VANGELLIS OLIVEIRA SAGNORI MAIA

# INVARIANTE GLOBAL DE APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES FECHADAS E ORIENTADAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA**
**MINAS GERAIS - BRASIL**
**2017**

VANGELLIS OLIVEIRA SAGNORI MAIA

**INVARIANTE GLOBAL DE APLICAÇÕES ENTRE SUPERFÍCIES FECHADAS E ORIENTADAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de março de 2017.

Maurício Barros Corrêa Júnior

Mércio Botelho Faria

Catarina Mendes de Jesus
(Orientadora)

*Dedico este trabalho a minha família,*
*em especial minha falecida avó Teresinha.*

# Agradecimentos

Sou muitíssimo grato aos meus pais, Roseli e Sergio, e minha irmã Raílla, pelo exemplo, incentivo e apoio nas horas difíceis, sempre presentes nos momentos bons e ruins me dando forças pra continuar. Aqueles a quem sempre tenho a segurança de saber que posso recorrer.

Agradeço ao minha orientadora, Catarina, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções e incentivo. Foi uma das pessoas mais importantes para a realização desse trabalho, sempre prestativa, atenciosa e rigorosa, mais que uma orientadora, uma amiga.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos, e também daqueles que marcaram esse periodo de forma positiva na minha vida. Sem dúvida são uma parte muito importante desse tempo de aprendizado, em especial agradecimentos de coração a Rosângela, Javier, Thiely, Sarah, Carlos e Tobias, todos amigos que levarei pra vida toda.

Uma menção especial a Sarah Ribeiro, uma companheira que foi um pilar que me sustentou nas hora difíceis, que não me deixou fraquejar e nem desistir perante as complicações e saudades tão frequentes durante esse período, alguém que sempre terei muito carinho por tudo que fez por mim.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados. Em especial ao secretário João Marcos por ser sempre tão prestativo em seu atendimento e efetivo em ajudar a resolver problemas, alguém que não posso chamar de outro nome, se não, amigo.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

# Sumário

**Resumo** **vi**

**Abstract** **vii**

**1 Superfícies fechadas e grafos** **3**

1.1 Superfície . . . . . 3

1.1.1 Variedade . . . . . 3

1.1.2 Variedades de dimensão 2 . . . . . 5

1.2 Grafos . . . . . 7

1.2.1 Grafos com pesos nos vértices . . . . . 10

1.3 Grafos associados a superfícies com curvas . . . . . 13

**2 Aplicações entre superfícies fechadas** **15**

2.1 Aplicações entre superfícies fechadas . . . . . 15

2.1.1 Aplicações estáveis . . . . . 15

2.1.2 Grau de aplicações entre superfícies . . . . . 18

2.2 Transições de codimensão 1 e seus efeitos . . . . . 22

2.2.1 Transições de codimensão 1 . . . . . 22

2.2.2 Efeitos das transições de codimensão 1 . . . . . 23

2.3 Cirurgia entre aplicações estáveis . . . . . 27

2.3.1 Cirurgia horizontal . . . . . 28

2.3.2 Cirurgia vertical . . . . . 30

**3 Grafos de aplicações estáveis entre superfícies fechadas** **32**

3.1 Grafos e aplicações estáveis . . . . . 32

3.2 Cirurgias de grafos e aplicações . . . . . 35

3.2.1 Grafos e cirurgia horizontal . . . . . 36

3.2.2 Grafos e cirurgia vertical . . . . . 37

3.2.3 Exemplos de cirurgias de aplicações e seus grafos . . . . . 39

**4 Realização de Grafos** **41**

4.1 Aplicações no plano . . . . . 41

4.2 Aplicações na esfera . . . . . 43

4.3 Aplicações no n-toro . . . . . 45

4.3.1 Aplicações de recobrimento sobre o n-toro . . . . . 45

4.3.2 Aplicações de grau zero sobre n-toro . . . . . 46

4.3.3 Aplicações do n-toro no m-toro . . . . . 48

**5 Conclusão** **50**

**Referências Bibliográficas** **51**

# Resumo

MAIA, Vângellis Oliveira Sagnori, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, Março de 2017. **Invariante global de aplicações entre superfícies fechadas e orientadas**. Orientadora: Catarina Mendes de Jesus.

O presente trabalho tem como principal objetivo estudar as aplicações estáveis, entre superfícies orientadas e fechadas, do ponto de vista global. Um invariante global dessas aplicações são grafos bipartidos com pesos nos vértices, que carregam informações sobre a superfície de domínio, ajudando na classificação dessas aplicações. A principal referência em que esse trabalho se baseia é o artigo [21], que foca a realização dos grafos pelas aplicações sobre n-toros.

# Abstract

MAIA, Vângellis Oliveira Sagnori, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, March, 2017. **Global invariant of maps between closed orientable surfaces**. Adiviser: Catarina Mendes de Jesus.

In this paper, our main goal to study stable maps between closed orientable surfaces, from the global point of view. A global invariant of these maps are bipartite graphs with weights at the vertices, which load information about the domain surfaces, helping to classify these maps. The main reference on which this work is based is the article [21], which focuses the realization of the graphs by the maps on logs.

# Introdução

H. Whitney publicou o artigo "On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings the plane into the plane"em 1955, que serviu de fundamento para uma nova teoria sobre aplicações estáveis do plano no plano. O próprio Whitney determinou que o germe de aplicação de cada ponto é equivalente a um ponto regular, um ponto de dobra ou um ponto de cúspide, o que descreve os dois únicos tipos de singularidades dessas aplicações.

Ao final dos anos 50 Thom ([34]) incorporou os resultados obtidos por Whitney na nova Teoria de Singularidades. A classificação das aplicações estáveis na Teoria de Singularidades, a menos de equivalência, em particular a $\mathcal{A}$-equivalência, tem sido um difícil trabalho desde a fundamentação da teoria. A busca por essa classificação, em muitos casos, se dá na procura de invariantes que permitam a classificar a maior quantidade de aplicações possível, ou até mesmo a classificação completa. Em 1978, Quine ([30]) apresentou um teorema global para aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, que demonstrou utilizando resultados da Teoria de Variedades Diferenciáveis. Este resultado relaciona o grau da aplicação e das cúspides com a característica de Euler das superfícies.

No começo da década de 90, Vassiliev ([35]) desenvolveu um método para obtenção de invariantes de isotopia locais no espaço das aplicações. Esse método se baseia no estudo do subconjunto discriminante, formado pelas aplicações não estáveis. A partir disso vários pesquisadores dedicaram-se a pesquisar invariantes de aplicações estáveis, sejam do ponto de vista local ou global, aplicados em vários casos como: mergulho de $S^1$ em $\mathbb{R}^3$, pelo próprio Vassiliev ([35]); imersões de de $S^1$ em $\mathbb{R}^2$, por Arnold ([1]); superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ por Goryunov ([6]); superfícies no plano, por Ohmoto e Aicardi ([28]) e por Hacon, Mesdes de Jesus e Romero Fuster ([8]).

Um invariante do ponto de vista global foi introduzido por Mendes [23] em sua tese de doutorado e mais tarde foi publicado por Hacon, Mendes e Romero em [10], [11] e [13], para o caso de aplicações sem cúspide, conhecidas como aplicações dobras. Essa técnica de associar invariantes a aplicações estáveis foi também estendida para outra aplicações estáveis como: aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera e no plano projetivo, por Hacon, Mendes de Jesus e Romero Fuster em [9] e [12]; aplicações estáveis de 3-variedades orientadas e fechadas no $\mathbb{R}^3$, por Mendes de Jesus, Oset e Romero Fuster, em [26]; e também para aplicações estáveis de Gauss de superfícies fechadas e orientadas imersas no 3-espaço, por Mendes de Jesus, Moraes e Romero Fuster em [25]. Bretas [2],

Cavalcante [7], Machado [18], Marques [19], Oliveira [29], Souza [32] dissertaram sobre essas aplicações entre superfícies.

O presente trabalho tem como foco o estudo de grafos bipartidos com pesos nos vértices associados a aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas. Os principais resultados aqui apresentados estão baseados no trabalho de Mendes de Jesus [21]. A estrutura que adotamos neste trabalho para aprensentação do conteúdo é como segue:

No primeiro capítulo, apresentaremos os conceitos de 2-variedade, ou superfícies, fechadas e orientadas onde serão os domínios e contra domínios das aplicações que trabalharemos ao longo deste trabalho. Iremos também dar uma introdução da Teoria de Grafos, direcionada para os fins específicos desse trabalho e um tipo de cirurgia para grafos, bem como sua associação com superfícies com curvas simples, fechadas e disjuntas mergulhadas nessas superfícies. As principais referências que temos aqui são [11], [14], [16], [17] e [27].

No capítulo dois, apresentaremos os conceitos a respeito das aplicações estáveis $f : M \to N$, onde $M$ e $N$ são superfícies fechadas e orientadas: como as características do conjunto singular, com cúspides isoladas e curvas de dobras; conjunto regular; grau local (grau das cúspides) e global de aplicações. Tipos de transições, feitas através de homotopias ao longo do conjunto de aplicações suaves $C^\infty$, com foco nas transições lábios, bicos e rabo de andorina, e seus efeitos no conjunto regular e singular. Apresentaremos uma importante ferramenta que usaremos para construção de algumas aplicações e para algumas demonstrações, a saber, um tipo cirurgia entre as aplicações estáveis, que nos permite obter novas aplicações a partir de uma ou mais aplicações dadas. Aqui utilizaremos como principais referências [4], [5], [28] e [35].

No terceiro capítulo estabeleceremos a relação que pode ser criada entre grafos bipartidos e as aplicações estáveis, estabelecendo assim o grafo como um invariante das aplicações estáveis, a menos de $\mathcal{A}$-equivalência. Mostraremos como as cirurgias das aplicações e as cirurgias dos grafos já definidas tem uma boa relação e com isso construiremos exemplos de aplicações usando essas cirurgias. Teremos como referências [22] e [30].

Por fim, no capítulo quatro iremos apresentar os principais resultados da realização de grafos em aplicações de uma superfície fechada e orientada no plano, na esfera e posteriormente uma generalização para aplicações entre duas superfícies quaisquer. Os resultados também nos dão informação sobre os graus dessas aplicações. Nos basearemos nos trabalhos [9], [11] e [31].

# Capítulo 1

# Superfícies fechadas e grafos

Neste capítulo vamos introduzir alguns conceitos importantes sobre variedades de dimensão 2, que chamaremos de superfície, bem como uma parte conveniente da teoria de grafos. Como referência para teoria dos grafos iremos nos basear em [11] e [13], para a seção de superfícies as referências são [14], [16], [17] e [27].

## 1.1 Superfície

Definiremos nesta seção o conceito de superfícies a partir de um conceito mais geral que é a definição de variedade diferenciável, e posteriormente nos concentraremos para o caso das variedades de dimensão 2 que são o foco deste trabalho.

### 1.1.1 Variedade

**Definição 1.1.1.** *Uma variedade topológica de dimensão $M$ é um espaço topológico $M$ com as seguintes propriedades:*

1. *$M$ é Hausdorff: dados dois pontos distintos $p$ e $q$ em $M$, então existem abertos disjuntos $U$ e $V$, tais que $p \in U$ e $q \in V$;*
2. *$M$ tem base enumerável de abertos: existe uma coleção enumerável de abertos de $M$, tal que todo aberto é união de abertos dessa coleção;*
3. *$M$ é localmente Euclidiano: para qualquer $p \in M$, existem abertos $U \subset M$ contendo $p$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ e um homeomorfismo $\varphi : U \to \tilde{U}$.*

**Definição 1.1.2.** *Dizemos que $M$ é uma* ***variedade com bordo*** *se satisfaz 1.1.1 considerando que $\varphi : U \to \tilde{U}$ seja um homeomorfismo do aberto $U \subset M$ sobre um aberto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^m$ ou um aberto $\varphi(U)$ do semi espaço $\mathbb{R}^m_0 = \{(x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m; x^m \geq 0\}$.*

**Observação 1.1.3.** *As definições que seguem foram feitas considerando a Definição 1.1.1, mas para a Definição 1.1.2, são feitas de modo análogo e o resultado dessas definições é um conceito mais geral do que definiremos mais adiante como sendo uma variedade diferenciável.*

**Definição 1.1.4.** *Seja $M$ uma variedade topológica. Um par $(\phi, U)$, onde $U \subset M$ é aberto e $\phi : U \to W \subset \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo, é chamado* ***carta local*** *(ou* ***sistema de coordenadas local****) para $M$, em $x \in U$. Se $(\phi_1, U)$ e $(\phi_2, V)$ são cartas locais tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a aplicação*

$$\xi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U \cap V) \to \phi_2(U \cap V)$$

*é um homeomorfismo.*

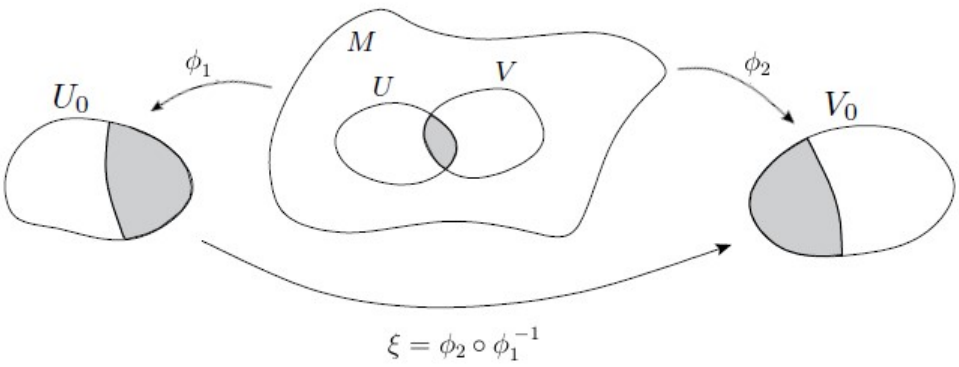


Figura 1.1: Mudança de coordenadas

**Definição 1.1.5.** *Dizemos que duas cartas $(\phi_1, U_1)$ e $(\phi_2, U_2)$ são $C^k$-* ***compatíveis*** *se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ e $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ é de classe $C^k$.*

**Definição 1.1.6.** *Um* ***atlas*** *para $M$ é uma família de cartas locais $\mathcal{A} = \{(\phi_i, U_i) : i \in I\}$ tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. Um atlas é chamado* ***maximal*** *se não está contido num outro atlas maior.*

**Definição 1.1.7.** *Uma* ***estrutura diferencial****, de classe $C^k$, para $M$ é um altas maximal $\oplus = \{(\phi_i, U_i) : i \in I\}$ tal que $(\phi_i, U_i)$ e $(\phi_j, U_j)$ são $C^k$-compatíveis para todos $i, j \in I, i \neq j$.*

Dadas as definições estabelecidas até aqui, podemos conceituar o que chamaremos de variedade difereciável.

**Definição 1.1.8.** *Uma* ***variedade diferenciável*** *de classe $C^k$, é um par $(M, \oplus)$, onde $M$ é uma variedade topológiaca e $\oplus$ é uma estrutura diferencial, de classe $C^k$.*

**Definição 1.1.9.** *Duas parametrizações de classe $C^k$, $\phi : U_0 \to U$ e $\varphi : V_0 \to V$ dizem-se* ***coerentes*** *se, ou $U \cap V = \emptyset$, ou $U \cap V \neq \emptyset$ e a mudança de coordenadas $\phi^{-1} \circ \varphi$ tem determinante jacobiano positivo em todos os pontos do seu domínio $\varphi^{-1}(U \cap V)$*

**Definição 1.1.10.** *Um atlas $\mathcal{A}$ é chama-se coerente quando todos os pares de parametrizações $\varphi$,$\phi \in \mathcal{A}$ são coerentes.*

### 1.1.2 Variedades de dimensão 2

Começaremos trabalhar aqui mais especificamente com as variedades que nos vão interessar para o presente trabalho.

**Definição 1.1.11.** *Uma* ***superfície*** *$M$, é uma variedade diferenciável de dimensão 2.*

**Definição 1.1.12.** *Uma superfície $M$ diz-se* ***orientável*** *quando existe um atlas coerente em $M$. Uma vez escolhido um atlas $\mathcal{A}$, dizemos que $M$ está orientada.*

**Observação 1.1.13.** *Seguindo a Definição 1.1.11 e a Definição 1.1.1, temos que uma superfície é um espaço topológico de Hausdorff onde cada ponto $p \in M$ tem uma vizinhança homeomorfa a um disco em $\mathbb{R}^2$ (pelo fato das superfícies serem variedades bidimencionais).*

**Observação 1.1.14.** *Aqui estaremos mais interessados em olhar as superfícies de um ponto de vista topológico e não tão geométrico. Portanto, enquanto na geometria as principais propriedades que consideramos são alteradas com a modificação das distâncias, das áreas, dos ângulos e curvaturas, na topologia estudamos o conjunto das propriedades que não se alteram pelas deformações como esticar, encolher, inflar, torcer, entortar.*

**Definição 1.1.15.** *Dizemos que duas superfícies $S$ e $M$, são* ***homeomorfas****, ou* ***topologicamente equivalentes****, quando existe um homeomorfismo entre elas.*

**Definição 1.1.16.** *A quantidade $\alpha$ é um* ***invariante topológico*** *se quando $S$ e $N$ são superfícies topologicamente equivalentes, então $\alpha(S) = \alpha(Y)$.*

**Observação 1.1.17.** *Outra forma de ver a Definição 1.1.15 é: duas superfícies são topologicamente equivalentes, se ao aplicar uma série das deformações citadas na Observação 1.1.14, em uma das superfícies, pode-se obter a outra. Significa então que as propriedades citadas não alteram as propriedades topológicas da superfície.*

**Exemplo 1.1.18.** Na Figura 1.2 podemos ver deformações da esfera em $a$) quanto do toro em $b$).

Figura 1.2: Exemplos de superfícies homeomorfas

Existem ocasiões as quais as deformações são mais complexas, quando isso ocorre temos o que chamamos de **invariantes topológicos**, que são de grande utilidade para nos ajudar a identificar superfícies homeomorfas. Apresentaremos no decorrer dessa seção algumas desses invariantes, que nos ajudaram a classificar superfícies.

**Definição 1.1.19.** *Uma superfície $M$ será dita **fechada** se é compacta e não tem bordo.*

**Definição 1.1.20.** *A **soma conexa** de duas superfícies $M_1$ e $M_2$, denotada por $M_1 \# M_2$, é a nova superfície obtida pela remoção do interior de um pequeno disco em $M_1$ e um em $M_2$ e a identificação dos bordos.*

**Observação 1.1.21.** *Pela Definição 1.1.20 podemos verificar que a esfera $S^2$ é o elemento neutro dessa operação. De fato, seja $M$ uma superfície qualquer que iremos realizar a soma conexa com $S^2$. Retiramos o interior de um disco de $M$. Mas ao retirarmos o interior de um disco da $S^2$ obtemos uma superfície homeomorfa a um disco, portanto o que identificaremos a $M \setminus D$ é equivalente ao próprio interior do disco que tiramos de $M$ união com seu proprio bordo, obtendo então uma superfície homeomorfa a $M$.*

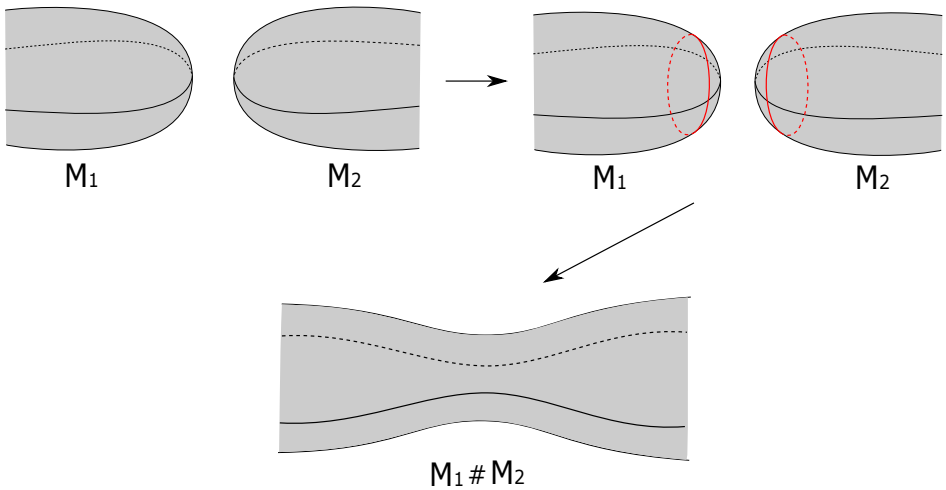


Figura 1.3: Passo a passo da soma conexa

**Observação 1.1.22.** *A superfície resultante da soma conexa de duas superfícies orientadas é uma superfície orientada. De fato, a soma conexa não acrescenta nenhuma faixa de Moebius ao ser realizada, portanto se nenhuma das superfícies contém uma faixa, o resultado também não terá.*

*Analogamente ao caso anterior, a superfícies resultante da soma conexa de duas superfícies não orientáveis é uma superfície não orientável.*

**Definição 1.1.23.** *Dado uma superfície compacta orientável $M \cong S^2 \# nT$ o número $n$ é chamado **gênero** de $M$, que corresponde o número de alças da superfície.*

**Exemplo 1.1.24.** Temos três superfícies ilustradas na Figura 1.4. Em $a$) temos a esfera bidimensional denotada por $S^2$; em $b$), denotado por $T^2$ ou apenas $T$

temos o toro; em $c$) o n-toro, denotado por $nT^2$ ou simplesmente $nT$. Note que ($a$), ($b$) e ($c$) são superfícies orientadas. Pela Definição 1.1.23, o gênero do $T^2$, ilustrado na Figura 1.4 item $b$), é igual a 1, assim como o gênero do $nT^2$ em $c$) é $n$.

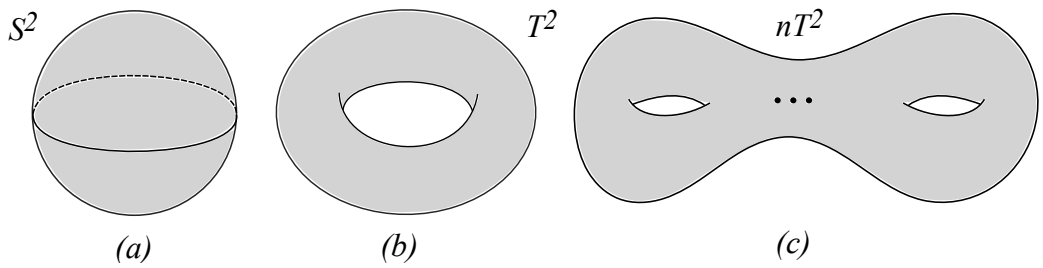


Figura 1.4: Exemplos de superfícies fechadas e orientadas

**Teorema 1.1.25.** *Toda superfície orientada $M$, compacta é homeomorfa a soma conexa de $n-$toros com a esfera, isto é:*

$$M \cong S^2 \# nT^2$$

*para algum $n \geq 0$.*

O Teorema 1.1.25 é de grande importância para nossos estudos, pois ele classifica todas as superfícies fechadas e orientadas. Toda superfície com gênero $n \geq 1$ é homeomorfa ao $nT^2$, já que a $S^2$ é o elemento neutro da soma conexa.

**Teorema 1.1.26.** *Seja $M$ uma superfície com gênero $g(M)$ e $k$ componentes de bordo. A característica de Euler de $M$ é dado por*

$$\mathcal{X}(M) = 2 - 2g(M) - k$$

**Corolário 1.1.27.** *Se $M_1$ e $M_2$ são duas superfícies compactas e conexas, então*

$$\mathcal{X}(M_1 \cup M_2) = \mathcal{X}(M_1) + \mathcal{X}(M_2) - \mathcal{X}(M_1 \cap M_2)$$

*A característica de Euler da soma conexa de duas superfíciesm $M_1$ e $M_2$ é dada por:*

$$\mathcal{X}(M_1 \# M_2) = \mathcal{X}(M_1) + \mathcal{X}(M_2) - 2$$

## 1.2 Grafos

Nessa seção veremos algumas definições da teoria de grafos baseada em [20].

**Definição 1.2.1.** *Um grafo finito $G(V, A)$ é formado por um conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_V\}$ de $V$ pontos chamados* ***vértices*** *e um conjunto de $A$ traços de curvas chamados* ***arestas****, onde cada traça conecta um par de vértices de $V$.*

**Exemplo 1.2.2.** Na Figura 1.5 temos exemplos de vários tipos de grafos que iremos caracteriza-los pelas definições nesta seção.

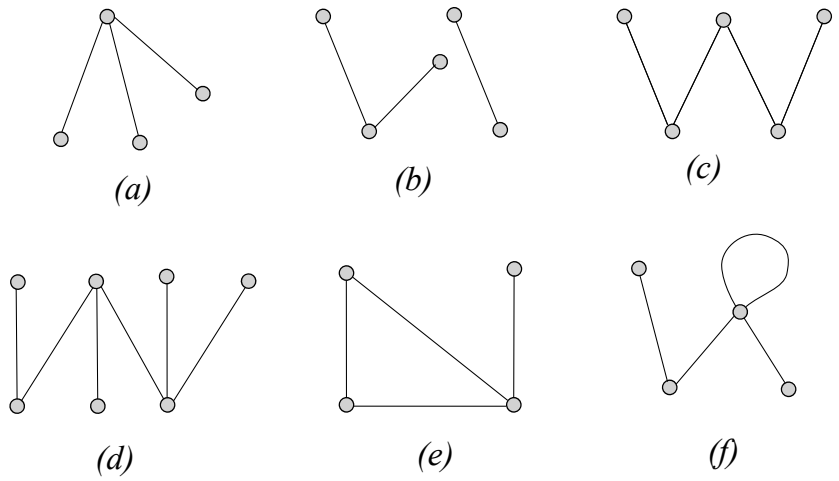


Figura 1.5: Exemplos de grafos

**Definição 1.2.3.** *Um* ***caminho*** *sobre um grafo $G(V, A)$ é uma sequência de vértices distintos e arestas distintas $v_1 a_1 v_2 a_2 \cdots a_k v_{k+1}$ onde $a_j$ é incidente aos vértices $v_j$ e $v_{j+1}$. Se $v_1 = v_k$, esta sequência será chamada de* ***ciclo****.*

**Definição 1.2.4.** *Diremos que um grafo $G(V, A)$ é* ***conexo*** *se existe um caminho que liga quaisquer dois de seus vértices.*

**Exemplo 1.2.5.** Podemos ver na Figura 1.5 $b$) um exemplo de grafo não conexo, enquanto $a$), $c$), $d$), $e$) e $f$) são conexos. Usaremos a notação $uv$, para a aresta que conecte os vértices $u$ e $v$. Em $e$) vemos o exemplo de um ciclo.

**Definição 1.2.6.** *Uma* ***árvore*** *é um grafo conexo que não possui ciclos.*

Os grafos tipo árvore são grafos específicos que terão grande relevância nas demonstrações dos principais resultados que iremos apresentar neste trabalho, pois após definir algumas ferramentas que iremos utilizar, esse tipo de grafo será nosso ponto de partida para generalizações de grafos. Sendo assim, trataremos de alguns resultade válidos somente para esses grafos.

**Exemplo 1.2.7.** Nos itens $a$), $c$) e $d$) na Figura 1.5 temos exemplos de árvores. Note que em $b$) temos um grafo que não possui ciclos, porém não é conexo, não se encaixando na Definição 1.2.6.

**Definição 1.2.8.** *O número de arestas conectadas a um vértice $u$ de um grafo é chamado* ***grau*** *de $u$, e será denotado por $deg(u)$. Se $deg(u) = 1$,então $u$ será dito* ***vértice extremo*** *e a única aresta de um vértice extremo será dita* ***aresta extrema***

**Definição 1.2.9.** *Um grafo com $V$ vértices e $V-1$ vértices extremos é chamado* ***grafo estrela****.*

**Exemplo 1.2.10.** Na Figura 1.5 $a$) temos exemplo de um grafo estrela com 4 vértices e 3 vértices extremos. Note que em um grafo estrela temos $V-1$ vértices com grau 1 e um vértice com grau $A = V - 1$.

**Definição 1.2.11.** *O número de* ***ciclos livres*** *de um dado grafo com $V$ vértices é o número mínimo de arestas que podem ser retiradas do grafo para obter uma árvore com os $V$ vértices.*

Notaremos o número de ciclos livres por $\beta_1(G)$ e os chamaremos apenas de ciclos. $\beta_1(G)$ também é conhecido como o **primeiro número de Betti** do grafo.

**Teorema 1.2.12.** *O número de ciclos (livres) de um grafo $G(V, A)$ é dado por*

$$\beta_1(G) = A - (V - 1) = V + A - 1$$

Uma consequência imediata da Definição 1.2.6 e do Teorema 1.2.12 é a seguinte:

**Corolário 1.2.13.** *Toda árvore satisfaz $V = A + 1$.*

**Definição 1.2.14.** *Um* ***subgrafo*** *de um grafo $\mathcal{G}$ é um grafo finito formado por um conjunto de vértices e arestas de $\mathcal{G}$.*

**Definição 1.2.15.** *Um grafo com $A$ arestas será chamado* ***grafo básico*** *e denotado por $L_A$, quando é uma árvore com $A$ arestas e todos os vértices tem grau máximo igual a 2.*

Pelos seguintes teoremas estabelecemos uma relação entre o número de Betti e a característica de Euler de um grafo $G(V, A)$.

**Teorema 1.2.16.** *A característica de Euler de um grafo $G(V, A)$ é dada por $\mathcal{X}(G) = V - A = 1 - \beta_1(G)$. Consequentemente toda árvore tem característica de Euler igual a 1.*

**Teorema 1.2.17.** *A característica de Euler é um invariante topológico para grafos.*

**Definição 1.2.18.** *Um grafo é dito* ***bipartido*** *se é possível atribuir sinais $\pm$ a cada um de seus vértices de modo que cada aresta conecte vértices de sinais opostos. Caso contrário o grafo é dito* ***não-bipartido****.*

**Teorema 1.2.19.** *Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui nenhum ciclo impar. Caso contrário, se o grafo tem um ciclo ímpar, ele é não-bipartido. Consequentemente toda árvore é um grafo bipartido.*

**Exemplo 1.2.20.** Do Teorema 1.2.19, podemos afirmar que o grafo $b$) da Figura 1.6 é não-bipartido, pois possui um ciclo de tamanho 3. O mesmo ocorre com o grafo $f$) da Figura 1.5, já que o loop sempre conecta um vértice nele mesmo. Os grafos em $a$) e $c$) são bipartidos pois possuem zero ciclos e um único ciclo de tamanho quatro, respectivamente.

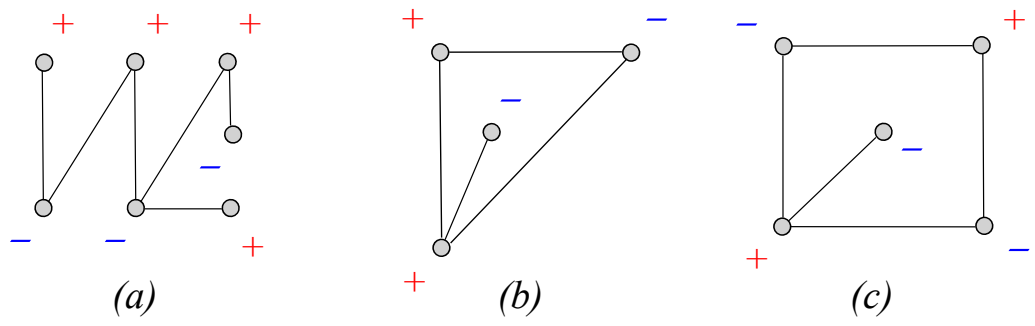


Figura 1.6: Exemplos de grafos bipartidos e não-bipartidos

### 1.2.1 Grafos com pesos nos vértices

**Definição 1.2.21.** *Um grafo com pesos nos vértices é um grafo que tem associado a cada um dos seus vértices um número natural, e será denotado por $\mathcal{G}$.*

Vamo denotar a soma total dos pesos do grafo por $W(G)$ ou, quando não houver dúvida sobre qual o grafo estamos falando, simplismente por $W$.

**Definição 1.2.22.** *A 3-upla $(V, A, W)$, corresponde ao número de vértices, número de arestas e a soma total do pesos do grafo respectivamente, será chamada de* ***característica do grafo*** *e denotada por $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$.*

**Definição 1.2.23.** *Dois grafos com pesos nos vértices, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, são* ***isomorfos*** *se existe uma bijeção $\psi : V(\mathcal{G}_1) \to V(\mathcal{G}_2)$, entre os conjuntos de vértices de $\mathcal{G}_1$ e de $\mathcal{G}_2$, preservando as adjacências dos vértices (com pesos correspondentes), isto é: $uw \in A(\mathcal{G}_1)$ se, e somente se, $\psi(u)\psi(w) \in A(\mathcal{G}_2)$, onde $V(\mathcal{G}_i)$ e $A(\mathcal{G}_i)$ são, respectivamente, os vértices e arestas do grafo $\mathcal{G}_i$, com $i = 1, 2$.*

**Observação 1.2.24.** *Se dois grafos $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tem características diferentes então os grafos não são isomorfos, pois não teria como estabelecer uma bijeção entre dois grafos.*

**Definição 1.2.25.** *Seja $\mathcal{G}$ um grafo com pesos nos vértices e $\mathcal{T}$ um subgrafo de $\mathcal{G}$. $\mathcal{T}$ é chamado de* ***árvore maximal*** *de $\mathcal{G}$ se o conjunto de vértices com pesos de $\mathcal{T}$ coincide com o conjunto de vértices com pesos de $\mathcal{G}$.*

Se $\mathcal{G}$ é um grafo bipartido, com sinais e pesos nos vértices, denotamos por:

1) $V^{\pm}$ o número total de vértices com sinais "$\pm$", então $V = V^+ + V^-$;

2) $W^{\pm}$ a soma total dos pesos dos vértices com sinais "$\pm$", então $W = W^+ + W^-$.

**Definição 1.2.26.** *Seja $\mathcal{G}$ um grafo bipartido com pesos nos vértices. Chamaremos de* ***condiçao de balanceamento*** *de $\mathcal{G}$ a expressão*

$$B(\mathcal{G}) = (V^+ - V^-) - (W^+ - W^-).$$

*Se $B(\mathcal{G}) = 0$ diremos que $\mathcal{G}$ é um grafo balanceado.*

Agora iremos conceituar uma das ferramentas que mais utilizaremos ao longo das principais demonstrações que apresentaremos aqui.

**Definição 1.2.27.** *Seja $\mathcal{G}$ um grafo bipartido com pesos nos vértices contendo as arestas $uv$ e $xz$.*

1. *Uma* ***cirurgia horizontal*** *$S_H$, entre as arestas $uv$ e $yz$, denotado por $S_H(\mathcal{G})$, identifica as duas arestas resultando na aresta $rs$, identifica os vértices $u$ e $x$, resultando no vértice $r$, e os vértices $v$ e $z$, resultando no vértice $s$. Os pesos nos vértices $r$ e $s$ correspondem, respectivamente, a soma do peso de $u$ com o peso de $x$ e a soma do peso de $v$ com o peso de $z$.*

2. *Uma* ***cirurgia vertical*** *$S_V$, entre os vértices $u$ e $z$, denotado por $S_V(\mathcal{G})$, é a conexão dos dois vértices por uma aresta $uz$.*

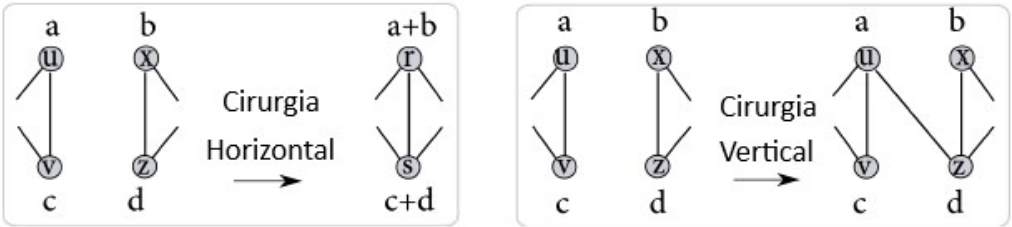


Figura 1.7: Cirurgia horizontal e vertical de grafos

**Observação 1.2.28.** *Quando os vértices $u, v, x, z$ estão em uma mesma componente conexa de $\mathcal{G}$, então $\beta_1(S_H(\mathcal{G})) = \beta_1(S_V(\mathcal{G})) = \beta_1(\mathcal{G}) + 1$.*

*Quando os pares $u, v$ e $x, z$ estão em componentes conexas disjuntas de $\mathcal{G}$, então $\beta_1(S_H(\mathcal{G})) = \beta_1(S_V(\mathcal{G})) = \beta_1(\mathcal{G})$.*

**Definição 1.2.29.** *Sejam $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ dois grafos conexos disjuntos. Se o par $(u, v)$ pertence a $\mathcal{G}_1$ e o par $(x, z)$ pertence a $\mathcal{G}_2$, a cirurgia horizontal entre os dois grafos será chamada de* ***soma conexa horizontal****, denotada por $\mathcal{G}_1 \oplus_H \mathcal{G}_2$, e a cirurgia vertical será chamada de* ***soma conexa vertical****, denotada por $\mathcal{G}_1 \oplus_V \mathcal{G}_2$.*

**Observação 1.2.30.** *Se $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são grafos bipartidos, então os grafos resultantes das cirurgias é um grafo bipartido.*

**Proposição 1.2.31.** *Se $\mathcal{T}$ é uma árvore que pode ser obtida por um número finito de somas conexas horizontais de grafos $L_3$ então $\mathcal{T}$ satisfaz $V^+ = V^-$.*

*Demonstração.* Todo grafo $L_3$ satisfaz $V^+ = V^- = 2$. Naturalmente um conjunto com $k$ grafos $L_3$ satisfaz $V^+ = V^- = 2k$. Se $\mathcal{T}$ é obtido por $k - 1$ somas conexas horizontais entre $k$ grafos $L_3$, em cada cirurgia são identificados dois pares de vértices de sinais opostos, o que significa, do valor total de vértices dos grafos somados, subtrair dois vértices de sinais opostos (um vértice de cada sinal). Consequentemente $\mathcal{T}$ satisfaz $V^+ = V^- = 2k - (k - 1) = k + 1$. □

**Observação 1.2.32.** *Quando necessário denotaremos $V(\mathcal{G})$, $A(\mathcal{G})$ e $W(\mathcal{G})$ para indicar, respectivamente, o número de vértices, o número de arestas e o peso total de $\mathcal{G}$.*

**Proposição 1.2.33.** *Toda árvore com $A > 1$ arestas pode ser obtidas por $A - 2$ somas conexas horizontais de $A - 1$ grafos tipo $L_2$.*

*Demonstração.* Dado uma árvore $\mathcal{T}$ com $A$ arestas, se $A = 2$ então $\mathcal{T}$ é um $L_2$. Se $A = 3$ então $\mathcal{T}$ é um $L_3$ ou um grafo estrela e em ambos os casos $\mathcal{T}$ pode ser obtido como uma soma conexa horizontal de dois grafos $L_2$.

Suponhamos agora que $\mathcal{T}$ tem $A - 1 > 2$ arestas. Vamos usar o princípio de indução sobre $A$. Seja $v$ um vértice extremo ( com uma única aresta ) de $\mathcal{T}$ conectado a $w$ pela aresta $vw$.

Eliminando a aresta $vw$ de $\mathcal{T}$ com o vértice $v$, obtemos uma árvore $L$ com $A - 1$ arestas e $w \in L$. Suponha, por hipótese de indução, que $L$ pode ser obtido por $A - 3$ somas horizontais de $k - 1$ grafos $L_2$.

Fazendo uma soma horizontal de $L_2$ com $L$, com a identificação de $w \in L$ com o vértice de grau 2 em$L_2$, obtemos o grafo $\mathcal{T}$ com $A$, como soma conexa de $A - 1$ grafos $L_2$. □

**Corolário 1.2.34.** *Toda árvore $\mathcal{T}$, com mais de uma aresta, pode ser obtida por somas conexas horizontais de grafos tipo $L_2$ e $L_3$.*

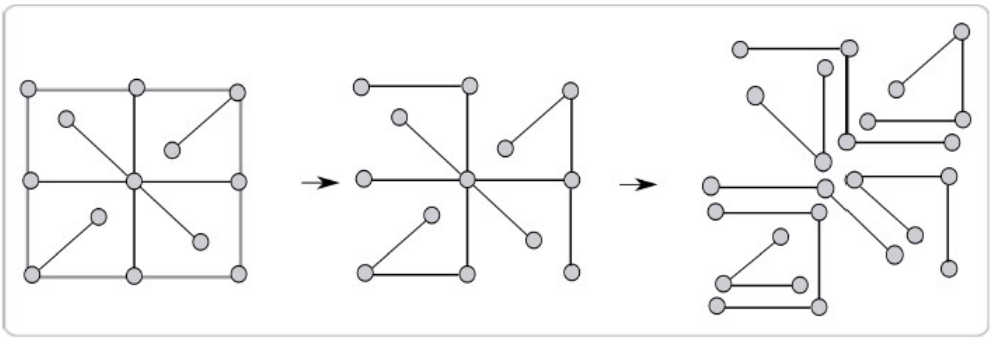

Figura 1.8: Decomposição de árvore maximal em $L_2$ e $L_3$

*Se $A(\mathcal{T}) > 3$ e $\mathcal{T}$ pode ser obtida por soma conexa horizontal de $k = \dfrac{A(\mathcal{T}) - d - 1}{2}$ grafos $L_3$ e $d$ grafos $L_2$ então $\mathcal{T}$ satisfaz $V^+ - V^- = d$.*

**Teorema 1.2.35.** *Todo grafo $\mathcal{G}$ pode ser obtido por somas conexas horizontais de grafos tipo $L_2$ e $L_3$ e cirurgias verticais.*

*Demonstração.* Dado um grafo $\mathcal{G}$, retirando uma aresta de cada um de seus ciclos obtemos uma árvore maximal $\mathcal{T}$. Pelo Corolário 1.2.34 toda árvore $\mathcal{T}$ pode ser obtida por somas conexas horizontais de grafos $L_2$ e $L_3$. O grafo $\mathcal{G}$ pode ser obtido por cirurgias verticais convenientes sobre $\mathcal{T}$. □

## 1.3 Grafos associados a superfícies com curvas

Sejam $M$ uma superfície fechada (sem bordo) e orientada e $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{A} \alpha_i$ um conjunto com $A$ curvas fechadas, simples e disjuntas sobre $M$. O conjunto $\mathcal{C}$ separa $M$ em um conjunto de $V$ regiões conexas, isto é, $M \setminus \mathcal{C}$, é uma união disjunta de regiões conexas de $M$. Podemos associar um grafo $\mathcal{G}$ ao par $(M, \mathcal{C})$ da seguinte forma:

a) cada região conexa $U_i$ de $M \setminus \mathcal{C}$ fazemos corresponder a um vértice $v_i$ em $\mathcal{G}$ e cada curva $\alpha_j$ de $\mathcal{C}$ fazemos corresponder a uma aresta de $a_j$ em $\mathcal{G}$;

b) uma aresta $a_j$ incide no vértice $v_i$ se, e somente se, a curva de $\mathcal{C}$ correspondente a $a_j$ está no bordo da região $M \setminus \mathcal{C}$ coorespondente a $v_i$;

c) um ciclo com uma única aresta, chamada laço, ocorre quando a curva correspondente é bordo (duas vezes) de uma única região;

d) um vértice $v_i$ recebe o peso $t_i$ se a região correspondente a $v_i$ tem gênero $t_i$.

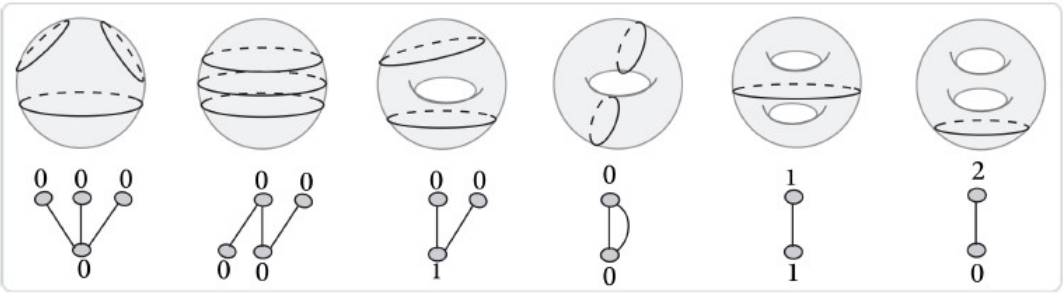


Figura 1.9: Exemplos de grafos associados a superfícies com curvas

**Definição 1.3.1.** *Dois pares $(M, \mathcal{C})$ e $(M', \mathcal{C}')$ são ditos* ***equivalentes*** *quando existe um difeomorfismo de $M$ em $M'$ que leva $C$ em $C'$.*

**Observação 1.3.2.** *Se $(M, \mathcal{C})$ e $(M', \mathcal{C}')$ são equivalentes então existe um isomorfismo entre os seus respectivos grafos associados.*

**Proposição 1.3.3.** *Todo grafo $\mathcal{G}$ com característica (com a característica definida em 1.2.22) $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$ está associado a um par $(M, \mathcal{C})$, onde $\mathcal{C}$ é um conjunto com $A$ componentes de curvas fechadas mergulhadas e disjuntas sobre $M$.*

*Demonstração.* Dado um grafo $\mathcal{G}$ podemos obter o par $(M, \mathcal{C})$ associado a $\mathcal{G}$ da seguinte forma (ver Figura 1.10): Primeiro mergulhe o grafo $\mathcal{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tome uma região (convenientemente), que denotaremos por $R$, vizinhança de $\mathcal{G}$ em $\mathbb{R}^3$. Denotaremos por $Z$ a superfície fechada bordo de $R$, que é conhecida como vizinhança tubular de $\mathcal{G}$.

Observe que o gênero de $Z$ é igual a $\beta_1(\mathcal{G})$. Faça corresponder cada aresta $a_i$ de $\mathcal{G}$ uma curva fechada $\alpha_i$ em $Z$, transversal à aresta $a_i$. Denotaremos por $\mathcal{C}$ o conjunto destas curvas. O par $(Z, \mathcal{C})$ corresponde ao grafo $\mathcal{G}$ com peso zero.

Para realizar o grafo $\mathcal{G}$ com os pesos, façamos em cada uma das regiões $Z_i$ de $Z$, correspondente ao vértice $v_i$ com peso $t_i > 0$, uma soma conexa de uma superfície fechada $W_i$ com gênero $t_i$ com $Z$. Esta soma conexa resultante numa superfície orientada e fechada $M$, onde o par $(M, \mathcal{C})$ realiza o grafo $\mathcal{G}$. □

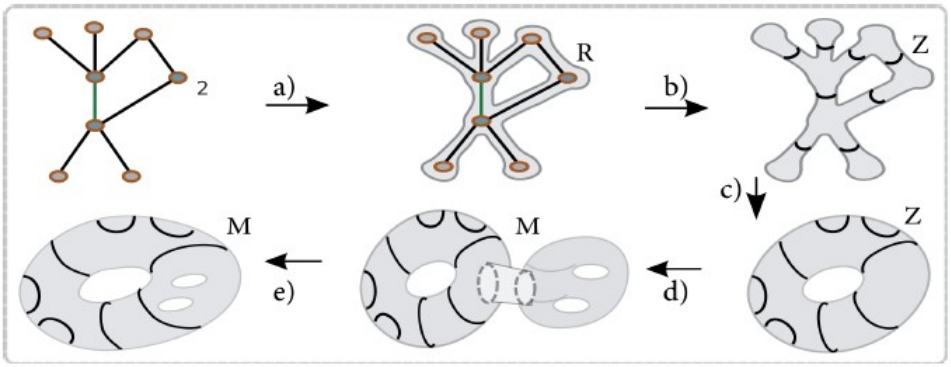


Figura 1.10: Superfície com curvas: vizinhança tubular de um grafo com peso

**Proposição 1.3.4** ([20]). *Se $\mathcal{G}$ é um grafo com característica $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$ associado ao par $(M, \mathcal{C})$, onde $M$ é uma superfície orientada. Então a característica de Euler de $M$ (em função de $C(\mathcal{G})$) é dada por*

$$\mathcal{X}(M) = 2(V - A - W)$$

*e o gênero é dado por*

$$g(M) = \beta_1(\mathcal{G}) + W.$$

*Demonstração.* A característica de Euler de cada componente $U_i$ de $M \setminus \mathcal{C}$ é dada por $\mathcal{X}(U_i) = 2 - 2t_i - A_i$, onde $t_i$ e $A_i$ , correspondem, respectivamente, ao gênero e ao número de componentes de bordo de $U_i$. Como cada componente de $\mathcal{C}$ é bordo duas componentes de $M \setminus \mathcal{C}$ então o número total de componentes do bordo da união das componentes de $U_i$ é igual a $2A$. A interseção entre duas componentes é sempre uma curva fechada ou conjunto vazio e tem característica de Euler igual a zero. Logo

$$\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(\bigcup_{i=1}^{V} U_i) = \sum_{i=1}^{V} \mathcal{X}(U_i) = \sum_{i=1}^{V} (2 - 2t_i - A_i) = 2(V - W - A).$$

O gênero de uma superfície orientada $M$ é dado por $g(M) = 1 - \frac{\mathcal{X}(M)}{2} = 1 - (V - W - A)$. Como $\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - V + A$ então $g(M) = \beta_1(\mathcal{G}) + W$. □

# Capítulo 2

# Aplicações entre superfícies fechadas

Veremos neste capítulo definições e resultados a cerca de aplicações entre superfícies fechadas, com ênfase nas aplicações estáveis. Definiremos também algumas ferramentas que nos ajudarão na construção de aplicações estáveis como o tipo de transições e cirurgias entre aplicações estáveis. As principais referências deste capítulo são [4], [5], [16], [21], [28] e [35] .

## 2.1 Aplicações entre superfícies fechadas

Conceituaremos aqui aplicações estáveis que é o grande objeto de estudo deste trabalho, bem como parte da teoria que o certa, o comportamento de seus pontos singulares, o grau dessas aplicações e a relação da característica de Euler com as aplicações.

### 2.1.1 Aplicações estáveis

Sejam $M$ e $N$ duas superfícies suaves. Denotaremos por $\mathcal{F}(M,N)$, o conjunto de todas as aplicações entre $M$ e $N$. E notaremos por $\mathcal{C}^\infty(M,N)$ o conjunto de todas as aplicações suaves $f \in \mathcal{F}(M,N)$ entre $M$ e $N$.

**Definição 2.1.1.** *Duas aplicações $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ são ditas $\mathcal{A}-$ equivalentes quando existem difeomorfismos $\phi : N \to N$ e $\psi : M \to M$, tais que $h = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, ou seja, $f$ e $h$ são $\mathcal{A}-$**equivalentes** quando o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\ M \arrow[r, "h"] & N \end{tikzcd}$$

**Definição 2.1.2.** *Uma aplicação $f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ é dita* ***estável*** *se existe uma vizinhança aberta $W_f$ de $f$ em $\mathcal{C}^\infty(M,N)$ (com a topologia $\mathcal{C}^\infty$ de Whitney) tal que cada $h$ em $W_f$ é $\mathcal{A}-$equivalente a $f$.*

**Definição 2.1.3.** *Notaremos por $\mathcal{E}(M,N)$ o subconjunto de $\mathcal{C}^\infty(M,N)$ composto das aplicações estáveis.*

A relação entre esse subconjunto e o conjunto das aplicações suaves pode ser expresso no Teorema 2.1.4, cujo a demonstração pode ser encontrada em [36].

**Teorema 2.1.4.** *O conjunto $\mathcal{E}(M,N)$ é aberto e denso em $\mathcal{C}^\infty(M,N)$.*

**Definição 2.1.5.** *Duas aplicações $f : M \to N$ e $h : M \to N$ são ditas* ***estavelmente isotópicas*** *se existe uma aplicação suave (estável) $F : M \times [0,1] \to N$ tal que para cada $t \in [0,1]$, a aplicação em que $F_t = F|_{M\times\{t\}}$ é estável, com $F_0 = f$ e $F_1 = h$.*

**Definição 2.1.6.** *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ uma aplicação estável. Um ponto $x$ em $M$ é dito* ***ponto regular*** *de $f$ se, numa vizinhança do ponto $x$, a aplicação $f$ é um difeomorfismo local, caso contrário, dizemos que $x$ é um* ***ponto singular****.*

**Observação 2.1.7.** *Em outras palavras podemos dizer que um ponto $p \in M$ é ponto singular de $f$ se a aplicação linear $df_p$ não tem posto máximo, pois todo difeomorfismo local tem posto máximo.*

**Definição 2.1.8.** *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ uma aplicação estável.*

1. *O conjunto de todos os pontos singulares de $f$, denotado por $\Sigma f$, é chamado* ***conjunto singular****.*
2. *A imagem do conjunto singular, denotado por $Bf$, é chamado de* ***contorno aparente****.*
3. *O conjunto de todos os pontos não singulares de $f$, denotado por $M \setminus \Sigma f$, é chamado de* ***conjunto regular*** *de $f$.*

**Exemplo 2.1.9.** Na Figura 2.1, temos três aplicações de $S^2$ em $\mathbb{R}^2$ com uma curva singular. Observe que em $b$) a aplicação é não estável com um ponto de tangência no contorno aparente, pois uma pequena perturbação em uma vizinhança do ponto de tangência, o contorno aparente passa a ter dois pontos de intercessão, como em $c$), ou nenhum ponto de intercessão, como em $a$).

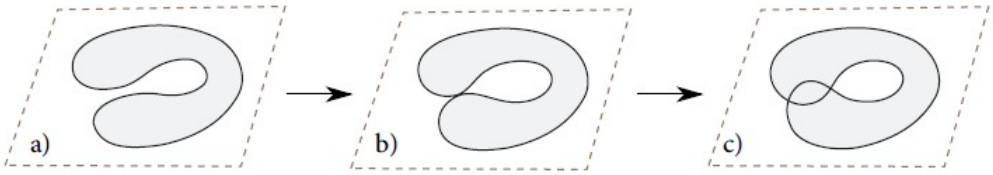


Figura 2.1: Exemplo de aplicações estáveis e não estáveis

Por Whitney em [36], as aplicações entre superfícies podem ser vistas, localmente, como aplicações do plano no plano. Então, se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação estável e $p = (x,y)$ um ponto em $U$, temos

1. $p$ é um ponto regular, então $f$ é localmente, em uma vizinhança de $p$, da forma $(x, y) \mapsto (x, y)$;

2. $p$ é um ponto singular de $f$ do tipo:

   a) **Dobra**, se $T_p\Sigma(f) \oplus Ker(df_p) = T_pU$. Nesse caso, podemos escolher um sistema de coordenadas $(x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ centrada em $p$ tal que $(x, y) \mapsto (x, y^2)$

   b) **Cúspide**, se $T_p\Sigma(f) = Ker(df_p)$. Neste caso podemos encontrar coordenadas $(x, y)$ centradas em $p$ tais que $f$ é localmente da forma $(x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$.

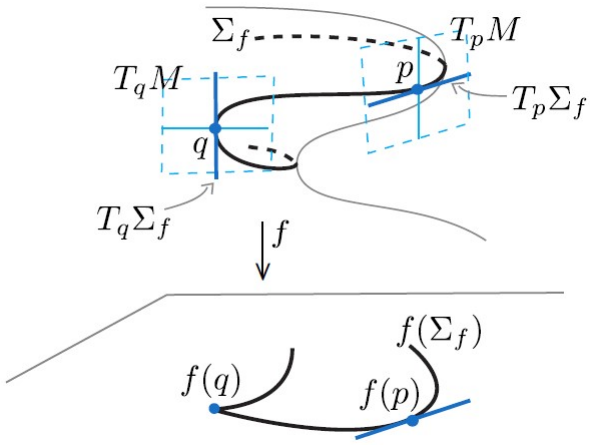


Figura 2.2: Tipos de singularidade

**Observação 2.1.10.** *Se $p$ é um ponto de dobra, então $(df)_p$ leva o espaço tangente $T_pU$ (que seria um plano) em um espaço tangente com uma dimensão a menos ao contorno aparente (ou seja, reduzindo-se a uma reta na imagem). Por outro lado, quando $p$ é um ponto de cúspide, então o $T_pU$ é levado por $(df)_p$ em um único ponto no contorno aparente, $f(p)$.*

**Definição 2.1.11.** *Seja $f : M \to N$ uma aplicação estável, a orientação das curvas do contorno aparente de $f$ é dada da seguinte maneira: ao percorrer a curva de acordo com sua orientação, o número de pré-imagens de $f$ é sempre maior do lado esquerdo.*

**Definição 2.1.12.** *Sejam $M$ e $N$ duas superfícies orientadas e $f : M \to N$ uma aplicação estável. Uma região $U$ de $M \setminus \Sigma f$ é dita **positiva** se tem a orientação preservada por $f$, e **negativa** no caso contrário.*

A seguinte observação nos dá uma excelente caracterização do conjunto singular de uma aplicação estável, e a partir dai, no capítulo seguinte poderemos definir um invariante para essas aplicações.

**Observação 2.1.13.** *Se $f : M \to N$ é uma aplicação estável, e $M$ uma superfície fechada e orientada, então o conjunto singular de $f$, $\Sigma f$, é composto de curvas fechadas, simples e disjuntas, que separam as regiões positivas e negativas de $M$ que são componentes regulares de $f$.*

**Definição 2.1.14.** *O fecho de cada componente conexa regular de $M \setminus \Sigma f$ cuja orientação é preservada por $f$, será denotado por $U_i^+$, enquanto o fecho de cada componente conexa regular cuja orientação é invertida por $f$, será denotado por $U_j^-$.*

*Denotaremos por $M^+ = \bigcup_i U_i^+$ e $M^- = \bigcup_j U_j^-$. Segue então que $M = M^+ \cup M^+$.*

**Definição 2.1.15.** *Seja $y \in f(M)$. Dizemos que $x \in f^{-1}(y)$ é um ponto positivo se $x \in M^+$ ou negativo se $x \in M^-$.*

**Definição 2.1.16.** *Seja $f : M \to N$, onde $M$ e $N$ são superfícies fechadas e orientadas. Seja $U$ uma região de $N$ tal que $f(M) \subset U$. Se $U$ é homeomorfo a um disco, diremos que $f$ é uma **aplicação planar**. Quando $U$ não é homeomorfo a um disco, dizemos que $f$ é uma **aplicação não planar**.*

**Exemplo 2.1.17.** A Figura 2.3 ilustra cinco aplicações não planares no 3-toro: em $a$), $b$) e $c$) estão definidas no 4-toro; em $d$) e $e$) estão definidas no 6-toro.

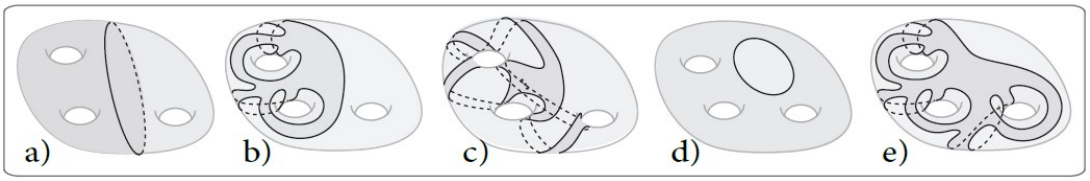


Figura 2.3: Exemplos de Aplicações com grau zero

### 2.1.2 Grau de aplicações entre superfícies

**Definição 2.1.18.** *Uma aplicação $f : M \to N$, onde $M$ e $N$ são superfícies fechadas e orientadas. Diremos que $f$ é dita **própria** se a imagem inversa de um compacto é um compacto.*

Seja $M$ e $N$ superfícies fechadas e orientadas e $f : M \to N$ uma aplicação própria de classe $C^1$. De acordo com [16], para todo valor regular $y \in N$, de $f$, a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade compacta de dimensão 0 em $M$, donde consiste em um número finito de pontos:

$$f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset M.$$

**Teorema 2.1.19.** *[16] Sejam $M$ e $N$ superfícies fechadas e orientadas, e $f : M \to N$ uma aplicação de classe $C^1$. Todo valor regular $y \in N$ possui uma vizinhança aberta $V$ tal que $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ é a reunião de finitos abertos $U_i$, dois a dois disjuntos, cada um os quais $f$ aplica difeomorficamente sobre $V$.*

**Definição 2.1.20.** *Sejam $M$ e $N$ superfícies fechadas e orientadas e $f : M \to N$ uma aplicação própria de classe $C^1$. O **grau de $f$ no ponto** $y$ (grau local), indicado por $deg_y f$ é a diferença entre o número de pontos positivos e o número de pontos negativos em $f^{-1}(y)$.*

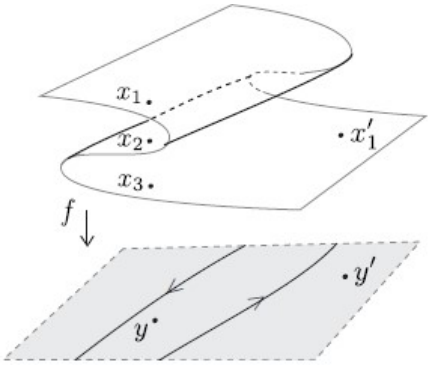


Figura 2.4: Grau de uma aplicação nos pontos $y$ e $y'$

**Exemplo 2.1.21.** A Figura 2.4 ilustra localmente uma aplicação $f$, onde temos $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, x_3\}$, sendo $x_1$ e $x_3$ positivos, pois pertencem a regiões cuja a orientação é preservada por $f$, enquanto $x_2$ é negativo pois pertence a uma região que tem sua orientação invertida por $f$. Assim $deg_y(f) = 2 - 1 = 1$, e analogamente $deg_{y'} = 1$.

**Definição 2.1.22.** *Sejam $f$ uma aplicação e $x \in \Sigma f$ um ponto de cúspide. Diremos que a cúspide $x$ é positiva (respectivamente negativa) se o grau de aplicação local, em uma vizinhança $U_x$ de $x$ é $+1$ (respectivamente $-1$) em relação às orientações dadas. Associamos $s(c) = +1$ (respectivamente $s(c) = -1$) se a cúspide $x$ for positiva.*

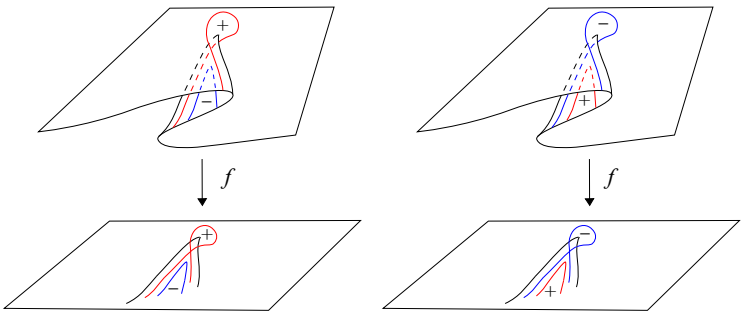


Figura 2.5: Sinal de cúspide

**Teorema 2.1.23** ([16]). *Toda aplicação $f : M \to N$ de classe $C^2$ corresponde a um inteiro $r$, tal que para todo valor regular $y$ de $f$, tem-se que $deg_y f = d$.*

**Definição 2.1.24.** *O número $d = deg_y f$ do Teorema 2.1.23 é o* ***grau da aplicação*** *$f$, ou simplesmente $deg\ f$.*

**Exemplo 2.1.25.** Na Figura 2.6 vemos a ilustração de três aplicações do toro na esfera, onde $deg\ f = 1$ e $s(C) = 4$; $deg\ g = 2$ e $s(C) = 2$; $deg\ h = 1$ e $s(C) = 0$.

**Propriedade 2.1.26.** *[16] Seja $f_1, g_1 : M \to N$, $f_2 : M \to M$ e $g_2 : N \to P$ aplicações onde $M$, $N$ e $P$ são superfícies fechadas e orientadas, temos:*

1. *Se $f_2$ é a aplicação identidade, então $deg(f_2) = 1$;*

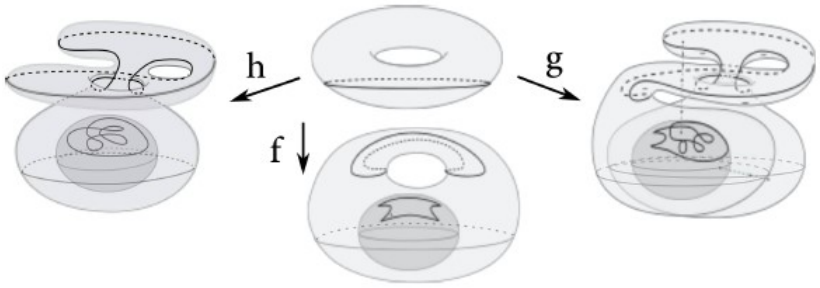


Figura 2.6: Exemplos de Aplicações do toro na esfera com grau

2. *Se $f_1, g_1$ são propriamente homotópicas de classe $C^2$, então $deg(f_1) = deg(g_1)$;*

3. *Se $f_1$ não é sobrejetiva, então $deg(f) = 0$;*

4. *Se $f_1$ e $g_2$ são próprias, de classe $C^2$, onde $N$ e $P$ são conexas, então $deg(g \circ f) = deg(g) \cdot deg(f)$.*

Note que o grau de uma aplicação é um invariante global, pois duas aplicações com graus diferentes não podem ser homotópicas. Note também que nem todas as aplicações de grau zero são aplicações planares como é ilustrado em 5 casos na Figura 2.3.

**Exemplo 2.1.27.** Na Figura 2.7 vemos uma aplicação dobra do 7-toro no 5-toro com grau 1.

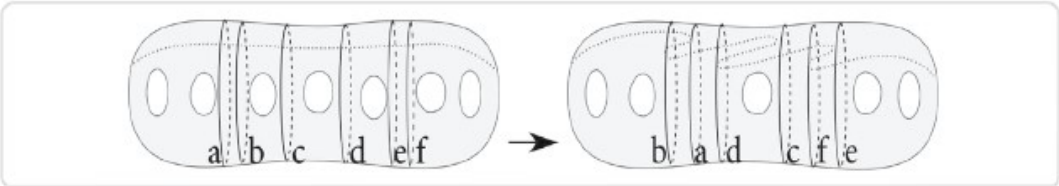


Figura 2.7: Exemplo de Aplicação do 7-toro no 5-toro com grau 1

**Definição 2.1.28** ([15]). *Uma aplicação $\pi : \tilde{X} \to X$ chama-se* ***aplicação de recobrimento*** *(ou simplesmente, um recobrimento) quando cada ponto $x \in X$ pertence a um aberto $V \subset X$ tal que $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ é uma reunião de abertos $U_\alpha$, dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por $\pi$ homeomorficamente sobre $V$.*

**Observação 2.1.29.** *Se $\pi$ é um recobrimento então $\Sigma\pi$ é vazio, pois todos os pontos de $M$ são pontos regulares de $\pi$.*

**Exemplo 2.1.30.** Na Figura 2.8 podemos ver uma aplicação de recobrimento do 7-toro no 3-toro, portanto com conjunto singular vazio, com grau 3.

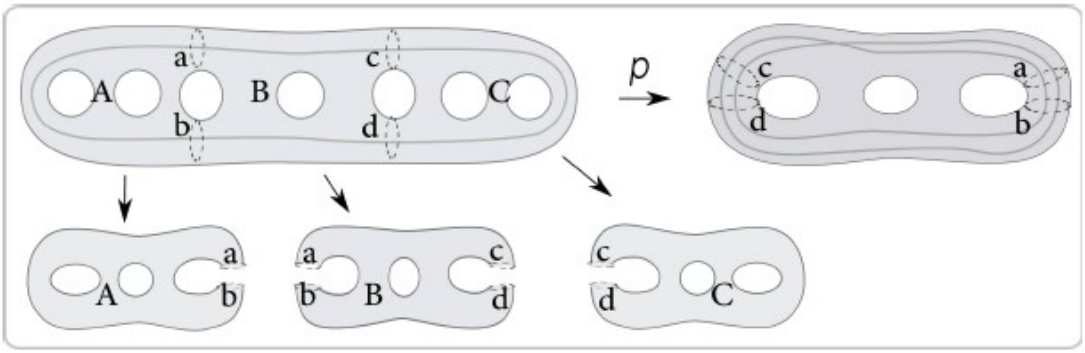


Figura 2.8: Exemplo de Aplicação do 7-toro no 3-toro com conjunto singular vazio

**Teorema 2.1.31** ([21]). *Sejam $M$ e $N$ superfícies fechadas e orientadas e $f : M \to N$ uma aplicação com grau $d$ e com conjunto singular vazio. Então a característica de Euler de $M$ e $N$ satisfaz $\mathcal{X}(M) = d\mathcal{X}(N)$*

*Demonstração.* Seja $M$ uma superfície fechada e orientada $f : M \to N$ uma aplicação com grau $d$ e com conjunto singular vazio. Como ilustra a Figura 2.8, podemos decompor $M$ em $d$ componentes conexas, $C_1, C_2, \cdots, C_{d-1}, C_d$, onde cada uma cobre $N$ somente uma vez. Duas destas componentes, suponhamos $C_1$ e $C_d$, tem duas componentes de bordo. Então, pelo Teorema 1.1.26 temos $\mathcal{X}(C_1) = \mathcal{X}(C_d) = 2 - 2(n-1) - 2 = 2 - 2n$. As outras componentes $C_2, \cdots, C_{d-1}$ tem gênero $n-2$ e 4 componentes de bordo. Então $\mathcal{X}(C_2) = \cdots = \mathcal{X}(C_{d-1}) = 2 - 2(n-2) - 4 = 2 - 2n$. Como a interseção das componentes são curvas fechadas com característica de Euler nula, então pelo Corolário 1.1.27 $\mathcal{X}(C_1 \cup \cdots \cup C_d) = \mathcal{X}(C_1) + \cdots + \mathcal{X}(C_d) = d(2-2n) = d\mathcal{X}(N)$. □

**Corolário 2.1.32.** *Se $\pi : M \to N$ é um recobrimento, então o grau $d$ de $\pi$ é dado por $d = (w-1)\backslash(n-1)$, onde $w$ e $n$ são o gênero de $M$ e $N$ respectivamente.*

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Suponhamos que exista $\pi : M \to N$ onde $M$ e $N$ tem gênero $w$ e $n$ respectivamente. Queremos mostrar que existe um inteiro $d$ que satisfaz $w = d(n-1) + 1$. Pelo Teorema 2.1.31 temos $\mathcal{X}(M) = d\mathcal{X}(N)$, agora pelo Teorema 1.1.26 temos $\mathcal{X}(M) = 2 - 2w$ e $\mathcal{X}(N) = 2 - 2n$, onde por um lado obtemos

$$\mathcal{X}(M) = 2 - 2w = 2(1-w)$$

e por outro lado

$$d\mathcal{X}(N) = d(2-2n) = 2d(1-n)$$

e das duas igualdades

$$2(1-w) = 2d(1-n) \Rightarrow (w-1) = d(n-1)$$

Segue então que $d = (w-1)\backslash(n-1)$.

□

## 2.2 Transições de codimensão 1 e seus efeitos

Nesta seção veremos de forma superficial, as transições de codimensão 1 e seus efeitos ao longo de um caminho entre duas aplicações estáveis no espaço de aplicações suaves $C^\infty(M,N)$.

### 2.2.1 Transições de codimensão 1

Seja $U$ e $V$ vizinhanças abertas de $p \in \mathbb{R}^n$. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^p$ e $g : V \to \mathbb{R}^p$ aplicações suaves. Definimos a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \Longleftrightarrow \exists \text{ vizinhança } W \text{ de } q, W \subset U \cap V \text{ tal que } f_{|W} = g_{|W}$$

**Definição 2.2.1.** *Às classes de equivalência $\sim$ chamamos **germes** de aplicações no ponto $q$. Sem perda de generalidade tomamos $q = 0 \in K^n$.*

**Observação 2.2.2.** *Neste trabalho não iremos aprofundar no estudo de germes de funções, para mais informações veja [4] e [33].*

Considere uma homotopia $F : M \times [0,1] \to N$ entre duas aplicações estáveis $f, g : M \to N$, no conjunto $\mathcal{E}(M,N) \subset C^\infty(M,N)$. A medida que $t$ varia no intervalo $[0,1]$ o contorno aparente de $F_0 = f$ é deformado no contorno aparente de $F_1 = g$. Pode acontecer que ao longo do caminho entre $f$ e $g$, para algum $t_0 \in (0,1)$ a aplicação $F_{t_0}$ não seja estável. Neste caso os contornos aparentes não são equivalentes e o mesmo pode ocorrer com os conjuntos singulares (ver Figura 2.15)

**Definição 2.2.3.** *O conjunto das aplicações não estáveis $C^\infty(M,N) \setminus \mathcal{E}(M,N)$, complementar do conjunto das aplicações estáveis em $C^\infty(M,N)$, é chamdado de conjunto **discriminante** e será denotado por $\mathcal{D}$.*

A Tabela 2.1 apresenta as formas locais (na vizinhança do zero), de aplicações de 1-germe, 2-germe e 3-germe, ilustradas nas Figuras 2.9 e 2.10, que foi retirada de [28].

**Observação 2.2.4.** *Cada transição está representada localmente por uma sequência de três aplicações em $C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. As aplicações do centro, pertencem ao conjunto discriminante $\mathcal{D}$, são não estáveis de codimensão 1 para $a = 0$ e estáveis para $a \neq 0$. Vamos chamar estas sequências de **trasições de codimensão 1**. Em outras palavras uma transição de codimensão 1 é uma aplicação de codimensão 1 que está na interseção do conjunto discriminante $\mathcal{D}$ com um caminho que liga duas aplicações estáveis em diferentes componentes conexas de $\mathcal{E}(M,N)$.*

**Teorema 2.2.5.** *[34] Sejam $M$ e $N$ superfícies fechadas. Se $M$ é orientada e $f : M \to N$ é um aplicação estável, então o número de cúspides do contorno aparente $Bf$ é par.*

| Notação | Nome | Forma normal |
|---|---|---|
| 1. $L$ | lábios | $(x, y^3 + y(x^2 - a))$ |
| 2. $B$ | bicos | $(x, y^3 - y(x^2 - a))$ |
| 3. $S$ | rabo de andorinha | $(x, y^4 + xy - ay^2))$ |
| 4. $DD^0$ | tangências de dobras | $(x, -y^2 + a), (x', x'^2 + y'^2)$ |
| 5. $DD^1$ | tangências de dobras | $(x, y^2 + a), (x', x'^2 + y'^2)$ |
| 6. $DD^2$ | tangências de dobras | $(x, y^2 + a), (x', x'^2 - y'^2)$ |
| 7. $PT^0$ | pontos triplos | $(x + y^2, x - y^2 + a)$, $(x', y'^2)$, $(-x''^2, y'')$ |
| 8. $PT^1$ | pontos triplos | $(x + y^2, x - y^2 + a)$, $(x', y'^2)$, $(x''^2, y'')$ |
| 9. $CD^1$ | cuspides com dobra | $(x, y^3 + xy)$, $(y'^2 - a, x')$ |
| 10. $CD^2$ | cuspides com dobra | $(x, y^3 + xy)$, $(-y'^2 - a, x')$ |

Tabela 2.1: Estratos de codimensão 1 em $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

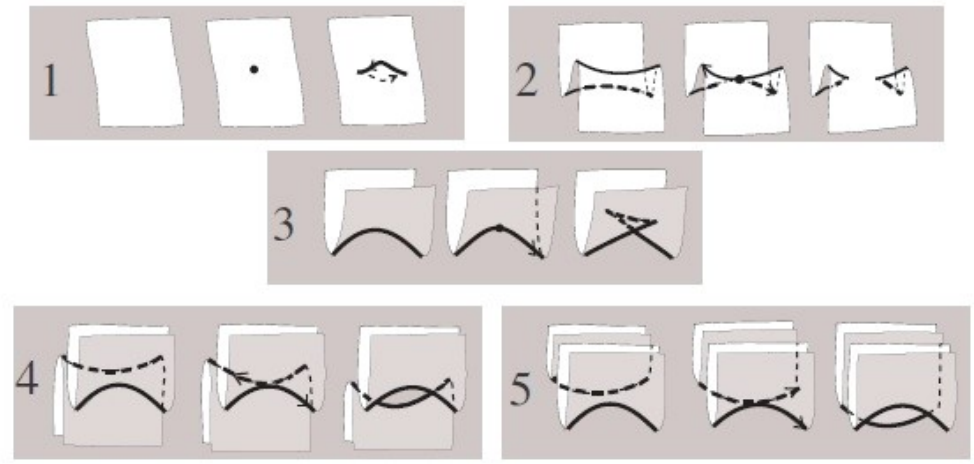


Figura 2.9: Transições de codimensão 1 em $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

**Observação 2.2.6.** *As classes de homotopia de $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ são conexas por caminhos, logo existe um caminho em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ que conecta duas aplicações em diferentes componentes conexas de cada classe de homotopia que atravessa $\mathcal{D}$ passando somente por aplicações de codimensão 1. Isto mostra que o Teorema 2.2.5 é bastante natural, pois $M$ é orientada, então sempre é possível ligar uma aplicação estável qualquer a uma aplicação dobra (sem cúspide) passando pelo discriminante somente através de transições de codimensão 1 em $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Todas as transições de codimensão 1 alteram o total de cúspides sempre em um número par (ver Figuras 2.9 e 2.10).*

### 2.2.2 Efeitos das transições de codimensão 1

As trasições que alteram o número de componentes singulares e regulares são $(L)$, chamadas de transição lábios, $(B)$, a trasição bicos. As transições que alteram o número de cúspides são $(L)$, $(B)$ e a trasição rabo de andorinha $(S)$. As transições que alteram o número de pontos duplos são $(S)$ e $(T^i)$, $i = 1, 2$, tangência entre duas dobras, e $(T^iC)$, $i = 1, 2$, tangência de uma dobra com uma

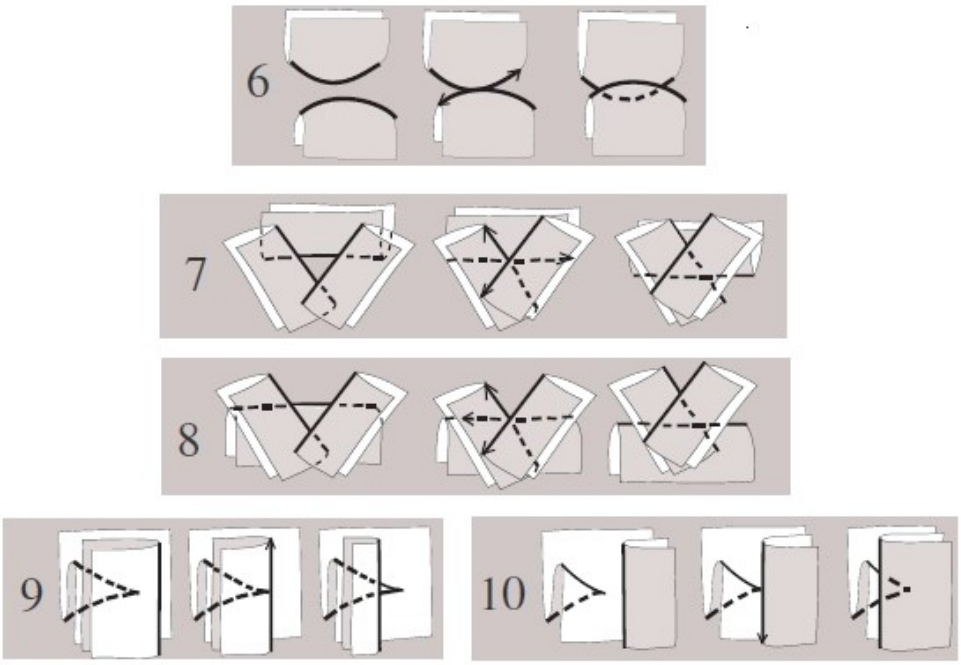


Figura 2.10: Continuação - transições de codimensão 1 em $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

cúspide.

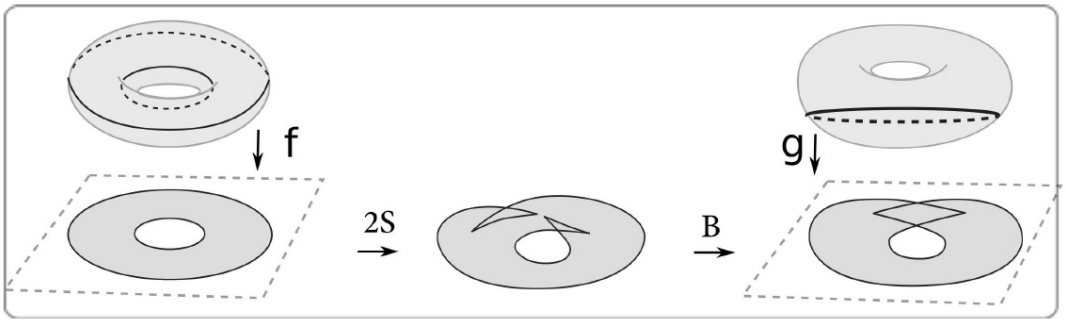


Figura 2.11: Trasições $S$ e $B$ alteram o número de cúspides e o gênero

Considerando caminhos positivos como nas Figuras 2.9 e 2.10, da esquerda para a direita no sentido que aumenta o número de cúspides ou pontos duplos, as transições de codimensão 1 alteram as novas aplicações estáveis da seguinte forma:

**Transição Lábios (L)**

Observando a Figura 2.12), dentro da região regular $U$, nasce uma nova curva singular com duas novas cúspides com mesmo sinal, apontando para a mesma região. Consequêntemente o número de cúspides é aumentado por 2 (mostrado por Ohmoto e Aicardi), o número de componentes singulares e regulares é aumentado por 1 (ver Figura 2.15). A orientação dessa transição pode ser positiva ou negativa, o que significa que a nova curva singular "nasce"ou "morre".

**Transição Bicos (B)**

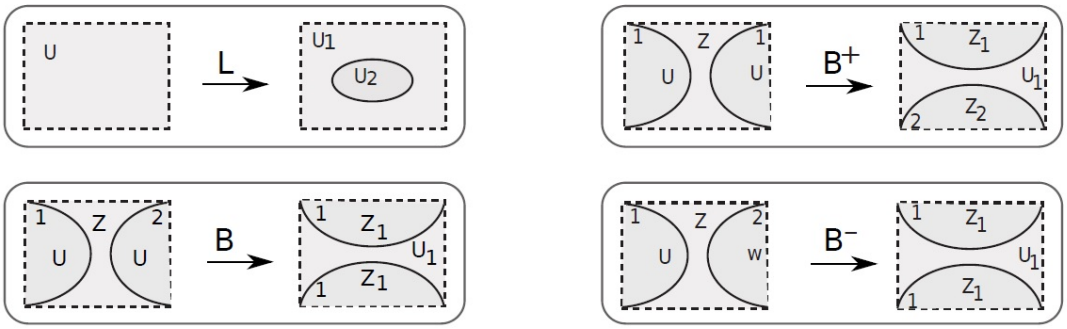


Figura 2.12: Noção dos efeitos das transições lábios e bicos no contorno aparente

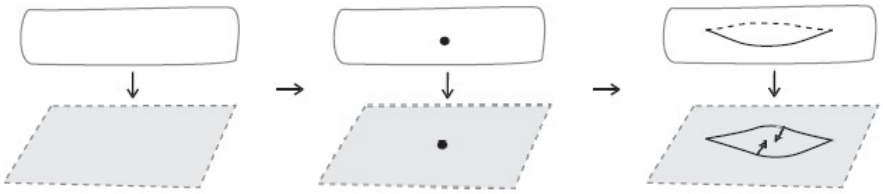

Figura 2.13: Exemplo de transição Lábios

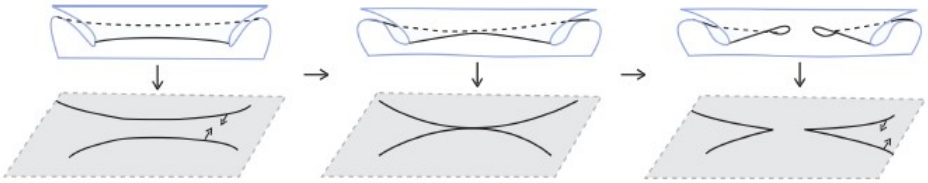

Figura 2.14: Exemplo de transição Bicos

Na região regular $Z$ (ver Figura 2.12), tangenciam dois arcos de curvas singulares criando duas novas cúspides que apontam para a mesma componente, ou seja, cúspides com mesmo sinal. Denotaremos de $B^+$ a transição bicos que aumenta o número de componentes singulares e de componentes regulares por 1 (veja Figura 2.15); de $B$ a transição que diminui o número de componentes singular por 1 e aumenta o gênero em 1 (veja Figura 2.11); e $B^-$ a transição que diminui por 1 o número de componentes singulares e de componentes regulares (veja Figura 2.15).

**Exemplo 2.2.7.** Temos ilustrado na Figura 2.15 uma sequência de sete aplicações planares da esfera em uma superfície $N$, ao longo de uma caminho no espaço das aplicações suaves $C^\infty(S^2, N)$, onde algumas dessas aplicações descrevem transições de codimensão 1. Observe que as aplicações $a$), $c$) e $e$) são estáveis e possuem diferente número de curvas singulares, enquanto as aplicações $b$) e $d$) são não estáveis e descrevem as transições lábios $L$ e bicos $B^-$, respectivamente. Em $b$) o contorno aparente tem duas componentes conexas, criadas pela curva singular, onde uma contém um ponto singular isolado criado pela transição lábios. Por uma pequena perturbação na vizinhança do ponto singular isolado, ele passa a ser uma curva singular (vista em $c$)), ou desaparece (vista em $a$)). Em $d$) o contorno aparente tem um ponto de tangência entre dois arcos da mesma curva,

provocada pela transição bicos. Por uma pequena perturbação na vizinhança do ponto de tangência, estas curvas podem ser separadas em duas componentes conexas sem cúspide com mesmo sinal, como é $e$), ou unidas em uma só curva com duas cúspides com mesmo sinal, como em $c$).

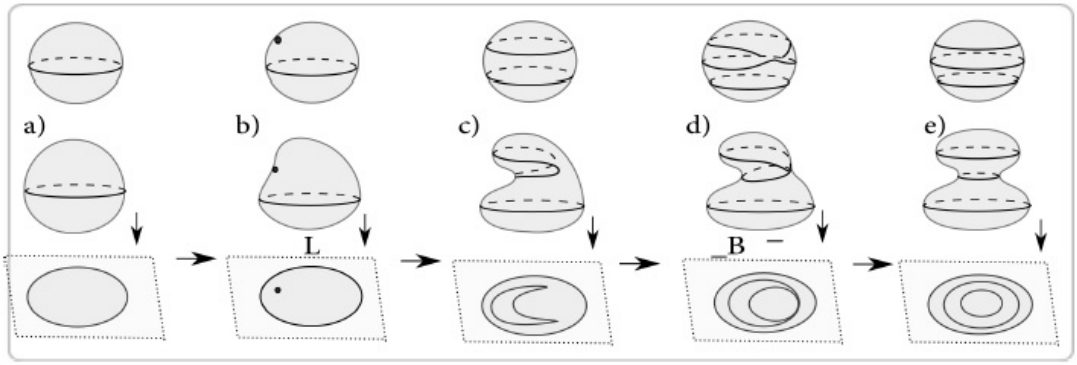


Figura 2.15: Aplicações da esfera no plano

Note que a trasição $B$ não só diminui o número de curvas singulares em um, mas também aumenta o gênero. Porém o gênero é acrescentado a uma componente regular da aplicação, como no caso ilustrado na Figura 2.11, que tínhamos duas componentes regulares, cada uma homeomorfa a um anel, logo ambas de gênero zero, e após a transição $B$ apesar de continuarmos com duas componentes regulares, uma delas é homeomorfa a um disco, gênero zero, e a outra é um homeomorfa a um toro com uma componente de bordo, gênero 1.

**Transição Rabo de Andorinha (S)**

Sobre um arco de curvas de dobra nasce dois pontos de cúspides, com sinais opostos, e um ponto duplo. $S$ altera somente o número de pontos duplos para $+1$, além das cúspides. Essa transição fica ilustrada em 2.11, onde são aplicadas duas transições, uma em cada curva do conjunto singular.

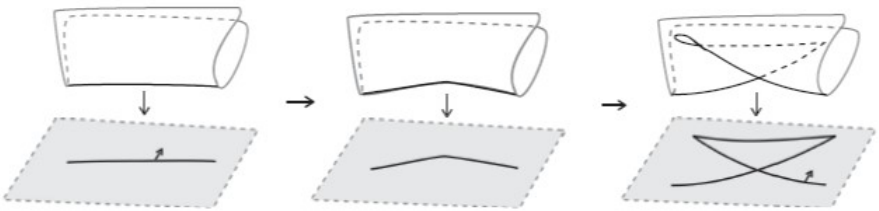

Figura 2.16: Exemplo de transição rabo de andorinha

**Transições de Tangências entre dobras e cúspides**

Transição Tangência entre duas curvas de dobras $DD^i$, $i = 1, 2$: altera somente o número de pontos duplos por $+2$;

Transição Tangência entre uma cúspide e uma curva de dobra $CD^i$, $i = 1, 2$: altera somente o número de pontos duplos em $+2$;

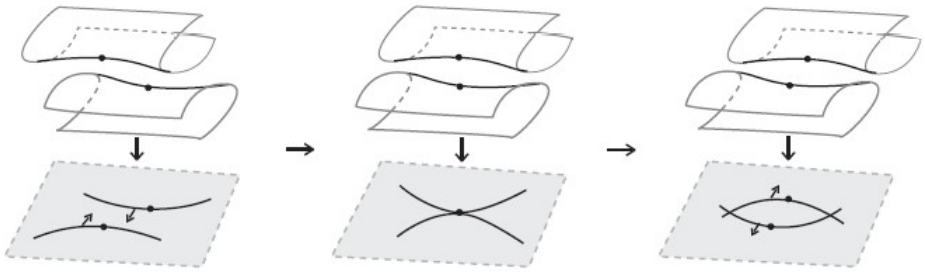

Figura 2.17: Exemplo de transição tangência de dobra

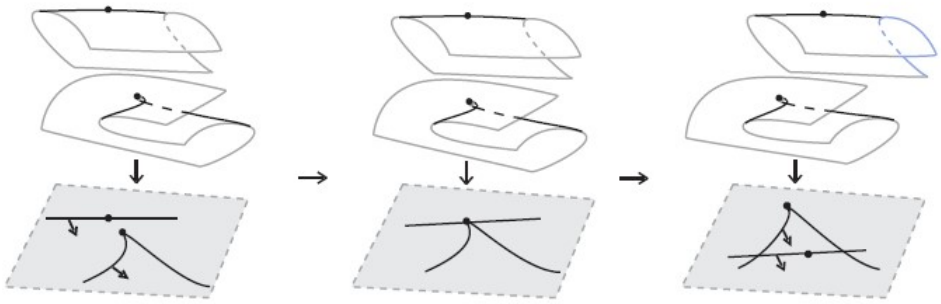

Figura 2.18: Exemplo de transição tangência de dobra com cúspide

**Exemplo 2.2.8.** Na Figura 2.19 podemos ver a obtenção de uma aplicação $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ com duas curvas no conjunto singular e duas cúspides, a partir de uma aplicação dobra $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ com uma única curva singular. Obtemos $f$ a partir de $g$ com duas trasições do tipo Rabo de Andorinha e uma transição do tipo Bicos.

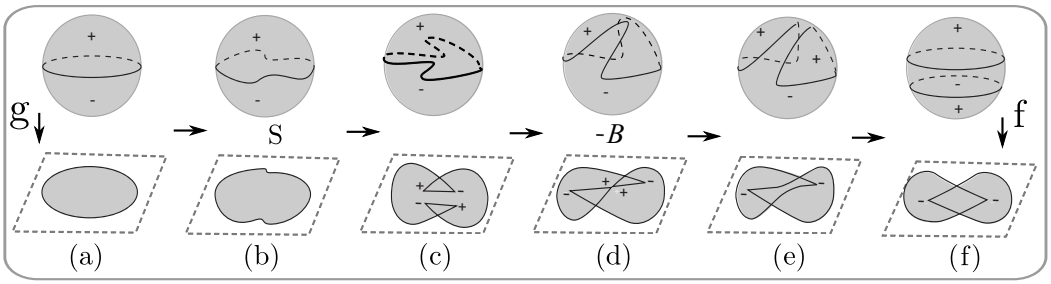


Figura 2.19: Transições em aplicações da esfera no plano

Não iremos aprofundar sobre as trasações por não ser interessante a esse trablho. Para mais detalhes sobre as transições podem ser vistos em [3] e [28].

## 2.3 Cirurgia entre aplicações estáveis

Definiremos aqui dois tipos de procedimentos, chamados cirurgias, sobre aplicações estáveis. Com essas cirurgias podemos obter uma aplicação $g$ através

de uma outra aplicação $f$, ou até mesmo por mais de uma aplicação. Com esse mesmo conceito podemos obter aplicações mais complexas usando uma ou mais aplicações mais simples.

### 2.3.1 Cirurgia horizontal

Uma **cirurgia horizontal**, denotada por $S_H$, sobre uma aplicação estável $h : M \to N$, com $M$ e $N$ superfícies fechadas e orientáveis, é feita pelo seguinte procedimento:

1. Escolha dos arcos $l = h(l')$ e $j = h(j')$ em $Bh$, onde $l'$ e $j'$ são arcos de curvas do conjunto singular de $h$ e exista um caminho $\eta$ entre $l$ e $j$ com $\eta \cap Bh = \emptyset$;

2. Mergulhe um retângulo $\beta$ na vizinhança de $\eta$, onde dois lados de $\beta$, complementares dos arcos opostos $k$ e $m$ em $\beta$, são identificados com os arcos $l$ e $j$, respeitando a orientação de $Bh$, criando assim o que chamamos de **ponte** entre as curvas dos arcos de $Bh$;

Figura 2.20: Ponte entre duas curvas de um contorno aparente

3. Escolha dois pequenos discos $D_{l'}$ e $D_{j'}$ em $M$ contendo os arcos de curvas singular $l'$ e $j'$ e repasse seus interiores por um tubo $T$, respeitando a orientação de $M$, obtendo assim uma nova superfície fechada e orientada $M'$;

4. Estenda a aplicação estável $h$ sobre o tubo $T$, obtendo a aplicação estável $h_\beta$, de forma que $h_\beta$ sobre $T$ tenha dois arcos de curvas singulares $k'$ e $m'$, com $h_\beta(k') = k$ e $h_\beta(m') = m$.

**Observação 2.3.1.** *A superfície resultante $M'$ da cirurgia horizontal é sempre orientada. De fato o tubo $T$ que introduzimos à $M$ conecta regiões positivas com regiões positivas, de um lado dos arcos de curvas singulares $k'$ e $m'$ criados pela extenção $h_\beta$ da aplicação $h$, e regiões negativas com regiões negativas do outro lado.*

Note que ao realizarmos a cirurgia horizontal, o que ocorre nos arcos de curvas do contorno aparente é a aplicação da topologia quociente entre o retângulo $\beta$ e os arcos $l$ e $j$, ilustrado na Figura 2.20.

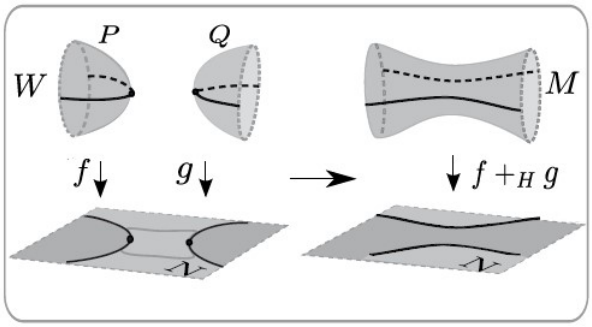


Figura 2.21: Cirurgia horizontal

Em particular, se $M$ é a união disjuntas de duas superfícies $M_1$ e $M_2$, denotaremos $M = M_1 \sqcup M_2$. Sejam então $h_1$ e $h_2$ as restrições de $h$ sobre $M_1$ e $M_2$ respectivamente, então podemos denotar $h = h_1 \cup h_2$ e a aplicação resultante da cirurgia horizontal por $h_\beta = h_1 \oplus_{S_H} h_2$.

**Definição 2.3.2.** *A cirurgia horizontal $h_\beta = h_1 \oplus_{S_H} h_2$ é chamada* ***soma horizontal*** *das aplicações $h_1$ e $h_2$.*

**Exemplo 2.3.3.** Na Figura 2.22 podemos ver a soma horizontal entre duas aplicações, uma do toro no plano e outra do bitoro no plano, que resulta em uma aplicação do tritoro no plano. Note que a aplicação do bitoro possui apenas uma curva singular, enquanto a aplicação do toro possui duas curvas singulares, o que resulta em duas curvas singulares na aplicação resultante.

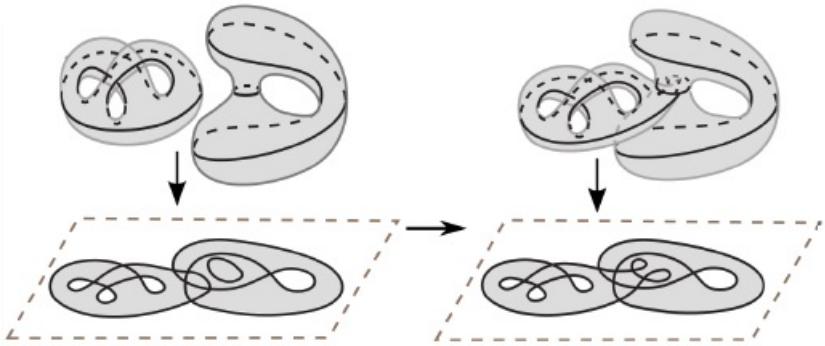

Figura 2.22: Exemplo de cirurgia horizontal entre aplicações do $T^2$ no plano e do $2T^2$ no plano

**Observação 2.3.4.** *Pela construção da definição da cirurgia horizontal, obtemos 3 casos quando a realizamos:*

1. *quando realizamos a cirurgia sobre dois arcos da mesma componente singular da aplicação, onde acrescentamos uma alça (um gênero) a superfície do domínio. Neste caso também é aumentado em um o número de componentes do conjunto singular;*

2. *quando conectamos dois arcos de diferentes curvas singulares de uma mesma componente conexa do domínio. Neste caso também acrescentamos em um o gênero da superfície e diminuímos em um o número de componentes do conjunto singular;*

3. *conectamos dois arcos de curvas singulares de diferentes componentes conexas do domínio. Aqui diminuímos em um o número de componentes do conjunto singular, mas não alteramos o gênero da superfície de domínio, como no caso da Figura 2.22.*

### 2.3.2 Cirurgia vertical

Seja $h : M \to N$ uma aplicação estável, onde $M$ e $N$ são superfícies fechadas e orientadas. O que chamaremos de **cirurgia vertical** é definida pelo seguinte procedimento:

1. Escolha dois pontos $p, q \in M \setminus \Sigma h$, tais que $p \in M^+$ e $q \in M^-$ com $h(p) = h(q) = o \in N \setminus \Sigma h$;

2. Escolha dois pequenos discos $D_p$ e $D_q$ em $M$ que sejam vizinhanças dos pontos $p$ e $q$ respectivamente, e repasse seus interiores por um tubo $T$, respeitando a orientação de $M$, obtendo assim uma nova superfície fechada e orientada $M'$;

3. Estenda a aplicação estável $h$ sobre o tubo $T$, de forma que $T$ tenha somente uma curva singular $\gamma$ que é mergulhada por $h_\gamma$ na vizinhança de $o$ em $N \setminus Bh$;

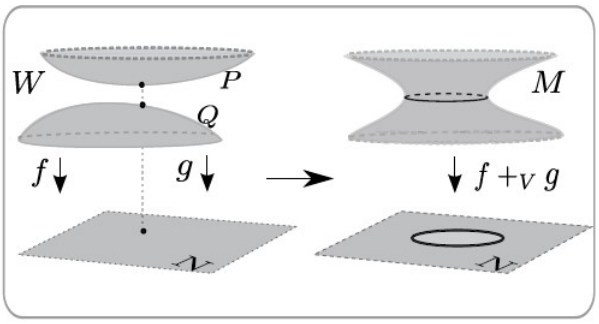


Figura 2.23: Cirurgia vertical

Da mesma forma que na cirurgia horizontal, se considerarmos que $M$ é a união disjunta das superfícies $M_1$ e $M_2$ fechadas e orientadas, e $h_1$ e $h_2$ as restrições a cada uma dessas superfícies respectivamente, então podemos denotar por $h_\gamma = h_1 \oplus_{S_V} h_2$ a aplicação resultante da cirurgia vertical de $h_1$ e $h_2$.

**Definição 2.3.5.** *A cirurgia vertical $h_\gamma = h_1 \oplus_{S_V} h_2$ é chamada* ***soma vertical*** *das aplicações $h_1$ e $h_2$.*

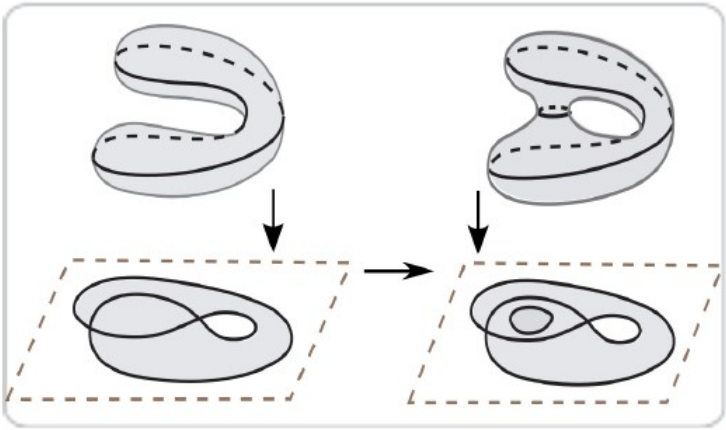

Figura 2.24: Exemplos de cirurgia vertical

**Exemplo 2.3.6.** Na Figura 2.24 vemos a realização da cirurgia vertical em uma aplicação da esfera $S^2$ no plano $\mathbb{R}^2$ com uma curva singular, que passa a ter duas curvas singulares e a superfícies de domínio passa a ser homeomorfa a um toro $T^2$.

**Observação 2.3.7.** *Aqui a superfície resultante, assim como no caso da cirurgia horizontal, é sempre orientada. De fato, basta observar que o tubo $T$ que repassamos ao interior dos discos $D_p$ e $D_q$ é orientado e conecta componentes regulares de sinais opostos, o que mantém a orientabilidade da superfície original $M$.*

**Observação 2.3.8.** *Sempre que realizamos uma cirurgia vertical, por definição, criamos mais uma componente no conjunto singular, mas temos 2 diferentes casos dependendo das componentes que é feita a cirurgia:*

1. *se a cirurgia for feita na mesma componente conexa da aplicação, aumentamos em um o gênero da superfície do domínio (ver Figura 2.24);*
2. *quando fazemos a cirurgia em duas componentes diferentes da aplicação, não aumentamos nada mais que uma curva singular.*

**Observação 2.3.9.** *Sejam $f : M_1 \to N$ e $g : M_2 \to N$ duas aplicações entre superfícies fechadas e disjuntas $M_1$ e $M_2$. Se $M$ é uma superfície resultante de uma cirurgia vertical entre $f$ e $g$, então $M$ é homeomorfa a soma conexa$M_1 \# M_2$. De fato, na cirurgia retiramos o interior de dois discos e identificamos as duas componentes de bordo formadas pelos bordos do tubo $T$, que pode ser contraído em um $S^1$, o que torna a cirurgia equivalente a identificar os bordos criados pela remoção dos discos, que é por definição, a soma conexa dessas superfícies.*

# Capítulo 3

# Grafos de aplicações estáveis entre superfícies fechadas

No Capítulo 1 definimos grafos e estabelecemos uma forma de os associar com superfícies fechada e orientadas com curvas mergulhadas. Neste capítulo iremos associar grafos, específicos por certas condições, a aplicações estáveis e desta forma construir um invariante para estas aplicações. Iremos também mostrar a ligação natural entre as cirurgias de grafos e as cirurgias das aplicações, bem como o Teorema de Quine e uma versão dele para grafos associados a aplicações. As principais referências são [22] e [30].

## 3.1 Grafos e aplicações estáveis

Sejam $M$ e $N$ duas superfícies fechadas e orientadas e $f \in \mathcal{E}^{\infty}(M, N)$, o conjunto das aplicações estáveis entre $M$ e $N$. O conjunto singular $\Sigma f$ está formado por um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas que separa as regiões regulares de $M \setminus \Sigma f$ (complemento do conjunto singular) em componentes conexas.

Naturalmente, podemos associar o par $(M, \Sigma f)$ um grafo com pesos nos vértices, onde cada curva $\alpha$ de $\Sigma f$ corresponde a uma aresta $a$, cada região regular $U$ corresponde a um vértice $v$, que recebe como peso $t$ o gênero de $U$ (soma de $t$ toros). Está claro que $a$ incide no vértice $v$ se, e somente se, a a curva singular correspondente a $a$ está no bordo da região regular correspondente a $v$.

**Definição 3.1.1.** *O grafo associado ao par $(M, \Sigma f)$, onde $f \in \mathcal{E}(M, N)$, é chamado de* ***grafo dual*** *de $f$.*

**Observação 3.1.2.** *O grafo dual é um invariante para aplicações estáveis, ou seja, dois grafos duais não isomorfos carregam a informação que suas aplicações associadas são diferentes. De fato, no grafo está codificado informações do conjunto regular de aplicações estáveis entre superfícies e consegue separar algumas aplicações com o mesmo contorno aparente como ilustram as Figuras 3.1 e 3.2.*

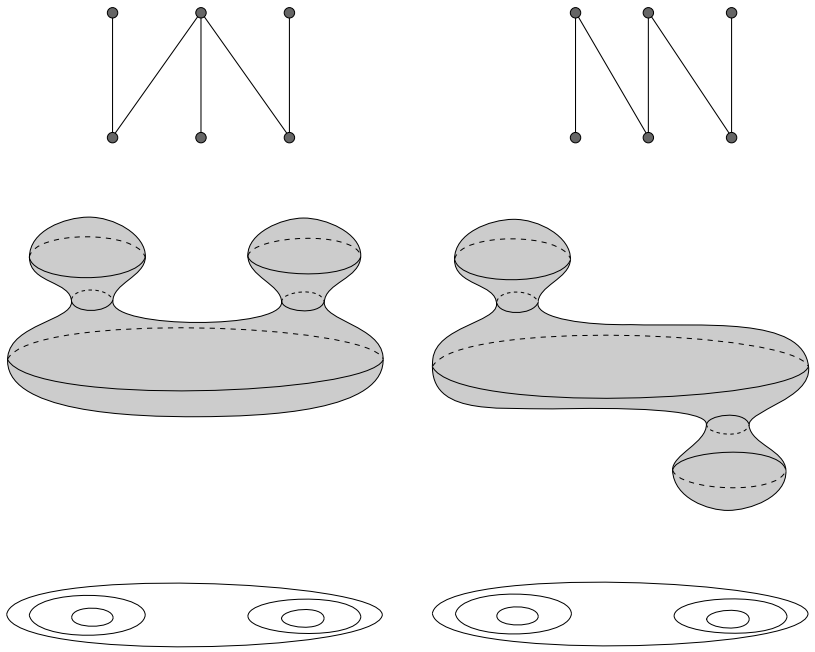

Figura 3.1: Aplicações da esfera no plano com seus respectivos grafos

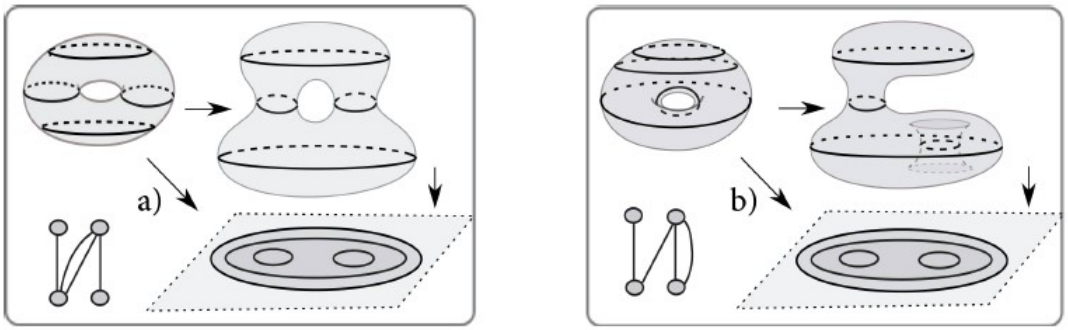


Figura 3.2: Aplicações toro no plano com $A = 4$

**Observação 3.1.3.** *Cada aplicação estável está associada a um grafo e cada grafo pode ser associada uma classe de diferentes aplicações com pares* $(M, \mathcal{C})$ *equivalentes, onde* $\mathcal{C}$ *corresponde o conjunto de curvas singulares.*

Um questionamento que podemos fazer sobre grafos de aplicações é: Quais grafos com pesos inteiros positivos no vértice estão associados às aplicações estáveis entre superfícies orientadas? Essa pergunta é respondida pela seguinte proposição.

**Proposição 3.1.4** ([22]). *O grafo dual de qualquer aplicação estável* $f : M \to N$ *entre duas superfícies fechadas e orientadas é bipartido.*

*Demonstração.* Cada curva singular de $\Sigma f$ é bordo de uma componente de $M^+$ e de uma componente de $M^-$, consequentemente cada aresta do grafo associado a $f$ conecta um vértice de $V^+(\mathcal{G})$ com um vértice de $V^-(\mathcal{G})$, criando uma bipartição no conjunto dos vértices. □

Seja $\mathcal{G}$ um grafo bipartido associado a aplicação estável $f : M \to N$ e $M^{\pm} = \bigcup_{i=1}^{V^{\pm}} U_i^{\pm}$ a união das componentes regulares de $f$, com seus respectivos sinais. Aos vértices de $\mathcal{G}$ correspondente as componentes regulares $M^{\pm}$ associamos o sinal $\pm$. Denotamos por:

1. $V^{\pm}$ o número de vértices de $\mathcal{G}$ com sinais $\pm$, que corresponde o número de componentes de $M^{\pm}$.
2. $W^{\pm} = \sum_{j=1}^{V^{\pm}} t_j^{\pm}$ onde $t^{\pm}$ é o peso do vértice $v_j^{\pm}$, que corresponde ao gênero da componente regular $U_j^{\pm}$.
3. $A_j^{\pm}$ o número de arestas nos vértices $v_j^{\pm}$, que corresponde ao número de componentes de borde de $U_j^{\pm}$. Observe que $A = \sum_{j=1} A_j^{+} = \sum_{j=1} A_j^{-}$.

**Proposição 3.1.5.** *Seja $\mathcal{G}$ um grafo bipartido com característica $(V^{+} + V^{-}, A, W^{+} + W^{-})$, associado a uma aplicação estável de $M$ em $N$. A característica de Euler de $M^{\pm}$ em função de $\mathcal{G}$ é dado por $\mathcal{X}(M^{\pm}) = 2V^{\pm} - 2W^{\pm} - A$.*

*Demonstração.* A característica de Euler da componente conexa de $U_i^{\pm}$ com $A_i^p m$ componentes de bordo satisfaz é dada por $\mathcal{X}(U_i^{\pm}) = 2 - 2g(U_i^{\pm}) - A_i^{\pm} = 2 - 2t_i^{\pm} - A_i^{\pm}$, pelo Teorema 1.1.26 e Corolário 1.1.27

$$\mathcal{X}(M^{\pm}) = \sum_{i=1}^{V^{\pm}} \mathcal{X}(U_i^{\pm}) = \sum_{i=1}^{V^{\pm}} (2 - 2t_i^{\pm} - A_i^{\pm}) = 2V^{\pm} - 2W^{\pm} - A,$$

pois as componentes de $M^{\pm}$ são todas disjuntas. □

**Corolário 3.1.6.** $\mathcal{X}(M) - 2\mathcal{X}(M^{-}) = 2[(V^{+} - V^{-}) - (W^{+} - W^{-})]$

*Demonstração.* A superfície $M = M^{+} \cup M^{-}$ e a intersecção entre as componentes de $M^{+}$ e de $M^{-}$ é sempre vazia ou uma curva simples. Pelo Corolário 1.1.27 $\mathcal{X}(M^{+} \cup M^{-}) = \mathcal{X}(M^{+}) + \mathcal{X}(M^{-})$, pois $\mathcal{X}(M^{+} \cap M^{-}) = 0$. $\mathcal{X}(M) - 2\mathcal{X}(M^{-}) = \mathcal{X}(M^{+}) - \mathcal{X}(M^{-}) = 2[(V^{+} - V^{-}) - (W^{+} - W^{-})]$, pela Proposição 3.1.5. □

**Exemplo 3.1.7.** Na Figura 3.3 vemos duas aplicações estáveis da esfera no plano, em (a) uma associada a um grafo $L_2$, e em (b) a outra associada a um grafo $L_3$.

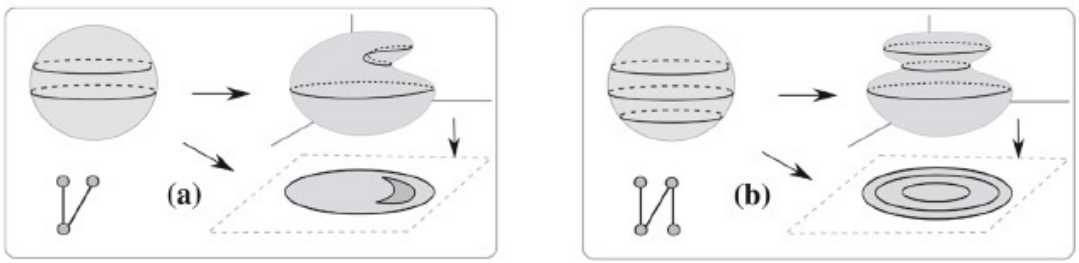


Figura 3.3: Exemplos de Aplicações da esfera no plano

O Teorema 3.1.8 foi demonstrado por Quine em [30]. Uma demonstração baseada na relação entre cúspides e conjuntos regulares foi apresentada em [21].

**Teorema 3.1.8** (Teorema de Quine). *Seja $f : M \to N$ uma aplicação estável entre as duas superfícies fechadas e orientadas $M$ e $N$. Se $f$ tem grau $d$ e $m$ pontos de cúspides então*

$$\mathcal{X}(M) - 2\mathcal{X}(M^-) + s(C) = d\mathcal{X}(N)$$

*onde $\mathcal{X}$ denota a característica de Euler e $s(C)$ a soma total dos graus das cúspides.*

**Teorema 3.1.9.** *Seja $f : M \to N$ uma aplicação estável entre as duas superfícies fechadas e orientadas $M$ e $N$. Se $f$ tem grau $d$ e $m$ pontos de cúspides, então então o grafo associado a $f$ satisfaz*

$$(V^+ - V^-) - (W^+ - W^-) = d(1 - g(N)) - \frac{s(C)}{2}$$

*Consequentemente $s(C)$ é sempre par.*

*Demonstração.* A superfície $N$ é fechada e orientada e pelo Teorema 1.1.26 temos $\mathcal{X}(N) = 2 - 2g(N)$, onde $g(N)$ é o gênero de $N$. Do Corolário 3.1.6 temos

$$\mathcal{X}(M) - 2\mathcal{X}(M^-) = 2[(V^+ - V^-) - (W^+ - W^-)]$$

Substituindo estas duas igualdades no Teorema de Quine temos

$$2[(V^+ - V^-) - (W^+ - W^-)] = 2d(1 - g(N)) - s(C)$$

dividindo ambos os lados da igualdade chegamos ao resultado desejado. □

**Corolário 3.1.10.** *Se $\mathcal{G}$ é um grafo de uma aplicação estável do m-toro no n-toro, então o grau de $f$ satisfaz $d = [(W^+ - W^-) - (V^+ - V^-) - \frac{s(C)}{2}]/(1-n)$. Se $\mathcal{G}$ é o grafo de uma aplicação dobra ($C = 0$), então $d = [(W^+ - W^-) - (V^+ - V^-)]/(1 - n)$.*

## 3.2 Cirurgias de grafos e aplicações

Agora que já temos definido as cirurgias entre aplicações estáveis, as cirurgias entre grafos e a associação entre grafos e aplicações estáveis podemos estabelecer algumas relações entre elas. Exemplificaremos aplicações que chamaremos de básicas e a partir delas construiremos aqui algumas aplicações utilizando as cirurgias, aplicações estas associadas a algum grafo bipartido.

### 3.2.1 Grafos e cirurgia horizontal

**Observação 3.2.1.** *Se $G_i$ é um grafo associado a aplicação estável $h_i : M_i \to N$, com $i = 1, 2$, então realizando a cirurgia horizontal que conecta dois arcos de curvas singulares de diferentes componentes conexas das aplicações $h_1$ e $h_2$, o qual denotaremos por $S_{H_1}$, obtemos:*

1. *$V(G_1 \oplus_{S_{H_1}} G_2) = V(G_1) + V(G_2) - 2$, pois duas regiões positivas e duas regiões negativas se unem, ou seja, dois vértices negativos e dois vértices positivos são identificados (respeitando os sinais);*
2. *$A(G_1 \oplus_{S_{H_1}} G_2) = A(G_1) + A(G_2) - 1$ pois duas curvas singulares se unem, ou seja, duas arestas são identificadas;*
3. *$W(G_1 \oplus_{S_{H_1}} G_2) = W(G_1) + W(G_2)$ pois as regiões conectadas carregam os seus gêneros, com isso, o peso correspondente a nova região é a soma dos pesos dos vértices identificados para forma-lo.*

*Os efeitos dos outros casos de cirurgia horizontal entre aplicações mencionados na Observação 2.3.4 podem ser descritos de forma análoga.*

A demonstração das Proposições 3.2.2 e 3.2.8 podem ser encontrados em [22].

**Proposição 3.2.2.** *Se $G_1$ e $G_2$ são grafos associados, respectivamente, as aplicações estáveis $h_1 : M_1 \to N$ e $h_2 : M_2 \to N$, então o grafo resultante da cirurgia horizontal é um grafo associado a aplicação $h_1 \oplus_{S_H} h_2$.*

**Exemplo 3.2.3.** Consideremos a aplicação estável $f_1 : nT^2 \to nT^2$, onde $n \geq 1$, com uma componente singular, duas cuspides e grau 1, obtida da aplicação identidade $Id : nT^2 \to nT^2$ por uma transição lábios (conforme a Figura 3.4 item $(a)$). Realizando $d-1$ cirurgias horizontais, que são do mesmo tipo das descritas na Observação 3.2.1, entre $d$ aplicações do tipo $f_1$, obtemos uma aplicação estável $f$, do $dn$-toro sobre o $n$-toro, com grau $d$, a qual, por construção, possui contorno aparente com uma curva singular, zero pontos duplos e $2d$ cuspides com o mesmo sinal (ver Figura 3.4 item $(b)$).

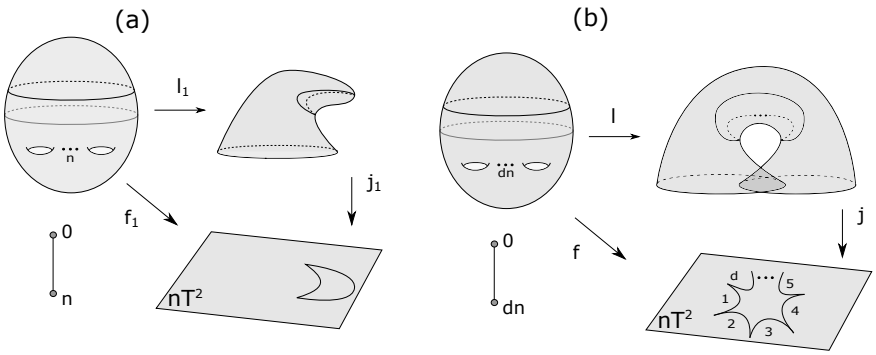


Figura 3.4: Exemplo de aplicações no n-toro com graus 1 em (a) e $d$ em (b)

**Exemplo 3.2.4.** Na Figura 3.5 temos ilustrada uma aplicação estável $f$ do toro na esfera, com grau 1 e 4 cúspides. Esta aplicação foi obtida por uma cirurgia horizontal sobre uma mesma aplicação estável $f_2$ da esfera na esfera, com duas componentes singulares e 4 cúspides, obtida da aplicação identidade ($Id : S^2 \to S^2$) por duas trasições tipos lábios.

**Observação 3.2.5.** *Se $f : M \to N$ é uma aplicação estável de grau $d$, entre duas superfícies fechadas e orientadas $M$ e $N$, obtidas por cirurgias horizontais, podemos também obter várias outras aplicações estáveis com grau $d$, na mesma classe de homotopia de $f$, basta passar por alguma transição de codimensão um, por exemplo, do tipo lábios ($L$) ou bicos ($B^{\pm}$ e $B$), pois essas transições nos fornecem aplicações homotópicas a $f$, alterando apenas o número de componentes do conjunto singular ou regular, bem como número de cúspides.*

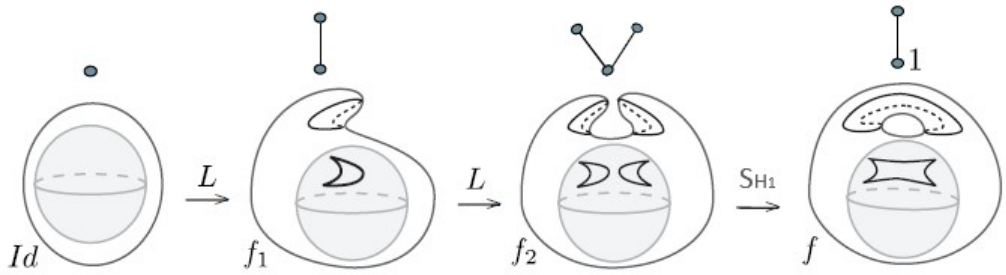


Figura 3.5: Construção de uma aplicação do toro na esfera com grau 1

**Proposição 3.2.6** ([22]). *Toda árvore com $A > 1$ arestas pode ser obtida por $A - 2$ somas conexas horizontais de $A - 1$ grafos do tipo $L_2$.*

*Demonstração.* Dada uma árvore $\mathcal{A}$ com $A$ arestas, se $A = 2$ então $\mathcal{A}$ é um $L_2$. Se $A = 3$ então $\mathcal{A}$ é um $L_3$ ou um grafo estrela e em ambos os casos $\tau$ pode ser obtido por somas conexa horizontal de dois grafos $L_2$.

Suponhamos agora que $\mathcal{A}$ tem $A - 1 > 2$ arestas. Vamos usar princípio de indução sobre $A$. Seja $v$ um vértice extremo (Definição 1.2.8) de $\mathcal{A}$ conectado a $w$ pela aresta $uw$. Eliminando a aresta $vw$ de $\mathcal{A}$ com o vértice extremo $v$, obtemos uma árvore $L$ com $A - 1$ arestas e $w \in L$. Suponha por hipótese de indução que $L$ pode ser obtida por $A - 3$ somas horizontais de $k - 1$ grafos $L - 2$.

Fazendo soma horizontal de $L_2$ com $L$, com a identificação de $w \in L$ com o vértice de grau 2 em $L_2$, obtemos o grafo $\mathcal{A}$ com $A$ arestas, como soma conexa de $A - 1$ grafos tipo $L_2$. □

### 3.2.2 Grafos e cirurgia vertical

**Observação 3.2.7.** *Se $G_i$ é um grafo associado a aplicação estável $h_i : M_i \to N$, com $i = 1, 2$, então realizando a cirurgia vertical que conecta duas componentes conexas das aplicações $h_1$ e $h_2$, o qual denotaremos por $S_{V_1}$, obtemos:*

1. *$V(G_1 \oplus_{S_{V_1}} G_2) = V(G_1) + V(G_2)$, pois nenhuma região é retirada ou colocada, ou seja, nenhum vértice é identificado ou acrescentado;*

2. *$A(G_1 \oplus_{S_{V_1}} G_2) = A(G_1) + A(G_2) + 1$, pois uma nova componente no conjunto singular é criada, ou seja, uma nova aresta é acrescentada;*

3. *$W(G_1 \oplus_{S_{V_1}} G_2) = W(G_1) + W(G_2)$ pois nenhum gênero é acrescentado ou retirado das regiões.*

*De modo análogo podemos descrever os efeitos dos outros casos de cirurgias verticais citadas Observação 2.3.8.*

**Proposição 3.2.8** ([22]). *Se $G_1$ e $G_2$ são grafos associados, respectivamente, as aplicações estáveis $h_1 : M_1 \to N$ e $h_2 : M_2 \to N$, então o grafo resultante da cirurgia vertical é um grafo associado a aplicação $h_1 \oplus_{S_V} h_2$.*

**Exemplo 3.2.9.** Conforme ilustrado na Figura 3.6, fazendo uma cirurgia vertical $S_{V_1}$ descrita na Observação 3.2.7 sobre a mesma aplicação $f_1$ da esfera na esfera, com grau zero, obtemos a aplicação $f_1 \oplus_{S_{V_1}} f_1$ do toro na esfera com grau zero e duas componentes singulares.Por uma transição do tipo bicos ($B^-$) sobre $f_1 \oplus_{S_{V_1}} f_1$ obtemos uma aplicação $f$ do toro na esfera com grau zero, uma única componente singular e duas cúspides.

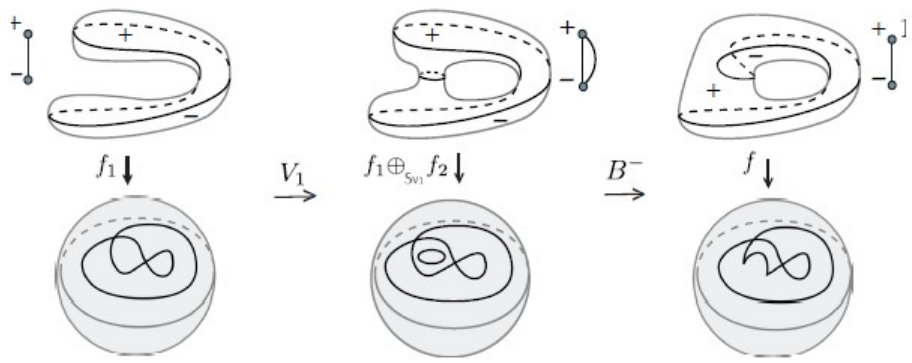


Figura 3.6: Construção de uma aplicação do toro na esfera com grau 0

**Exemplo 3.2.10.** Sejam $P$ e $R$ superfícies fechadas e orientadas, onde o gênero de $R$ é $g(R) = l$ e $\pi : R \to N$ é uma aplicação estável com grau $d = 0$, onde $\pi$ é a projeção normal da superfície $R$ sobre a superfície $N$. A Figura 3.7 ilustra uma aplicação dobra $p : P \to N$ com grau $d$, obtida por $d + 2m$ cirurgias verticais, sendo $d + m$ cirurgias entre a aplicação projeção $\pi$ e a aplicação identidade $Id : N \to N$, com grau 1 e conjunto singular vazio, e $m$ cirurgias entre $\pi$ e a aplicação $-Id : N \to N$ (com orientação oposta a $Id$), com grau $-1$ e conjunto singular vazio.

**Observação 3.2.11.** *Se $f : M \to N$ é uma aplicação estável com grau $d$, entre duas superfícies fechadas e orientadas $M$ e $N$, obtida por cirurgias verticais, podemos também obter várias outras aplicações estáveis com grau $d$, na mesma classe de homotopia de $f$, basta passar por algum transição de codimensão 1, como por exemplo do tipo lábios (L) ou bicos ($B^{\pm}$ e $B$), pois estas transições nos fornecem aplicações homotopicas à $f$, alterando apenas o número de componentes regulares ou singulares, bem como o número de cúspides.*

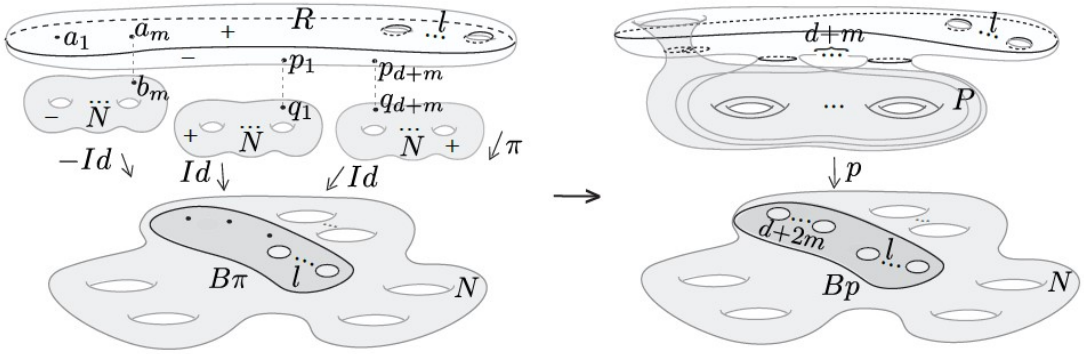


Figura 3.7: Exemplo cirurgia vertical entre n-toros

### 3.2.3 Exemplos de cirurgias de aplicações e seus grafos

Dedicamos nesta seção a construção de exemplos de aplicações estáveis, tendo como ferramentas principais as transições já apresentadas na Seção 2.2 e as cirurgias de grafos e cirurgias de aplicações estáveis apresentadas na subseção 1.2.1 e na seção 2.3, respectivamente.

**Exemplo 3.2.12.** Na Figura 3.8 temos ilustrado uma sequência de aplicações do toro, 2-toro,$\cdots$, n-toro. A primeira aplicação pode ser obtida por duas trasições do tipo rabo de andorinha e uma do tipo bicos na aplicação projeção do toro no plano, como ilustra a Figura 2.11. A aplicação do n-toro no plano pode ser obtida por $n-1$ cirurgias horizontais entre aplicações do primeiro tipo. Consequentemente o grafo associado a essa aplicação do n-toro poder ser obtido por $n-1$ cirurgias no grafo tipo $L_1$ com peso 1 em um vértice e peso zero no outro.

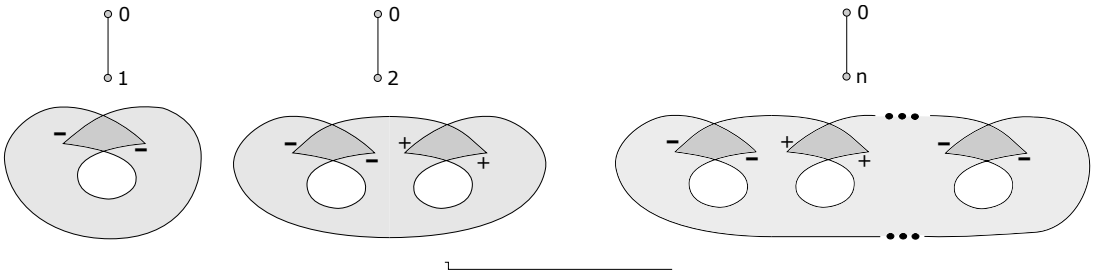


Figura 3.8: Sequência de aplicações do n-toro no plano

**Exemplo 3.2.13.** A partir de uma aplicação da esfera no plano, podemos construir uma outra aplicação do toro no plano, como ilustra a Figura 3.9. Através da cirurgia horizontal feita na mesma componente conexa da aplicação, respeitando a orientação da aplicação, acrescentamos em 1 o gênero da aplicação (como mencionado na Observação 2.3.4). A cirurgia horizontal feita no grafo associado é feita identificando os vértices $a$ com $c$ e $b$ com $d$, consequentemente identificando as arestas $ab$ com $cd$, sem mexer na aresta $cb$.

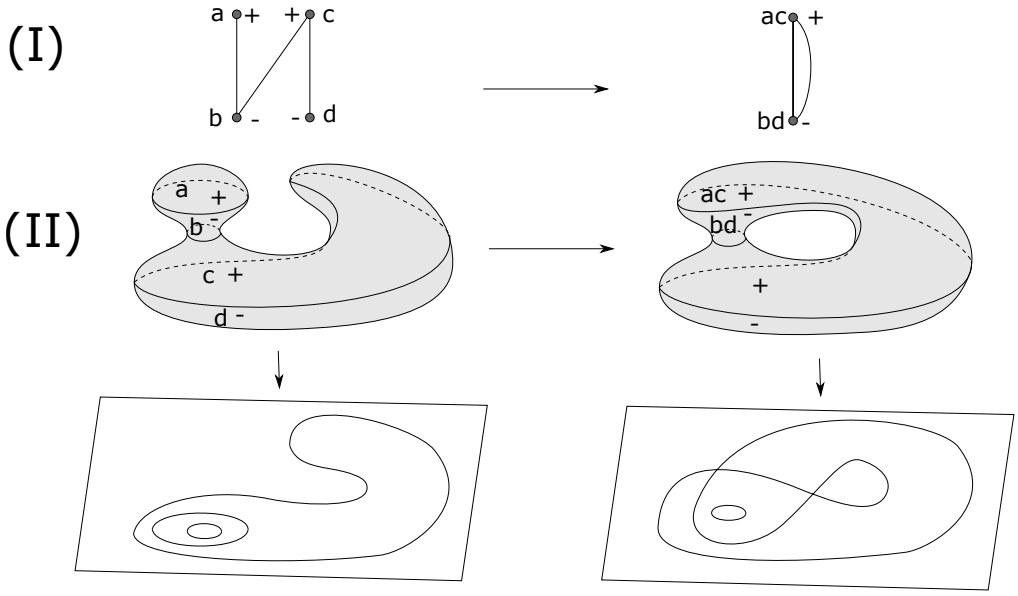


Figura 3.9: Construção de uma aplicação dobra do toro no plano

**Observação 3.2.14.** *Note que a contrução de uma mesma aplicação pode ser dada a partir de diferentes aplicações e nem sempre utilizando a mesma ferramenta. No Exemplo 3.2.13 podemos ver a construção de uma aplicação dobra $f$ do toro no plano com duas curvas singulares, a partir de uma aplicação dobra $g$ da esfera no plano com três curvas singulares. Mas podemos obter a mesma aplicação $f$ a partir de uma aplicação $h$ da esfera no plano com uma única curva singular, como mostra a Figura 3.10. Para a aplicação $h$, temos associado um grafo $L_1$ com peso zero em ambos os vértices, basta então realizar a cirurgia vertical entre os dois vértices desse grafo e teremos o grafo associado a aplicação $f$.*

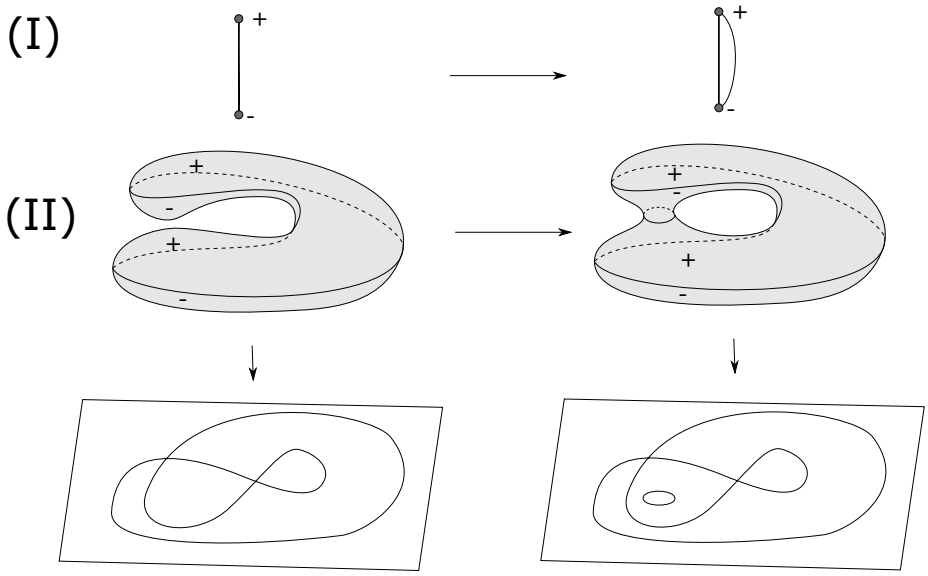


Figura 3.10: Construção de uma aplicação dobra do toro no plano 2

# Capítulo 4

# Realização de Grafos

A construção de grafos associados às aplicações estáveis entre superfícies garante que existe um grafo $\mathcal{G}$ com pesos nos vértices associado a aplicação $f$. Se $M$ é orientada então $\mathcal{G}$ é bipartido, como visto na Proposição 3.1.4. Neste capítulo vamos mostrar que todo grafo bipartido está associado a alguma aplicação entre duas superfícies fechadas e orientadas. Os resultados são baseados nos trabalhos[31], [9] e [11]. Primeiro veremos o caso de realização de árvores e depois de grafos bipartidos, com aplicações no plano e na esfera.Posteriormente trataremos de aplicações sobre o n-toro.

## 4.1 Aplicações no plano

Esta seção será dedicada ao estudo específico da realização de grafos por aplicações estáveis no plano. Consideraremos apenas os principais resultados, para maiores detalhes ver MACHADO [18].

**Teorema 4.1.1.** *Toda árvore $\mathcal{A}$ com peso zero pode ser realizada por alguma aplicação estável da esfera no plano.*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.2.6 vimos que podemos obter qualquer árvore $\mathcal{A}$ como somas horizontais de grafos $L_2$. Pelo Exemplo 3.1.7 vimos como realizar grafos tipo $L_2$ por uma aplicação da esfera no plano que denotaremos por $h$. Por $A-2$ somas conexas horizontais entre $A-1$ aplicações do tipo $h$, obtemos uma aplicação $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ que realiza $\mathcal{A}$. □

**Observação 4.1.2.** *Toda árvore $\mathcal{A}$ com peso zero que adimite uma decomposição em somentes grafos do tipo $L_3$, pode ser realizada por alguma aplicação dobra da esfera no plano. De fato, no Exemplo 3.1.7 vimos como realizar um grafo do tipo $L_3$ por uma aplicação dobra (sem cúspides) $h$ da esfera no plano. Podemos obter uma aplicação $f$ por somas conexas horizontais de aplicações do tipo $h$. Como a soma conexa horizontal não acrescenta pontos de cúspide, segue que $f$ é uma aplicação dobra.*

**Teorema 4.1.3.** *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}$ com peso total zero pode ser realizado por uma aplicação estável $g : mT \to \mathbb{R}^2$, onde $m = \beta_1(\mathcal{G})$.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{A}$ uma árvore maximal obtida de $\mathcal{G}$ retirando $\beta_1(\mathcal{G})$ arestas de $\mathcal{G}$, uma de cada ciclo. Pelo Teorema 4.1.1, $\mathcal{A}$ pode ser realizada por uma aplicação $h$ da esfera no plano. Uma aplicação $g : mT \to \mathbb{R}^2$ que realiza $\mathcal{G}$ pode ser obtida fazendo cirurgias verticais sobre $h$, cada uma delas referente a cada uma das $\beta_1(\mathcal{G})$ arestas que foram retiradas, feitas entre as respectivas componentes que cada uma destas arestas retiradas ligavam. Como a esfera é conexa, cada cirurgia vertical em $h$ altera em $+1$ o gênero da superfície, resultando então em uma superfície homeomorfa ao $mT$ com $m = \beta_1(\mathcal{G})$. □

**Teorema 4.1.4** ([11]). *Um grafo $\mathcal{G}$ com peso total zero é realizável por uma aplicação dobra de uma superfície fechada e orientada no plano se, e somente se, $\mathcal{G}$ é balanceado.*

**Observação 4.1.5.** *Uma consequência imediata do Teorema 4.1.4 é que toda árvore $\mathcal{A}$ com peso zero pode ser realizada por uma aplicação dobra da esfera no plano se, e somente se, $\mathcal{A}$ é balanceada.*

**Exemplo 4.1.6.** Na Figura 4.1 temos ilustradas duas aplicações, uma do T no plano em (a), e em (b) do rT no plano com os respectivos grafos associados.

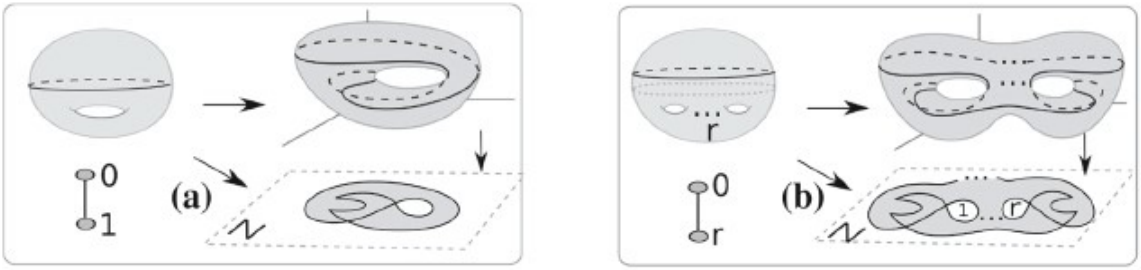


Figura 4.1: Exemplo de aplicação do toro no plano e do r-toro no plano

**Lema 4.1.7.** *Toda árvore $L_1$ com peso $r$ em um vértice e zero no outro pode ser realizada por alguma aplicação estável do r-toro no plano.*

*Demonstração.* A árvore $L_1$ pode ser realizada por uma aplicação $h$ do toro no plano, como mostra o Exemplo 4.1.6. A aplicação $g : rT \to \mathbb{R}^2$ que realiza $L_1$ com peso zero em um vértice e $r$ no outro, pode ser obtida pela soma conexa horizontal de aplicações do tipo $h$ feitas $r - 1$ vezes. □

**Teorema 4.1.8.** *Toda árvore $\mathcal{A}$ com peso total $r$ pode ser realizada por alguma aplicação estável do r-toro no plano.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{T}$ a árvore obtida de $\mathcal{A}$ (que tem peso total $r$), após retirar todos os $r_i$ pesos de seus $v_i$ vértices. Pelo Teorema 4.1.1 $\mathcal{T}$ é realizado por uma aplicação $h : S^2 \to \mathbb{R}^2$. Para cada $r_i$, considere as aplicações $h^i : r_iT \to \mathbb{R}^2$ associadas a grafos $L_1$ como no Lema 4.1.7. Fazendo cirurgias horizontais entre $h$

e as aplicações $h^i$, de modo que cada componente de $S^2 \setminus \Sigma(h)$ referente ao vértice $v_i$ de $\mathcal{T}$, que havia um peso $r_i$ em $\mathcal{A}$, seja somada a $h^i$ com domínio $r_i$-toro. Deste modo a aplicação resultante da cirurgias, $g : rT \to \mathbb{R}^2$ realiza $\mathcal{A}$. □

**Teorema 4.1.9.** *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}$ pode ser realizado por uma aplicação estável $g : mT \to \mathbb{R}^2$, onde $m = 1 - V + A + W$.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{A}$ uma árvore maximal de $\mathcal{G}$, obtida retirando uma aresta de cada $\beta_1(\mathcal{G})$ ciclo de $\mathcal{G}$. Pelo Teorema 4.1.8, $\mathcal{A}$ pode ser realizada por uma aplicação $h$ do $W$-toro no plano, onde $W$ é o peso total de $\mathcal{A}$. Uma aplicação $g : M \to \mathbb{R}^2$ que realiza $\mathcal{G}$, pode ser obtida realizando uma cirurgia vertical em $h$ para cada uma das $\beta_1(\mathcal{G})$ arestas que foram retiradas de $\mathcal{G}$, respeitando os locais que essas arestas foram retiradas. Como o $W$-toro é conexo, cada cirurgia acrescenta $+1$ o gênero da superfície, como $\mathcal{A}$ é uma árvore maximal de $\mathcal{G}$, a soma dos pesos total de $\mathcal{G}$ é $W$, portanto $M$ é um $m$-toro $mT$, com gênero $m = \beta_1(\mathcal{G}) + W$ onde $\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - V + A$. □

As demonstrações dos próximos resultados pode ser vista em [10] e [9] (respectivamente).

**Teorema 4.1.10.** *Um grafo bipartido $\mathcal{G}(V, A, W)$ pode ser realizado por alguma aplicação dobra (sem cúspides) no plano se, e somente se, $\mathcal{G}$ satisfaz $V^+ - V^- = W^+ - W^-$.*

**Corolário 4.1.11.** *Toda árvore de peso zero pode ser realizada por alguma aplicação dobra (sem cúspides) no plano se, e somente se, satisfaz $V^+ = V^-$*

## 4.2 Aplicações na esfera

Nesta seção trabalharemos com aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientada na esfera $S^2$, e citeremos alguns resultados para o caso particular das aplicações dobra, baseados em [9], que pode ser visto com mais detalhes em FELIPPE [7].

**Exemplo 4.2.1.** A Figura 4.2 ilustra duas aplicações estáveis da esfera na esfera com $A = 1$ e $C = s(C) = 2d$, onde $a)d = 1$ e em $a)d = 2$, com $d$ sendo o grau da aplicação.

A aplicação em $a)$ pode ser obtida da aplicação identidade $id : S^2 \to S^2$ por uma transição lábios, criando uma curva singular com duas cúspides. A aplicação em $b)$ pode ser obtida por soma conexa entre duas aplicações do tipo em $a)$.

Por $d-1$ somas conexas nas aplicações do tipo $a)$, obtemos uma aplicação da esfera na esfera com grau $d$ e uma única curva singular.

**Exemplo 4.2.2.** A árvore $L_1$ com peso zero pode ser realizada pelas aplicações da esfera na esfera com grau 1 e 2 ilustradas na Figura 4.2. A árvore $L_2$ com peso zero pode ser realizada pela aplicação da esfera na esfera com grau 1 por $a)$

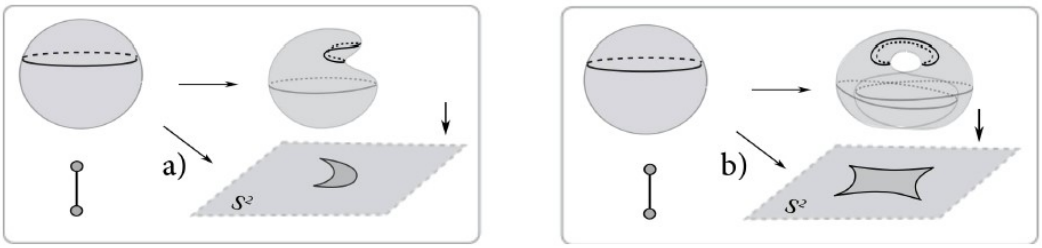


Figura 4.2: Exemplo de aplicações da esfera na esfera com grau um e dois

na Figura 4.3. O grafo estrela com 3 arestas e peso zero pode ser realizado por uma aplicação como em $b$) obtida pela cirurgia horizontal entre duas aplicações tipo $a$).

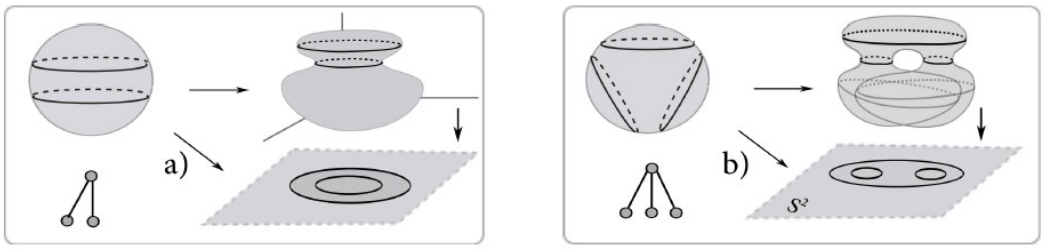


Figura 4.3: Exemplo de aplicações dobra da esfera na esfera com grau um e dois

**Teorema 4.2.3.** *Toda árvore $\mathcal{A}$ com peso zero pode ser realizada por alguma aplicação estável da esfera na esfera com grau $d$ arbitrário.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.1.1, sabemos que toda árvore $\mathcal{A}$ com peso zero pode ser realizada por uma aplicação estável $h : S^2 \to \mathbb{R}^2$. Considere o mergulho $j : h(S^2) \subset \mathbb{R}^2 \to S^2$. A aplicação estável $g = j \circ h : S^2 \to S^2$ é uma aplicação com grau zero que realiza $\mathcal{A}$. Para obter uma aplicação que realiza $\mathcal{A}$ com grau $d$ qualquer, basta realizar $d$ cirurgias horizontais entre $g$ e aplicações do tipo do Exemplo 4.2.1. □

**Corolário 4.2.4.** *Se $\mathcal{A}$ pode ser decomposta em $k$ árvores do tipo $L_3$ e $d$ ávores do tipo $L_2$ então $\mathcal{A}$ satisfaz $V^+ - V^- = d$ e pode ser realizada por alguma aplicação dobra $h : S^2 \to S^2$ com grau $d$.*

*Demonstração.* As árvores do tipo $L_2$ estão associadas a aplicações dobra com grau 1 tipo $a$) da Figura 4.3 e $L_3$ estão associados às aplicações dobra com grau zero do tipo $e$) da Figura 2.15. Uma aplicação dobra $h : S^2 \to S^2$ com grau $d$, que realiza $\mathcal{A}$ pode ser obtido por $k - 1$ somas conexas horizontais entre as $k$ aplicações dobra do tipo $e$ da Figura 2.15 e $d-1$ somas conexas horizontais entre $d$ aplicações dobras do tipo $a$) da Figura 4.3. □

**Teorema 4.2.5** ([9]). *Uma árvore $\mathcal{A}$ com peso total zero pode ser realizada por alguma aplicação dobra (sem cúspide) na esfera com grau $d$ se, e somente se, $\mathcal{A}$ satisfaz $V^+ - V^- = d$.*

**Lema 4.2.6.** *Toda árvore $\mathcal{A}$ com peso total $r > 0$ pode ser realizada por alguma aplicação estável $h : rT \to S^2$ com grau $d$ arbitrário.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{A}$ uma árvore com pesos $t_i$ dos vértices $v_i$, tal que $r = \sum_V^{i=1} t_i$. Considere $\mathcal{A}'$ o mesmo grafo $\mathcal{A}$ mas com peso zero em todos os vértices. Pelo Teorema 4.2.3, $\mathcal{A}'$ pode ser realizada na esfera por uma aplicação $g : S^2 \to S^2$ com grau $d$ arbitrário. Para cada $t_i > 0$, considere a aplicação $g^i = j^i \circ h^i : t_iT \to S^2$, onde $j^i : h^i(t_iT) \to S^2$ é um mergulho e a aplicação $h^i : t_iT \to \mathbb{R}^2$ como no Lema 4.1.7, associada ao grafo $L_1$ com peso $[0 - t_i]$. Fazendo cirurgias horizontais entre $g$ e as aplicações $g^i$, respeitando os pesos nos vértices de $\mathcal{A}$, obtém-se uma aplicação estável $h : rT \to S^2$ que realiza $\mathcal{A}$. □

**Teorema 4.2.7.** *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}$ pode ser realizado por uma aplicação estável $f : mT \to S^2$ com grau $d$ arbitrário, onde $m = \beta_1(\mathcal{G}) + W$.*

*Demonstração.* Retirando uma aresta de cada um dos $\beta_1(\mathcal{G})$ ciclos de $\mathcal{G}$ obtemos a árvore maximal $\mathcal{A}$ com peso total $W$. Pelo Lema 4.2.6, $\mathcal{A}$ pode ser realizada por uma aplicação do W-toro na esfera com grau $d$ arbitrário. Fazendo uma cirurgia vertical sobre $h$ para cada uma das $\beta_1(\mathcal{G})$ arestas retiradas de $\mathcal{G}$ retiradas para obter $\mathcal{A}$, obtemos uma aplicação $g : M \to \mathbb{R}^2$ que realiza $\mathcal{G}$. Como W-toro é conexo, cada cirurgia vertical sobre $h$ altera em $+1$ o gênero da superfície resultante, então o gênero de $M$ é $m = \beta_1(\mathcal{G}) + W$. □

## 4.3 Aplicações no n-toro

Trabalharemos neste capítulo com superfícies fechadas e orientadas, portanto iriremos omitir a escrita destas propriedades tendo em vista esta consideração inicial. As principais referências desde capítulo são [31] e [21].

### 4.3.1 Aplicações de recobrimento sobre o n-toro

**Exemplo 4.3.1.** A Figura 4.4 ilustra uma aplicação do toro no toro com grau $d = 2$, que realiza um grafo $\mathcal{G}$ com uma única aresta (com conjunto singular vazio). Note que essa aplicação pode ser construida com um grau $d$ arbitrário que ainda realize $\mathcal{G}$.

Podemos reescrever o Corolário 2.1.32 dentro do contexto das apliações estáveis associadas a grafos, como segue:

**Proposição 4.3.2.** *Seja $\mathcal{G}$ um grafo com um único vértice e peso $w$. Se $N$ é uma superfície com gênero $n > 1$, então $\mathcal{G}$ é o grafo de uma aplicação $f : M \to N$ se e somente se $M$ é uma superfície com gênero $w$ e existe um inteiro positivo $d$ que satisfaz $w = d(n-1) + 1$.*

*Consequentemente, existe $f : M \to N$ com grau $d$ se, e somente se, $d = (g(M) - 1)\backslash(n - 1)$ é um inteiro.*

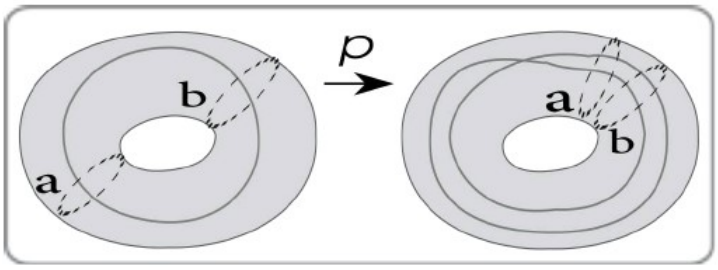


Figura 4.4: Aplicação do toro no toro com grau 2

*Demonstração.* ($\Rightarrow$) Análoga ao Corolário2.1.32.

($\Leftarrow$) Queremos mostrar que existe uma aplicação $f : M \to N$ que realiza $\mathcal{G}$, satisfazendo $w = d(n-1)+1$. Para isso basta tomar $f$ como sendo uma aplicação de recobrimento de $M$ em $N$. □

**Observação 4.3.3.** *Seja $\mathcal{G}$ um grafo com um único vértice e peso $n$. Sejam $M$ e $N$ duas superfícies com gêneros $n > 1$ e $w > 1$, respectivamente, e $f : M \to N$ uma aplicação estável que realiza $\mathcal{G}$. Segue pela Proposição 4.3.2 que o gênero de $M$ é dado por $w = d(n-1)+1$, ou seja, para cada $d$ fixo obtemos o gênero de uma superfície que cobre $N$ sem pontos singulares.*

**Exemplo 4.3.4.** Para construirmos uma aplicação de recobrimento $f : M \to 5T^2$ com grau $d = 3$, basta utilizarmos a relação $w = d(n-1)+1$ como descrita na Observação 4.3.3. Segue então $w = 3(5-1)+1 = 13$, portanto tomando $M$ homeomorfa ao 13-toro, $f$ poderia ser construida de forma a ser uma aplicação de recorbimento do 13-toro no 5-toro com grau $d = 3$.

**Observação 4.3.5.** *Note que pela Observação 4.3.3 o 2-toro pode ser coberto por qualquer superfície $M$ com gênero $w > 2$, sem pontos singulares. De fato, pois com $n = 2$ temos $w = d+1$, portanto para um grau $d$ qualquer, temos que o $(d+1)$-toro cobre o 2-toro. Com um raciocínio análogo podemos mostrar que o 3-toro é coberto por todos os n-toros com $n > 2$ ímpar.*

### 4.3.2 Aplicações de grau zero sobre n-toro

**Observação 4.3.6.** *Uma forma de construir uma aplicação estável $f : M \to nT^2$ de grau zero, pode ser feita através da composição de $h : M \to \mathbb{R}^2$ com o mergulho $j : h(M) \to nT^2$ da imagem de $M$ sobre $nT^2$, ou seja, $f = j \circ h$.*

**Proposição 4.3.7.** *Todo grafo bipartido com duas arestas, três vértices, e com peso total $r$ é grafo de uma aplicação entre $r$-toro e um $n$-toro com grau zero.*

*Demonstração.* Basta considerarmos as aplicações ilustradas nas Figuras 2.3, 2.7 e 3.3. Realizando somas horizontais (convenientes) entre elas, e compondo a aplicação resultante dessas somas horizontais com a aplicação mergulho no n-toro obtemos a aplicação que queremos. □

**Exemplo 4.3.8.** A árvore $L_1$ com peso 2 em cada vértice pode ser realizada pelas 3 diferentes aplicações dobra com grau zero, ilustradas na Figura 4.5. De forma análoga podemos realizar qualquer grafo $L_1$ com pesos $k$ nos dois vértices.

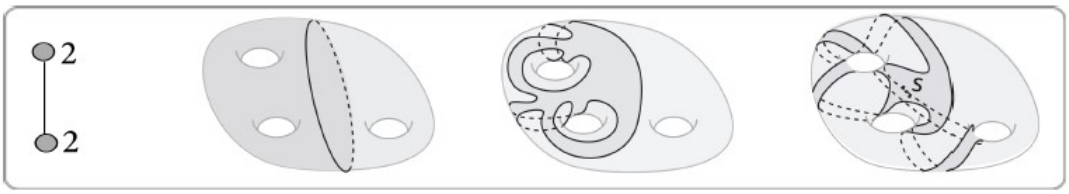


Figura 4.5: Aplicações dobra do 4-toro no 3-toro

**Observação 4.3.9.** *Pela Observação 4.3.6, uma boa ferramenta para construção de aplicações estáveis com grau zero. Porém, como visto na demonstração da Proposição 4.3.7, essa não é a única ferramenta que temos, como é mostrado nos Exemplos 4.3.8 e 4.3.10.*

**Exemplo 4.3.10.** A Figura 4.6 ilustra em $a$) uma aplicação dobra com duas componentes conexas no domínio, o l-toro e um 8-toro em um n-toro. Em $b$) temos outra aplicação dobra obtida pela cirurgia horizontal da aplicação ilustrada em $a$), que resulta numa aplicação do (l+8)-toro no n-toro. Ambas as aplicações possuem grau zero, onde $a$) possui $l+2$ curvas no conjunto singular, enquanto $b$) possui $l+1$ curvas singulares, pois a cirurgia feita em componentes conexas diferentes da aplicação resulta em $-1$ nas quantidade de curvas do conjunto singular, como mencionado na Observação 2.3.4.

Para a aplicação $a$) temos um grafo desconexo associado a ela, com duas componentes conexas, cada uma referente a uma componente conexa da superfície de domínio da aplicação. O grafo associado ao l-toro do domínio é um grafo com dois vértices e $l+1$ arestas ligando esses vértices. De fato, basta tomar a aplicação que projeta o toro no plano (ver aplicação $f$ da Figura 2.11), teremos então duas curvas singulares, sem pontos de cúspide, que realiza um grafo com dois vértices e duas arestas ambas ligando os dois vértices. realizando então $l-1$ cirurgias horizontais entre essas aplicações, e em seus respectivos grafos associados, teremos uma aplicação do l-toro no plano com o grafo associado que queríamos, basta então compor essa aplicação com o mergulho de sua imagem no n-toro e obtemos o resultado desejado.

Para encontrar o grafo associado ao 8-toro basta realizar cirurgias horizontais convenientes nas aplicações e nos seus grafos associados, do Exemplo 4.3.8. Teremos então um grafo tipo $L_1$ com peso 4 em cada vértice.

Para encontrar o grafo associado a aplicação $b$), basta realizar cirurgias horizontal nas duas componentes conexas dos grafos da aplicação $a$), resultando então em um grafo com dois vértices e $l+1$ arestas ligando esses vértices.

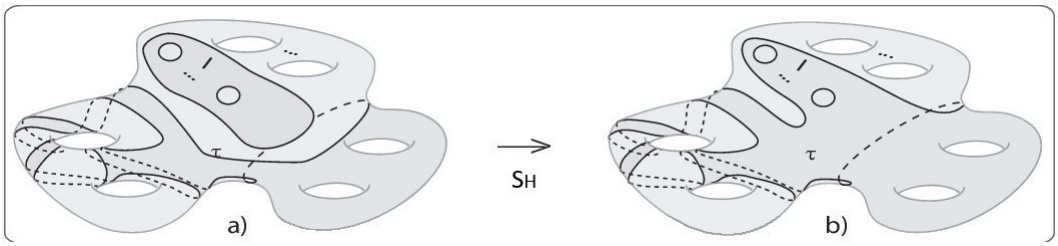


Figura 4.6: Aplicações dobra no n-toro não planares com grau zero

### 4.3.3 Aplicações do n-toro no m-toro

**Exemplo 4.3.11.** Na Figura 4.7 temos dois exemplos de aplicações do dn-toro no n-toro, com grau $d$, uma curva singular, 2d cúspides e zero pontos duplos. Em $(a)$ temos $d = 1$, e pode ser obtida pela aplicação identidade com uma transição lábios. A aplicação em $(b)$ pode ser obtida por cirurgias horizontais entre aplicações do tipo apresentado em $(a)$.

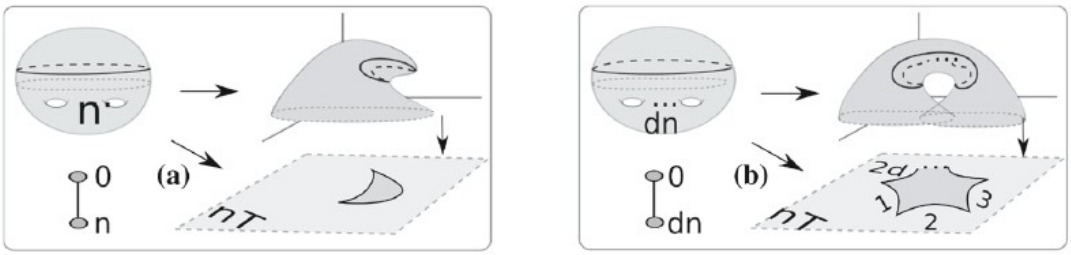


Figura 4.7: Exemplos de aplicações do dn-toro no n-toro

**Lema 4.3.12.** *Toda árvore $A$ com dois vértices, uma aresta e peso total $w = dn + k$ para algum $d$, $k \geq 0$ é grafo de alguma aplicação estável de um w-toro em um n-toro com grau $d$.*

*Demonstração.* A projeção trivial da esfera no n-toro tem uma curva singular. Então, note que $A$ tem $w = k = d = 0$. Para $d = 0$ e $w = k$, a árvore $A$ pode ser realizada por cirurgias horizontais entre aplicações como as que estão ilustradas nas Figuras 2.3 e 4.1. Para $k = 0$ e $w = dn$, a árvore $A$ pode ser realizada por aplicações do mesmo tipo das que estão ilustradas na Figura 4.7. Para $d, k > 0$ a árvore $A$ pode ser realizada através de cirurgias entre as aplicações das Figuras 2.3, 4.1 e 4.7. □

**Proposição 4.3.13.** *Seja $f$ uma aplicação estável do m-toro no n-toro, para $n > 1$. Então, o máximo (valor absoluto) para o grau de $f$ é dado por $(m-1)\backslash(n-1)$.*

*Demonstração.* Se $f$ é uma aplicação estável de $M$ no n-toro, para $n > 1$, então $d(1-n) = (W^+ - W^-) - (V^+ - V^-) - \frac{s(C)}{2}$ pelo Corolário 3.1.10. Como $W = W^+ + W^-$ então $d(1-n) = (W - 2W^- - V^+ + V^- - \frac{s(C)}{2}$. Se $f$ não possui pontos singulares, temos $V = V^+ = 1$ e $V^- = 0$ (veja a Figura 2.8). As transições

bicos e lábios alteram em +1 e, ao mesmo tempo, o par $V^-$ e $\frac{s(C)}{2}$ ou o par $\frac{s(C)}{2}$ e $V^+$. Então, $1 \leq 2W^- + V^+ - V^- + \frac{s(C)}{2}$ e $(W-1) \geq (W - 2W^- + V^+ - V^- + \frac{s(C)}{2})$. Consequentemente, $d = (W - 2W^- + V^+ - V^- + \frac{s(C)}{2})/(n-1) \leq (W-1)/(n-1)$. Assim, o valor absoluto máximo para o grau de $f$ é $(W-1)/(n-1)$. □

**Teorema 4.3.14.** *Qualquer árvore $\mathcal{A}$ com peso total $W$ é grafo de alguma aplicação estável $f : M \to N$ com grau $d$, onde $M$ e $N$ são superfícies fechadas orientadas com gênero $W$ e $n$, respectivamente, e $d \leq (W-1)/(n-1)$*

*Demonstração.* Dado uma árvore $\mathcal{A}$ com peso total $W$, nós veremos como obter uma aplicação $f : M \to N$ com grau $d$ associado com $\mathcal{A}$. Pelo Teorema 4.1.9, $\mathcal{A}$ é grafo de alguma aplicação estável $h : M \to \mathbb{R}^2$, onde $M$ é uma superfície fechada orientada com gênero $W$. Se $j : h(M) \to N$ é um mergulho, então nós podemos obter a aplicação estável $f = j \circ h : M \to N$ com grau $d = 0$ (ver Figura 4.7) associado com $\mathcal{A}$. Além disso, se $\mathcal{A}$ tem peso maior que zero em dois vértices consecutivos, nós podemos obter outras aplicações estáveis com grau zero por cirurgias horizontais entre a aplicação $f$ e aplicações similares a da Figura 2.3, respeitando os pesos de $\mathcal{A}$. Nós podemos obter uma aplicação $f : M \to N$ com grau $d > 0$, que realiza $\mathcal{A}$, da seguinte forma: Se $V = 1$ ou $V = 2$, então $\mathcal{A}$ pode ser realizada respectivamente pelas Proposições 4.3.7 e 4.3.2. Se $V > 2$, primeiro podemos decompor $\mathcal{A}$ em um conjunto de árvores $\{A_i\}$, para $i = 1, \cdots, k$, com dois ou três vértices e peso $W_i$ tal que $W = \Sigma_{i=1}^k W_i$. De acordo com a Proposição 4.3.2 e o Lema 4.3.12, cada $\{A_i\}$ pode ser realizado por algum aplicação estável $f_i : M_i \to N$, onde $M_i$ tem gênero $W_i$ e pela Proposição 4.3.13, o grau máximo (valor absoluto) é $(W_i - 1)/(n-1)$. Então, $f$ pode ser obtida por cirurgias horizontais entre as aplicações $f_i$, para $i = 1, \cdots, k$, sobre a decomposição. O grau de $f$ é $d = \Sigma_{i=1}^k d_i \leq \Sigma_{i=1}^k (W_i - 1)/(n-1) = (W-k)/(n-1) \leq (W-1)/(n-1)$. □

**Teorema 4.3.15.** *Todo grafo bipartido $\mathcal{G}$ com pesos nos vértices é grafo de alguma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas $M$ e $N$. De fato, se $W$ denota a soma de todos os pesos dos vértices de $\mathcal{G}$, então a característica de Euler de $M$ é dada por $\mathcal{X}(M) = 2(\mathcal{X}(\mathcal{G}) - W)$, onde $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ denota a característica de Euler do grafo $\mathcal{G}$*

*Demonstração.* Dado um grafo bipartido $\mathcal{G}$ com $V$ vértices, $E$ arestas e peso total $W$, denotaremos por $\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - V + E$ o número de ciclos de $\mathcal{G}$, então removemos uma aresta $u_i v_i$, para $i = 1, \cdots, \beta_1(\mathcal{G})$, em cada um dos $\beta_1(\mathcal{G})$ ciclos de $\mathcal{G}$, obtendo uma árvore com $V$ vértices, $E - \beta_1(\mathcal{G})$ vértices e peso total $W$. Pelo Teorema 4.3.14, $\mathcal{A}$ é um grafo de alguma aplicação estável $h$ do W-toro no n-toro com grau $d$. E realizando $\beta_1(\mathcal{G})$ cirurgias verticais em $h$, uma entre cada um dos pares de regiões correspondentes ao par de vértices $u_i$ e $v_i$, obtemos uma nova aplicação estável $f$ do $(W + \beta_1(\mathcal{G}))$-toro no n-toro com $\beta_1(\mathcal{G})$ novas curvas singulares, correspondente as arestas $u_i v_i$ em $\mathcal{G}$. A característica de Euler de $M$ é dada por $\mathcal{X}(M) = 2 - 2(\beta_1(\mathcal{G}) + W)$. Como a característica de Euler de um grafo é dado por $\mathcal{X}(\mathcal{G}) = V - E$, $\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - \mathcal{X}(\mathcal{G})$. Então, temos $\mathcal{X}(M) = 2(\mathcal{X}(\mathcal{G}) - W)$. □

# Capítulo 5

# Conclusão

Com a realização deste trabalho podemos ver o importante papel que um invariante desempenha na classificação de alguma classe de objetos, que neste caso foram as aplicações estáveis. A associação aqui descrita entre os grafos e as aplicações estáveis, acabou por criar um bom invariante global dessas aplicações, um que ajuda na classificação de aspectos que outros invariantes não abragiam, a saber, contendo informações da superfícies de domínio das aplicações. Os resultados aqui apresentados, principalmente o último teorema, mostram que há realização de grafos por qualquer que seja a aplicação entre duas superfícies fechadas e orientadas, ou até mesmo aplicações no plano. Ainda foi dado ferramentas que permitem a construção de aplicações mais elaboradas utilizando aplicações mais simples, ferramentas que estendem seu uso para a construção de grafos que realizam aplicações mais complexas a partir de grafos que realizam aplicações mais simples. Mas mesmo que o grafo traga tantas informações sobre as aplicações, ele ainda não as classifica totalmente, pois dado um grafo, temos uma familia de aplicações que realizam esse grafo. Achar um invariante, ou um conjunto de invariantes, que classifique totalmente as aplicações estáveis ainda é um problema em aberto na teoria.

# Referências Bibliográficas


[1] ARNOLD, V. I., *Topological Invariants of the Plane Curves and Caustic*, University Lecture Series 5 (1994), AMS Providenci.

[2] BRETAS. J. L. Singularidades de Aplicações Estáveis de Superfície Fechada e Orientada em $S^2$. 2011. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2011.

[3] CHÍNCARO, E., *Bifurcations of Whitney maps*, Tese de doutorado, IMPA, (1978).

[4] GIBSON, C. G., *Singular points of smooth mappings*, Research notes in maths, 25, Pitman (1979).

[5] GOLUBITSKY, M., GUILLEMIN V., *Stable Mappings and Their Singulerities*, Spinger Verlag, 25, Pitman, (1979).

[6] GORYUNOV, V., *Local Invariants of Mappings of Surface into three-space*, (2006).

[7] FELIPPE, A. C., *Invariantes globais de aplicações estáveis de superfícies fechadas em $S^2$*, Dissertação (Mestrado em Matemática), Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, (2013).

[8] HACON D.; MENDES DE JESUS C.; ROMERO FUSTER M. C., *Global aspects of the classificarion of the stable maps of compact surfaces in the plane*, Rev. Semin. Iberoam. Mat. Singul. Tortesillas 3,(2005).

[9] HACON D.; MENDES DE JESUS C.; ROMERO FUSTER M. C., *Graphs of stable maps from closed orientable sufaces to the 2-sphere*, J. Singularities, 2 (2010).

[10] HACON D.; MENDES DE JESUS C.; ROMERO FUSTER M. C., *Fold maps from the sphere to the plane*, Experimental Maths 15 (2006).

[11] HACON D.; MENDES DE JESUS C.; ROMERO FUSTER M. C., *Stable maps from sufarces to the plane with prescribed branching data*, Topology and Its Appl., 154, (2007).

[12] HACON D.; MENDES DE JESUS C.; ROMERO FUSTER M. C., *Stable maps the sufarces in to the projective plane*, In: VII Encontro Regional de Topologia, São Paulo: São Sebastião, (2009).

[13] HACON D.; MENDES DE JESUS C.; ROMERO FUSTER M. C., *Topological invariants of stable maps from a suface to the plane from a global viewpoint*, Proceedings of the 6th Workshop on Real and Complex Singularities. Lecture notes in Pure and Applied Mathmatics, 232, Marcel and Dekker (2003).

[14] KINSEY, L.C., *Topology of sufaces*, Springer Verlag, New York (1993).

[15] LIMA , Elon Lages, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, 4º ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, (2012).

[16] LIMA , Elon Lages, *Introdução a Topologia Diferencial*, 2º ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, (2012).

[17] LIMA , Elon Lages, *Variedades Diferenciáveis*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2ª ed. (2012).

[18] MACHADO, D. S., *Invariante global de aplicações estáveis de superfície fechada no plano*, Dissertação (Mestrado em Matemática), Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, (2010).

[19] MARQUES, G. P., *Um Teorema Global para Singularidades de Aplicações entre Superfícies*, Dissertação (Mestrado em Matemática), Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, (2015).

[20] MENDES DE JESUS, C., *Grafos de aplicações estáveis entre superfícies fechadas*, XIX Encontro Brasileiro de Topologia, 2014 http://www.dm.ufscar.br/profs/ebt/history/2014/files/mc-catarina.pdf

[21] MENDES DE JESUS, C., *Graphs of stable maps between closed orientable sufaces*, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC,(2016).

[22] MENDES DE JESUS, C., *Introdução ao estudo de grafos associados as aplicações entre superfícies orientadas*, In: XIX Encontro Brasileiro de Topologia, São Paulo: São José do Rio Preto (2014).

[23] MENDES DE JESUS, C., *Invariantes Topológicos de aplicações genéricas de superfícies compactas orientáveis no plano*, Tese de Doutorado, PUC-RIO, (2001).

[24] MENDES DE JESUS, C., *Invariants of maps between closed sufaces*, (Preprint), (2013).

[25] MENDES DE JESUS, C., MORAES, S. M., ROMERO FUSTER, M. C. *Stable gauss maps on surfaces from a global viewpoint*, Bulletin Brasilian Mathematical Society 42,(2011), no.1.

[26] MENDES DE JESUS, C., OSET SINHA, R., ROMERO FUSTER, M. C. *Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to* $\mathbb{R}^3$, Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics 267,(2009).

[27] MUNKRES, J. R., *Topology: a first course*, 2ª edição. New Jersey: Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs (1975).

[28] OHMOTO T., AICARDI F., *First Order Local Invariants of Apparent Coutours*, Topology, 45, (2006).

[29] OLIVEIRA. F. H. Grafos de aplicações de Gauss estáveis. Dissertação (Mestrado em Matemática)- ICMC, Universidade Estadual de São Paulo, São Carlos, 2016.

[30] QUINE, J. R., *A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds*, Trans. AMS. 236 (1978) 307-314.

[31] Sanchez, C. M. J., *Grafos de aplicações estáveis entre superfícies fechadas*, Anais do XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional,(2015).

[32] SOUZA. I. V. Singularidades de Aplicações de Gauss Estáveis. 2012. 73 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2012.

[33] TARI, F., *Singularidades de aplicações diferenciáveis*, Notas de aula do ICMC N°34, São Carlos (1999).

[34] THOM, R., *Les singularites des applications differentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955-1956).

[35] VASSILIEV, V. A., *Complements of Discriminants of Smooth Maps*, Topology and Aplications, AMS, Providenci, RI: Amer. Math. Soc. (1992).

[36] WHITNEY, H., *On singularities of mappings of euclidean spaces*, I. Maps of the plane into plane, Ann, of Math. (2) 62 (1955).