

BRASILINO PEDRO SILVA E SILVA

CONEXIDADE DO CONJUNTO DE JULIA DE FUNÇÕES RACIONAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Alexandre Miranda Alves

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2020

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

S586c
2020
Silva, Brasilino Pedro Silva e, 1994-
Conexidade do conjunto de Julia de funções racionais /
Brasilino Pedro Silva e Silva. – Viçosa, MG, 2020.
64 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Alexandre Miranda Alves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 63-64.

1. Funções (Matemática). 2. Dinâmica. 3. Números complexos. 4. Teoria dos conjuntos. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.7

BRASILINO PEDRO SILVA E SILVA

CONEXIDADE DO CONJUNTO DE JULIA DE FUNÇÕES RACIONAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 16 de dezembro de 2020.

Assentimento:



Brasilino Pedro Silva e Silva
Autor



Alexandre Miranda Alves
Orientador

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me iluminar nessa caminhada.

Agradeço aos amigos de curso por todos momentos vividos, pelas conversas e palavras de carinho e incentivo durante os momentos difíceis.

Aos professores do DMA-UFV, por todos ensinamentos. Em especial ao meu orientador Alexandre pela atenção e pelo conhecimento compartilhado.

Aos meus pais, Genésio e Geralda, por todo incentivo e confiança. Aos meus irmãos, em especial Diogo que durante toda essa caminhada me acompanhou de perto.

Por fim, agradeço à CAPES pelo financiamento da minha bolsa.

Resumo

SILVA, Brasilino Pedro Silva e, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2020. **Conexidade do Conjunto de Julia de Funções Racionais**. Orientador: Alexandre Miranda Alves.

O conjunto de Julia de um polinômio complexo P é conexo se, e somente se, as órbitas de seus pontos críticos são limitadas. Não se têm um critério tão simples para a conexidade do conjunto de Julia de funções racionais. Neste trabalho, estudamos sob quais condições o conjunto de Julia de funções racionais é conexo. Primeiramente, estabelecemos condições sob as quais a bacia de atração é completamente invariante e o conjunto de Julia é conexo. Além disso, é mostrado que a conexidade da bacia de atração tem relação com as órbitas de seus pontos críticos. Obtemos ainda, dois importantes critérios para a conexidade do conjunto de Julia de funções racionais. Estes critérios nos dizem que, funções racionais pós-críticas finitas ou funções racionais com conjunto de Fatou, que não possuem anéis de Herman e cada componente de Fatou possui no máximo um ponto crítico, tem conjunto de Julia conexo.

Palavras-chave: Conexidade. Conjunto de Julia. Conjunto de Fatou. Funções Racionais.

Abstract

SILVA, Brasilino Pedro Silva e, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, December , 2020.
Connectedness of Julia Sets of Rational Functions. Adviser: Alexandre Miranda Alves.

Julia set of a complex polynomial P is connected if and only if the orbits of the critical points are limited. There is no such simple criteria for the connectivity of the Julia set of rational functions. In this work, we study under which conditions the Julia set of rational function is connected. First, we establish conditions under which the basin of attraction is completely invariant and the Julia set is connected. Furthermore, it is shown that the connection of the basin of attraction is related to the orbits the critical points. We also obtain two important criteria for connectivity Julia set of rational functions. These criteria tell us that, rational functions with a finite postcritical set or rational functions with a Fatou set which no contains Herman rings and each component of which contains at most one critical point, have a connected Julia set.

Keywords: Connectedness. Julia set. Fatou set. Rational Functions.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 7 |
| 1 Preliminares | 8 |
| 1.1 Noções em Variável Complexa | 8 |
| 2 Noções de Dinâmica Complexa | 27 |
| 2.1 Noções Básicas | 27 |
| 2.2 Conjuntos de Fatou e Julia | 29 |
| 2.3 Propriedades dos Conjuntos de Julia e Fatou | 31 |
| 3 Funções Racionais | 37 |
| 3.1 A Fórmula de Riemann-Hurwitz | 37 |
| 3.2 Domínios Regulares | 40 |
| 3.3 Dinâmica de Funções Racionais | 43 |
| 4 Conexidade do Conjunto de Julia de Funções Racionais | 45 |
| 4.1 Componente Completamente Invariante | 45 |
| 4.2 Conexidade da Bacia de Atração e do Conjunto de Julia | 48 |
| 4.3 Conexidade Especial | 54 |
| 4.4 Conexidade do Conjunto de Julia para uma família cúbica | 57 |
| Referências Bibliográficas | 63 |

Introdução

Em Dinâmica Complexa, é conhecido que para um polinômio complexo P , seu conjunto de Julia J_P é conexo se e somente se as órbitas de seus pontos críticos são limitadas. Para uma função racional $R = P/Q$, onde P e Q são polinômios complexos, não se tem um critério simples para a conexidade do seu conjunto de Julia J_R . Shishikura mostrou que [12], se uma função racional tem um único ponto fixo repulsor então seu conjunto de Julia é conexo. Mas tal resultado não define muito sobre a conexidade do conjunto de Julia das funções racionais.

Neste trabalho estudamos a conexidade do conjunto de Julia para uma função racional $R = P/Q$ de grau ≥ 2 . Para isso, no capítulo 1, introduzimos conceitos e resultados básicos de Análise Complexa. Já no capítulo 2, foram apresentados conceitos de Dinâmica Complexa, do conjunto de Julia, do conjunto de Fatou e propriedades dos conjuntos de Julia e Fatou.

Como nosso objetivo é estudarmos a conexidade do conjunto de Julia para uma função racional, no capítulo 3, apresentamos alguns resultados para tal estudo. Um destes resultados, que é de grande importância no estudo da conexidade do conjunto de Julia, nos diz que o conjunto de Julia é conexo se, e somente se, cada componente do conjunto de Fatou é simplesmente conexa [2]. Outra ferramenta importante para o estudo é a Fórmula de Riemann-Hurwitz [15] que diz, dada uma função própria $f : D \rightarrow G$ de grau k , onde D e G são domínios m, n -conexos, ou seja, seus complementares possuem m, n componentes conexas, respectivamente, e f possui r pontos críticos em D , contados com a multiplicidade, então

$$m - 2 = k(n - 2) + r.$$

No capítulo 4, já introduzidas todas as ferramentas necessárias, apresentamos os resultados para a conexidade do conjunto de Julia de funções racionais R . Primeiramente, foram apresentados resultados que garantem a conexidade do conjunto de Julia de uma função racional R quando, para um ponto fixo atrator z_0 , sua bacia de atração, denotada por $A(z_0)$, coincide com a bacia de atração imediata, denotada por $A_0(z_0)$. No caso, em que a bacia de atração não necessariamente coincide com a bacia de atração imediata, apresentamos uma série de resultados sobre a conexidade da bacia de atração e da bacia de atração imediata, resultados esses, importantes na sequência do trabalho. Ainda, apresentamos dois casos de conexidade especiais do conjunto de Julia, quando R é uma função racional pós-crítica finita, e quando o conjunto de Fatou de R não possui anéis de Herman e cada componente do conjunto de Fatou de R possui no máximo um ponto crítico, contado sem multiplicidade. Por último, apresentamos um estudo para a conexidade do conjunto de Julia da família cúbica $R = c(z^3 - 2)/z$, onde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, como exemplo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas noções e ferramentas necessárias para o desenvolvimento desse trabalho.

1.1 Noções em Variável Complexa

Os resultados apresentados nesta seção podem ser vistos com mais detalhes em [4], [14].

Definição 1.1. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que f é derivável em $z_0 \in D$ se,*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, e o denotamos por $f'(z_0)$. Se f for derivável em todo $z \in D$ dizemos que f é derivável em D . Neste caso, dizemos que f é holomorfa em D .

Definição 1.2. *Um domínio é um subconjunto de \mathbb{C} que é aberto e conexo.*

Teorema 1.3. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Se f for holomorfa em D então f é contínua em D .*

Demonstração. Seja $z_0 \in D$. Temos que mostrar que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, $\forall z_0 \in D$. Como f é holomorfa, tem-se que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Assim

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Portanto segue o resultado. \square

À seguir veremos que para determinar se uma função complexa f é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$, é suficiente analisarmos a parte real e imaginária de f , ou seja, se a parte real e a parte imaginária de f admitem derivadas parciais de primeira ordem em $z_0 = (x_0, y_0)$, e se essas derivadas verificam as condições de Cauchy-Riemann que serão apresentadas abaixo. Escreveremos $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ são as partes real e imaginária de f respectivamente.

Teorema 1.4. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 = x_0 + iy_0$. Uma condição necessária e suficiente para que f seja derivável em z_0 é que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuam derivadas parciais contínuas em (x_0, y_0) , satisfazendo as seguintes condições*

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Além disso, se $f'(z_0)$ existe então

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

As condições (*) são chamadas equações de Cauchy-Riemann.

Demonstração. Por definição

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Fazendo $z = x + iy_0$ obtemos

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Por outro lado fazendo $z = x_0 + iy$ obtemos

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\
 &= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
 &= \frac{1}{i} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).
 \end{aligned}$$

Como o limite existe então é único. Logo

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Daí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

E ainda temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Agora supondo que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann e são de classe C^1 , temos que existem funções ε_1 e ε_2 definidas em torno de $(0, 0)$ tais que para todo $r, s \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno

$$u(x_0 + r, y_0 + s) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)s + \varepsilon_1(r, s)$$

$$v(x_0 + r, y_0 + s) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)s + \varepsilon_2(r, s)$$

e

$$\lim_{(r,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_1(r, s)}{\sqrt{r^2 + s^2}} = \lim_{(r,s) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_2(r, s)}{\sqrt{r^2 + s^2}} = 0.$$

Agora tome $h = r + is$. Além disso, usando as equações de Cauchy-Riemann temos

$$\begin{aligned}
f(z_0 + h) - f(z_0) &= u(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + r, y_0 + s) - v(x_0, y_0)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)s + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)r + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)s + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)r - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)s + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)r + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)s + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(r + is) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(r + is) + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right)h + \varepsilon_1(r, s) + i\varepsilon_2(r, s).
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \\
&= \lim_{h=r+is \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon_1(r, s)}{r + is} + i\frac{\varepsilon_2(r, s)}{r + is}\right] = 0.
\end{aligned}$$

O que mostra que f é derivável em z_0 e

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

□

Corolário 1.5. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em um domínio D . Se $f'(z) = 0$ em D , então f é constante.*

Demonstração. De fato, como $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0$ em D , temos pelas equações de Cauchy-Riemann que $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$ em D . Logo $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ em D . Portanto u e v são constantes, uma vez que D é um domínio. Daí f é constante. □

Se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então derivando as equações de Cauchy-Riemann temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Portanto,

$$(**) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Uma função que satisfaz $(**)$ é dita harmônica.

Definição 1.6. *Seja D um subconjunto aberto de \mathbb{C} , a um elemento de D e $f : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação holomorfa. Se existirem uma aplicação holomorfa $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$g(a) \neq 0$ e um inteiro não negativo n tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$ para todo $z \in D \setminus \{a\}$, então a é denominado um pólo de f de ordem n .

Definição 1.7. Dizemos que uma aplicação f é meromorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$, se existe um conjunto discreto $\Gamma \subset U$ tal que f é holomorfa em $U \setminus \Gamma$ e os pontos de Γ são pólos de f .

Definição 1.8. Uma aplicação meromorfa e injetora é dita aplicação univalente.

Exemplo 1.9. A função $f(z) = \frac{1}{z}$ é meromorfa. De fato, f possui um único pólo de ordem 1 em 0. Além disso f é injetora, logo univalente.

Definição 1.10. Um caminho suave em \mathbb{C} é uma aplicação $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ com derivada contínua.

Seja $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho suave em $D \subset \mathbb{C}$ e seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Então $\sigma = f \circ \gamma$ também é um caminho suave e $\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Seja $z_0 = \gamma(t_0)$, e suponha $\gamma'(t_0) \neq 0$ e $f'(z_0) \neq 0$, então $\sigma'(t_0) \neq 0$ e $\arg(\sigma'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma'(t_0))$. Agora, sejam γ_1 e γ_2 dois caminhos suaves tais que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$ e $\gamma_1'(t_1) \neq 0 \neq \gamma_2'(t_2)$; sejam $\sigma_1 = f \circ \gamma_1$ e $\sigma_2 = f \circ \gamma_2$. Se os caminhos γ_1 e γ_2 não são tangentes um ao outro em z_0 e $\gamma_1'(t_1) \neq \gamma_2'(t_2)$ então temos que

$$\arg(\gamma_2'(t_2)) - \arg(\gamma_1'(t_1)) = \arg(\sigma_2'(t_2)) - \arg(\sigma_1'(t_1)).$$

Ou seja, dados quaisquer dois caminhos passando por z_0 , f mapeia esses dois caminhos em dois caminhos passando por $f(z_0)$ e quando $f'(z_0) \neq 0$, os ângulos entre as curvas são preservados.

Definição 1.11. Uma função analítica $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, onde $D \subset \mathbb{C}$ é aberto, que tem a propriedade de preservar ângulo é dita conforme.

Definição 1.12. Uma função racional da forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com coeficientes complexos tais que $ad - bc \neq 0$, é chamada transformação de Möbius.

Se f é uma transformação de Möbius então

$$f^{-1}(z) = \frac{dz + b}{-cz + a}$$

também é uma transformação de Möbius, pois $ad - bc \neq 0$ e além disso

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(z)) &= f\left(\frac{dz + b}{-cz + a}\right) \\ &= \frac{a\left(\frac{dz+b}{-cz+a}\right) + b}{c\left(\frac{dz+b}{-cz+a}\right) + d} \\ &= \frac{adz - ab - bcz + ab}{cdz - cb - cdz + ad} \\ &= \frac{(ad - bc)z}{(ad - bc)z} = z = f^{-1}(f(z)). \end{aligned}$$

Daí temos que $f^{-1}(z)$ é a inversa da aplicação f . Sejam

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad e \quad g(z) = \frac{rz + s}{tz + w}$$

transformações de Möbius, então

$$f \circ g(z) = f(g(z)) = \frac{(ar + bt)z + (as + bw)}{(cr + dt)z + (cs + dw)}$$

é uma transformação de Möbius, pois

$$(ar + bt)(cs + dw) - (as + bw)(cr + dt) = (ad - bc)(wr - st) \neq 0.$$

Portanto as transformações de Möbius tem estrutura de grupo.

Exemplo 1.13. A função

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

é uma transformação de Möbius.

A seguir apresentaremos alguns resultados sobre a integração complexa.

Definição 1.14. Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(t) = u(t) + iv(t)$. Definimos a integral complexa de f por

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

Propriedades da integral complexa :

Considere $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(t) = u(t) + iv(t)$. Então

$$\text{i) } \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t)dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (f(t)) dt$$

$$\text{ii) } \operatorname{Im} \left(\int_a^b f(t)dt \right) = \int_a^b \operatorname{Im} (f(t)) dt$$

$$\text{ii) } \int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

iv) Se $c \in \mathbb{C}, c = a + ib$

$$c \int_a^b f(t)dt = (a + ib) \left(\int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt \right) = \int_a^b (au - bv)dt + i \int_a^b (bu + av)dt$$

e

$$\int_a^b cf(t)dt = \int_a^b (a + ib)(u + iv)dt = \int_a^b (au - bv)dt + i \int_a^b (bu + av)dt$$

Portanto

$$c \int_a^b f(t) dt = \int_a^b cf(t) dt.$$

Definição 1.15. Uma curva parametrizada diferenciável $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação diferenciável de classe C^1 e seu traço é o conjunto $\{\gamma(t) : t \in [a, b] \subset \mathbb{R}\}$.

Definição 1.16. Uma função $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é de variação limitada se existe $M > 0$ tal que para toda partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ tem-se

$$\nu(\gamma, P) = \max_{1 \leq k \leq n} \{|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|\} \leq M.$$

A variação total de γ é definida por

$$V(\gamma) = \sup_P \nu(\gamma, P).$$

Definição 1.17. Uma curva é retificável se ela é de variação limitada.

Definição 1.18. O número

$$I = \int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) d\gamma(t)$$

é chamado de integral de uma função f sobre γ , onde $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma curva.

Proposição 1.19. Se $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é de classe C^1 em $[a, b]$ então γ é retificável e

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Demonstração. Dada uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ temos

$$\begin{aligned} \nu(\gamma, P) &= \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

Logo $V(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ e γ é de variação limitada.

Como γ' é contínua em $[a, b]$ (que é compacto), γ' é uniformemente contínua. Daí, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $|s - t| < \delta_1$ implica que $|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon$. Agora, tome $\delta_2 > 0$ tal que se $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ e $\|P\| = \max\{(t_k - t_{k-1}), 1 \leq k \leq n\} < \delta_2$

então

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \sum_{k=1}^n |\gamma'(\tau_k)| (t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

onde τ_k é um ponto em $[t_k, t_{k-1}]$. Logo

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n |\gamma'(\tau_k)| (t_k - t_{k-1}) \\ &= \varepsilon + \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(\tau_k) dt \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)) dt \right| + \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(\tau_k) dt \right|. \end{aligned}$$

Se $\|P\| = \min(\delta_1, \delta_2)$, então $|\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [t_k, t_{k-1}]$ e

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \varepsilon + \varepsilon(b-a) + \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &\quad - \varepsilon(1 + (b-a)) + \nu(\gamma, P) \\ &\leq \varepsilon(1 + (b-a)) + V(\gamma). \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\int_a^b \gamma'(t) dt \leq V(\gamma),$$

e portanto segue o resultado. \square

Definição 1.20. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva retificável e seja f uma função definida e contínua em γ . Definimos a integral de linha de f sob a curva γ por

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Definição 1.21. Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com D aberto e f contínua. Dizemos que $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ é uma primitiva para f se F é holomorfa e $F' = f$.

Proposição 1.22. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ contínua em D , onde D é um domínio. Se F é uma primitiva de f , então $F + k$, também o é, mais ainda qualquer outra primitiva de f é da forma $F + k$, onde k é uma constante.

Demonstração. Seja H outra primitiva de f . então $H - F$ é holomorfa e

$$(H - F)' = H'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

Então $H - F = k$, com k constante. \square

Definição 1.23. Uma função $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita ser analítica se para todo a em D ,

existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset D$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \forall z \in B_r(a).$$

Definição 1.24. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow D \subset \mathbb{C}$ (aberto) duas curvas retificáveis tais que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$. Então γ_1 e γ_2 são homotópicas se existe uma função contínua $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ tal que*

$$\begin{aligned} \Gamma(s, 0) &= \gamma_1(s) & \Gamma(s, 1) &= \gamma_2(s) \\ \Gamma(0, t) &= a & \Gamma(1, t) &= b. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Definição 1.25. *Um aberto $D \subset \mathbb{C}$ é simplesmente conexo se é conexo e toda curva fechada em D é homotópica a zero.*

Teorema 1.26. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ aberto. Se $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica, então f é holomorfa.*

Demonstração. Como f é analítica temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \forall z \in B_R(a).$$

Considere $a = 0$. Seja $g : B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função dada por

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Fixe $r > 0$, tal que $r < R$.

Para todo $z, w \in B_r(0)$, $w \neq z$, temos

$$g(z) - \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(n z^{n-1} - \frac{z^n - w^n}{z - w} \right).$$

Observe que

$$\begin{cases} n z^{n-1} = z^{n-1} + z^{n-1} + \dots + z^{n-1} \\ \frac{z^n - w^n}{z - w} = z^{n-1} + z^{n-2}w + z^{n-3}w^2 + \dots + z w^{n-2} + w^{n-1}. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira temos

$$\begin{aligned} & z^{n-2}(z-w) + z^{n-3}(z^2-w^2) + \dots + z(z^{n-2}-w^{n-2}) + (z^{n-1}-w^{n-1}) \\ &= (z-w)((n-1)z^{n-1} + (n-2)z^{n-2}w + \dots + 2zw^{n-2} + w^{n-1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \left| nz^{n-1} - \frac{z^n - w^n}{z-w} \right| \\
& \leq |z-w|((n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1)r^{n-2} \\
& = |z-w| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
& \left| g(z) - \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(nz^{n-1} - \frac{z^n - w^n}{z-w} \right) \right| \\
& \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left| nz^{n-1} - \frac{z^n - w^n}{z-w} \right| \leq |z-w| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-2)}{2} |a_n| r^{n-2}.
\end{aligned}$$

Pelo teste da razão, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-2)}{2} |a_n| r^{n-2}$ converge, uma vez que $r < R$.

Digamos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-2)}{2} |a_n| r^{n-2} = A < \infty$, logo

$$\left| g(z) - \frac{f(z) - f(w)}{z-w} \right| \leq |z-w|A.$$

Isso mostra que

$$\lim_{w \rightarrow z} \left| g(z) - \frac{f(z) - f(w)}{z-w} \right| = 0.$$

Ou seja,

$$g(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} = f'(z).$$

Como r é arbitrário, $f'(z) = g(z)$ em $B_R(0)$. O caso $a \neq 0$ é análogo ao caso que $a = 0$, basta trocarmos z^n por $(z-a)^n$ na prova acima. \square

Definição 1.27. Um caminho em \mathbb{C} é uma aplicação contínua $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que um caminho γ é fechado se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Teorema 1.28. (Teorema Integral de Cauchy) Se $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com D simplesmente conexo, e f analítica. Então $\int_{\gamma} f = 0$ para toda curva γ de Jordan, regular, inteiramente contida em D .

Obs 1.29. • γ ser uma curva de Jordan significa que γ é uma curva fechada e simples, ou seja, γ é uma curva sem auto-interseções.

• Uma curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é regular se $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$.

Demonstração. Ver referência [\[4\]](#)

\square

Proposição 1.30. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ aberto e seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Então f possui uma primitiva, mais ainda, se γ é um caminho fechado em $B_r(a) \subset D$ então $\int_{\gamma} f = 0$.*

Demonstração. Dado $a \in D, \exists r > 0$ tal que $B_r(a) \subset D$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \forall z \in B_r(a)$$

e considere $F : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}.$$

Sabemos que para n suficientemente grande, $\frac{|z-a|}{n+1} \leq \frac{r}{n+1} < 1$, então

$$\left| \frac{a_n(z-a)^{n+1}}{n+1} \right| = |a_n(z-a)^n| \left| \frac{z-a}{n+1} \right| \leq |a_n(z-a)^n|.$$

Então F está bem definida (raio de convergência r) e $F' = f$. □

Teorema 1.31. *Dada $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ contínua, onde D um domínio simplesmente conexo, as seguintes afirmações são equivalentes :*

1. f possui uma primitiva ;
2. $\int_{\gamma} f dz = 0$ para todo caminho fechado $\gamma \subset D$;
3. $\int f dz$ só depende dos extremos z_1 e z_2 de qualquer caminho σ contido em D , que liga z_1 a z_2 .

Demonstração. (1) \Rightarrow (3) : Sejam $\sigma(t) = x(t) + iy(t), t \in (a, b); f(z) = u + iv, F(z) = N + iM$ e $z_1 = \sigma(a) = x(a) + iy(a), \sigma(b) = x(b) + iy(b)$. Sabemos que $F' = f$ e

$$F' = \frac{\partial N}{\partial x} + i \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - i \frac{\partial N}{\partial y}.$$

Então

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial x} = u & u = \frac{\partial M}{\partial y} \\ -\frac{\partial N}{\partial y} = v & v = \frac{\partial M}{\partial x} \end{cases} \quad (1.2)$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f dz &= \int_a^b (u(t)x'(t) - v(t)y'(t)) dt + i \int_a^b (u(t)y'(t) + v(t)x'(t)) dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial N}{\partial x} x'(t) - \frac{\partial N}{\partial y} y'(t) \right) + i \int_a^b \left(\frac{\partial M}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial M}{\partial x} x'(t) \right) dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} (N(x(t), y(t))) dt + i \int_a^b \frac{d}{dt} (M(x(t), y(t))) dt \\
&= N(x(t), y(t)) \Big|_a^b + iM(x(t), y(t)) \Big|_a^b \\
&= N(x(b), y(b)) - N(x(a), y(a)) + iM(x(b), y(b)) - M(x(a), y(a)) \\
&= (N(x(b), y(b)) + iM(x(b), y(b))) - (N(x(a), y(a)) + iM(x(a), y(a))) \\
&= F(x(b) + iy(b)) - F(x(a) + iy(a)) \\
&= F(z_2) - F(z_1).
\end{aligned}$$

(1) \Rightarrow (2) : Tomando em (1) \Rightarrow (3) $z_1 = z_2$ segue o resultado.

(2) \Rightarrow (3) : Sejam z_1 e z_2 em D . Seja γ um caminho que liga z_1 a z_2 e σ um caminho que liga z_2 a z_1 ambos os caminhos definidos em D . Logo $\gamma - \sigma$ é um caminho fechado em D , que é simplesmente conexo, assim

$$\int_{\gamma - \sigma} f dz = \int_{\gamma} f dz - \int_{\sigma} f dz = 0,$$

então

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\sigma} f dz.$$

(3) \Rightarrow (1) : Agora fixe $z_0 \in G$, e defina

$$\begin{aligned}
F : D &\rightarrow \mathbb{C} \\
z &\mapsto F(z)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

por $F(z) = \int_{\gamma} f dz$, onde γ é um caminho que liga z_0 a z . Note que F está bem definida por hipótese, pois a integral está bem definida.

Afirmção : $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$

De fato, como D é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset D$. Para $h \in \mathbb{C}$ com $|h| < r$, $z + h \in B_r(z) \subset D$. Mais ainda, temos que $\sigma(t) = z + th$ com $t \in [0, 1]$

está contido em $B_r(z) \subset D$, logo temos

$$\begin{aligned} F(z+h) &= \int_{\gamma+\sigma} f(w)dw = \int_{\gamma} f(w)dw + \int_{\sigma} f(w)dw \\ &= F(w) + \int_{\sigma} f(w)dw. \end{aligned}$$

Então

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\sigma} f(w)dw.$$

Por outro lado,

$$\int_{\sigma} dw = \int_0^1 \sigma^1(t)dt = h$$

e daí temos

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_{\sigma} f(w)dw - f(z) \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_{\sigma} f(w)dw - hf(z) \right] = \frac{1}{h} \left[\int_{\sigma} f(w)dw - f(z) \int_{\sigma} dw \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_{\sigma} f(w)dw - \int_{\sigma} f(z)dw \right] = \int_{\sigma} \frac{f(w) - f(z)}{h} dw. \end{aligned}$$

Como f é contínua dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|w - z| < \delta$ então $|f(w) - f(z)| < \epsilon$. Logo tomando $\bar{\delta} = \min\{r, \delta\}$ e se $h < \bar{\delta}$, temos $|f(w) - f(z)| < \epsilon$, assim dado $\epsilon > 0$ existe $\bar{\delta} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} h < \bar{\delta} \Rightarrow \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \int_{\sigma} \frac{f(w) - f(z)}{h} dw \right| \leq \\ &\int_{\sigma} \frac{|f(w) - f(z)|}{|h|} |dw| < \frac{\epsilon}{|h|} \int_{\sigma} |dw| = \frac{\epsilon}{|h|} |h| = \epsilon. \end{aligned}$$

Então $F'(z) = f(z)$. □

Nos próximos resultados iremos mostrar que se $D \subset \mathbb{C}$ é um domínio simplesmente conexo e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa, então existe uma representação de f ao longo de caminhos fechados contidos em D .

Teorema 1.32. Fórmula Integral de Cauchy : *Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa no domínio simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$ e γ um caminho fechado qualquer*

contido em D . Se z é um ponto qualquer no interior da região delimitada por γ , então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}.$$

Demonstração. De fato, sendo D aberto, para cada z no interior de γ existe um disco fechado de centro z e raio $\rho > 0$ contido no interior de γ . Seja Γ a fronteira deste disco e suponhamos que γ e Γ sejam caminhos orientados no mesmo sentido. A função $\xi \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ é holomorfa em $D \setminus \text{int}(\Gamma)$. Como visto anteriormente, temos

$$\int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}.$$

Como $f(z)$ é uma constante podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) - f(z) + f(z)}{\xi - z} d\xi \\ &= \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned}$$

Considere a representação paramétrica de Γ dada por $\Gamma(t) = z + \rho e^{it}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Daí,

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z).$$

Como f é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |\xi - z| < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$. Escolendo ρ menor do que δ obtemos

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \int_{\Gamma} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} |d\xi| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário concluímos que $\int_{\Gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = 0$ e portanto

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z).$$

□

Teorema 1.33. *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde D um domínio, então f é analítica, ou seja, dado $a \in D$, existe $B_r(a) \subset D$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \forall z \in B_r(a).$$

Demonstração. Dado $a \in D, \exists R > 0$ tal que $B_R(a) \subset D$. Considere r tal que $0 < r < R$, daí $B_r(a) \subset B_R(a)$ e f é holomorfa em $B_r(a)$. Logo pela fórmula integral de

Cauchy temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w-z}, \quad \gamma = \partial B_r(a) \quad \forall z \in B_r(a).$$

Agora perceba que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a) - (z-a)} = \frac{1}{(w-a)} \left(\frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} \right).$$

Como $(z-a) < r$ e $|w-a| = r$ temos $|\frac{z-a}{w-a}| < 1$, assim

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \quad \forall z \in B_r(a),$$

logo

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \quad \forall z \in B_r(a),$$

e daí

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right) dw \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \end{aligned}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{f^n(a)}{n!}.$$

Portanto f é analítica. □

Obs 1.34. O teorema [1.26](#), junto com o teorema anterior nos diz que f é analítica, se e somente se, f é holomorfa.

Teorema 1.35. (Teorema de Morera) Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua no domínio simplesmente conexo D . Se

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

para todo caminho fechado Γ contido em D , segue-se que f é holomorfa em D .

Demonstração. Como $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ para todo caminho contido em D , temos que se $z_0 \in D$, a integral

$$\int_{z_0}^z f(\xi)d\xi = 0$$

depende somente de z . Daí

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi = 0$$

está definida em D e é derivável, com $\varphi'(z) = f(z)$. Portanto, f é igual a derivada de uma função holomorfa, φ , logo holomorfa, e segue o Teorema. \square

Teorema 1.36. (Teorema de Liouville) *Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em todo \mathbb{C} então f é constante*

Demonstração. Seja z_0 um ponto qualquer de \mathbb{C} e $D(0, \rho)$ um disco aberto com centro na origem contendo z_0 em seu interior. Denotaremos por γ a fronteira de $D(0, \rho)$. Sendo f holomorfa em \mathbb{C} , pela fórmula integral de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0}.$$

Tem-se também,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi}.$$

Assim,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|z_0| \|f(\xi)\| |d\xi|}{|\xi - z_0| |\xi|}.$$

Como f é limitada em \mathbb{C} , existe uma constante $K > 0$ tal que $|f(z)| < K$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{K |z_0|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|d\xi|}{|\xi - z_0| |\xi|}$$

e $\xi \in \gamma$. Logo $|\xi - z_0| \geq \rho - |z_0|$, e portanto

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{K |z_0|}{(\rho - |z_0|)}.$$

Sendo $K, |z_0|$ números independentes de ρ , fazendo $\rho \rightarrow \infty$ na expressão anterior temos que para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) = f(0)$ o que mostra que f é constante em \mathbb{C} . \square

Teorema 1.37. (Teorema do Módulo Máximo) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto conexo. Suponhamos que exista $z_0 \in U$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo z numa vizinhança de z_0 . Então f é constante em U .*

Demonstração. Seja $z_0 \in U$, e suponhamos que $f(z_0) = |f(z_0)| e^{i\theta_0}$. Consideremos a

função $g(z) = e^{-i\theta_0} f(z)$. Temos $|g(z)| = |f(z)| \leq |f(z_0)| = |g(z_0)|$ para todo z numa vizinhança de z_0 . Escrevamos $g(z) = u(z) + iv(z)$, onde $u = \operatorname{Re}(g)$ e $v = \operatorname{Im}(g)$. Como $g(z_0) \in \mathbb{R}$ (pois $g(z_0) = e^{-i\theta_0} f(z_0) = e^{-i\theta_0} |f(z_0)|$), temos $u(z_0) = g(z_0)$ e $v(z_0) = 0$. Agora seja $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset U \subset \mathbb{C}$ e tomemos $\gamma_r(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$. Pela fórmula integral de Cauchy podemos escrever

$$\begin{aligned} u(z_0) = g(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Igualando as partes reais obtemos

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Afirmção : A hipótese do teorema e a igualdade acima implica que

$$u(z_0) = u(z_0 + re^{i\theta}) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

De fato, seja $h(\theta) = u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta})$. Assim temos

$$u(z) \leq |u(z)| \leq |g(z)| \leq |g(z_0)| = u(z_0) \quad \forall z \in U.$$

Obtemos que $h(\theta) \leq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Note que se $h(\theta_1) > 0$ para algum $\theta_1 \in [0, 2\pi]$, então teríamos $h(\theta) > 0$ para θ em um intervalo contendo θ_1 , pois h é contínua, o que implica

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta})) d\theta \\ &= u(z_0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

e que gera uma contradição com a igualdade [1.1](#). Portanto $u(z_0 + re^{i\theta}) = u(z_0)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ e todo $r > 0$ tal que $D(r, z_0) \subset U \subset \mathbb{C}$. Daí obtemos que u é uma constante em um disco aberto $D \subset \mathbb{C}$, com centro em z_0 . Por outro lado as relações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Portanto v também é constante em D , ou seja, $g = u + iv$ é constante em D . Como $f(z) = e^{i\theta_0} g(z)$, concluímos que f também é constante em D , logo constante em U , uma vez que U é conexo e f é analítica. \square

Corolário 1.38. *Seja D um domínio limitado de \mathbb{C} . Se $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em D e contínua no fecho \bar{D} então o máximo de $|f|$ é assumido em um ponto da fronteira de*

∂D .

Demonstração. Suponhamos que $|f|$ assume máximo no interior de D , digamos em $a \in \text{int}D$. Assim

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

e

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(a)| d\theta = |f(a)|.$$

Portanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta = |f(a)|$$

e como

$$0 \leq |f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)|$$

segue que

$$f(a + re^{i\theta}) = f(a), \quad \forall r \in [0, 2\pi].$$

Como $|f|$ é contínua, então temos que f é localmente constante, e do fato de D ser conexo e f contínua segue que f é constante, o que é um absurdo, logo o máximo de f não pode ocorrer no interior de D . \square

Suponha f holomorfa e com um zero de ordem m sobre $z = a$. Assim $f(z) = (z - a)^m g(z)$, onde $g(a) \neq 0$. Daí

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

e g'/g é holomorfa sobre $z = a$, uma vez que $g(a) \neq 0$. Agora suponha que f tenha pólo de ordem m sobre $z = a$, isto é, $f(z) = (z - a)^{-m} g(z)$, onde g é holomorfa e $g(a) \neq 0$. Daí

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

e g'/g é holomorfa sobre $z = a$.

Definição 1.39. Se γ é uma curva fechada retificável em \mathbb{C} , então

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$$

é denominado índice de γ com relação ao ponto a . Deste modo $n(\gamma; a)$ é o número de voltas que se dá sob γ torno de a .

Teorema 1.40. Seja f meromorfa em um aberto D com pólos p_1, p_2, \dots, p_m e zeros z_1, z_2, \dots, z_n contando a multiplicidade. Se γ é uma curva retificável homotópica a zero

e não passando por p_1, p_2, \dots, p_m e tampouco por z_1, z_2, \dots, z_n , então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n n(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^m n(\gamma, p_j).$$

Teorema 1.41. (Teorema de Rouché.) *Suponha f e g meromorfa em uma vizinhança de $\overline{B(a, R)}$, sem zeros ou pólos no círculo $\gamma = \{z : |z - a| = R\}$. Se Z_f, Z_g, P_f, P_g são os números de zero (pólos) de f e g dentro γ e contando suas multiplicidades e se*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

sobre γ então

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

As demonstrações dos Teoremas [1.40](#) e [1.41](#) podem ser encontradas na referência [\[4\]](#).

Capítulo 2

Noções de Dinâmica Complexa

Os resultados apresentados neste capítulo podem ser vistos com mais detalhes nas referências [2], [3], [4], [8].

2.1 Noções Básicas

Nesta seção apresentaremos algumas noções e resultados gerais de dinâmica complexa.

Seja $U \subset \mathbb{C}$ aberto e seja $f : U \rightarrow U$ uma aplicação holomorfa.

Definição 2.1. Definimos a n -ésima iterada de f como a composição de f n -vezes consigo mesma

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f.$$

Definição 2.2. Um ponto z_0 é um ponto fixo de f se $f(z_0) = z_0$.

Definição 2.3. Um ponto z é um ponto periódico se ele é um ponto fixo de alguma iterada f^k , ou seja, $f^k(z) = z$.

Definição 2.4. Seja $z \in U$. O conjunto de pontos $\{z, f(z), f^2(z), \dots\} = \{f^n(z); n \geq 0\}$ é chamado órbita positiva de z e é denotado por $\mathcal{O}^+(z)$. Caso f for inversível, o conjunto de pontos $\{z, f^{-1}(z), f^{-2}(z), \dots\} = \{f^n(z); n \leq 0\}$ é chamado órbita negativa de z e é denotado por $\mathcal{O}^-(z)$.

Definição 2.5. Considere a órbita periódica:

$$f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots \mapsto z_n = z_0.$$

Se os pontos z_1, \dots, z_n são todos distintos então o inteiro $n \geq 1$ é denominado período.

Definição 2.6. Seja z_0 um ponto não periódico. Se existe $n > 0$ tal que $f^{n+i}(z_0) = f^i(z_0)$, com $i > 0$, denominaremos z_0 por ponto pré-periódico.

Definição 2.7. Suponha z_0 um ponto periódico de período n . O número $\lambda = (f^n)'(z_0)$ é chamado multiplicador de f em z_0 . Classificamos o ponto periódico z_0 da seguinte forma:

- i) z_0 é atrator se $0 < |\lambda| < 1$;
- ii) z_0 é repulsor se $|\lambda| > 1$;
- iii) z_0 é superatrator se $|\lambda| = 0$;
- iv) z_0 é indiferente se $|\lambda| = 1$.

Definição 2.8. Um ponto periódico z_0 é chamado parabólico se o multiplicador λ em z_0 é igual a 1, desde que f^n não seja a aplicação identidade. Em outras palavras, se λ é uma raiz da unidade e nenhuma iterada de f é a aplicação identidade.

Definição 2.9. Seja z_0 um ponto fixo atrator, ou seja, $f(z_0) = z_0$ e $0 < |\lambda| < 1$. Definimos a bacia de atração $A(z_0) \subset U$ de z_0 como o conjunto de todos os pontos $z \in U$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0.$$

A bacia de atração imediata, denotada por $A_0(z_0)$, é definida como a componente conexa da bacia de atração de z_0 que contém z_0 .

Definição 2.10. Se $\mathcal{O} = \{z_1, \dots, z_n\}$ é uma órbita periódica atratora de período n , definimos a bacia de atração como sendo o conjunto aberto $A \subset U$ contendo todos os pontos $z \in S$ para os quais as iteradas sucessivas $f^n(z), f^{2n}, \dots, f^{kn}, \dots$ convergem para algum ponto de \mathcal{O} . Nesse caso, a bacia de atração imediata $A_0(\mathcal{O}, f)$ é definida como a união das bacias imediatas de cada $z_j \in \mathcal{O}$.

Teorema 2.11. (Linearização de Koenings) Suponha que f tem um ponto fixo atrator em z_0 , com multiplicador λ satisfazendo $0 < |\lambda| < 1$. Então existe uma aplicação conforme $\xi = \varphi(z)$ de uma vizinhança de z_0 sobre uma vizinhança de 0 que conjugua $f(z)$ com a função linear $g(\xi) = \lambda\xi$. A conjugação é única, a menos de multiplicação por um fator constante não nulo.

Demonstração. Suponhamos $z_0 = 0$. Definamos $\varphi_n(z) = \lambda^{-n} f^n(z) = z + b_{n+1} z^{n+1} + \dots$, então φ_n satisfaz

$$\varphi_n \circ f = \lambda^{-n} f^{n+1} = \lambda \varphi_{n+1}.$$

Assim se, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ então $\varphi \circ f = \lambda\varphi$ e temos que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda\xi$ e φ é uma conjugação. Mostaremos a convergência citada acima, ou seja, que $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Note que para $\delta > 0$ pequeno, temos

$$|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2, \quad |z| \leq \delta \text{ e } C > 0 \text{ constante.}$$

Assim

$$|f(z)| \leq |\lambda| |z| + C|z|^2 \leq (|\lambda| + C\delta) |z|,$$

e por indução com $|\lambda| + C\delta < 1$,

$$|f^n(z)| \leq (\lambda + C\delta)^n |z|, \quad |z| \leq \delta.$$

Tome δ pequeno de forma que se $\rho = \frac{(|\lambda|+C\delta)^2}{\lambda} < 1$, obtemos

$$|\varphi^{n+1}(z) - \varphi^n(z)| = \left| \frac{f^n(f(z))\lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{C |f^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{\rho^n C |z|^2}{\lambda}$$

para $|z| \leq \delta$. Desta forma $\varphi^n(z)$ converge uniformemente para $|z| \leq \delta$, e existe a conjugação. Para provarmos a unicidade é suficiente mostrarmos que alguma conjugação de $f(z) = \lambda z$ sobre si mesma é uma constante multiplicada por z . De fato, suponhamos que $\varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ seja tal conjugação, então $\varphi(\lambda z) = \lambda \varphi(z)$. Fazendo as substituições temos $a_n \lambda^n = \lambda a_n$, daí obtemos que $a_n = 0$ se $n \geq 2$, portanto $\varphi(z) = a_1 z$. \square

2.2 Conjuntos de Fatou e Julia

Nesta seção apresentaremos a definição dos conjuntos de Fatou e Julia.

Definição 2.12. *Uma família \mathcal{F} de aplicações de um espaço métrico (X, d) sobre um espaço métrico (Y, d_1) é denominada equicontínua em x_0 se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ e para toda $f \in \mathcal{F}$*

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

A família \mathcal{F} é equicontínua em um conjunto $A \subset X$ se é equicontínua em cada $x \in A$.

Denotamos por $\mathcal{C}(U, V)$ como o conjunto de todas as aplicações contínuas de U em V , sendo U e V subconjuntos de \mathbb{C} .

Definição 2.13. *Um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U, V)$ é denominado normal se cada sequência em \mathcal{F} possui subsequência que ou converge uniformemente em cada compacto $K \subset U$ para $f \in \mathcal{C}(U, V)$ ou diverge localmente uniformemente de V , isto é, se para todo compacto $K \subset U$ e $K' \subset V$, tem-se $f_n(K) \cap K' = \emptyset$, para n suficientemente grande.*

Teorema 2.14. (Teorema de Arzela-Ascoli) *Um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U, V)$ é normal se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas :*

- (i) *Para cada $z \in U$, $\{f(z); f \in \mathcal{F}\}$ tem fecho compacto em V ;*
- (ii) *\mathcal{F} é equicontínua em cada ponto de U .*

A demonstração pode ser encontrada em [4].

Teorema 2.15. *Uma família \mathcal{F} de funções holomorfas em um domínio D limitada por alguma constante fixa é normal.*

Demonstração. Pelo Teorema de Arzela-Ascoli é suficiente provarmos a equicontinuidade dessa família. Seja C a fronteira de um disco fechado de raio r contido em D . Desta forma dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta < \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{\varepsilon r}{4M} \right\}$, onde M é uma constante fixa positiva. Se z, z_0 estão no interior de C , pela fórmula Integral de Cauchy temos

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)} d\xi$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{(\xi-z)} - \frac{1}{(\xi-z_0)} \right) f(\xi) d\xi = \frac{z-z_0}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)} d\xi.$$

Suponha que M seja a constante fixa que limita cada função $f \in \mathcal{F}$, isto é, $|f| \leq M$ em C . Se restringimos z e z_0 ao disco concêntrico menor de raio $\frac{r}{2}$, segue-se que

$$|f(z) - f(z_0)| = \frac{|z-z_0|}{2\pi} \int_C \frac{|f(\xi)|}{|(\xi-z)||(\xi-z_0)|} |d\xi|$$

$$\leq \frac{|z-z_0|}{2\pi} \frac{4M}{r^2} \int_C |d\xi| = \frac{|z-z_0|}{2\pi} \frac{4M}{r^2} (2\pi r) = \frac{4M|z-z_0|}{r}$$

Logo

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{4M |z - z_0|}{r} < \epsilon.$$

e portanto a família é equicontínua. E por decorrência do Teorema de Àrzela-Ascoli é normal. \square

Teorema 2.16. (Teorema da Aplicação de Riemann) *Seja U um domínio simplesmente conexo em $\widehat{\mathbb{C}}$, cuja fronteira contém pelo menos dois pontos, então existe uma aplicação conforme ψ do disco unitário aberto D para U . Podemos levar 0 em qualquer ponto fixo de U , por argumentos específicos sobre $\psi'(0)$ e então a aplicação de Riemann é única.*

Demonstração. Ver a referência [1]. \square

Lema 2.17. *Se $M = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$ é a esfera perfurada três vezes, então M é conformalmente equivalente ao disco unitário D .*

Demonstração. Como D é conformalmente equivalente à parte superior do plano $H = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{Im}(z) > 0\}$, é suficiente encontrar uma aplicação cobertura de H sobre M . Seja $E = \{z : 0 < \text{Re}(z) < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$. Então pelo teorema da aplicação de Riemann existe uma aplicação ψ de E para H fixando $0, 1, \infty$. Denote E^* a reflexão de E sobre o círculo $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Pelo princípio de reflexão de Schwarz, extendemos ψ para uma aplicação conforme de $E \cup E^*$ para $\mathbb{C} \setminus (\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Extendendo ψ a todos $\{0 < \text{Re}(z) < 1, \text{Im}(z) > 0\}$ tomando os valores em $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$. Por reflexão das linhas verticais $\{\text{Re}(z) = n\}$ para n inteiro, extendemos ψ para todo H . Por construção temos que ψ é uma aplicação cobertura de H sobre M . \square

Teorema 2.18. (Teorema de Montel) *Seja U um domínio em $\widehat{\mathbb{C}}$ e \mathcal{F} uma família de aplicações de U para $\widehat{\mathbb{C}}$ que omite três diferentes valores. Isto é, existem valores distintos a, b, c em $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que $f(U) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ para toda f em \mathcal{F} . Então, a família \mathcal{F} é normal.*

Demonstração. Vamos assumir que U é um disco. Por composição com uma transformação de Möbius, assumimos que as funções f em \mathcal{F} não assumem os valores

$0, 1, \infty$. Seja $S = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$. Pelo lema anterior, existe uma aplicação cobertura $\psi : D \rightarrow S$. Seja $\tilde{f} : U \rightarrow D$ um levantamento para f em \mathcal{F} , tal que $\psi \circ \tilde{f} = f$. Então pelo teorema 2.14 $\{\tilde{f} : f \in \mathcal{F}\}$ é uma família normal. Deste modo \mathcal{F} é normal. \square

Definição 2.19. *Sejam $\widehat{\mathbb{C}}$ a esfera de Riemann e $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa. O domínio de normalidade da coleção de iteradas f^n é chamado Conjunto de Fatou para f , denotado por F_f . O seu complementar é chamado Conjunto de Julia, J_f .*

Exemplo 2.20. *Considere $f(z) = z^2$, então $f^n(z) = z^{2^n}$. Observe que f^n converge para 0 em $\{z < 1\}$ e converge para ∞ em $\{z > 1\}$ e o Conjunto de Julia de f é o conjunto $\{z = 1\}$ e seu complementar é o conjunto de Fatou.*

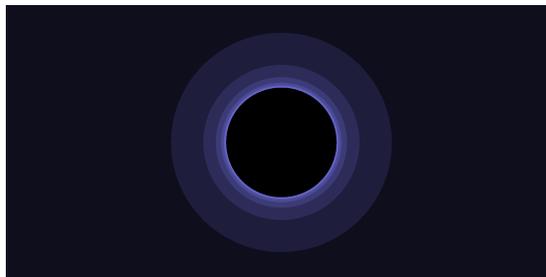


Figura 2.1: Conjunto de Julia para $f(z) = z^2$.

Exemplo 2.21. *Considere $f(z) = z^2 - 0.75$. O Conjunto de Julia de f , $J(f)$, é representado na figura abaixo.*

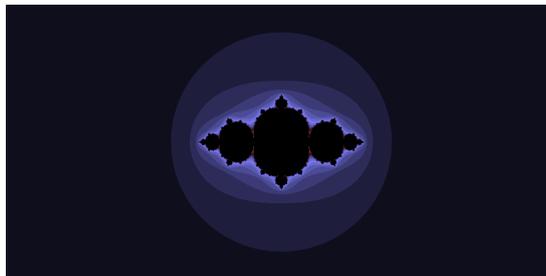


Figura 2.2: Conjunto de Julia para $f(z) = z^2 - 0.75$.

2.3 Propriedades dos Conjuntos de Julia e Fatou

Seja U uma componente n -periódica do conjunto de Fatou. Então exatamente uma das seguintes possibilidades ocorrem:

- i) *Bacia de Atração:* Se para todo $z \in U$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(z) = p$ onde p é um ponto atrator n -periódico em U , então U é uma bacia de atração;

- ii) Bacia Parabólica: Se ∂U contém um ponto p n -periódico, indiferente racional e $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(z) = p$, para todo $z \in U$, então U é uma Bacia Parabólica;
- iii) Anéis de Herman: Suponha que exista um homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow A$ onde $A = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$, $r_2 > r_1 > 0$, tal que

$$\phi(f^k(\phi^{-1}(z))) = e^{2i\pi\alpha z}$$

para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Então U é chamado Anel de Herman;

- iv) Discos de Siegel: U é chamado Disco de Siegel se existe um homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$ onde \mathbb{D} é um disco, tal que

$$\phi(f^k(\phi^{-1}(z))) = e^{2i\pi\alpha z}$$

para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Note que, por definição, discos de Siegel são simplesmente conexos.

Teorema 2.22. (Lema da invariância) *O conjunto de Julia J_f de uma aplicação holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é completamente invariante sobre f . Isto é, z pertence a J_f se, e somente se, $f(z)$ pertence a J_f . O mesmo vale para o conjunto de Fatou.*

Demonstração. Primeiramente note que $f^{-1}(F_f) \subseteq F_f$, pois f é holomorfa e F_f é aberto. Agora suponha que $z_0 \in F_f$, e que uma subsequência $f^{n_j+1} = f^{n_j} \circ f$ converge uniformemente em uma vizinhança de z_0 . Como f é analítica, ela aplica uma vizinhança de z_0 em uma vizinhança de $f(z_0)$. E além disso, f^{n_j} converge uniformemente em uma vizinhança de $f(z_0)$, pois $z_0 \in F_f$. Segue que $f(z_0) \in F_f$, e daí $f(F) \subseteq F$, portanto F é completamente invariante. Como $\widehat{\mathbb{C}} = F_f \cup J_f$, tem-se que J_f também é completamente invariante. \square

Lema 2.23. (Lema da Iteração) *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação holomorfa. Para todo $k > 0$, o Conjunto de Julia J_{f^k} da k -ésima iterada coincide com o Conjunto de Julia J_f .*

Demonstração. O conjunto de Julia de f coincide com o conjunto de Julia de f^k , pois se f^k é normal sobre um conjunto aberto U então f^{nk} também é normal sobre U . Por outro lado se f^{nk} é normal sobre U então f^k também é normal sobre U , e daí segue o resultado. \square

Lema 2.24. *Cada órbita periódica atratora está contida no Conjunto de Fatou F_f . De fato, toda bacia de atração para uma órbita periódica atratora está contida no conjunto de Fatou. Além disso, cada órbita periódica repulsora está contida no conjunto de Julia.*

Demonstração. Primeiro considere um ponto fixo z_0 com multiplicador λ . Se $|\lambda| > 1$, então nenhuma sequência de iteradas de f pode convergir uniformemente próximo de z_0 . Como a primeira derivada de f^n em z_0 é λ^n , temos que f tende ao infinito quando $n \rightarrow \infty$. Se $|\lambda| < 1$ e escolhendo c tal que $|\lambda| < c < 1$ temos pela expansão de Taylor que

$$|f(z) - f(z_0)| < c|z - z_0|,$$

para z suficientemente próximo de z_0 . Desta forma as sucessivas iteradas de f restritas a uma vizinhança de z_0 convergem uniformemente para a função constante $z \rightarrow z_0$. Portanto como um ponto periódico de f é um ponto fixo de alguma iteração f^n segue o resultado. \square

Corolário 2.25. *As órbitas periódicas repulsoras são densas no Conjunto de Julia.*

Demonstração. Vale lembrar que o conjunto de Julia J_f não possui pontos isolados. Assim podemos excluir um quantos pontos de J_f quisermos, sem afetar o argumento. Seja z_0 um ponto qualquer de J_f que não seja ponto fixo nem valor crítico. Por outras palavras assumimos que existem d pré-imagens z_1, z_2, \dots, z_d que são distintas umas das outras e de z_0 , onde $d \geq 2$ é o grau de f . Pelo Teorema da Função Inversa, podemos encontrar d funções holomorfas $z \rightarrow \phi_j(z)$ que são definidas em alguma vizinhança N de z_0 , e que satisfazem $f(\phi_j(z)) = z$, em que $\phi_j(z_0) = z_j$. Para algum $n > 0$ e para algum $z \in N$ a função $f^n(z)$ deve assumir um dos três valores $z, \phi_1(z)$ ou $\phi_2(z)$. Caso contrário a família das funções holomorfas

$$g_n(z) = \frac{(f^n(z) - \phi_1(z))(z - \phi_2(z))}{(f^n(z) - \phi_2(z))(z - \phi_1(z))}$$

em N evitaria os valores $0, 1$ e ∞ , e assim seria uma família normal. Logo $\{f^n|N\}$ também seria uma família normal, contradizendo a hipótese de que N intersepta o conjunto de Julia. \square

Lema 2.26. *Cada ponto periódico parabólico pertence ao Conjunto de Julia.*

Demonstração. Seja w um parâmetro local de uniformização com $w = 0$ correspondendo ao ponto periódico. Assim, alguma iterada f^n corresponde a uma transformação local do w -plano com uma série de potências da forma $w \rightarrow w + a_q w^q + a_{q+1} w^{q+1} + \dots$, onde $q \leq 2$, $a_q \neq 0$. Daí a derivada de ordem q de f^{mk} em 0 é igual a $q! k a_q$ que tende a infinito a medida que $k \rightarrow \infty$. Pelo Teorema da Convergência Uniforme de Weierstrass, segue que nenhuma subsequência de f^{mk_j} pode convergir localmente de forma uniforme a medida que $k_j \rightarrow \infty$. \square

Definição 2.27. *Chamamos grande órbita de um ponto z sob $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, ao conjunto $GO(z, f)$ consistindo de todos os pontos $z' \in \hat{\mathbb{C}}$ cuja órbita em algum momento intercepta a órbita de z . Assim z e z' tem a mesma grande órbita se, e somente se, $f^m(z) = f^n(z')$ para alguma escolha de $m \geq 0$ e $n \geq 0$. Um ponto $z \in \hat{\mathbb{C}}$ será chamado grande órbita finita ou excepcional sobre f se sua grande órbita $GO(z, f) \subset \hat{\mathbb{C}}$ é um conjunto finito.*

Definição 2.28. *O conjunto dos pontos de $\hat{\mathbb{C}}$ que tem grande órbita finita será denotado por $\varepsilon(f)$*

Teorema 2.29. (Transitividade) *Seja z_1 um ponto arbitrário do conjunto de Julia $J \subset \hat{\mathbb{C}}$ e seja N uma vizinhança arbitrária de z_1 . Então a união U de imagens futuras $f^n(N)$ contém todo o conjunto de Julia, e contém todos os pontos de $\hat{\mathbb{C}}$; à exceção de, no máximo dois pontos*

Demonstração. Primeiramente note que o conjunto complementar $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ pode conter no máximo dois pontos, pois se $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ contém mais de dois pontos, usando que $f(U) \subset U$, obtemos pelo Teorema de Montel [2.2](#) que U deve estar contido no conjunto de Fatou, que é impossível, pois $z_1 \in U \cap J$. Novamente usando que $f(U) \subset U$, temos que alguma pré-imagem de um ponto $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus U$ deve pertencer ao conjunto finito $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$. Seguindo

com este argumento, que alguma pré-imagem de iterada z é periódica, concluímos que z é ele mesmo periódico e com grande órbita finita. Assim o conjunto $\varepsilon(f)$ de grande órbita finita é disjunta de J , segue que $J \subset U$. Finalmente, se N é pequeno o suficiente então $N \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \varepsilon(f)$, segue que $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \varepsilon(f)$. \square

Lema 2.30. *Se f é uma aplicação racional de grau 2 ou mais, então o Conjunto de Julia J_f é não vazio.*

Demonstração. Suponha que $J_f = \emptyset$, então f^n é uma família normal sobre todo $\widehat{\mathbb{C}}$, e então existe uma subsequência $\{n_j\}$ tal que $f^{n_j}(z) \rightarrow g(z)$ para alguma função analítica g de $\widehat{\mathbb{C}}$ para $\widehat{\mathbb{C}}$. Se g é constante então a imagem de f^{n_j} está contida em uma pequena vizinhança de um valor constante, o que é impossível, pois f^n converge em $\widehat{\mathbb{C}}$. Se g é não constante então f^{n_j} tem o mesmo número de zeros de g , o que é impossível já que f^n tem grau d^n . \square

Corolário 2.31. *Se o Conjunto de Julia contém um ponto interior, então ele deve ser igual a toda a esfera de Riemann.*

Demonstração. Se J_f tem um ponto interior z_1 , então escolhendo uma vizinhança $N \subset J_f$ de z_1 a união $U \subset J_f$ de imagens futuras de N é densa em J_f , portanto $\overline{U} = \widehat{\mathbb{C}}$, e como J_f é fechado segue que $J_f = \widehat{\mathbb{C}}$. \square

Corolário 2.32. *Se $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ é a bacia de atração de alguma órbita periódica atratora, então o bordo topológico $\partial A = \overline{A} \setminus A$ é igual a todo o Conjunto de Julia. Cada componente do Conjunto de Fatou F ou coincide com alguma componente conexa da bacia A ou é disjunta de A .*

Demonstração. Se N é uma vizinhança de um ponto do conjunto de Julia, então pelo teorema da transitividade [2.3](#) $f^n(N)$ intercepta A , e daí o próprio N intercepta A , e assim temos que $J_f \subset \overline{A}$. Mas J_f é disjunta de A então $J_f \subset \partial A$. Por outro lado, se N é uma vizinhança de um ponto de ∂A então alguma iterada $f^n|_N$ deve ter uma descontinuidade entre A e ∂A , e assim $\partial A \subset J_f$. Finalmente, note que alguma componente conexa do conjunto de Fatou intercepta A , uma vez que não pode interceptar o bordo de A , deve coincidir com alguma componente de A . Portanto segue o resultado. \square

Corolário 2.33. *Se z_0 é um algum ponto do conjunto de Julia $J = J_f$, então o conjunto*

$$\{z \in \widehat{\mathbb{C}}; f^n(z) = z_0 \text{ para algum } n \geq 0\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(z_0)$$

é denso em J_f .

Demonstração. Primeiramente note que $z_0 \notin \varepsilon(f)$, pois $z_0 \in J_f$. Pelo teorema [2.3](#) temos que, se $z_1 \in J_f$ então ele pode ser aproximado por fechados arbitrários que contém z que pertence ao conjunto formado pelas órbitas passadas de z_0 . \square

Corolário 2.34. *Se f é uma aplicação racional de grau 2 ou mais, então J_f não tem pontos isolados.*

Demonstração. Seja $z_0 \in J_f$ e U uma vizinhança aberta de z_0 . Assumiremos que z_0 não é periódico e escolhemos z_1 com $f(z_1) = z_0$, então $f^n(z_0) \neq z_1$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Desde que $z_1 \in J_f$, as iteradas passadas de z_1 são densas em J , então existe um $\xi \in U$ com $f^n(\xi) = z_1$, assim $\xi \in J_f \cap U$ e $\xi \neq z_0$, logo z_0 não é isolado. Agora suponha $f^n(z_0) = z_0$ para algum n minimal. Se z_0 é a única solução de $f^n(z_0) = z_0$ então z_0 deveria ser um ponto fixo superatrator de f^n contradizendo que $z_0 \in J_f$. Portanto existe $z_1 \neq z_0$ com $f^n(z_1) = z_0$, além disso $f^j(z_0) \neq z_1$ para $0 \leq j \leq n$, pois caso contrário isto asseguraria que $0 \leq j \leq n$ e daí $f^j(z_0) = f^{n+j}(z_0) = f^n(z_1) = z_0$ contradizendo a minimalidade de n . Assim como anteriormente, z_1 dever ter uma pré-imagem em $U \cap J_f$ que não pode ser z_0 . \square

Corolário 2.35. *Para toda aplicação racional de grau 2 ou mais, o Conjunto de Julia J_f ou é conexo ou tem uma quantidade não enumerável de componentes conexas.*

Corolário 2.36. *Para uma escolha qualquer de um ponto $z \in J_f$, a órbita futura*

$$\{z, f(z), f^2(z), \dots\}$$

é densa em toda parte de J_f .

Demonstração. Para cada $j > 0$ podemos cobrir J_f por um número finito de conjuntos abertos N_{j_k} de diâmetro menor do que $\frac{1}{j}$ usando a métrica esférica. Para cada N_{j_k} seja U_{j_k} a união das pré-imagens de iteradas de $f^{-n}(N_{j_k})$. Segue do corolário 2.3 que o fechado $\overline{U_{j_k} \cap J_f}$ é igual a todo o conjunto de Julia, em outras palavras, $U_{j_k} \cap J_f$ é um subconjunto denso do conjunto de Julia. Agora se z pertence a interseção desses conjuntos, então a órbita de z intercepta cada N_{j_k} e por isso é denso em J_f . \square

Teorema 2.37. *Seja f uma aplicação racional de grau maior ou igual 2, e seja E um subconjunto compacto da esfera de Riemann com a propriedade que para todo $z \in F_f$, a sequência $\{f^n(z) : n \geq 1\}$ não acumula em nenhum ponto de E . Então dado algum conjunto aberto U que contém J_f temos que $f^{-n}(E) \subset U$ para n suficientemente grande.*

Demonstração. Suponhamos que a conclusão seja falsa, ou seja, existe alguma vizinhança aberta U de J_f , tal que para n em alguma sequência $\{n_1, n_2, \dots\}$ os pontos $z_n \in f^{-n}(E)$ mas não pertence a U . Sem perda de generalidade, supomos que $z_n \rightarrow w$, como U é aberto e $w \notin U$, temos que $w \in F$ pois $J_f \subset U$. Agora seja $\epsilon > 0$ positivo, existe $\delta > 0$ tal que se $|z_n - w| < \delta$ implica que $|f^n(z_n) - f^n(w)| < \epsilon$ e como $f^n(z_n) \in E$, assim mostramos que $f^n(w)$ se acumula em E contradizendo a hipótese. \square

Definição 2.38. *Uma função racional R é pós-crítica finita se toda órbita crítica é finita. Em outras palavras, ou as órbitas críticas são periódicas ou pré-periódicas.*

Os próximos resultados podem ser vistos com detalhes nas referências [3] [8].

Proposição 2.39. *Se R é pós-crítica finita então toda órbita periódica de R é repulsora ou superatratora. De modo geral, suponha que toda órbita crítica de R seja finita ou converge para uma órbita periódica atratora. Então, toda órbita periódica de f é repulsora ou atratora; não há ciclos parabólicos, ciclos de Cremer ou ciclos de Siegel.*

Lema 2.40. *Seja U um anel de Herman. Então, todos os pontos limites de U estão no fecho de algum ponto crítico. ∂U possui duas componentes, cada uma das quais é um conjunto infinito.*

Teorema 2.41. *Seja R uma função pós-crítica finita. Se R não possui nenhum ciclo superatrator então $J_R = \hat{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. R não possui Discos de Siegel e anéis de Herman pois ambos requerem que as órbitas dos pontos críticos sejam infinitas, uma vez que as órbitas dos pontos críticos é densa em suas fronteiras. O mesmo acontece para uma componente parabólica, ou seja, R não as possui, uma vez que contém um ponto crítico, as iterações desse ponto são distintas. Já uma componente de atração, que não é superatratora, tem um ponto crítico com órbita infinita. Logo R também não possui componentes de atração. A única possibilidade é R possuir uma componente superatratora mas por hipótese isso não ocorre. Portanto $F_R = \emptyset$ e $J_R = \hat{\mathbb{C}}$. \square

Capítulo 3

Funções Racionais

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados para funções racionais com relação aos conjuntos de Fatou e de Julia que serão de grande importância para a sequência desse trabalho.

Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ polinômios complexos de grau d_1 e d_2 , respectivamente. Considere uma função racional $R(z) = P(z)/Q(z)$, onde o grau de R é o $\max\{d_1, d_2\}$.

3.1 A Fórmula de Riemann-Hurwitz

Definição 3.1. *Seja $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ um domínio. Se o complementar de D consiste de n componentes conexas, então D é chamado n -conexo e n é dito número de conectividade de D . Equivalentemente, D é n -conexo se sua fronteira possui n componentes.*

Exemplo 3.2. *Seja $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ um anel tal que $A = \{z : r < |z| < 1\}$. Logo A é um domínio 2-conexo.*

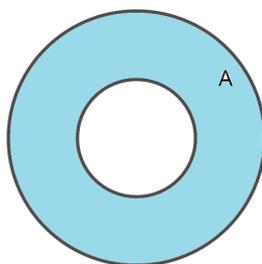


Figura 3.1: Domínio 2-conexo.

Se $f(z) = w_0 + a_k(z - z_0)^k + \dots$, $a_k \neq 0$, é uma função analítica em uma vizinhança de z_0 , então existem vizinhanças simplesmente conexas U de z_0 e V de w_0 , tais que todo ponto

em V tem exatamente k pré-imagens em U , contadas com multiplicidade. Denotaremos tal fato por

$$f : U \xrightarrow{k:1} V.$$

Definição 3.3 ([15]). *Uma função analítica de um domínio D sobre um domínio G é chamada de própria, se existe um inteiro positivo k tal que*

$$f : D \xrightarrow{k:1} G.$$

O número k é chamado grau topológico de f .

Uma função própria $f : D \xrightarrow{k:1} G$ é dita não-ramificada se não possui pontos críticos, e é dita ramificada caso contrário. Uma função própria não ramificada é localmente unívoca e conforme, isto é, uma função própria de grau 1.

Uma função própria $f : D \xrightarrow{k:1} G$ sempre mapeia pontos de fronteira em pontos de fronteira no seguinte sentido, dada qualquer sequência de pontos $(z_n) \in D$ tendendo para algum ponto da fronteira de D , a sequência de imagens $f(z_n)$ possui todos os seus pontos limite na fronteira de G . Equivalentemente, pré-imagens de conjuntos compactos são compactos.

Teorema 3.4. *Uma função analítica $f : D \rightarrow G$ que mapeia $\partial(D)$ em $\partial(G)$ é uma função própria.*

Demonstração. Ver na referência [15], página 5. □

Obs 3.5. *Seja $f : D \xrightarrow{k:1} G$ uma função própria tal que D e G tem números de conectividade m e n , respectivamente, então $n \leq m \leq kn$ (Veja [15] para mais detalhes).*

Um corte transversal em um domínio D é um arco de Jordan contido em D , exceto seus pontos extremos, que pertencem à fronteira de D . A propriedade mais importante de um corte transversal γ é que ele divide um domínio D conexo em dois domínios, cujos números de conectividade somados é $m+1$, ou então não divide D , e $D \setminus \gamma$ é $(m-1)$ -conexo. Mais detalhes podem ser vistos em [9].

Os seguintes resultados [3.6] e [3.7] podem ser vistos com mais detalhes em [15].

Lema 3.6. *Suponha D um domínio m -conexo, dividido por k cortes transversais disjuntos (em D), em l domínios com números de conectividade m_1, \dots, m_l . Então*

$$\sum_{j=1}^l (m_j - 2) = m - 2 - k. \quad (3.1)$$

Demonstração. A prova seguirá por indução. Para $k = 1$, $l = 1$ ou $l = 2$, a afirmação é equivalente a propriedade fundamental do cortes transversais. Suponha a afirmação verdadeira para $k - 1$. Vejamos que a afirmação é verdadeira para k . Suponha que um

dos cortes divide D . Então, temos dois subdomínios, cada um dividido por menos de k cortes. As somas da equação 3.1 fornece a afirmação. Se, no entanto, o domínio não estiver dividido, para qualquer corte, podemos considerar o domínio $D \setminus \gamma$ como dividido pelos $k - 1$ cortes. O lado esquerdo da igualdade 3.1 não muda para a nova configuração, e isso também é válido para o lado direito, já que m e k são diminuídos em 1. Isso prova a afirmação no caso de k cortes. \square

Teorema 3.7. (Fórmula de Riemann-Hurwitz) *Suponha R uma aplicação própria de grau k de um domínio m -conexo D sobre um domínio n -conexo G e que R possui exatamente r pontos críticos em D , contados com a multiplicidade. Então*

$$m - 2 = k(n - 2) + r.$$

Demonstração. Para provarmos a afirmação, levamos D e G por meio de aplicações de grau m e n , de acordo com o Teorema do Mapeamento de Riemann, nos domínios D^* e G^* , cujas componentes de limite são curvas de Jordan ou pontos isolados. Isso induz uma função própria de grau k de D^* para G^*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & G \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ D^* & \xrightarrow{f^*} & G^* \end{array}$$

que é analítica em $\overline{D^*}$. Podemos assim assumir que f é analítica em D . Além disso, assumimos que f é não ramificado e reduzirá o caso de f ser ramificado ao caso anterior.

A prova seguirá por indução sobre n . Para $n = 1$, todo inverso local de f é analiticamente contínuo ao longo de qualquer caminho em G e, portanto, é analítico em G pelo Teorema da Monodromia. Portanto f é uma função conforme de D para G . Isso prova que $k = m = 1$ e que a Fórmula de Riemann-Hurwitz é válida. Observe ainda que $r = 0$.

Suponha $n > 1$. Por meio de um corte transversal diminuimos o número de conectividade de G . Então $G^* = G \setminus \gamma$ é $(n-1)$ -conexo, e as k pré-imagens de γ (em D) são cortes transversais disjuntos (o fato de f não ser ramificado e analítico em \overline{D} está sendo usado aqui), e estes cortes dividem o domínio D em domínios D_1, \dots, D_l . Cada D_j é m_j -conexo e f própria de grau k_j de D_j para G^* . Em particular, a Fórmula de Riemann-Hurwitz vale para (f, D_j, G^*) , isto é,

$$m_j - 2 = k_j((n - 1) - 2),$$

e, além disso, pelo lema anterior

$$m - 2 = \sum_{j=1}^l (m_j - 2) + k = \sum_{j=1}^l (k_j(n - 3)) + k = k(n - 2).$$

Agora, se f possui pontos críticos, consideramos o domínio G^* $(n+s)$ -conexo, com G perfurado nos valores críticos distintos w_1, \dots, w_s . Então f é uma função própria não-ramificada de grau k de $D^* = f^{-1}(G^*)$ para G^* . Para calcular o número de conectividade m^* de D^* observamos que cada w_j tem k pré-imagens, p_j das quais são disjuntas, e as multiplicidades correspondentes são q_i^j . Como $r = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{p_j} (q_i^j - 1)$ então $\sum_{j=1}^s p_j = ks - r$, e o número de conectividade de D^* é $m^* = m + ks - r$. A Fórmula de Riemann-Hurwitz, para o caso não-ramificado (f, D_j, G^*) , nos dá

$$m + ks - r - 2 = k(n + s - 2).$$

Portanto a Fórmula de Riemann-Hurwitz é válida para o caso ramificado. □

3.2 Domínios Regulares

Seja f uma função holomorfa em uma vizinhança de $z = 0$ dada por

$$f(z) = az^k + a_1z^{k+1} + \dots, \quad a \neq 0, \quad k > 1.$$

A sequência (f^n) é definida e normal em alguma vizinhança da origem e converge uniformemente para 0. Considere a equação de Böttcher

$$\phi \circ f = a(\phi)^k. \tag{3.2}$$

O Teorema à seguir pode ser visto com detalhes em [4] e [15].

Teorema 3.8. *A equação de Böttcher (3.2) tem uma solução local dada por*

$$\phi(z) = z + a_2z^2 + \dots$$

Demonstração. A prova da unicidade fornece simultaneamente uma idéia de como provar a existência de forma construtiva. Se ϕ é alguma solução em $|z| < r$, onde assumimos que $|f(z)| < |z|/2$. Da iteração da equação 3.2 temos

$$\phi(z) = \sqrt[k^n]{\frac{\phi(f^n(z))}{a^{1+\dots+k^{n-1}}}} = z \sqrt[k^n]{\frac{\phi(f^n(z))}{z^{k^n} a^{1+\dots+k^{n-1}}}},$$

onde a segunda raiz é determinada exclusivamente por seu valor em $z = 0$: $\sqrt[k^n]{1} = 1$.

Como

$$\frac{\phi(f^n(z))}{f^n(z)} \longrightarrow \phi'(0) = 1$$

quando $n \longrightarrow \infty$, a unicidade decorre de

$$\phi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k^n]{\frac{f^n(z)}{a^{1+\dots+k^{n-1}}}} = z \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k^n]{\frac{f^n(z)}{z^{k^n} a^{1+\dots+k^{n-1}}}}.$$

Na prova da existência assumimos que $a = 1$, pois, caso contrário, podemos substituir f pelo seu conjugado $cf(z/c)$ onde $c^{k-1} = a$. Tomando r suficientemente pequeno tal que

$$|h(z)| = \left| \frac{f(z)}{z^k} - 1 \right| \leq \frac{1}{2},$$

para $z \in D = \{z; |z| < r\}$, onde $r^{k-1} \leq \frac{2}{3}$. Então $0 < |f(z)| < r$ em $D \setminus \{0\}$ e

$$\phi_n(z) = \sqrt[k^n]{f^n(z)} = z \sqrt[k^n]{\frac{f^n(z)}{z^{k^n}}} = z + \dots$$

é bem definido e holomorfa em D . Da desigualdade elementar

$$\left| \sqrt[m]{1+u} - 1 \right| \leq \frac{1}{m}, \text{ para } |u| \leq \frac{1}{2},$$

segue que $|1+u|^{-1+\frac{1}{m}} \leq 2$. Então

$$\left| \frac{\phi_{n+1}(z)}{\phi_n(z)} - 1 \right| = \left| \sqrt[k^{n+1}]{1+h(f^n(z))} - 1 \right| \leq k^{-n-1}.$$

Assim, o produto

$$z \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_{n+1}(z)}{\phi_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(z)$$

converge uniformemente em D e seu limite fornece uma solução para a equação 3.2. O fato de ϕ satisfazer a equação 3.2 segue de $(\phi_{n+1})^k = \phi_n \circ f$. \square

Definição 3.9. ϕ é chamada função de Böttcher.

Definição 3.10. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ e u, v possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Se*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

então f é dita harmônica.

Definição 3.11. *Sejam D um domínio e z_0 um ponto no interior de D . Uma função g harmônica em $D \setminus \{z_0\}$ é dita função de Green para D com pólo em z_0 se satisfaz as seguintes condições:*

- g é contínua em $\overline{D} \setminus \{z_0\}$ com valores de fronteira iguais à 0;
- z_0 é uma singularidade removível de $g(z) + \log |z - z_0|$ (No caso $z_0 = \infty$ basta substituir $|z - z_0|$ por $1/|z|$).

Há no máximo uma função de Green $g(z, z_0, D)$, como pode ser visto pela aplicação do Princípio do Máximo. A função de Green não precisa existir, isso depende apenas de D e não de z_0 . Se existir, D é chamado regular.

Definição 3.12. *Uma sequência (D_n) de domínios regulares é chamada de exaustão regular de um domínio D se*

- i) $D_n \subset D_{n+1}$,
- ii) $\overline{D_n} \subset D$,
- iii) $\bigcup_{n \geq 0} D_n = D$.

Obs 3.13. *Todo domínio possui uma exaustão regular por meio de domínios limitados por curvas de Jordan. (Veja [15]).*

Lema 3.14. *Seja V um domínio de Böttcher. Suponha $D_0 = \{z : |z| < r\}$ uma vizinhança invariante do ponto fixo $z = 0$, isto é, $f(\overline{D_0}) \subset D_0$. Seja D_n a componente de $f^{-n}(D_0)$ contendo D_0 . Então a sequência (D_n) é uma exaustão regular de V . Além disso, V é simplesmente conexo se e somente se cada D_n o é.*

Demonstração. Seja $D_n^* = f^{-n}(D_0) \cap V$. Como $f^n \rightarrow 0$ uniformemente localmente em V então $\bigcup_n D_n^* = V$. Se E é um subconjunto compacto e conexo de V interseção com D_0 , então, pelo Teorema de Heine-Borel, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \subset D_n^*$ e, portanto, $E \subset D_n$. Isso também é verdadeiro para algum subconjunto compacto E de V , pois tal conjunto pode ser incorporado em algum subconjunto como descrito acima. Portanto (D_n) é uma exaustão de V e sua regularidade segue do fato de que D_n é limitado por curvas de Jordan. Além disso, como (D_n) é uma sequência crescente, $V = \bigcup_{n \geq 0} D_n$ é simplesmente conexo se cada D_n o é.

Por outro lado, se V é simplesmente conexo mas D_n não é, então D_n tem alguma componente complementar C contida em V . Na fronteira de C temos que $|f^n(z)| = r$ e $|f^n(z)| < r$ no interior de C pelo Princípio do Máximo. No domínio $D_n \cup C$ temos que $|f^n(z)| \leq r$, e de fato $|f^n(z)| < r$, contradizendo a maximalidade de D_n . \square

3.3 Dinâmica de Funções Racionais

Proposição 3.15. *Seja $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ aberto. Então $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ é conexo se e somente se cada componente de D é simplesmente conexa.*

Demonstração. Suponha inicialmente que o complementar K de D seja desconexo. Então, podemos separar K por uma curva de Jordan γ em D e, como γ é conexa, ela deve estar em alguma componente de D . Obviamente esta componente não é simplesmente conexa. Assim, se cada componente de D for simplesmente conexa, K será conexo.

Agora, suponha que K seja conexo e considere V uma componente qualquer de D . Tome Q como sendo a união de K e todas as outras componentes de D , à saber D_n , distintas de V . Então Q , que é o complementar de V , é compacto. Como $\partial D_n \subset K$ e cada conjunto $K \cup D_n$ é conexo, Q é conexo. Como um domínio é conexo se e só se seu complementar é simplesmente conexo, concluímos que V é simplesmente conexo. \square

Teorema 3.16. *Seja R uma função racional. Então o conjunto de Julia (J_R) é conexo se e somente se cada componente do conjunto de Fatou (F_R) é simplesmente conexa.*

Demonstração. Segue do Teorema anterior. \square

Teorema 3.17. *Seja R uma aplicação racional de grau ≥ 2 . Suponha que F_0 é uma componente completamente invariante de $F(R)$. Então:*

- i) $\partial F_0 = J(R)$;
- ii) F_0 ou é simplesmente conexo ou é infinitamente conexo;
- iii) todas as outras componentes de $F(R)$ são simplesmente conexas;
- iv) F_0 é simplesmente conexo se, e somente se, $J(R)$ é conexo.

Demonstração. Como F_0 é completamente invariante, o mesmo ocorre com seu fecho $\overline{F_0}$. Assim, pela minimalidade de J_R , $J_R \subset \overline{F_0}$. Como J_R é disjunto de F_0 , concluímos que $J_R = \partial F_0$. Portanto (i) está provado.

Para provarmos (ii), assumimos que F_0 é uma componente completamente invariante com número de conectividade c e denotamos as componentes do complementar de F_0 por E_1, \dots, E_c . Pela proposição 3.2.6 em [2], existe m tal que cada componente E_j é completamente invariante sob R^m . Como J_R é infinito, um dos E_j digamos E_1 , é infinito. A minimalidade de $J(R^m)$ implica que o mesmo está em E_1 , e assim

$$J(R) = J(R^m) \subset E_1.$$

Por (i), cada E_j encontra J_R ; assim $c = 1$ e (ii) segue.

Para provar (iii), observe que $\overline{F_0} = J_R \cup F_0$. Como o fecho de um conjunto conexo é conexo, $\overline{F_0}$ é conexo. Pela proposição 3.15, as componentes do complementar são simplesmente conexas e como essas componentes são componentes de F_R , exceto F_0 , (iii) segue. Agora, como a fronteira de um conjunto é conexa se e somente se o conjunto for simplesmente conexo, e por (i), segue (iv). \square

Corolário 3.18. *Seja R uma função racional de grau ≥ 2 . Suponha F_R conexo, então:*

- i) F_R é simplesmente conexo e J_R é conexo; ou*
- ii) F_R é infinitamente conexo e J_R tem um número infinito de componentes.*

Um ponto fixo que é repulsor ou parabólico, com multiplicador igual à 1, é dito ponto fixo de repulsão fraca.

Dizemos que um conjunto $X \subset C$ separa dois conjuntos $A, B \subset C$ se A e B estão contidos em componentes conexas diferentes de $C \setminus X$.

Teorema 3.19. *Seja R uma função racional de grau ≥ 2 . Então:*

- i) Se R tem uma bacia atratora ou uma bacia parabólica que não são simplesmente conexas, então existem dois pontos fixos de repulsão fraca que são separados por uma órbita da bacia.*
- ii) Se R tem um anel de Herman, então existem dois pontos fixos de repulsão fraca que são separados por uma órbita do anel.*
- iii) Se D é uma componente conexa de Fatou (F_R) tal que D não é simplesmente conexa e $f(D)$ é simplesmente conexa, então toda componente de $\hat{C} \setminus D$ contém um ponto fixo de repulsão fraca.*

Demonstração. Ver referência [12], página 258. □

Teorema 3.20. *Se o conjunto de Julia (J_R) de uma função racional R é desconexo, então existem dois pontos fixos de R tal que cada um deles é repulsor ou parabólico, com multiplicador 1, e pertencem a diferentes componentes do conjunto de Julia(J_R).*

Demonstração. Suponha J_R desconexo. Então existe uma componente de F_R que não é simplesmente conexa. Se uma componente periódica não é simplesmente conexa, então os itens (i) ou (ii) do Teorema anterior se aplica. Se todas as componentes periódicas são simplesmente conexas, existe uma componente U pré-periódica de modo que U não é simplesmente conexa e $R(U)$ é simplesmente conexa. Portanto, (iii) do Teorema anterior se aplica. De qualquer maneira, existem dois pontos fixos repulsores que são separados por F_R . □

Teorema 3.21. *Seja R uma função racional de grau ≥ 2 e seja z_0 um ponto fixo (super)atrator de R . Se todos os pontos críticos de R estão na bacia de atração imediata $A_0(z_0)$, então J_R é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. A prova do teorema pode ser vista com detalhes em [2], página 227. □

Capítulo 4

Conexidade do Conjunto de Julia de Funções Racionais

4.1 Componente Completamente Invariante

Considere uma função racional $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ da forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{d_1} a_j z^j}{\sum_{j=0}^{d_2} b_j z^j},$$

onde P e Q são polinômios que não possuem fator comum.

Seja $D_0(z_0) = \mathbb{D}_r(z_0)$ onde $\mathbb{D}_r(z_0) = \{z; |z - z_0| < r\} \subset A_0(z_0)$. No caso que $z_0 = \infty$ temos que $D_0(z_0) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_r = \{z; |z| > r\}$. Denote por $D_{k+1}(z_0)$, $k \in \mathbb{N}$, a componente conexa de $R^{-1}(D_k(z_0))$ que contém z_0 . Observe que $D_k(z_0) \subset D_{k+1}(z_0)$ e $\bigcup_{k=0}^{\infty} D_k(z_0)$ forma uma exaustão regular de $A_0(z_0)$.

Escreveremos D_k em vez de $D_k(z_0)$ sempre que estiver claro qual ponto fixo está sendo considerado.

Lema 4.1. *Seja z_0 um ponto fixo atrator de R . Então:*

a) *O número de conectividade m_{D_ν} satisfaz :*

i) $m_{D_{\nu+1}} \geq m_{D_\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

ii) *Se $m_{D_k} \geq 2$ então $m_{D_{\nu+1}} > m_{D_\nu}$, para todo $\nu \geq k$.*

b) As seguintes relações são equivalentes :

- i) $A_0(z_0)$ é simplesmente conexo ;
- ii) $D_\nu(z_0)$ é simplesmente conexo , $\nu \in \mathbb{N}$;
- iii) $k_{D_\nu} = r_{D_\nu} + 1$, $\nu = 1, 2, \dots$, onde k_{D_ν} é o grau topológico e r_{D_ν} é o número de pontos críticos em D_ν , contados com multiplicidade.

Demonstração. a) i) Segue da Definição de $D_{\nu+1}$.

ii) Considere $R : D_\nu \rightarrow D_{\nu-1}$. Pela Fórmula de Riemann-Hurwitz temos

$$m_{D_\nu} - 2 = k_{D_\nu}(m_{D_{\nu-1}} - 2) + r_{D_\nu}.$$

Suponhamos $m_{D_1} \geq 2$. Vejamos que $r_{D_1} \geq 2$. De fato, suponha o contrário, ou seja, que $r_{D_1} < 2$. Pela Fórmula de Riemann-Hurwitz temos

$$m_{D_1} = r_{D_1} - k_{D_1} + 2.$$

Caso $r_{D_1} = 0$ temos que $m_{D_1} < 2$, absurdo. Agora, caso $r_{D_1} = 1$ temos que $m_{D_1} = 3 - k_{D_1}$ o que implica $k_{D_1} \leq 1$, o que também é absurdo pois devemos ter, pela observação 3.5, $k_{D_1}m_{D_0} \geq m_{D_1}$. Portanto $r_{D_1} \geq 2$. Como $D_{\nu-1} \subset D_\nu$, $r_{D_\nu} \geq 2$ e $m_{D_\nu} \geq 2$ para todo $\nu \geq 1$. Daí,

$$(m_{D_\nu} - 1)(k_{D_{\nu+1}} - 1) + r_{D_{\nu+1}} > 0$$

donde segue o resultado.

b) (i) \Leftrightarrow (ii) Segue do Lema 3.14.

(ii) \Leftrightarrow (iii) Segue diretamente da Fórmula de Riemann-Hurwitz.

□

Do lema anterior, temos que $m_{D_\nu} = 1$ para todo ν ou $m_{D_\nu} \rightarrow \infty$ se $\nu \rightarrow \infty$, ou seja, a bacia de atração imediata de um ponto fixo atrator é simplesmente conexa ou é infinitamente conexa. Daí, se $A_0(z_0)$ for infinitamente conexa, J_R é desconexo, ou seja, se existe $k \geq 1$ tal que o número de pontos críticos contidos em $D_k(z_0)$ é pelo menos igual ao número de pré-imagens de z_0 , contadas com a multiplicidade, J_R é desconexo.

Teorema 4.2. *Seja R uma função racional de grau $d \geq 2$ e seja z_0 um ponto fixo atrator. Suponhamos que exista $\hat{\nu} \in \mathbb{N}$ tal que $D_{\hat{\nu}}(z_0)$ seja simplesmente conexo contendo todas as d pré-imagens de z_0 . Então J_R é conexo se, e somente se, $A(z_0)$ contém exatamente $d - 1$ pontos críticos.*

Demonstração. (\Leftarrow) Note que se existir $\hat{\nu} \in \mathbb{N}$ tal que $D_{\hat{\nu}}(z_0) \subset A_0(z_0)$ contém todas as d pré-imagens de z_0 então $A_0(z_0) = A(z_0)$ e, além disso, é uma componente completamente invariante de F_R . Pelo Teorema 3.17, todas as outras componentes de F_R são simplesmente conexas. Mostraremos que $A(z_0)$ também é simplesmente conexa. Considere $R : D_{\hat{\nu}} \rightarrow D_{\hat{\nu}-1}$. Como $D_{\hat{\nu}}$ é simplesmente conexo e $D_{\hat{\nu}-1} \subset D_{\hat{\nu}}$, pelo Lema 4.1, $m_{D_{\hat{\nu}-1}} = 1$. Daí, segue pela Fórmula de Riemann-Hurwitz que $r_{D_{\hat{\nu}}} = d - 1$, ou seja, $D_{\hat{\nu}}$ contém exatamente $d - 1$ pontos críticos. Se nenhum outro ponto crítico adicional estiver em $A(z_0)$ não estará em nenhum D_ν pois $A(z_0) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_\nu(z_0)$ e assim pela Fórmula

de Riemann-Hurwitz todos os D'_ν s são simplesmente conexos. Segue, pelo Lema 4.1, que $A_0(z_0)$ é simplesmente conexa o que implica $A(z_0)$ simplesmente conexa. Logo J_R é conexo.

(\Rightarrow) Se existir algum ponto crítico adicional em $A_0(z_0)$ que não está em D_ν , pela observação anterior, J_R é desconexo. \square

Teorema 4.3. *Seja $R = \frac{a_{d_1}P}{Q}$, onde P e Q são polinômios mônicos de grau d_1 e d_2 , respectivamente, tal que $d_1 \geq d_2 + 2$. Suponha que P possua todas as suas raízes em $\overline{\mathbb{D}}_{r_1}$ e Q possua todas as suas raízes em $\{r_2 < |z| \leq r_3\}$ onde $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Se os raios satisfazem:*

$$\frac{r_2(r_2 + r_3)^{d_2}}{(r_2 - r_1)^{d_1}} \leq |a_{d_1}|,$$

então $A(\infty) = A_0(\infty)$. Além disso, se todas as raízes de P e Q são simples e estão nos intervalos $(-r_1, r_1)$ e $(r_2, r_3]$, respectivamente, $a_{d_1} \in \mathbb{R}$ e $R([-r_1, r_1]) \subset [-r_1, r_1]$, então J_R é conexo.

Demonstração. Afirmamos que $|R(z)| > |z|$ para $|z| > r_2$. De fato, como as raízes de P estão em $\overline{\mathbb{D}}_{r_1}$ e as raízes de Q estão em $\{r_2 < |z| \leq r_3\}$ então $|P(z)| > (|z| - r_1)^{d_1}$ e $|Q(z)| < (|z| + r_3)^{d_2}$. Observe ainda que $(|z| - r_1)^{d_1} > (r_2 - r_1)^{d_1}$ e $|z|(|z| + r_3)^{d_2} > r_2(r_2 + r_3)^{d_2}$. Daí, segue que

$$\frac{|R(z)|}{|z|} = \frac{|a_{d_1}||P(z)|}{|z||Q(z)|} > \frac{|a_{d_1}|(|z| - r_1)^{d_1}}{|z|(|z| + r_3)^{d_2}} > \frac{|a_{d_1}|(r_2 - r_1)^{d_1}}{r_2(r_2 + r_3)^{d_2}} > 1.$$

Agora, observe que $R^n(z) \rightarrow \infty, |z| > r_2$. Com efeito, se $R^n(z) \not\rightarrow \infty$, $R^n(z)$ é limitada e, portanto possui subsequência convergente. Suponhamos R^{n_j} uma subsequência convergente de $R^n(z)$ com $\lim_{n_j \rightarrow \infty} R^{n_j}(z) = z_0, |z_0| > r_2$. Daí, $R(\lim_{n_j \rightarrow \infty} R^{n_j}(z)) = R(z_0)$.

Mas, por outro lado, $R(\lim_{n_j \rightarrow \infty} R^{n_j}(z)) = \lim_{n_j \rightarrow \infty} R^{n_j+1}(z) = z_0$. Assim, $|R(z_0)| = |z_0|$, o que é absurdo, pela afirmação acima. Portanto $R^n(z) \rightarrow \infty, |z| > r_2$ e todos os pólos de R estão em $A_0(\infty)$ donde concluímos que $A(\infty) = A_0(\infty)$.

À seguir, mostraremos que $A(\infty)$ contém exatamente $d_1 - 1$ pontos críticos. Como, por hipótese, todas as raízes de P e Q são simples e localizadas em $(-r_1, r_1)$ e $[r_2, r_3)$, respectivamente, podemos escrever

$$P(z) = (z - w_1)(z - w_2)\dots(z - w_{d_1})$$

$$Q(z) = (z - q_1)(z - q_2)\dots(z - q_{d_2})$$

onde $P(w_i) = 0$ e $Q(q_j) = 0$.

Observe que

$$R'(z) = a_{d_1} \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

e seu grau é $d_1 + d_2 - 1$. Daí, ∞ é uma raiz de R' de multiplicidade $d_1 - d_2 - 1$.

Considere o numerador de R' com $a_{d_1} \in \mathbb{R}_+$. Note que o numerador de R' pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} (P'Q - PQ') &= [(z - w_2)\dots(z - w_{d_1}) + \dots + (z - w_1)\dots(z - w_{d_1-1})] Q \\ &\quad - [(z - q_2)\dots(z - w_{d_2}) + \dots + (z - q_1)\dots(z - q_{d_2-1})] P. \end{aligned}$$

Daí, conclui-se que R' possui uma raiz entre duas raízes consecutivas de Q e uma raiz entre a maior raiz de Q e o infinito. Portanto $A(\infty)$ possui $d_1 - d_2 - 1 + d_2 = d_1 - 1$ pontos críticos. Também conclui-se que R' possui uma raiz entre duas raízes consecutivas de P , ou seja, R possui $d_1 - 1$ pontos críticos em $[-r_1, r_1]$. Como R possui no máximo $2d_1 - 2$ pontos críticos, então $A(\infty)$ possui exatamente $d_1 - 1$ pontos críticos. Pela invariância de R em $[-r_1, r_1]$ e pelo Teorema 4.2, J_R é conexo.

□

4.2 Conexidade da Bacia de Atração e do Conjunto de Julia

Na seção anterior apresentamos resultados que garantem a conexidade do conjunto de Julia quando $A(z_0) = A_0(z_0)$. Nesta seção, ao contrário da seção anterior, apresentamos resultados que garantem a conexidade do conjunto de Julia mas $A(z_0) \neq A_0(z_0)$ não é necessariamente satisfeito.

Seja w pré-imagem de z_0 sob uma função racional R . Então definimos $U_{k+1}(z_0, w)$ como sendo a componente de $R^{-1}(D_k(z_0))$ contendo w . Observe que $U_k(z_0, z_0) = D_k(z_0)$. Se w_1, w_2, \dots, w_l são pré-imagens de z_0 , $U_n(z_0, w_1), \dots, U_n(z_0, w_l)$ são disjuntos e $U_{n+1}(z_0, w_1) = \dots = U_{n+1}(z_0, w_l)$ então dizemos que esses conjuntos se fundem. Denotamos por $W_j^k(z_0)$ a j -ésima componente de $R^{-k}(D_0(z_0))$ com a convenção $W_0^k(z_0) := D_k(z_0)$.

Quando estiver claro qual ponto fixo z_0 está sendo considerado, escreveremos D_k em vez de $D_k(z_0)$, $U_k(w)$ em vez de $U_k(z_0, w)$ e W_j^k em vez de $W_j^k(z_0)$.

Definição 4.4. *Seja z_0 um ponto fixo atrator de uma função racional R . Dizemos que um ponto z tende à z_0 via uma pré-imagem de z_0 se houver uma iteração de z que está em algum $U_k(w)$ antes de estar em D_k , isto é, existem $j \in \mathbb{N}$, $w \neq z_0$ tal que $R(w) = z_0$ e k tais que*

$$R^j(z) \in U_k(w) \neq D_k.$$

No caso $z_0 = \infty$ dizemos que z tende ao ∞ via um pólo.

Lema 4.5. *Seja z_0 um ponto fixo atrator e seja A uma componente de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_j W_j^n(z_0)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então $R^n(A \cap J_R) = J_R$.*

Demonstração. Defina $W^n = \bigcup_j W_j^n(z_0)$. Suponha que exista um ponto $z_1 \in J_R$ tal que $z_1 \notin R^n(A \cap J_R)$. Por uma composição com uma Transformação de Möbius, podemos supor $z_0 = 0$ e $z_1 = \infty$. Da definição de W_j^n e de $D_0 = D_r(0) = \{z; |z| < r\}$, segue que

$$|R^n(z)| < r, \quad z \in W^n.$$

Por hipótese, ∞ e todas as suas pré-imagens estão em J_R . Além disso, $\infty \notin R^n(A \cap J_R)$ e portanto $\infty \notin R^n(A)$, pois, caso $\infty \in R^n(A)$ existiria $z \in A$ tal que $R^n(z) = \infty$ e $z \in J_R$. Daí, $\infty \in R^n(A \cap J_R)$, o que é contradição. Como $\infty \notin R^n(A)$ nenhum pólo de R está em $W^n \cup A$. Então R^n é holomorfa em $W^n \cup A$.

Note que $W^n \cup A = \text{int}(\overline{W^n \cup A})$. Com efeito, se $z \in \text{int}(\overline{W^n \cup A})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z, \varepsilon) \subset \overline{W^n \cup A}$, ou seja, $B(z, \varepsilon) \subset \overline{W^n}$ ou $B(z, \varepsilon) \subset A$. Se $B(z, \varepsilon) \subset A$, é óbvio que $z \in W^n \cup A$. Por outro lado, se $B(z, \varepsilon) \subset \overline{W^n}$ então $B(z, \varepsilon) \subset \partial W^n \cup W^n$. Caso $B(z, \varepsilon) \subset W^n$, $z \in W^n \cup A$. Caso contrário, $B(z, \varepsilon) \cap A \cup (\hat{\mathbb{C}} \setminus (W^n \cup A)) \neq \emptyset$. Ou ainda, $B(z, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ou $B(z, \varepsilon) \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus (W^n \cup A)) \neq \emptyset$. Mas $B(z, \varepsilon) \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus (W^n \cup A)) \neq \emptyset$ contraria o fato de R^n ser holomorfa em $W^n \cup A$. Portanto $z \in W^n \cup A$. Agora, se $z \in W^n \cup A$, então $z \in W^n$ ou $z \in A$. Se $z \in W^n$ é óbvio que $z \in \text{int}(\overline{W^n \cup A})$. Se $z \in A$ então $z \in \text{int}A$ ou $z \in \partial A$. Caso $z \in \text{int}A$ é evidente que $z \in \text{int}(\overline{W^n \cup A})$. Caso contrário, se $z \in \partial A$, para todo $\varepsilon > 0$ temos que $B(z, \varepsilon) \cap W^n \neq \emptyset$ ou $B(z, \varepsilon) \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus (W^n \cup A)) \neq \emptyset$. Mas $B(z, \varepsilon) \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus (W^n \cup A)) \neq \emptyset$ contraria o fato de R^n ser holomorfa em $W^n \cup A$. Logo $z \in \text{int}(\overline{W^n \cup A})$.

Como $W^n \cup A = \text{int}(\overline{W^n \cup A})$ e R^n é holomorfa em $W^n \cup A$, pelo Princípio do Módulo Máximo temos que R^n assume valor máximo em $\partial(W^n \cup A)$, ou seja, $|R^n(z)| \leq r$, $z \in \overline{W^n \cup A}$, em particular, para todo $z \in A$. Portanto se $z \in A$ também pertence à W^n , o que é contadição.

□

Lema 4.6. *Sejam $A_1, \dots, A_r \subset F_R$ domínios disjuntos tais que em cada componente de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^r A_j$ existe pelo menos um ponto de J_R . Seja A um domínio tal que $A \subset F_R$ e $\bigcup_{j=1}^r A_j \subset A$, então*

$$m_A \geq \left(\sum_{j=1}^r m_{A_j} \right) - (r - 1).$$

Demonstração. Primeiramente construiremos um conjunto B_r , não necessariamente conexo, tal que $\hat{\mathbb{C}} \setminus A \subset B_r$. Seja B um conjunto qualquer. Denotamos por $n_c(B)$ o número de componentes conexas de B . Defina $B_0 = \hat{\mathbb{C}}$, de modo que $n_c(B_0) = 1$.

Indutivamente, tome $B_j = B_{j-1} \setminus A_j$. Observe que os conjuntos B_j são fechados e que B_j pode ser escrito como $B_j = \hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^j A_k$.

Note que $n_c(B_j) = n(B_{j-1}) + m_{A_j} - 1$. Daí,

$$\begin{aligned} n_c(B_r) &= n_c(B_{r-1}) + m_{A_r} - 1 = n_c(B_{r-2}) + m_{A_{r-1}} + m_{A_r} - 2 = \dots = \\ &= m_{A_1} + \dots + m_{A_r} - r + 1 = \left(\sum_{j=1}^r m_{A_j} \right) - (r - 1). \end{aligned}$$

Como cada componente de $B_r = \hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^r A_j$ contém elementos de J_R e $\hat{\mathbb{C}} \setminus A \subset B_r$ concluímos que cada componente de B_r também contém pontos de $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$. Daí $\hat{\mathbb{C}} \setminus A$ consiste em pelo menos $n_c(B_r)$ componentes tais que

$$m_A \geq n_c(B_r) = \left(\sum_{j=1}^r m_{A_j} \right) - (r - 1).$$

□

Teorema 4.7. *Seja z_0 um ponto fixo atrator de uma função racional R . Então $A_0(z_0)$ é simplesmente conexa se, e somente se, existe $D_{\hat{\nu}}(z_0)$ simplesmente conexo, $\hat{\nu} \in \mathbb{N}$, tal que todos os pontos críticos que não estão em $D_{\hat{\nu}}(z_0)$, ou nunca entram em $A_0(z_0)$ ou tendem à z_0 , via uma pré-imagem de z_0 que não está em $D_{\hat{\nu}}(z_0)$. Nesse caso, $\deg(R, A_0(z_0)) = \deg(R, D_{\hat{\nu}}(z_0)) = r_{D_{\hat{\nu}}} - 1$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos que $A_0(z_0)$ seja simplesmente conexa. Pelo Lema 4.1, D_{ν} é simplesmente conexo, para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Tome $\hat{\nu} \in \mathbb{N}$ tal que $D_{\hat{\nu}}$ contém todos os pontos críticos de R que estão em $A_0(z_0)$. Então todos os pontos críticos restantes nunca entram em $A_0(z_0)$ ou tendem à z_0 via uma pré-imagem de z_0 que não está em $A_0(z_0)$ e, portanto, não está em $D_{\hat{\nu}}$. Agora, como todos os D'_{ν} s são simplesmente conexos e $D_{\hat{\nu}}$ contém todos os pontos críticos em $A_0(z_0)$, pela Fórmula de Riemann-Hurwitz temos

$$\deg(R, D_{\hat{\nu}}) = \deg(R, A_0(z_0)) = r_{D_{\hat{\nu}}} - 1.$$

(\Leftarrow) Agora, a idéia é mostrarmos que os pontos críticos que não estão em $D_{\hat{\nu}}$ não podem estar em $A_0(z_0)$. Sejam c_1, \dots, c_l os pontos críticos que tendem à z_0 via pré-imagens $w_{c_i} \notin D_{\hat{\nu}}$ e seja $z_{c_i} \in \{c_1, \dots, c_l\}$. Observe que se $z_{c_i} \in D_{\nu}$, $\nu > \hat{\nu}$, então $D_{\nu} = U_{\nu}(w_i)$, $w_i \notin D_{\hat{\nu}}$ e, se D_{ν} não se funde a nenhum U_{ν} , para todo $\nu > \hat{\nu}$, então $z_{c_i} \notin D_{\nu}$. Logo se D_{ν} não se funde a nenhum U_{ν} para todo $\nu > \hat{\nu}$ então $z_{c_i} \notin D_{\nu}$ e $\deg(R, D_{\nu}) = r_{D_{\nu}} - 1$. Portanto, D_{ν} é simplesmente conexo para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Segue do Lema 4.1 que $A_0(z_0)$ é simplesmente conexa. Agora, se D_{ν} se funde à alguns U'_{ν} s, ou seja, existe $\nu \geq \hat{\nu}$ tal que $\deg(R, D_{\hat{\nu}}) = \deg(R, D_{\nu})$ (o que implica D_{ν} simplesmente conexo), $D_{\nu} \neq U_{\nu}(w_1) \neq \dots \neq U_{\nu}(w_{\lambda})$ mas $D_{\nu+1} = U_{\nu+1}(w_1) = \dots = U_{\nu+1}(w_{\lambda})$ e o restante dos $U_{\nu+1}$ são disjuntos de $D_{\nu+1}$, então R não possui ponto crítico em

$$D_{\nu+1} \setminus (D_{\nu} \bigcup_{j=1}^{\lambda} U_{\nu}(w_j)).$$

Logo

$$r_{D_{\nu+1}} = r_{D_{\nu}} + \sum_{j=1}^{\lambda} r_{U_{\nu}(w_j)}.$$

E, obviamente

$$k_{D_{\nu+1}} = k_{D_{\nu}} + \sum_{j=1}^{\lambda} k_{U_{\nu}(w_j)}.$$

Pela Fórmula de Riemann-Hurwitz temos

$$R : U_{\nu}(w_j) \rightarrow D_{\nu-1} \quad : \quad m_{U_{\nu}(w_j)} - 2 = -k_{U_{\nu}(w_j)} + r_{U_{\nu}(w_j)}.$$

$$R : D_{\nu} \rightarrow D_{\nu-1} \quad : \quad m_{D_{\nu}} - 2 = k_{D_{\nu}}(m_{D_{\nu-1}} - 2) + r_{D_{\nu}} \Rightarrow -1 = -k_{D_{\nu}} + r_{D_{\nu}}.$$

Considere $R : D_{\nu+1} \rightarrow D_{\nu}$. Pelo o que foi mostrado acima e pela Fórmula de Riemann-Hurwitz temos que

$$\begin{aligned} m_{D_{\nu+1}} - 2 &= -k_{D_{\nu+1}} + r_{D_{\nu+1}} \\ &= -(k_{D_{\nu}} + \sum_{j=1}^{\lambda} k_{U_{\nu}(w_j)}) + r_{D_{\nu}} + \sum_{j=1}^{\lambda} r_{U_{\nu}(w_j)} \\ &= -1 + \sum_{j=1}^{\lambda} (m_{U_{\nu}(w_j)} - 2) \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$m_{D_{\nu+1}} = \left(\sum_{j=1}^{\lambda} m_{U_{\nu}(w_j)} \right) - (2\lambda - 1) < \left(\sum_{j=1}^{\lambda} m_{U_{\nu}(w_j)} \right) - (\lambda - 1).$$

Pelos Lemas [4.5](#) e [4.6](#) temos que

$$m_{D_{\nu+1}} \geq \left(\sum_{j=1}^{\lambda} (m_{U_{\nu}(w_j)}) - (\lambda - 1) \right),$$

o que é contradição. Portanto, para cada $\nu > \hat{\nu}$, D_{ν} não se funde à nenhum U_{ν} e D_{ν} contém o mesmo número de pontos críticos que $D_{\hat{\nu}}$. Logo cada D_{ν} é simplesmente conexo, o que implica $A_0(z_0)$ simplesmente conexa e $\deg(R, D_{\nu}) = \deg(R, A_0(z_0)) = r_{D_{\hat{\nu}}} - 1$.

□

Teorema 4.8. *Sejam R uma função racional e z_0 um ponto fixo atrator. Suponha $D_{\nu_0}(z_0)$, $\nu_0 \in \mathbb{N}$, simplesmente conexo e que os pontos críticos c_1, \dots, c_l em $A(z_0)$, que não estão em $A_0(z_0)$, tendem à z_0 via pré-imagens de z_0 que não estão em $D_{\nu_0}(z_0)$. Suponha que existe $W_{j_\mu}^k(z_0), \mu = 1, \dots, n_l$ tal que*

i) $W_{j_\mu}^k(z_0)$ são disjuntos;

ii) Cada ponto crítico c_1, \dots, c_l tem uma iteração em $\bigcup_{\mu=1}^{n_l} W_{j_\mu}^k(z_0)$;

iii) Existe $1 \leq k_1 \leq k$ tal que para todo $1 \leq \nu \leq n_l$

$$R^{k_1}(W_{j_\nu}^k(z_0)) = D_{k-k_1}(z_0) \text{ e}$$

$$R^{k_1-1}(W_{j_\nu}^k(z_0)) \cap A_0(z_0) = \emptyset.$$

iv) Cada $W_{j_\mu}^k(z_0)$ contém no máximo $\deg(R, W_{j_\mu}^k(z_0)) - 1$ pontos críticos. Nenhum outro ponto crítico entra em $W_{j_\mu}^k$ no mesmo número de iterações.

Então $A(z_0)$ é simplesmente conexa.

Demonstração. A idéia da prova é mostrarmos que $A_0(z_0)$ é simplesmente conexa e que cada componente U de $A(z_0)$ também o é. Como todos os pontos críticos que não pertencem à D_{ν_0} tendem à z_0 via pré-imagens que não estão em D_{ν_0} , pelo Teorema 4.7, $A_0(z_0)$ e todos os D_n são simplesmente conexos e todos os pontos críticos que não estão em D_{ν_0} não estão em $A_0(z_0)$. Seja z_c um ponto crítico em $R^{-k_1}(A_0(z_0)) \setminus A_0(z_0)$. Então $z_c \in \bigcup_{\mu=1}^{n_l} W_{j_\mu}^k$ e $z_c \notin R^{-k_1+1}(A_0(z_0)) \setminus A_0(z_0)$. De fato, suponha que $z_c \notin \bigcup_{\mu=1}^{n_l} W_{j_\mu}^k$. Por (ii) deve existir $t \geq 1$ tal que

$$R^t(z_c) \in \bigcup_{\mu=1}^{n_l} W_{j_\mu}^k.$$

Como $z_c \in R^{-k_1}(A_0(z_0)) \setminus A_0(z_0)$, $R^{k_1}(z_c) \in A_0(z_0)$. Logo

$$R^t(R^{k_1-1}(z_c)) = R^{k_1-1}(R^t(z_c)) \in A_0(z_0)$$

o que é contradição com (iii). Portanto $z_c \in \bigcup_{\mu=1}^{n_l} W_{j_\mu}^k$ e $z_c \notin R^{-k_1+1}(A_0(z_0)) \setminus A_0(z_0)$.

Considere $R^{k_1} : W_{j_\mu}^k(z_0) \rightarrow D_{k-k_1}(z_0)$. Como todos os D_n são simplesmente conexos, pela Fórmula de Riemann-Hurwitz e por (iv) segue que

$$m_{W_{j_\mu}^k} - 2 = -k_{W_{j_\mu}^k} + r_{W_{j_\mu}^k} \Rightarrow m_{W_{j_\mu}^k} - 2 \leq -k_{W_{j_\mu}^k} + k_{W_{j_\mu}^k} - 1 \Rightarrow m_{W_{j_\mu}^k} = 1,$$

ou seja, $W_{j\mu}^k$ é simplesmente conexo, para todo $\mu = 1, \dots, n_l$.

Seja U uma componente de $R^{-k_1+1}(A_0(z_0)) \setminus A_0(z_0)$. Como vimos anteriormente, U não possui pontos críticos. Pela Fórmula de Riemann-Hurwitz segue que $m_U = k_U = 1$, isto é, U é simplesmente conexo. Portanto todas as componentes de $R^{-k_1+1}(A_0(z_0))$ o são. Além disso, em cada componente de $R^{-k_1+1}(A_0(z_0)) \setminus A_0(z_0)$, R deve ser injetiva, de modo que, em tal componente existe apenas uma pré-imagem W_j^{k-1} de D_{k-k_1} . Vejamos que $W_{j\mu}^k, \mu = 1, \dots, n_l$, estão em diferentes componentes de $A(z_0)$. Suponhamos o contrário, ou seja, que existe $W_{j_1}^k, W_{j_2}^k, \dots, W_{j_\sigma}^k, \sigma \leq n_l$, que estão na mesma componente U de $A(z_0)$. Como cada $W_{j\mu}^k$ é levado por R para $R^{-k_1+1}(A_0(z_0))$ então, como cada componente de $R^{-k_1+1}(A_0(z_0))$ é simplesmente conexa e contém apenas um W_j^{k-1} , $R(W_{j_1}^k) = \dots = R(W_{j_\sigma}^k) = W_{j_0}^{k-1} \subset V$, onde V é uma componente conexa de $A(z_0)$. Assim temos que, $R : U \xrightarrow{k_U:1} V$ com $k_U \geq \sum_{\mu=1}^{\sigma} \deg(R, W_{j\mu}^k)$. Pela Fórmula de Riemann-Hurwitz

$$m_U - 2 = -k_U + r_U \quad \text{com} \quad r_U \leq \sum_{\mu=1}^{\sigma} \deg(R, W_{j\mu}^k) - 1.$$

de onde segue que $m_u - 2 \leq -\sigma, \sigma < 2$. Portanto todos os $W_{j\mu}^k$ estão em componentes distintas de $A(z_0)$ e implica que $\deg(R, W_{j\mu}^k) - 1 = \deg(R, U) - 1$.

Por (iv), se $R^{n_1}(c_i) \in W_{j\alpha}^k$ e $R^{n_2}(c_m) \in W_{j\beta}^k, c_i \neq c_m$ ou se $R^{n_1}(c_i) \in W_{j\alpha}^k$ e $R^{n_1}(c_m) \in W_{j\beta}^k, \alpha \neq \beta$. Daí, c_i e c_m não podem estar na mesma componente de $A(z_0)$, ou seja, $c_i, i = 1, \dots, l$, é o único ponto crítico em sua componente. Portanto, cada componente U de $A(z_0)$ há exatamente um ou exatamente $\deg(R, W_{j\mu}^k) - 1 = \deg(R, U) - 1$ pontos críticos. Em ambos os casos há exatamente $\deg(R, U) - 1$ pontos críticos em U .

Seja $U \subset A(z_0)$ uma componente simplesmente conexa, e seja V tal que $V = R^{-1}(U)$. Pela Fórmula de Riemann-Hurwitz segue que $m_V = 1$, ou seja, que V é simplesmente conexo. Portanto todas as componentes de $A(z_0)$ são simplesmente conexas. □

Teorema 4.9. *Seja R uma função racional e sejam z_1, \dots, z_l seus pontos fixos atratores. Suponha que todos os pontos críticos sejam estritamente pré-periódicos ou estão em*

$\bigcup_{j=1}^l A(z_j)$ e cada $A(z_j), j = 1, \dots, l$ satisfaz :

i) *Existe um $\nu_j \in \mathbb{N}$ tal que $D_{\nu_j}(z_j)$ é simplesmente conexo e todos os pontos críticos em $A(z_j)$ que não estão em $D_{\nu_j}(z_j)$ tendem à z_j através de pré-imagens de z_j que não estão em $D_{\nu_j}(z_j)$.*

ii) *As condições i, ii, iii e iv do Teorema 4.8 são satisfeitas para cada z_j .*

Então J_R é conexo.

Demonstração. Pelo Teorema 4.8, $A(z_j)$ é simplesmente conexo para cada z_j . Como qualquer outra componente de F_R deve conter um ponto crítico periódico ou um ponto crítico com órbita infinita e todos os pontos críticos estão em $\bigcup_{j=1}^l A(z_j)$ então $F_R = \bigcup_{j=1}^l A(z_j)$. Portanto todas as componentes de F_R são simplesmente conexas e J_R é conexo. □

4.3 Conexidade Especial

Teorema 4.10. *Seja R uma função racional pós-crítica finita, então J_R é conexo.*

Demonstração. Como R é pós-crítica finita, pelo Teorema 2.41, R possui apenas ciclos superatratores. Seja z_i um ponto periódico em algum dos ciclos superatratores de R . Tome m tal que cada z_i é ponto fixo de R^m . Observe que a propriedade de que todos os pontos críticos são (pré)periódicos não é alterada uma vez que os pontos críticos de R^m são os pontos críticos de R . Daí, pela invariância de F_R , ou seja, $F_R = F_{R^m}$, podemos considerar que F_R consiste apenas de bacias de atração de pontos superatratores.

Seja z_0 um ponto fixo superatrator. Mostraremos que $A(z_0)$ é simplesmente conexa. Note que qualquer ponto em $A(z_0)$ que sob alguma iterada de R não é mapeado para z_0 possui órbita infinita. Como R é pós-crítica finita, todos os pontos críticos em $A(z_0)$ são mapeados sob alguma iterada de R para z_0 . Vejamos que $A_0(z_0)$ é simplesmente conexa. Seja $D_0(z_0)$ tal que a única pré-imagem de z_0 em $D_1(z_0)$ seja o próprio z_0 , o que implica D_1 simplesmente conexo. Como todos os pontos críticos em $A(z_0)$ são pré-imagem de z_0 sob alguma iterada de R , todos os pontos críticos que não estão em D_1 são levados para algum $w_j \in R^{-1}(z_0) \setminus \{z_0\}$ e, portanto, tendem à z_0 via pré-imagem que não está em D_1 . Daí, pelo Teorema 4.7, $A_0(z_0)$ é simplesmente conexa. Além disso, como devemos ter $\deg(R, A_0(z_0)) = \deg(R, D_1) = r_{D_1} - 1$, z_0 é a única pré-imagem de z_0 em $A_0(z_0)$.

Seja U uma componente simplesmente conexa de $A(z_0)$ contendo apenas uma pré-imagem de z_0 , contada com a multiplicidade. Seja V uma componente de $R^{-1}(U)$. Considere a Fórmula de Riemann-Hurwitz para $R : V \rightarrow U$. Logo

$$m_V - 2 = -k_V + r_V.$$

Se $r_V = 0$ então $m_V = k_V = 1$, ou seja, V é simplesmente conexo e contém apenas uma pré-imagem de z_0 . Suponhamos que exista $\mu \geq 1$ pontos críticos em V com multiplicidades r_1, \dots, r_μ tal que $r_V = r_1 + \dots + r_\mu$. Como todos esses μ pontos críticos são eventualmente mapeados para z_0 e como existe apenas uma pré-imagem w_0 de z_0 em U concluímos que todos os μ pontos críticos são mapeados para w_0 . Portanto,

$$k_V \geq \sum_{j=1}^{\mu} (r_j + 1) = r_V + \mu.$$

e implica que

$$m_V - 2 \leq -r_V - \mu + r_V = -\mu.$$

Logo $m_V = \mu = 1$ e $k_V = r_V + 1$, isto é, existe apenas uma pré-imagem de z_0 em V e V é simplesmente conexo. Portanto todas as componentes de $A(z_0)$ são simplesmente conexas contendo no máximo um ponto crítico e, além disso, todas as componentes de F_R são simplesmente conexas e J_R é conexo. \square

Teorema 4.11. *Seja R uma função racional de grau ≥ 2 tal que F_R não tenha anéis de Herman e em cada componente de F_R exista no máximo um ponto crítico, contado sem multiplicidade. Então J_R é conexo.*

Demonstração. A idéia da prova é mostrarmos que todas as componentes do conjunto de Fatou (F_R) são simplesmente conexas.

Como F_R não possui anéis de Herman basta verificarmos os seguintes casos:

- i) Suponha que F_R tenha um disco de Siegel U . Por definição, U é simplesmente conexo. Se qualquer pré-imagem V de U contém um ponto crítico com multiplicidade r então $k_V \geq r + 1$. Mas, por hipótese, não existe outro ponto crítico. Então a Fórmula de Riemann-Hurwitz mostra que

$$m_V - 2 = -k_V + r \leq -1 \Rightarrow m_V = 1$$

e que $k_V = r + 1$. Logo V é simplesmente conexo.

Como V é tomado arbitrariamente, concluímos que todas as pré-imagens de U são simplesmente conexas.

- ii) Suponha que F_R tenha um ciclo de Siegel. Então cada componente U do ciclo de Siegel é simplesmente conexa. Assim, como no caso (i) mostra-se que todas as suas pré-imagens são simplesmente conexas.
- iii) Suponha que R tenha um ponto fixo atrator ou um ponto fixo indiferente racional com derivada igual à 1. Como cada bacia de atração imediata contém pelo menos um ponto crítico e, por hipótese, cada componente de F_R contém no máximo um ponto crítico, $A_0(z_0)$ deve conter exatamente um ponto crítico. Pela definição de $D_0(z_0)$, o mesmo é simplesmente conexo. Suponhamos que exista $n \geq 0$ tal que D_n seja simplesmente conexo.

- a) Considerando a Fórmula de Riemann-Hurwitz para $R : D_{n+1} \rightarrow D_n$ temos que, se D_{n+1} não possui ponto crítico então

$$m_{D_{n+1}} - 2 = -k_{D_n} \Rightarrow m_{D_{n+1}} = 1,$$

ou seja, D_{n+1} é simplesmente conexo, para todo n . Portanto $A_0(z_0)$ também o é.

- b) Se D_{n+1} contém um ponto crítico com multiplicidade r então $k_{D_{n+1}} \geq r + 1$. Pela Fórmula de Riemann-Hurwitz

$$m_{D_{n+1}} - 2 = -k_{D_{n+1}} + r \leq -1 \Rightarrow m_{D_{n+1}} = 1.$$

Logo D_{n+1} é simplesmente conexo, para todo n . Portanto $A_0(z_0)$ também o é.

Para mostrarmos que todas as componentes da bacia de atração $A(z_0)$ são simplesmente conexas basta considerarmos $U \subset A(z_0)$ uma componente simplesmente conexa e $V = R^{-1}(U)$ e como nos passos a e b concluímos o desejado.

- iv) Suponha que F_R contenha um ciclo atrator ou um ciclo indiferente racional onde as componentes da bacia de atração imediata tem período n . Seja z_0 um ponto periódico de período n neste ciclo. Tome D_0 considerando z_0 ponto fixo de R^n . (No caso de um ciclo indiferente basta considerar $R^{\mu n}$, para algum μ , tal que z_0 é ponto fixo e tomar a componente invariante apropriada de $A_0(z_0)$) D_0 é simplesmente conexo pela definição. Tome a sequência (D_0, D_1, \dots) das pré-imagens sucessivas de D_0 dentro do ciclo, com $D_{(k-1)n} \subset D_{kn}$, para todo $k \geq 1$. Como no caso (iii), vemos que todos D_n são simplesmente conexos e, portanto, a bacia de atração imediata e, em consequência, todas as componentes da bacia de atração deste ciclo são simplesmente conexas.

Portanto, todas as componentes de F_R são simplesmente conexas e J_R é conexo. \square

Corolário 4.12. *Seja R uma função racional de grau 2. Então J_R é conexo se e somente se cada componente de F_R contém no máximo um ponto crítico.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha J_R conexo. Então todas as componentes de F_R são simplesmente conexas. Sejam U e V duas componentes de F_R . Seja r o número de pontos críticos de R em U . Considere $R : U \rightarrow V$ e suponha k_U , onde $k_U \in \{1, 2\}$. Riemann-Hurwitz mostra que $k_U = r + 1$. Daí, temos as seguintes possibilidades:

- 1) $k_U = 1$ e $r = 0$;
- 2) $k_U = 2$ e $r = 1$.

Em ambos os casos, U contém no máximo um ponto crítico.

(\Leftarrow) Suponha que todas as componentes de F_R contém no máximo um ponto crítico. Como mostrado em [13], toda função racional quadrática não possui anéis de Herman. Portanto, pelo Teorema 4.11, J_R é conexo. \square

Teorema 4.13. *Se uma função racional R tiver apenas um ponto fixo que é repulsor ou tem multiplicador 1 então J_R é conexo.*

Demonstração. Consequência do Teorema 3.20. \square

Exemplo 4.14. *Sejam $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio complexo não constante e $N_p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ uma extensão contínua da função*

$$z \mapsto z - \frac{p(z)}{p'(z)} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (p')^{-1}(0))$$

para $\hat{\mathbb{C}}$. A função racional N_p induzida pelo polinômio p é chamada função de Newton de p . Observe que os pontos fixos de N_p são: $Fix(N_p) = p^{-1}(0) \cup \{\infty\}$. Note ainda que,

$$N'_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}$$

e que ∞ é o único ponto fixo repulsor de N_p . Portanto, pelo Teorema 4.13, J_{N_p} é conexo.

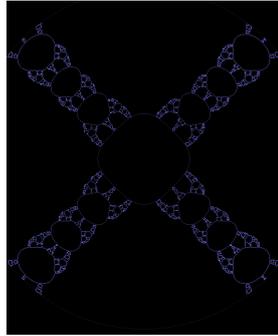


Figura 4.1: Conjunto de Julia para a função de Newton induzida pelo polinômio $p(z) = z^4 - 1$.

4.4 Conexidade do Conjunto de Julia para uma família cúbica

Proposição 4.15. *Seja $R(z) = c(z^3 - 2)/z$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $-\sqrt[3]{2}/3 \leq c \leq 2/3$ então J_R é conexo. Caso contrário, J_R é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Os pontos fixos de R são

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1 + \frac{1}{\alpha} + \alpha}{3c}, \\ z_1 &= \frac{2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{\alpha} - (1-i\sqrt{3})\alpha}{6c}, \\ z_2 &= \frac{2 - \frac{1-i\sqrt{3}}{\alpha} - (1+i\sqrt{3})\alpha}{6c}. \end{aligned}$$

onde $\alpha = \sqrt[3]{1 + 27c^3 + 3\sqrt{c^3(6 + 81c^3)}}$.

A derivada de R é

$$R'(z) = \frac{3z^3 - cz^3 + 2c}{z^2} = \frac{2c(z^3 + 1)}{z^2}$$

tal que seus pontos críticos são

$$z_{c,1} = -1, z_{c,2} = e^{i\pi/3}, z_{c,3} = e^{-i\pi/3}, z_{c,4} = \infty.$$

Observe que $R(e^{2\pi ik/3}z) = e^{-2\pi ik/3}R(z)$, $k \in \{1, 2\}$. Daí,

$$R(-1) = R(e^{i\pi}) = R(e^{2\pi i/3}e^{i\pi/3}) = e^{-2\pi i/3}R(e^{i\pi/3}).$$

Portanto é necessário considerarmos apenas o ponto crítico $z_{c,1} = -1$ pois os outros dois pontos críticos finitos devem ter as mesmas propriedades devido à simetria de R (à saber R possui uma simetria do tipo rotação de $\frac{2\pi}{3}$). Observe ainda que, como os coeficientes de R são reais, a órbita de -1 está contida em \mathbb{R} . Como discos de Siegel e anéis de Herman estão contidos no fecho da órbita dos pontos críticos, pela simetria de R , o conjunto de Fatou F_R não os pode conter.

Seja $\tilde{z} \in \{z_0, z_1, z_2\}$. Então

$$R'(\tilde{z}) = \frac{c(3\tilde{z}^3 - (\tilde{z}^3 - 2))}{\tilde{z}^2} = 3c\tilde{z} - 1.$$

Caso 1: ($c < 0$) Note que R é crescente no intervalo $(-\infty, -1)$ e decrescente em $(-1, 0)$ e em $(0, \infty)$.

Subcaso 1.1 : ($c < -\sqrt[3]{2}/3$) Observe que, neste caso, $\alpha < -1$ e $z_0 > 0$, ou seja, R não possui nenhum ponto fixo em \mathbb{R}^- de modo que $(-\infty, 0] \subset A_0(\infty)$. Portanto todos os pontos críticos estão em $A_0(\infty)$. Logo, pelo Teorema 3.21, J_R é um conjunto de Cantor.

Subcaso 1.2 : ($c = -\sqrt[3]{2}/3$) Neste caso, $\alpha = -1$ e os pontos $z_1 = z_2 = -\sqrt[3]{4}$ tem derivada igual à 1, ou seja, são pontos fixos indiferentes.

Subcaso 1.3 : ($-\sqrt[3]{2}/3 < c < 0$) Note que R possui dois pontos fixos p e q tais que $p < -\sqrt[3]{4} < q < 0$. E, ainda $\lim_{c \rightarrow 0} p = -\infty$, $\lim_{c \rightarrow 0} q = 0$. Daí

$$|cq| = cq \leq |c| \sqrt[3]{4} \leq \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}.$$

Logo

$$R'(q) = 3cq - 1 \in (-1, 1)$$

ou seja, q é um ponto fixo atrator. Pela simetria de R , $qe^{i\pi/3}$ e $qe^{-i\pi/3}$ são dois ciclos periódicos atratores de período 2 e em $A_0(q)$ e $A_0(\{qe^{i\pi/3}, qe^{-i\pi/3}\})$ deve ter um ponto crítico de R . Portanto, em cada componente de Fatou F_R existe no máximo um ponto crítico. Daí, pelo Teorema 4.11, J_R é conexo. No caso em que ($c = -\sqrt[3]{2}/3$) também pelo Teorema 4.11, concluímos que J_R é conexo.

Caso 2 : ($c > 0$) Observe que R é crescente em $(-1, 0)$ e em $(0, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, -1)$.

Para $c > 0$ é fácil ver que $z_0 \in \mathbb{R}^+$ e z_1, z_2 são complexos conjugados. Note que

$$R'(z_0) = 3cz_0 - 1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha \geq 2,$$

ou seja, z_0 é um ponto fixo repulsor.

Seja $z \in \mathbb{C}$. Vejamos que $|R(z)| > |z|$ quando $|z| > z_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. De fato, suponhamos o contrário, ou seja, que $|R(z)| < |z|$ quando $|z| > z_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > z_0 + \varepsilon$. Logo $x > 0$. Como R é crescente para $x > 0$, $R(x) > R(z_0 + \varepsilon) > R(z_0) = z_0$ e por suposição $x > R(x)$ então

$$x > R(x) > R^2(x) > \dots > R^n(x) > \dots,$$

isto é, $R^n(x) \rightarrow z_0$ o que é absurdo pois z_0 é um ponto fixo repulsor. Portanto $|R(z)| > |z|$ quando $|z| > z_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ e $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_{z_0 + \varepsilon} \subset A_0(\infty)$.

Subcaso 2.1 : ($c > 2/3$) Neste caso, $R(z) > z_0$ para todo $z \in (-\infty, 0]$ de modo que $(-\infty, 0] \subset A_0(\infty)$ e todos os pontos críticos estão em $A_0(\infty)$. Portanto, pelo Teorema [3.21](#), J_R é um conjunto de Cantor.

Subcaso 2.2 : ($c = 2/3$) Note que $R(-1) = z_0 = 2$. Portanto todos os pontos críticos finitos são pré-periódicos com órbita finita. Logo, pelo Teorema [4.10](#), J_R é conexo.

Subcaso 2.3 : ($0 < c < 2/3$) Temos que $z_0 > 2$ e $z_0 \rightarrow \infty$ quando $c \rightarrow 0$. Pelo gráfico da função R quando $z \in \mathbb{R}$ vemos que o ponto fixo z_0 possui duas pré-imagens distintas de si mesmo, ou seja, existem $a_2 < a_1 < z_0$ tais que $a_1 = R^{-1}(z_0)$ e $a_2 = R^{-1}(z_0)$. Seja $a_3 = R^{-1}(a_2)$. Pelo gráfico vemos que $a_3 \in (0, z_0)$. Como $z_0 \in J_R$, segue que $a_1, a_2, a_3 \in J_R$.

Seja $U_i = U_i(0) = U_i(\infty, 0)$. Como $z_0 \in J_R$, segue que $a_1, a_2, a_3 \in J_R$ e obviamente $(a_1, 0] \subset U_1 \subset U_2$ e $(0, a_3) \subset U_2$ o que implica que $(a_1, a_3) \subset U_2$.

Seja $z \in (a_2, z_0)$. Pelo gráfico podemos ver que $z \in U_2$ ou $R(z) \in (a_2, z_0)$, ou seja, a órbita de todos os pontos em (a_2, z_0) permanecem limitadas ou tendem ao infinito via U_2 .

Como $0 < c < 2/3$ temos que

$$R^2(-1) = \frac{27c^3 - 2}{3} \in \left(\frac{-2}{3}, 2 \right).$$

Como $z_0 > 2$ temos que $|R^2(-1)| < z_0$. Logo $-1 \notin W_j^2$ e $-1 \notin U_2$, ou seja, D_0, D_1, U_1, U_2 não possuem pontos críticos. Daí, pela Fórmula Riemann-Hurwitz,

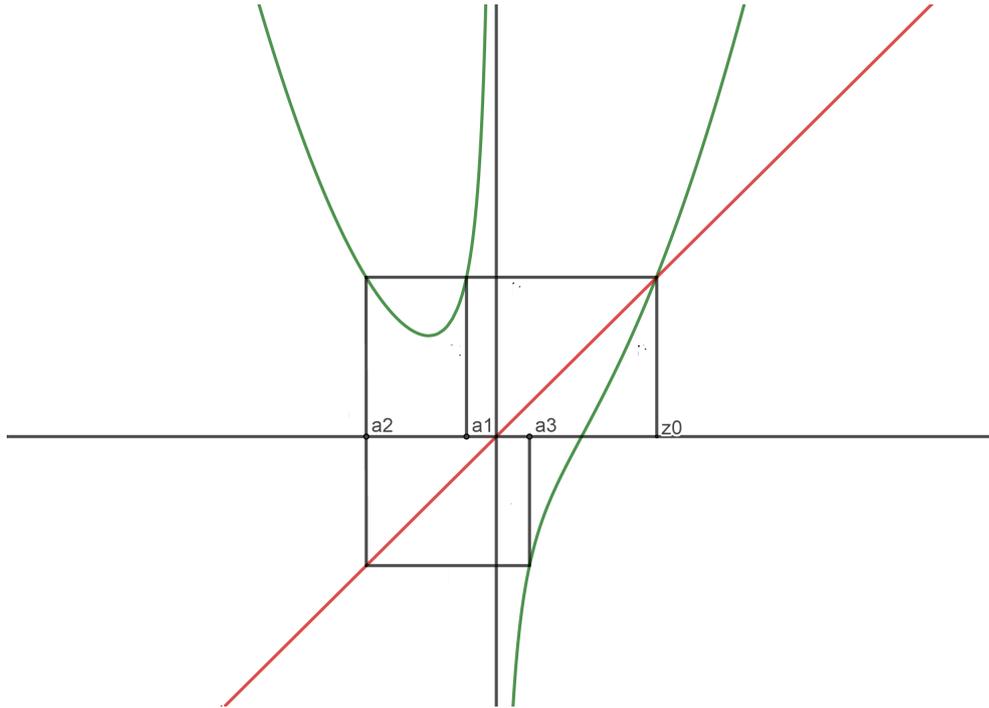


Figura 4.2: Gráfico da função $R(z) = c(z^3 - 2)/z$ para $0 < c < 2/3$.

D_0, D_1, U_1, U_2 são simplesmente conexos. Além disso, $D_1 \neq U_1$ e $D_2 \neq U_2$. Daí, concluímos que todos os pontos críticos permanecem limitados ou tendem ao ∞ via um pólo que não está em D_1 . Pelo Teorema 4.7, $A_0(\infty)$ é simplesmente conexo.

Observe que $U_2 \cap \mathbb{R} = (a_1, a_3)$ e se $z \in U_2 \cap \mathbb{R}$ então $R(z) > z_0$ ou $R(z) < a_2$. Neste caso, temos que

$$a_2 < -1 < \frac{-2}{3} < R^2(-1) < 2 < z_0,$$

tal que $R(-1) \notin U_2$. Isso mostra que em U_2 deve ter 3 pré-imagens distintas W_1^3, W_2^3, W_3^3 .

- 1) Se $R^n(-1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ então existe $\mu \geq 1$ tal que $R^\mu(-1) \in W_1^3, R^\mu(z_{c,2}) \in W_2^3$ e $R^\mu(z_{c,3}) \in W_3^3$. Logo as condições do Teorema 4.9 são satisfeitas e J_R é conexo.
- 2) Se $R^n(-1)$ não tende ao ∞ então as condições do Teorema 4.8 são satisfeitas e $A(\infty)$ é simplesmente conexo. Como R não possui discos de Siegel ou anéis de Herman então -1 também está em J_R , e $F_R = A(\infty)$ e J_R é conexo, ou -1 é atraído por algum ponto periódico real de período m (atrator ou indiferente racional). $z_{c,2}$ e $z_{c,3}$ devem convergir, cada um, para um m -ciclo não real. Em cada bacia de atração imediata desses pontos periódicos deve existir um ponto crítico de R de onde se conclui que cada componente de F_R possui no máximo um ponto crítico. Logo, pelo Teorema 4.11, J_R é conexo.

□

Obs 4.16. A proposição 4.15 pode ser aplicada a família $R_1(z) = (z^3 - c_2)/z$, pois R e R_1 são linearmente conjugadas, ou seja,

$$R \circ h = h \circ R_1$$

onde $h(z) = z/c$ e $c_2 = 2c^3$.

Considerações Finais

Neste trabalho investigamos a conexidade do Conjunto de Julia de uma função Racional $R(z) = P(z)/Q(z)$, onde P e Q são polinômios complexos não constantes, e pudemos estabelecer sobre R condições de modo que seu conjunto de Julia é conexo. Verificamos a conexidade do conjunto de Julia em dois casos especiais, à saber, quando a função Racional R é pós-crítica finita e quando o conjunto de Fatou de R não possui anéis de Herman e cada componente de Fatou possui no máximo um ponto crítico, contado sem multiplicidade. Por fim, verificamos que o conjunto de Julia da família cúbica $R(z) = c(z^3 - 2)/z$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é conexo quando $\sqrt[3]{2}/3 \leq c \leq 2/3$ e, caso contrário, é um conjunto de Cantor.

Após todas as investigações citadas acima e algumas observações me questionei se seria possível estabelecer para quais valores de $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o conjunto de Julia da família $R(z) = c(z^d - (d-1))/z$, onde d é um inteiro positivo ímpar ≥ 3 , é conexo. No momento, trabalhamos na busca de respostas para tal questionamento.

Referências Bibliográficas

- [1] L. AHLFORS, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, Third Edition, 1992.
- [2] A. BEARDON, *Iteration of rational functions*, volume 132 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991. Complex analytic dynamical systems.
- [3] L. CARLESON and T. W. GAMELIN, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1992.
- [4] J. CONWAY, *Functions of One Complex Variable*, New York : Springer-Verlag, Second edition - 1978.
- [5] R. DEVANEY, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second edition, Addison-Wesley.
- [6] L. A. J. MEDEIROS, *Introdução as Funções Complexas*, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1972.
- [7] H. MEIER, *On the connectedness of the Julia set for rational functions*, RWTH Aachen Lehrstuhl C für Mathematik Templergraben 55 D-5100 Aachen.
- [8] J. MILNOR, *Dynamics in One Complex Variable*, New Jersey: Princeton university Press, Third edition.
- [9] M.H.A. NEWMAN, *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge University Press 1964.
- [10] F. PEHERSTORFER and C. STROH, *Connectedness of Julia Sets of Rational Functions*, Computational Methods and Functions Theory, Vol.1 (2001), 61-79.
- [11] P. SAD, *Introdução à Dinâmica das Funções Racionais na Esfera de Riemann*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [12] D. SCHLEICHER, *Complex Dynamics: Families and Friends*, A K Peters, 2009.
- [13] M. SHISHIKURA, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 20 (1987), 1-29.
- [14] M. G. SOARES, *Cálculo em uma Variável Complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2012.
- [15] N. STEINMETZ, *Rational Iteration*, de Gruyter Studies in Mathematics 16, de Gruyter, Berlin, 1993.

- [16] *Xaos Fractal*. Disponível para download no site:
<https://sourceforge.net/projects/xaos/>