{X}_i^-(u)\right)_m \cdot (w \otimes \widetilde{w}) &= \left(R\pi_{\theta_s}\widetilde{X}_i^-(u)\right)_m \cdot w \otimes \widetilde{w} + w \otimes \left(R\pi_{\theta_s}\widetilde{X}_i^-(u)\right)_m \cdot \widetilde{w} \\ &= w \otimes \left((1 - \widetilde{R}\widetilde{\pi}_{\theta_s})\widetilde{X}_i^-(u)\right)_m \cdot \widetilde{w} \\ &= w \otimes x^-_{i,m} \cdot \widetilde{w}.\end{aligned}$$

Tomando $w \in M(\pi)_{\lambda_\pi - \eta}$ e $\widetilde{w} \in M(\widetilde{\pi})_{\lambda_{\widetilde{\pi}} - \widetilde{\eta}}$ de modo que $w \otimes \widetilde{w} \in N$, segue $w \otimes x^-_{i,m} \cdot \widetilde{w} \in N$, para todos $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}$. A outra inclusão é provada de modo similar e, portanto, a parte (i) está provada.

(ii) Suponha que V seja um quociente de dimensão finita de $M(\pi) \otimes M(\widetilde{\pi})$ com núcleo K, isto é,

$$V = \frac{M(\pi) \otimes M(\widetilde{\pi})}{K}.$$

Provaremos que, para todo $r \geq 1$, $i \in I$, $s \geq \lambda_\pi(h_i) + 1$, $\widetilde{s} \geq \lambda_{\widetilde{\pi}}(h_i) + 1$, temos

$$\left(\pi_i(u)\, X_i^-(u)^r\right)_s \cdot m_\pi \otimes M(\widetilde{\pi}) \subset N, \tag{3.24}$$

$$M(\pi) \otimes \left(\pi_i(u)\, X_i^-(u)^r\right)_s \cdot m_{\widetilde{\pi}} \subset K. \tag{3.25}$$

Já que a soma destes subespaços é o núcleo da aplicação quociente

$$M(\pi) \otimes M(\widetilde{\pi}) \longrightarrow W(\pi) \otimes W(\widetilde{\pi}),$$

segue que V é um quociente de $W(\pi) \otimes W(\widetilde{\pi})$, o que prova a parte (ii).

Para provar a equação (3.24) é suficiente (pela prova do item (ii) da Proposição 3.3.4) provar que, para todos $i \in I$, $m \in \mathbb{Z}$,

$$(x_{i,m}^-)^{r_i+1} \cdot m_\pi \otimes m_{\widetilde{\pi}} \in K,$$

com $r_i = \partial(\pi_i) = \lambda_\pi(h_i)$.

Já que V é de dimensão finita, o elemento $(x_{i\,m}^-)^r \cdot m_\pi \otimes m_{\widetilde{\pi}} \in K$, para algum $r \geq 0$. Seja r_0 o menor valor de r com esta propriedade. Como

$$x_{i,-m}^+ \, (x_{i,m}^-)^{r_0} \cdot m_\pi \otimes m_{\widetilde{\pi}} = (r_i - r_0 + 1)(x_{i,m}^-)^{r_0-1} \cdot m_\pi \otimes m_{\widetilde{\pi}},$$

segue, pela minimalidade de r_0, que $r_i + 1 = r_0$. A equação (3.25) é provada de modo análogo.

■

Capítulo 4

Módulos de Weyl e de Demazure para álgebras de Lie de correntes

A noção de módulo de Weyl para álgebra de *loop* pode ser naturalmente estendida para a categoria de representações de dimensão finita sobre as álgebras de correntes. Diante disso, iniciamos o capítulo apresentando os conceitos necessários para, posteriormente, apresentarmos os módulos de Weyl, sob esta nova abordagem. Outra família de módulos que tem sido bem estudada são os módulos de Demazure. Em 1974, o matemático francês Michel Demazure introduziu este conceito como sendo um submódulo de uma representação de dimensão finita gerada por um espaço de peso máximo sob a ação de uma subálgebra de Borel. Neste capítulo apresentamos os módulos de Demazure para álgebras de correntes e provamos que eles são quocientes de módulos de Weyl. Por outro lado, também dedicamos uma seção à apresentar os módulos de fusão que, inicialmente definidos em [16] por Feigin e Loktev, são dados a partir de um conjunto de representações de uma álgebra de Lie simples e um conjunto de pontos complexos. Neste mesmo trabalho, Feigin e Loktev conjecturaram que os módulos de fusão independem da escolha dos parâmetros complexos. Ao final deste capítulo, estabelecemos um caso particular desta conjectura. Além disso, mostramos sua relação com os módulos de Weyl e de Demazure.

Ao longo deste capítulo nos restringimos ao caso da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$. No entanto, preferimos usar apenas a notação mais geral de uma álgebra de Lie simples denotada por $\mathfrak{g}$ já que esperamos que alguns resultados sejam válidos num contexto mais geral.

4.1 Preliminares

Nesta seção definimos as álgebras de Lie de correntes e destacamos as notações que utilizaremos para o caso da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$, das matrizes de ordem $(r+1) \times (r+1)$ com traço nulo.

4.1.1 Álgebras de correntes

Definição 4.1.1 *A* **álgebra de corrente** $\mathfrak{g}[t]$ *associada a uma álgebra de Lie complexa simples* $\mathfrak{g}$ *é o espaço vetorial* $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$, *com* $\mathbb{C}[t]$ *o anel de polinômios na indeterminada* t.

Podemos munir a álgebra de corrente $\mathfrak{g}[t]$ de uma estrutura de álgebra de Lie, definindo seu colchete por

$$[x \otimes t^r, y \otimes t^s] = [x, y] \otimes t^{r+s}, \text{ para todos } x, y \in \mathfrak{g},\ r, s \in \mathbb{Z}_+.$$

Observe que $\mathfrak{g}[t]$ é uma subálgebra da álgebra de *loop* $L(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, pois, para todo $x \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{g} \otimes 1 & \xrightarrow{i} & \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] \\ x & \longmapsto & x \otimes 1 & \longmapsto & x \otimes 1, \end{array}$$

com f um isomorfismo e i a aplicação identidade. Denotamos por $\mathfrak{g}t[t]$ o ideal maximal de $\mathfrak{g}[t]$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes t^n$, para todo $x \in \mathfrak{g}$, $n > 0$.

Sejam $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros não negativos e $\mathbb{N}_+$ o conjunto dos inteiros positivos. Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$ a álgebra de Lie de matrizes de ordem $(r+1) \times (r+1)$ com traço nulo, $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ consistindo de matrizes diagonais e $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq r\}$ o conjunto de raízes simples para $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$. Para $1 \leq i \leq j \leq r$ definimos $\alpha_{i,j} = (\alpha_i + \cdots + \alpha_j)$ e sejam $x^+_{i,j}$ (respectivamente, $x^-_{i,j}$) a matriz de ordem $(r+1) \times (r+1)$ com 1 na $(i, j+1)-$ésima entrada e zeros no resto (respectivamente, $(j+1, i)-$ésima entrada e zeros no resto).

Definimos as subálgebras $\mathfrak{n}^\pm$ de $\mathfrak{g}$, como segue

$$\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} \mathbb{C} x^\pm_{i,j}.$$

Para $1 \leq i \leq r+1$, definimos H_i como sendo a matriz diagonal com 1 na posição (i, i) e zeros no resto das entradas. Os elementos $h_i = H_i - H_{i+1}$, com $1 \leq i \leq r$ formam uma base para $\mathfrak{h}$.

Seja $\{\omega_i : 1 \leq i \leq r\}$ o conjunto de pesos fundamentais de $\mathfrak{g}$, isto é, uma base para $\mathfrak{h}^*$ a qual é dual a $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq r\}$. Consideramos os espaços Q, Q^+, P e P^+ como foram definidos em (3.2) e (2.5) no Capítulo 3. Além disso, para uma álgebra de Lie $\mathfrak{a}$, o espaço $U(\mathfrak{a})$ ainda denotará sua álgebra envolvente universal.

Consideremos agora o anel de grupo de P sobre $\mathbb{Z}$, que denotamos por $\mathbb{Z}[\mathrm{P}]$. Por definição, $\mathbb{Z}[\mathrm{P}]$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre cuja base é formada pelos elementos $e(\mu)$ (em correspondência bijetora com os elementos $\mu \in \mathrm{P}$).

Definição 4.1.2 *Seja* V *um* $\mathfrak{g}$*-módulo arbitrário de dimensão finita, com*

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{P}} V_\mu, \qquad V_\mu = \{v \in V : h \cdot v = \mu(h) v, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

O ***caracter*** *de* V *é definido por*

$$ch_{\mathfrak{g}}(V) := \sum_{\mu \in \mathrm{P}} dim(V_\mu)\, e(\mu) \in \mathbb{Z}[\mathrm{P}].$$

Continuaremos denotando o $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de dimensão finita por $V(\lambda)$ (para $\lambda = \sum_{i=1}^{r} m_i\,\omega_i \in \mathrm{P}^+$), como na Seção 2.2.4, agora para o caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$, com relações de definição dadas por

$$x_{i,\,j}^{+} \cdot v_\lambda = 0, \qquad h \cdot v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda, \qquad (x_{i,\,i}^{-})^{m_i+1} \cdot v_\lambda = 0, \text{ para todos } 1 \leq i \leq j \leq r,\ h \in \mathfrak{h}.$$

Observação 4.1.3 *A álgebra de Lie $\mathfrak{g}[t]$ é uma álgebra de Lie $\mathbb{N}$-graduada*[1]*, cuja graduação é induzida por $\mathbb{C}[t]$, isto é, já que $\mathbb{C}[t] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}\,t^n$, temos $\mathfrak{g}[t] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{g} \otimes t^n$. Então a graduação de $\mathfrak{g}[t]$ é dada por*

$$\mathfrak{g}[t] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{g}[t][n], \quad \textit{com } \mathfrak{g}[t][n] := \mathfrak{g} \otimes t^n.$$

Logo, $U(\mathfrak{g}[t])$ é também uma álgebra $\mathbb{N}$-graduada. Um elemento em $U(\mathfrak{g}[t])$ da forma

$$(x_1 \otimes t^{s_1})(x_2 \otimes t^{s_2}) \cdots (x_p \otimes t^{s_p}), \ \textit{com } x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_p \in \mathfrak{g},$$

tem grau $s_1 + s_2 + \cdots + s_p$. Denotamos por $U(\mathfrak{g}[t])[s]$ o subespaço de $U(\mathfrak{g}[t])$ com grau s.

Consideremos um $\mathfrak{g}[t]$-módulo $\mathbb{N}$-graduado $M = \bigoplus_{s\in\mathbb{N}} M_s$. Pela Observação (4.1.3), temos

$$(\mathfrak{g}[t][n]) \cdot (M_s) \subset M_{s+n}, \text{ para todos } s, m \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para $n = 0$, temos

$$(\mathfrak{g}[t][0]) \cdot (M_s) \subset M_{s+0} = M_s,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g} \otimes t^0) \cdot M_s &\subset M_s, \\ (\mathfrak{g} \otimes 1) \cdot M_s &\subset M_s, \\ \mathfrak{g} \cdot M_s &\subset M_s, \text{ para todo } s \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo, M_s é um $\mathfrak{g}$-submódulo de M, para todo $s \in \mathbb{N}$. Agora podemos tomar os espaços de peso para cada M_s, que denotamos por $M_{\mu,\,s}$, com $\mu \in \mathrm{P}$, isto é,

$$M_{\mu,\,s} = \{v \in M_s : h \cdot v = \mu(h) v, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Assim

$$M = \bigoplus_{(\mu,\,s)\,\in\,\mathrm{P}\times\mathbb{N}} M_{\mu,\,s}.$$

Neste caso, o ***caracter graduado*** de M é um elemento de $\mathbb{Z}[t][\mathrm{P}]$ definido por

$$\mathrm{ch}_t(M) := \sum_{(\mu,\,s)\,\in\,\mathrm{P}\times\mathbb{N}} dim(M_{\mu,\,s})\, t^s\, e(\mu) = \sum_{s\in\mathbb{N}} \mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}(M_s)\, t^s.$$

A seguir estudaremos os módulos de Weyl para as álgebras de Lie de correntes, tomando como referência o Capítulo 3.

[1]Para mais detalhe, consulte [2].

4.2 Módulos de Weyl para álgebras de correntes

Apresentamos agora o módulo de Weyl sobre $\mathfrak{g}[t]$ tomando como referência a Seção 3.4 do Capítulo 3.

Seja $W(\pi)$ o módulo de Weyl sobre U. Logo, $W(\pi)$ pode ser visto como um $g[t]$-módulo (pois $\mathfrak{g}[t]$ é uma subálgebra de $L(\mathfrak{g})$). Lembremos que π é uma r-upla de polinômios em uma indeterminada u com termo constante igual a 1.

Para $\lambda = \sum_{i=1}^{r} m_i\,\omega_i \in \mathrm{P}^+$ e $a \in \mathbb{C}^*$, definimos

$$\pi_\lambda = ((1-au)^{m_1}, (1-au)^{m_2}, \cdots, (1-au)^{m_r}).$$

Observe que $\partial((1-au)^{m_i}) = m_i = \lambda(h_i)$, para todo $i \in I$. Logo, para todo $x \in \mathfrak{g}$ e $s \geq 0$, consideremos o homomorfismo de álgebras de Lie φ dado por

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathfrak{g}[t] & \longrightarrow & \mathfrak{g}[t] \\ & x \otimes t^s & \longmapsto & x \otimes (t-a)^s. \end{array}$$

Desde modo, podemos considerar a composição

$$\mathfrak{g}[t] \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{g}[t] \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(W(\pi_\lambda)).$$

Logo, fazendo *pull back* do módulo $W(\pi_\lambda)$ através de φ, temos que $W(\pi_\lambda)$ é um módulo de Weyl sobre $\mathfrak{g}[t]$ com ação dada por $\rho \circ \varphi$. A partir de agora denotaremos o módulo de Weyl sobre $\mathfrak{g}[t]$ por $W(\lambda)$, com $\lambda \in \mathrm{P}^+$.

Resumindo as caraterísticas do módulo de Weyl para $\mathfrak{g}[t]$, temos a seguinte definição.

Definição 4.2.1 *Dado $\lambda = \sum_{i=1}^{r} m_i\,\omega_i \in \mathrm{P}^+$, o módulo de Weyl $W(\lambda)$ é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo gerado pelo elemento w_λ, com as seguintes relações definidoras*

$$\mathfrak{n}^+[t] \cdot w_\lambda = 0, \quad \mathfrak{h}t[t] \cdot w_\lambda = 0, \quad h \cdot w_\lambda = \lambda(h) w_\lambda,$$

$$(x_{i,i}^- \otimes 1)^{m_i+1} \cdot w_\lambda = 0, \ \textit{para todos } h \in \mathfrak{h},\ 1 \leq i \leq r.$$

Como consequência das relações que definem o módulo de Weyl $W(\lambda)$ sobre $\mathfrak{g}[t]$, obtemos o seguinte lema:

Lema 4.2.2 *Sejam $\lambda \in \mathrm{P}^+$ e $W(\lambda)$ o módulo de Weyl de peso máximo λ. Então*

(i) o módulo de Weyl $W(\lambda)$ admite uma $\mathbb{N}$-graduação induzida pela graduação em $\mathfrak{g}[t]$ dada por

$$W(\lambda) = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} W(\lambda)_s\,;$$

(ii) para todo $s \geq 0$, os subespaços $W(\lambda)_s$ são $\mathfrak{g}$-submódulos de dimensão finita e

$$W(\lambda) = \bigoplus_{(\mu,s)\in P\times\mathbb{N}} W(\lambda)_{\mu,s}\,,$$

com $W(\lambda)_{\mu,s} = \{w \in W(\lambda)_s : h \cdot w = \mu(h)w, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}$.

Para cada $\mu \in P$, definimos o espaço de peso para $W(\lambda)$ por

$$W(\lambda)_\mu = \bigoplus_{s\in\mathbb{N}} W(\lambda)_{\mu,s} = \{w \in W(\lambda) : h \cdot w = \mu(h)w, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

O seguinte resultado foi tomado do Teorema 3.4.2 e da Proposição 3.4.3 e está adaptado para o caso $\mathfrak{g}[t]$.

Teorema 4.2.3 *Para todo $\lambda \in \mathrm{P}^+$, os módulos de Weyl $W(\lambda)$ são de dimensão finita. Além disso, qualquer $\mathfrak{g}[t]$-módulo de dimensão finita V gerado por um elemento $v \in V$ satisfazendo as relações*

$$\mathfrak{n}^+[t] \cdot v = 0, \qquad \mathfrak{h}t[t] \cdot v = 0, \qquad h \cdot v = \lambda(h)v, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}, \tag{4.1}$$

é um quociente de $W(\lambda)$.

4.3 Módulos de Demazure

Nesta seção definimos os módulos de Demazure e provamos que, em representações integráveis de peso máximo da álgebra de Lie afim associada a $\mathfrak{sl}_{r+1}$, eles são quocientes dos módulos de Weyl. Começamos definindo as álgebras de Lie afim de Kac-Moody.

Definição 4.3.1 *A **álgebra de Lie afim** $\hat{\mathfrak{g}}$ é uma extensão de $L^e(\mathfrak{g})$ por meio de uma subálgebra central $\mathbb{C}_c$, isto é,*

$$\hat{\mathfrak{g}} = L^e(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}_c$$

A estrutura de álgebra de Lie em $\hat{\mathfrak{g}}$ é dada com o colchete

$$\begin{aligned} [\,x \otimes t^n, y \otimes t^m\,] &= [\,x, y\,] \otimes t^{n+m} + n\,\delta_{n+m,0}\,\langle x, y\rangle\, c, \\ [\,c, \hat{\mathfrak{g}}\,] &= 0 \\ [\,d,\, x \otimes t^n\,] &= n\,x \otimes t^n, \text{ para todos } x, y \in \mathfrak{g},\ n, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A forma de Killing sobre $\mathfrak{g}$ é representada por $\langle\,,\,\rangle$. Seja $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}_c \oplus \mathbb{C}_d$ a subálgebra abeliana de $\hat{\mathfrak{g}}$ associada a $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$. Podemos considerar $\mathfrak{h}^*$ como um subespaço de $\hat{\mathfrak{h}}^*$ definindo $\lambda(c) = \lambda(d) = 0$, para todo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Para $0 \leq i \leq r$, definimos os elementos $\Lambda_i \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ como segue

$$\Lambda_i(h_j) = \delta_{i,j}, \;\; \Lambda_i(d) = 0, \;\; \Lambda_i(c) = 1, \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq r.$$

Seja

$$\widehat{P}^+ = \left\{ \sum_{i=0}^{r} n_i \Lambda_i \,:\, n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \subset \hat{\mathfrak{h}}^*.$$

Definimos $\delta \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ por

$$\delta(\mathfrak{h}) = 0, \quad \delta(d) = 1, \quad \delta(c) = 0.$$

As raízes simples para $\hat{\mathfrak{g}}$ com respeito a $\hat{\mathfrak{h}}$ são denotadas por α_i, para $0 \leq i \leq r$, com $\alpha_0 = \delta - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)$. Seja

$$\widehat{Q}^+ = \left\{ \sum_{i=0}^{r} n_i \alpha_i \,:\, n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \subset \widehat{P}^+ \subset \hat{\mathfrak{h}}^*.$$

Seja $\widehat{\mathcal{W}}$ o grupo de Weyl afim e $(\ ,\ )$ a forma bilinear sobre $\hat{\mathfrak{h}}^*$ que deixa $\mathcal{W}$ invariante tal que

$$(\,\Lambda_i, \alpha_j\,) = \delta_{i,j}, \text{ para todos } 0 \leq i, j \leq r,$$

$$(\,\delta, \alpha_i\,) = 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq r.$$

O seguinte lema pode ser encontrado em [17].

Lema 4.3.2 *Seja $\mu \in \mathrm{P}^+$. Existem $0 \leq i_\mu \leq r$ e $w(\mu) \in \widehat{\mathcal{W}} \subset Aut(\hat{\mathfrak{h}}^*)$ tais que $w(\mu)\Lambda_{i_u}\big|_{\mathfrak{h}} = \mu$, isto é, $w(u)(\Lambda_{i_u})(h) = \mu(h)$, para todo $h \in \mathfrak{h}$.*

Definição 4.3.3 *Dado $\Lambda = \sum_{i=0}^{r} m_i \Lambda_i \in \widehat{P}^+$. Seja $L(\Lambda)$ o $\hat{\mathfrak{g}}-$módulo irredutível gerado por v_Λ, com as seguintes relações:*

$$\mathfrak{g}t[t] \cdot v_\Lambda = 0, \quad (\mathfrak{n}^+ \otimes 1) \cdot v_\Lambda = 0, \quad (\mathfrak{h} \otimes 1) \cdot v_\Lambda = \Lambda(\mathfrak{h}) v_\Lambda,$$

$$(x_{i,i}^- \otimes 1)^{m_i+1} \cdot v_\Lambda = 0, \quad (x_{1,r}^+ \otimes t^{-1})^{m_0+1} \cdot v_\Lambda = 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq r,$$

com $\mathfrak{g}t[t]$ o ideal maximal de $\mathfrak{g}[t]$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes t^n$, com $x \in \mathfrak{g}$ e $n > 0$.

Sabe-se por [26] que o módulo $L(\Lambda)$ é integrável e irredutível. Apresentamos o seguinte resultado que esta provado em [26, Proposição 9.3].

Proposição 4.3.4 *Para $\Lambda \in \widehat{P}^+$,*

(i) temos

$$L(\Lambda) = \bigoplus_{\Lambda' \in \widehat{P}} L(\Lambda)_{\Lambda'},$$

com $L(\Lambda)_{\Lambda'} = \{v \in L(\Lambda) : h \cdot v = \Lambda'(h)v, \text{ para todo } h \in \hat{\mathfrak{h}}\}$. Além disso,

$$dim(L(\Lambda)_{\Lambda'}) < \infty, \quad dim(L(\Lambda)_\Lambda) = 1 \quad e \quad L(\Lambda)_{\Lambda'} = 0 \text{ se } \Lambda - \Lambda' \notin \widehat{Q}^+.$$

(*ii*) *O conjunto*

$$wt(L(\Lambda)) = \{\Lambda' \in \widehat{P} : L(\Lambda)_{\Lambda'} \neq 0\} \subset \Lambda - \widehat{Q}^+$$

é invariante por $\widehat{\mathcal{W}}$. *Além disso,*

$$dim(L(\Lambda)_{w\Lambda'}) = dim(L(\Lambda)_{\Lambda'}), \text{ para todos } w \in \widehat{\mathcal{W}}, \Lambda' \in \widehat{P}.$$

Em particular, $dim(L(\Lambda)_{w\Lambda}) = 1$, *para todo* $w \in \widehat{\mathcal{W}}$.

A continuação, apresentamos a definição formal de nosso módulo de Demazure.

Definição 4.3.5 *Dado* $w \in \widehat{\mathcal{W}}$. *Sejam* $v_{w\Lambda}$ *um elemento não nulo em* $L(\Lambda)_{w\Lambda}$ *e*

$$D(w\Lambda) = U(\mathfrak{g}[t])v_{w\Lambda} \subset L(\Lambda).$$

O módulo $D(w\Lambda)$, *com* $w \in \widehat{\mathcal{W}}$, *é chamado* ***módulo de Demazure***.

A seguinte proposição mostra que um módulo de Demazure é um quociente de um módulo de Weyl.

Proposição 4.3.6 *Seja* $\Lambda \in \widehat{\mathrm{P}}^+$ *e* $w \in \widehat{\mathcal{W}}$ *tal que* $w\Lambda\big|_{\mathfrak{h}} \in \mathrm{P}^+$. *Então* $D(w\Lambda)$ *é um quociente de* $W(w\Lambda\big|_{\mathfrak{h}})$.

Demonstração:

É suficiente provar

$$\mathfrak{n}^+[t] \cdot v_{w\Lambda} = 0, \quad \mathfrak{h}t[t] \cdot v_{w\Lambda} = 0, \quad h \cdot v_{w\Lambda} = w\Lambda(h)v_{w\Lambda}.$$

Suponha

$$(x^+_{i,j} \otimes t^s) \cdot v_{w\Lambda} \neq 0, \text{ para algum } 1 \leq i \leq j \leq r \quad \text{e} \quad s \in \mathbb{N}.$$

Como $(x^+_{i,j} \otimes t^s)$ pertence ao espaço cuja raiz é $\alpha_{i,j} + s\delta$ e $v_{w\Lambda}$ pertence ao espaço cujo peso é $w\Lambda$, então $(x^+_{i,j} \otimes t^s) \cdot v_{w\Lambda}$ pertence ao espaço cujo peso é $w\Lambda + \alpha_{i,j} + s\delta$. Logo, $w\Lambda + \alpha_{i,j} + s\delta \in wt(L(\Lambda))$. Pelo item (*ii*) da Proposição 4.3.4, temos

$$\Lambda + w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta \in wt(L(\Lambda)) \subset \Lambda - \widehat{Q}^+,$$

desta forma $-w^{-1}(\alpha_{i,j}) - s\delta \in \widehat{Q}^+$. Como $s\delta \in \widehat{Q}^+$ e $\widehat{Q}^+$ é um grupo com a operação soma, então

$$-w^{-1}(\alpha_{i,j}) \in \widehat{Q}^+.$$

Considerando $-w^{-1}(\alpha_{i,j}) = \sum_{i=0}^{r} p_i\,\alpha_i$, com $p_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, temos $-w^{-1}(\alpha_{i,j}) - s\delta = \sum_{i=0}^{r}(p_i - s)\alpha_i$, com $(p_i - s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots, r\}$. Então

$$w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta = \sum_{i=0}^{r}(s - p_i)\alpha_i, \text{ com } (s - p_i) \in \mathbb{Z}_{\leq 0}.$$

Agora, para $\Lambda \in \widehat{\mathrm{P}}^+$, temos

$$\begin{aligned}\big(\Lambda,\, w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta\big) &= \left(\sum_{i=0}^{r} r_i\,\Lambda_i,\, \sum_{j=0}^{r}(s-p_j)\alpha_j\right),\ \text{com } r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.\\ &= \sum_{i=0}^{r} r_i \sum_{j=0}^{r}(s-p_j)\,(\Lambda_i,\, \alpha_j) \leq 0.\\ &\Rightarrow \big(\Lambda,\, w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta\big) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\, w\Lambda\,,\, \alpha_{i,\,j}\,) = (\,\Lambda, w^{-1}(\alpha_{i,j})\,) &= \left(\sum_{i=0}^{r} r_i\,\Lambda_i\,,\, \sum_{j=0}^{r} -p_j\,\alpha_j\right)\\ &= \sum_{i,\,j=0}^{r} -r_i\,p_j\,(\Lambda_i,\, \alpha_j)\\ &\leq \sum_{i,\,j=0}^{r} -r_i\,p_j\,(\Lambda_i,\, \alpha_j) + \sum_{i,\,j=0}^{r} r_i\,s\,(\Lambda_i,\, \alpha_j)\\ &= \sum_{i,\,j=0}^{r}(-r_i\,p_j + r_i\,s)\,(\Lambda_i,\, \alpha_j) = \sum_{i,\,j=0}^{r} r_i\,(s-p_j)\,(\Lambda_i,\, \alpha_j)\\ &= \big(\Lambda,\, w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta\big)\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$(\, w\Lambda, \alpha_{i,j}\,) = (\,\Lambda, w^{-1}(\alpha_{i,j})\,) \leq (\,\Lambda, w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta\,) \leq 0,\ \text{usando (4.2).}$$

o que contradiz $w\Lambda|_{\mathfrak{h}} \in \mathrm{P}^+$, a menos que

$$(\,\Lambda, w^{-1}(\alpha_{i,j})\,) = (\,\Lambda, w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta\,) = 0. \tag{4.3}$$

Neste caso, sendo $w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$, podemos tomar sua reflexão induzida (em $\widehat{\mathcal{W}}$), dada por

$$\sigma_{w^{-1}(\alpha_{i,j})+s\delta}(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\, w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta)}{(w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta,\, w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta)}\,(w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta),$$

para todo $\beta \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$. Quando $\beta = \Lambda$, temos

$$\sigma_{w^{-1}(\alpha_{i,j})+s\delta}(\Lambda) = \Lambda,\ \text{usando (4.3)}$$

ou seja, a reflexão $\sigma_{w^{-1}(\alpha_{i,j})+s\delta} \in \widehat{\mathcal{W}}$ induzida por $w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta$ fixa Λ e assim

$$\Lambda - (w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta) = \sigma_{w^{-1}(\alpha_{i,j})+s\delta}(\Lambda + w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta).$$

Como $\Lambda + w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta$ é um peso associado à $L(\Lambda)$, então

$$\Lambda - (w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta) \in wt(L(\Lambda)) \subset \Lambda - \widehat{Q}^+.$$

$$\Rightarrow w^{-1}(\alpha_{i,j}) + s\delta \in \widehat{Q}^+,$$

o que contradiz

$$-w^{-1}(\alpha_{i,j}) - s\delta \in \widehat{Q}^+$$

Portanto,

$$(x_{i,j}^+ \otimes t^s) \cdot v_{w\Lambda} = 0, \text{ para todos } 1 \leq i \leq j \leq r, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, suponha $(h \otimes t^s) \cdot v_{w\Lambda} \neq 0$, com $h \in \mathfrak{h}$, para algum $s \in \mathbb{N}$. Já que o elemento $(x_{i,j}^+ \otimes t^s)$ pertence ao espaço cuja raiz é $s\delta$, então $(x_{i,j}^+ \otimes t^s) \cdot v_{w\Lambda}$ pertence ao espaço cujo peso é $w\Lambda + s\delta$, ou seja, $w\Lambda + s\delta \in wt(L(\Lambda))$. Logo,

$$\Lambda + s\delta \in wt(L(\Lambda)) \subset \Lambda - \widehat{Q}^+.$$

Então $-s\delta \in \widehat{Q}^+$, o que é absurdo, pois $s \in \mathbb{N}$ e $\delta \in \widehat{Q}^+$. Portanto,

$$(h \otimes t^s) \cdot v_{w\Lambda} = 0, \text{ para todos } s \in \mathbb{N},\ h \in \mathfrak{h}.$$

Finalmente, já que $D(w\Lambda)$ é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo de dimensão finita, então podemos também considerar $D(w\Lambda)$ como um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Logo,

$$h \cdot v_{w\Lambda} = w\Lambda(h) v_{w\Lambda},$$

o que conclui a prova. ■

O seguinte teorema é um caso especial de um resultado que pode ser encontrado em [17].

Teorema 4.3.7 *Suponha que $\Lambda = \Lambda_{i_0}$, $0 \leq i_0 \leq r$, e que $w \in \widehat{\mathcal{W}}$ é um elemento tal que $w\,\Lambda\big|_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=1}^{r} m_i\,\omega_i$, com $m_i \in \mathbb{N}$. Então temos um isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos*

$$D(w\Lambda_{i_0}) \cong V(\omega_1)^{m_1} \otimes V(\omega_2)^{m_2} \otimes \cdots \otimes V(\omega_k)^{m_k}.$$

4.4 Módulos de fusão

Nesta seção, definimos a estrutura módulo de fusão, segundo [16], provamos que o produto de fusão de módulos de avaliação é um quociente de um módulo de Weyl e exibimos a Conjectura 1.8, de [16], que afirma a independência dos módulos de fusão com respeito à escolha dos parâmetros. Também provamos como os módulos de Weyl, os módulos de Demazure e os módulos de fusão se relacionam e por fim estabelecemos um caso particular da conjectura.

Consideremos $a \in \mathbb{C}$ e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Seja $ev_a : \mathfrak{g}[t] \longrightarrow \mathfrak{g}$ o homomorfismo de álgebras de Lie definido por $ev_a(x \otimes t^s) = a^s x$, para todos $x \in \mathfrak{g}$, $s \in \mathbb{N}$.

Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo arbitrário. Pelo *pull back* de V através de ev_a, temos que V é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo com a ação dada por

$$(x \otimes t^s) \cdot u = a^s(x \cdot u), \quad \text{para todos } x \in \mathfrak{g},\ u \in V. \tag{4.4}$$

Este módulo é chamado ***módulo de avaliação***, o qual denotamos por V_a. Lembremos que, segundo a Seção 2.2.4, $V(\lambda)$ é o $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de dimensão finita gerado por v_λ, vetor de peso máximo $\lambda \in P^+$. Adaptando $V(\lambda)$ à álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$, temos

$$\mathfrak{n}^+ \cdot v_\lambda = 0, \qquad h \cdot v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}, \quad (x_{i,i}^-)^{m_i+1} \cdot v_\lambda = 0.$$

Denotamos por $V_a(\lambda)$ o módulo de avaliação correspondente à $V(\lambda)$. Pela estrutura de $V(\lambda)$ e pela equação (4.4), temos que $V_a(\lambda) = U(\mathfrak{g}[t]) \cdot v_\lambda$ é irredutível de dimensão finita, com v_λ satisfazendo

$$\mathfrak{n}^+[\mathfrak{t}] \cdot v_\lambda = 0, \quad (h \otimes t^r) \cdot v_\lambda = a^r \lambda(h) v_\lambda, \text{ para todos } h \in \mathfrak{h},\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{4.5}$$

Consideremos agora $k \in \mathbb{N}_+$ e $V_{a_i}(\lambda_i)$ os $\mathfrak{g}[t]$-módulos de avaliação, com $a_i \in \mathbb{C}$ (não necessariamente distintos) e $\lambda_i \in P^+$, para cada $1 \leq i \leq k$. Definimos

$$\mathbf{V}_a(\lambda) := V_{a_1}(\lambda_1) \otimes ... \otimes V_{a_k}(\lambda_k) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} := v_{\lambda_1} \otimes ... \otimes v_{\lambda_k}.$$

Dados $x \in \mathfrak{g}$, $s \in \mathbb{N}$, $u = (u_1 \otimes ... \otimes u_k) \in \mathbf{V}_a(\lambda)$. Podemos definir uma ação de $\mathfrak{g}[t]$ sobre $\mathbf{V}_a(\lambda)$, aproveitando a ação de $\mathfrak{g}[t]$ sobre cada $V_{a_i}(\lambda_i)$, dada por:

$$(x \otimes t^s) \cdot u := \sum_{i=1}^{k} a^{s_i} \left(u_1 \otimes ... \otimes (\, x \cdot u_i) \otimes ... \otimes u_k\right). \tag{4.6}$$

Deste modo, $\mathbf{V}_a(\lambda)$ é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo.

A seguinte proposição pode ser encontrada em [16]. Este resultado estabelece que o produto tensorial de módulos de avaliação é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo irredutível.

Proposição 4.4.1 *Sejam $k \in \mathbb{N}_+$, $\lambda_s \in \mathrm{P}^+$, $a_s \in \mathbb{C}$, $1 \leq s \leq k$, e assuma que $a_s \neq a_{s'}$ se $s \neq s'$. Então $\mathbf{V}_a(\lambda) = V_{a_1}(\lambda_1) \otimes V_{a_2}(\lambda_2) \otimes \cdots \otimes V_{a_k}(\lambda_k)$ é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo irredutível.*

Suponha que as hipóteses da Proposição 4.4.1 sejam satisfeitas. Consideremos

$$\mathbf{V}_a(\lambda) = V_{a_1}(\lambda_1) \otimes V_{a_2}(\lambda_2) \otimes \cdots \otimes V_{a_k}(\lambda_k) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = v_{\lambda_1} \otimes v_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_k}.$$

Então, pela Proposição 1.1 de [16], $\mathbf{v}$ é gerador de $\mathbf{V}_a(\lambda)$. O módulo $\mathbf{V}_a(\lambda)$ não é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo $\mathbb{N}$-graduado. No entanto, a $\mathbb{N}$-graduação sobre $\mathfrak{g}[t]$ induz uma ***filtração $\mathfrak{g}$-equivariante***[2] sobre $\mathbf{V}_a(\lambda)$ como segue: para $n \in \mathbb{N}$, definimos a filtração sobre $\mathbf{V}_a(\lambda)$ dada por

$$V_a^n(\lambda) := \langle\, g \cdot v : g \in U(\mathfrak{g}[t]),\ g \text{ possui grau no máximo } n \,\rangle \subset \mathbf{V}_a(\lambda),$$

em outras palavras, usando a notação dada na Observação 4.1.3, temos

$$V_a^n(\lambda) = \bigoplus_{0 \leq s \leq n} U(\mathfrak{g}[t])\,[s] \cdot v.$$

[2]Para mais detalhe, ver [16].

Além disso, definimos $V_a^{-1}(\lambda) := 0$ e

$$V_{a_1}(\lambda_1) * V_{a_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{a_k}(\lambda_k) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \frac{V_a^n(\lambda)}{V_a^{n-1}(\lambda)}. \tag{4.7}$$

Podemos considerar agora a seguinte aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}_a(\lambda) & \longrightarrow & V_{a_1}(\lambda_1) * V_{a_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{a_k}(\lambda_k) \\ v' & \longmapsto & \overline{v'} = v' + V_a^{n-1}(\lambda), \end{array}$$

para todos $v' \in V_a^n(\lambda) \subset \mathbf{V}_a(\lambda)$, $s \in \mathbb{N}$.

Lema 4.4.2 *Para todos $s \in \mathbb{N}$, $x \in \mathfrak{g}$, $\overline{v'} \in V_{a_1}(\lambda_1) * V_{a_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{a_k}(\lambda_k)$, a fórmula*

$$(x \otimes t^s) \cdot \overline{v'} = \overline{(x \otimes t^s)v'}$$

define uma estrutura de $\mathfrak{g}[t]$-módulo $\mathbb{N}$-graduado sobre $V_{a_1}(\lambda_1) * V_{a_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{a_k}(\lambda_k)$.

Demonstração:

Definimos $\dfrac{V_a^n(\lambda)}{V_a^{n-1}(\lambda)} := A^n$, para todo $n \geq 0$. Tomemos $\overline{v'} \in A^n$. Logo, o representante v' é um elemento da forma $g \cdot \mathbf{v}$, com $g \in U(\mathfrak{g}[t])$ de grau n. Já que

$$(x \otimes t^s)V_a^n(\lambda) \subset V_a^{n+s}(\lambda),$$

obtemos

$$\underbrace{(x \otimes t^s)}_{\in \mathfrak{g}[t][s]} \cdot \underbrace{\overline{v'}}_{\in A^n} = \underbrace{(x \otimes t^s)}_{\in \mathfrak{g}[t][s]}(\underbrace{v'}_{\in V_a^n(\lambda)} + V_a^{n-1}) = \underbrace{(x \otimes t^s)v'}_{\in V_a^{n+s}(\lambda)} + V_a^{n+s-1} = \underbrace{\overline{(x \otimes t^s) \cdot v'}}_{\in A^{n+s}},$$

para todo $n, s \in \mathbb{N}$. Logo, a ação está bem definida. Portanto,

$$V_{a_1}(\lambda_1) * V_{a_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{a_k}(\lambda_k)$$

é um $\mathfrak{g}[t]$-módulo com graduação do tipo $\mathbb{N}$, dada por A^n, $n \in \mathbb{N}$. ■

Definição 4.4.3 *O $\mathfrak{g}[t]$-módulo resultante* (4.7) *é chamado* ***produto de fusão*** *dos módulos $V_{a_i}(\lambda_i)$, com $1 \leq i \leq k$.*

O seguinte lema é uma consequência da Proposição 4.4.1.

Lema 4.4.4 *Temos*

$$V_{a_1}(\lambda_1) * V_{a_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{a_k}(\lambda_k) = U(\mathfrak{g}[t]) \cdot \overline{\mathbf{v}}.$$

Demonstração:

É claro que $U(\mathfrak{g}[t]) \cdot \overline{\mathbf{v}} \subset V_{a_1}(\lambda_1) * V_{a_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{a_k}(\lambda_k)$. Provaremos a inclusão contrária. Pela Proposição 4.4.1 temos $\mathbf{V}_a(\lambda) = U(\mathfrak{g}[t]) \cdot \mathbf{v}$.

Seja $\overline{p} \in V_{a_1}(\lambda_1) * V_{a_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{a_k}(\lambda_k)$ um elemento arbitrário. Logo, o representante p pertence a $\mathbf{V}_a(\lambda)$. Então $p = g \cdot \mathbf{v}$, com $g \in U(\mathfrak{g}[t])$. Portanto, $\overline{p} \in U(\mathfrak{g}[t]) \cdot \overline{\mathbf{v}}$. ■

A seguinte conjectura, que foi dada em [16], garante que o módulo de fusão é independente da escolha dos parâmetros a_s, $b_s \in \mathbb{C}$. Mais adiante estabelecemos um caso particular deste resultado.

Conjectura 4.4.5 *Sejam $k \in \mathbb{N}_+$, $\lambda_s \in \mathrm{P}^+$, $1 \leq s \leq k$. Suponha que a_s, $b_s \in \mathbb{C}$, $1 \leq s \leq k$ e que $a_s \neq a_{s'}$, $b_s \neq b_{s'}$ se $s \neq s'$ e $1 \leq s$, $s' \leq k$. Então*

$$V_{a_1}(\lambda_1) * V_{a_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{a_k}(\lambda_k) \cong V_{b_1}(\lambda_1) * V_{b_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{b_k}(\lambda_k)$$

como $\mathfrak{g}[t]$-módulos.

Proposição 4.4.6 *Considere $k \in \mathbb{N}_+$, $\lambda_i \in \mathrm{P}^+$, com $1 \leq i \leq k$, e $a_1, a_2, \cdots, a_k$ complexos distintos. O produto de fusão $V_{a_1}(\lambda_1) * V_{a_2}(\lambda_2) * \cdots * V_{a_k}(\lambda_k)$ é um quociente de $W(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$.*

Demonstração:

Pelo Lema 4.4.4, é suficiente provar que $\overline{\mathbf{v}}$ satisfaz as relações em (4.1). Consideremos $\lambda_i \in \mathrm{P}^+$, com $1 \leq i \leq k$. Definimos $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. Pela equação (4.6), temos

$$(x_{i,j}^+ \otimes t^s) \cdot \mathbf{v} = \sum_{q=1}^{k} a_q^s \, (v_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes (x_{i,j}^+ \cdot v_{\lambda_q}) \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_k}),$$

para todos $1 \leq i \leq j \leq r$ e todo $s \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}(x_{i,j}^+ \otimes t^s) \cdot \mathbf{v} &= a_1^s \, (x_{i,j}^+ \cdot v_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_k}) + \cdots + a_k^s \, (v_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes x_{i,j}^+ \cdot v_{\lambda_k}) \\ &= a_1^s \, (0 \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_k}) + \cdots + a_k^s \, (v_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes 0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x_{i,j}^+ \otimes t^s) \cdot \mathbf{v} = 0, \text{ para todos } 1 \leq i \leq j \leq r, \, s \geq 0.$$

$$\Rightarrow (x_{i,j}^+ \otimes t^s) \cdot \overline{\mathbf{v}} = 0.$$

Novamente, pela equação (4.6), temos

$$(h \otimes 1) \cdot \mathbf{v} = \sum_{q=1}^{k} a_q^0 \, (v_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes (h \cdot v_{\lambda_q}) \otimes \cdots \otimes v_{\lambda_k}) = \sum_{q=1}^{k} \lambda_q(h) \, \mathbf{v} = \lambda(h) \, \mathbf{v}.$$

Então $h \cdot \overline{\mathbf{v}} = \lambda(h) \, \overline{\mathbf{v}}$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. Finalmente, temos

$$(h \otimes t^{s+1}) \cdot \mathbf{v} = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(h) \, a_j^{s+1} \right) \mathbf{v}.$$

Logo, para todo $s \geq 0$,

$$\underbrace{(h_i \otimes t^{s+1})}_{\in \mathfrak{g}[t][s+1]} \cdot \underbrace{\overline{\mathbf{v}}}_{A^0} = \underbrace{\overline{(h_i \otimes t^{s+1}) \cdot \mathbf{v}}}_{A^{s+1}} = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(h_i) \, a_j^{s+1} \right) \overline{\mathbf{v}},$$

o que implica $\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(h_i)\, a_j^{s+1}\right) \overline{\mathbf{v}} = 0$ em A^{s+1}, ou seja, $(h_i \otimes t^{s+1}) \cdot \overline{\mathbf{v}} = 0$, o que conclui a prova. ■

Corolário 4.4.7 *Para* $\lambda = \sum_{i=1}^{r} m_i\, \omega_i$, *temos*

$$dim\, W(\lambda) \geq \prod_{i=1}^{r} \binom{r+1}{i}^{m_i}.$$

Demonstração:

A prova é imediata pela Proposição 4.4.6, tomando os elementos $k = \sum_{i=1}^{r} m_i$, $\lambda_s = \omega_{i_s}$, $1 \leq s \leq k$, e assumindo que cada ω_i ocorre m_i-vezes. ■

O próximo teorema é o principal resultado de [5]. Este foi conjecturado em [11] e necessário em [7].

Teorema 4.4.8 *Seja* $\lambda = \sum_{i=1}^{r} m_i \omega_i \in P^+$. *Temos que*

$$dim\,(W(\lambda)) = \prod_{i=1}^{r} \binom{r+1}{i}. \tag{4.8}$$

Concluímos o capítulo assumindo o Teorema 4.4.8 e notando algumas de suas consequências. Observe que o próximo corolário estabelece a Conjectura 4.4.5 para uma família substancial de módulos.

Corolário 4.4.9 *Dados* $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, r\}$, *tome* $\lambda = \sum_{s=1}^{r} \omega_{i_s}$. *Seja* $w(\lambda) \in \widehat{W}$ *e* $0 \leq i_\lambda \leq r$ *como no Lema 4.3.2, para que* $w(\lambda)\, \Lambda_{i_\lambda}\big|_{\mathfrak{h}} = \lambda$. *Sejam* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ *tais que* $a_i \neq a_j$, *para todos* $1 \leq i \neq j \leq k$. *Então temos um isomorfismo de* $\mathfrak{g}[t]-$*módulos*

$$V_{a_1}(\omega_{i_1}) * \cdots * V_{a_k}(\omega_{i_k}) \cong W(\lambda) \cong D\left(w(\lambda)\, \Lambda_{i_\lambda}\right).$$

Demonstração: A demonstração segue pelo Teorema 4.4.8, juntamente com as Proposições 4.4.6 e 4.3.6 e o Teorema 4.3.7. ■

Observação 4.4.10 *Provar a conjectura de [16] para representações irredutíveis arbitrárias identificando-as com um* $\mathfrak{g}[t]-$*módulo, que é independente dos pontos, envolveria a identificação de um quociente adequado de módulos de Weyl.*

Para uma partição $\xi = (\xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_{r+1})$ de inteiros não-negativos, tome $\lambda_\xi = \sum_{i=1}^{r} (\xi i - \xi_{i+1})\omega_i$. Dada uma partição ξ e considerando $\mu = \sum_{i=1}^{r} n_i \omega_i \in P^+$ como um vetor $(n_1, \ldots, n_r)$, seja $K_{\mu,\xi}(t)$ o correspondente polinômio de Kostka [3].

[3] Para mais detalhes, ver [31].

Observe que $K_{\mu,\xi}(t) = 0$, a menos que $\xi_{r+2} = 0$.

Corolário 4.4.11 *Usando a notação do Corolário 4.4.9, temos*

$$ch_t\,(\,V_{a_1}(\omega_{i_1}) * \cdots * V_{a_k}(\omega_{i_k})\,) = ch_t W(\lambda) = \sum_{\xi} K_{\mu,\xi^{tr}}(t) \cdot ch_{\mathfrak{g}} V(\lambda_\xi),$$

onde a soma é sobre todas as partições ξ satisfazendo $\xi_{r+2} = 0$ e ξ^{tr} é a partição transposta.

Demonstração:

A primeira igualdade segue do isomorfismo entre módulos de Weyl e o produto de fusão. Já a segunda igualdade segue, primeiramente, usando a identificação entre módulos de Weyl e de Demazure dada no Corolário 4.4.9 e depois usando o Teorema 5.2 de [29], o qual fornece a fórmula para $ch_t(D(w\Lambda))$. ■

Este corolário estabelece um caso particular da conjectura declarada em [16]. Em [28], outro caso foi provado, a saber, foi demonstrado que o caracter graduado do módulo

$$V(n_1\omega_1) * \cdots * V(n_k\omega_1), \quad n_j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq k,$$

é dado por uma fórmula similar baseada em polinômios Kostka.

Considerações Finais

Esta dissertação teve como objetivo principal apresentar os módulos de Weyl e os módulos de Demazure, ambos sobre as álgebras de correntes, e provar que estes últimos são quocientes de um módulo de Weyl. Além disso, cumprimos os objetivos secundários, a saber: definimos os módulos de fusão e estabelecemos uma relação entre eles e os módulos de Weyl e de Demazure.

A noção de módulo de Weyl poderia ser, *a priori*, estendida sobre qualquer álgebra e obter propriedades universais com o objetivo de classificá-los é de grande interesse aos pesquisadores da área. Em [15], estenderam a definição desta estrutura sobre $\mathfrak{g} \otimes A$, com $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Kac-Moody e A uma álgebra comutativa associativa finitamente gerada com unidade sobre $\mathbb{C}$ e também generalizaram um teorema de decomposição de produto tensorial para os módulos de Weyl sobre $\mathfrak{g} \otimes A$. Já em [19], definiram os módulos de Weyl sobre as álgebras de correntes truncadas $\mathfrak{g}[t]_N = \mathfrak{g} \otimes \dfrac{\mathbb{C}[t]}{t^N\mathbb{C}[t]}$, conjecturaram que os módulos de Weyl truncados são isomorfos à um produto de fusão de certos módulos irredutíveis, quando N é um inteiro positivo suficientemente pequeno com respeito ao peso inteiro dominante λ e provaram esta conjectura quando λ é um múltiplo de certos pesos fundamentais. Por outro lado, visto que a Conjectura 4.4.5 sobre o produto de fusão dos módulos de avaliação foi provada para alguns casos especiais ([5], [16], [18]), outra direção de estudo futura seria prová-la para o caso geral.

Referências Bibliográficas

[1] AKASABA, T., KASHIWARA, M., *Finite dimensional representations of quantum affine algebras.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **33** (1997), no. 5, 839-867.

[2] BOURBAKI, N., *Algebra. Chapters 1-3. Elements of Mathematics.* Springer-Verlag, 1998.

[3] BOURBAKI, N., *Lie Groups and Lie Algebras. Part 1.* Addison-Wesley Publishing Company, 1975.

[4] CHARI, V., *Integrable representations of affine Lie algebras.* Invent. Math. **85** (1986), n. 2, 317-335.

[5] CHARI, V., LOKTEV, S., *Weyl, Demazure and fusion modules for the current algebra of* $\mathfrak{sl}_{r+1}$. Advances in Mathematics **207** (2006) 928-960.

[6] CHARI, V., PRESSLEY, A., *A new family of irreducible integrable modules for affine Lie algebras.* Math. Ann. **277** (1987), 543-562.

[7] CHARI, V., PRESSLEY, A., *Integrable and Weyl modules for quantum affine* $\mathfrak{sl}_2$, *in* : Quantum Groups and Lie Theory, Durham, 1999, in: London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 290, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, pp. 48-62, math.QA/0007123.

[8] CHARI, V., PRESSLEY, A., *New unitary representations of loop groups.* Math. Ann. **275** (1986), 87-104.

[9] CHARI, V., PRESSLEY, A., *Quantum affine algebras and their representations.* in Representations of Groups, (Banff, AB, 1994), 59-78 CMS Conf. Proc. **16**, AMS Providence, RI 1995.

[10] CHARI, V., PRESSLEY, A., *Quantum affine algebras at root of unity.* Representations Theory 1 (1997), 280-328.

[11] CHARI, V., PRESSLEY, A., *Weyl modules for classical and quantum affine algebras.* Represent. Theory **5** (2001) 191-223.

[12] DE KERF, E. A., BÄUERLE, G. G. A., *Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications on Physics. Parte 1* . North-Holland. First Edition, 1990.

[13] DIXMIER, J., *Enveloping Algebras.* Nort-Holland Publishing Company, 1977.

[14] ERDMANN, K., WILDON, M.J., *Introduction to Lie Algebras.* Springer-Verlag, London, 2006.

[15] ESWARA, S., FUTORNY, V., SHARMA, S., *Weyl modules associated to Kac-Moody Lie algebras.* Commun. in Algebra 44 (2016), 5045–5057.

[16] FEIGIN, B., LOKTEV, S., *On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule, in Differential Topology, Infinite-Dimensional Lie Algebras, and Applications.* Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 194, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 61–79.

[17] FOURIER, G., LITTELMANN, P., *Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions.* math.RT/0412432.

[18] FOURIER, G., LITTELMANN, P., *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Adv. Math. 211 (2007), 566-593.

[19] FOURIER, G., MARTINS, V., MOURA, A., *On Truncated Weyl Modules.* Commun. in Algebra 47 (2019), 1125–1146.

[20] FRENKEL, E., RESHETIKHIN, N., *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of W-algebras.* Contemp. Math **248** (2000) 163-205.

[21] GARLAND, H., *The arithmetic theory of loop algebras.* Journal of Algebra **53** (1978) 480-551.

[22] HENDERSON, A., *Representation of Lie algebras. An introduction through* $\mathfrak{gl}_n$. School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, 2012.

[23] HONG, J., KANG, S.-J., *Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases.* Graduate Studies in Mathematics **42** AMS, Providence, Rhode Island, 2002.

[24] HUANG, J. S., *Lectures and Representation theory.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1999.

[25] HUMPHREYS, J. E., *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Third Printing, Revised, Springer-Verlag, New York, 1972.

[26] KAC, V. G., *Infinite-dimensional Lie algebras.* Third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[27] KASS, S., MOODY, R., V., PATERA, J., SLANSKY, R., *Affine Lie Algebras, Weight Multiplicities and Branching Rules.* Volume I. University of California Press, 1990.

[28] KEDEM, R., *Fusion products, cohomology of* $GL(N)$ *flag manifolds and Kostka polynomials*, Int Math. Res. Not 25 (2004) 1273-1298, math.R/0312478.

[29] KUNI, A., MISRA, K., C., OKADO, ., TAKAGI, T., UCHIYAMA, T. *Paths, Demazure crystal and symmetric functions*, J. Math. Phys. 41(9)(2000)6477-6486, q-alg/9612018.

[30] LANG, S., *Algebra*. Springer-Verlag, New York, Inc, 2002.

[31] MACDONALD, I., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Math. Monogr., The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1979.

[32] PELLICER, J. OLIVERT., *Estructuras de álgebra multilineal*. Universitat de València, 1996.

[33] SAN MARTIN, L. A. B., *Álgebras de Lie*. Editora da UNICAMP, 1999.

[34] USEFI, H., *Isomorphism invariants of restricted enveloping algebras.* Pacific J. Math., 246(2):487–494, 2010.