VERÔNICA DE JESUS CHAVES

ESTABILIDADE TOPOLÓGICA PARA FLUXOS HIPERBÓLICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2018

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

Chaves, Verônica de Jesus, 1994-

C512e Estabilidade topológica para fluxos hiperbólicos / Verônica
2018 de Jesus Chaves. – Viçosa, MG, 2018.

vii, 42 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Bulmer Mejía García.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 41-42.

1. Espaços hiperbólicos. 2. Topologia - Estabilidade. 3. Sistemas dinâmicos diferenciais. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 516.9

VERÔNICA DE JESUS CHAVES

ESTABILIDADE TOPOLÓGICA PARA FLUXOS HIPERBÓLICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós - Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 21 de agosto de 2018.

Andrés Mauricio López Barragan

Walter Teofilo Huaraca Vargas

Bulmer Mejía García
(Orientador)

Dedico este trabalho ao meus pais Sinerlande e Jeremias,
com amor e carinho.

Ah! Se o mundo inteiro me pudesse ouvir, tenho muito pra contar, dizer que aprendi [...]

Tim Maia

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pois sem sua graça não conseguiria as vitórias que me foram concedidas.

Sou muito grata aos meus pais Jeremias e Sinerlande que, com humildade, me deram suporte para a vida, através dos exemplos de responsabilidade, dedicação e amor, ajudando a manter-me de pé e com a cabeça erguida a cada obstáculo encontrado. Agradeço também a minha irmã Thaís por todo apoio e carinho.

Agradeço ao meu orientador, Bulmer, que, com seus conhecimentos e experiência, me auxiliou em todo o processo de realização desse trabalho, me dando suporte para que eu o desenvolvesse da melhor forma possível, além da paciência, carinho e amizade.

Aos meus colegas de curso, pela parceria, aprendizados e pelas risadas no corredor do DMA, que tornaram essa minha caminhada mais feliz e agradável. Em especial, a Bruna, por ter sido meu ponto de apoio em todos os momentos nessa jornada. A Eliane, minha companheira de almoço no RU, pelos momentos de descontração, tu é barril dobrado, Lili. A Luana, minha companheira de filmes, por todo apoio durante esses dois anos. E por fim, a todas as pessoas que eu conheci nesse período por todo o carinho.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação, em especial, ao secretário da pós graduação, João, pelos doces, carinho e amizade.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Resumo

CHAVES, Verônica de Jesus, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2018. **Estabilidade Topológica para Fluxos Hiperbólicos**. Orientador: Bulmer Mejía García.

Neste trabalho pretendemos usar o conceito de estabilidade topológica para caracterizar os fluxos hiperbólicos. Para isso, apresentaremos o seguinte resultado: Todo fluxo hiperbólico φ é topologicamente estável em M, onde M é um espaço métrico conexo e compacto. Esse resultado foi provado por Choi e Park no artigo [4].

Abstract

CHAVES, Verônica de Jesus, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2018. **Topological Stability for Hyperbolic Flows**. Adviser: Bulmer Mejía García.

In this work we intend to use the concept of topological stability to characterize the hyperbolic flows. For this, we will present the following result: All hyperbolic flow φ is topologically stable in M, where M is a connected and compact metric space. This result was proved by Choi and Park in article [4].

Sumário

Introdução

A teoria de Sistemas Dinâmicos Hiperbólicos foi introduzida nas décadas de 60 e 70 com os trabalhos de Anosov [1], Smale [13], Bowen [2], entre outros, com o objetivo inicial de caracterizar os sistemas conhecidos como estruturalmente estáveis. Posteriormente, Anosov e Bowen introduziram o conceito de Estabilidade Topológica, que expressa a permanência das propriedades importantes da dinâmica dos fluxos hiperbólicos. Uma característica importante dos fluxos topologicamente estáveis é que todos os fluxos na vizinhança de um fluxo dado, possuem a mesma quantidade de pontos fixos, a mesma quantidade de pontos periódicos, são transitivos ou expansivos, entre outras propriedades topológicas. Por esse motivo, essa propriedade é um problema fundamental no estudo da dinâmica dos fluxos.

Desde 1970 com o artigo de Peter Walters [16], na tentativa de abordar alguns problemas da teoria de sistemas dinâmicos suaves desde uma perspectiva puramente topológica, sem o conforto de uma estrutura diferencial, foi observado que as noções de sombreamento de pseudo-órbita e expansividade, entre outras propriedades, mostraram-se suficientes para expressar o conceito de hiperbolicidade. Muitos resultados já conhecidos para difeomorfismos hiperbólicos foram estendidos para fluxos hiperbólicos definidos em espaços métricos compactos e satisfazendo algumas dessas propriedades.

Em sua tese [15], Thomas, provou que a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita juntamente com a expansividade implica em estabilidade topológica para fluxos definidos em um espaço métrico M compacto e conexo. Baseados nesse resultado, Choi e Park [4] provaram o seguinte teorema,

Teorema 1. *Todo fluxo hiperbólico φ em M é topologicamente estável.*

Nosso objetivo principal, nessa dissertação, é desenvolver o teorema acima, bem como apresentar os conceitos essenciais para compreensão desse resultado.

A dissertação está dividida como segue:

No Capítulo 1 serão introduzidos os conceitos básicos da teoria de fluxos e fluxos hiperbólicos através de uma perspectiva topológica. Além disso, estudaremos os fluxos expansivos e a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita, duas propriedades importantes dos sistemas hiperbólicos.

Finalmente, no Capítulo 2 introduziremos o conceito de estabilidade topológica para fluxos e pretendemos caracterizar os sistemas dinâmicos hiperbólicos como sistemas topologicamente estáveis através do teorema 1.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos e resultados que utilizaremos no decorrer desta dissertação. Estudaremos aqui os conceitos básicos da teoria de fluxos, fluxos hiperbólicos, fluxos expansivos e apresentaremos alguns resultados importantes de pseudo-órbita e a propriedade de sombreamento. As referências utilizadas neste capítulo são [3], [10], [11] e [15].

1.1 Notações e Definições

Ao longo dessa dissertação M designa, salvo menção em contrário, um espaço métrico conexo e compacto. Consideraremos d a métrica definida em M

Definição 1.1. *Um **fluxo** de classe C^r (ou um sistema dinâmico contínuo de classe C^r), $r \geq 0$, sobre um espaço métrico M é uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ de classe C^r, tal que*

i) $\varphi(0, x) = x$, $\forall x \in M$,

ii) $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$, $\forall x \in M$ *e* $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

Denotaremos por φ_t o homeomorfismo em M definido por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$. Sem perda de generalidade, utilizaremos φ para o fluxo ou φ_t.

Definição 1.2. *Uma **órbita** de um ponto $x \in M$ com relação a φ é o conjunto*

$$\mathcal{O}(x) = \{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}.$$

*A **órbita positiva** e a **órbita negativa** de $x \in M$ com relação a φ são, respectivamente, os conjuntos,*

$$\mathcal{O}^+(x) = \{\varphi_t(x) : t \geq 0\} \quad e \quad \mathcal{O}^-(x) = \{\varphi_t(x) : t \leq 0\}.$$

Definição 1.3. *Um ponto $x \in M$ é um **ponto fixo** para φ, se $\varphi_t(x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Denotamos o conjunto de pontos fixos com respeito ao fluxo φ por $Fix(\varphi_t)$.*

Definição 1.4. *Um ponto $x \in M$ é um **ponto periódico** se existe $T > 0$ tal que $\varphi_T(x) = x$ e $\varphi_t(x) \neq x$, para todo $0 < t < T$. O menor T com esta propriedade é chamado de período. Chamaremos de **órbita periódica** a órbita de um ponto periódico.*

Seja φ um fluxo em um espaço métrico M. Estudaremos formas de comparar sistemas que possuem a mesma dinâmica.

Definição 1.5. *Dois fluxos φ_t e ψ_t definidos no espaço métrico M são **topologicamente semi-conjugados**, se existe uma aplicação contínua $h : M \to M$ tal que*

i) *h é sobrejetiva,*

ii) *$h \circ \varphi_t(x) = \psi_t \circ h(x)$, para todo $x \in M$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.*

*A aplicação h diz-se uma **conjugação topológica** se h for um homeomorfismo.*

Ou seja, os fluxos φ_t e ψ_t são topologicamente conjugados se o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, "\psi_t"'] & M \end{tikzcd}$$

Figura 1.1: Diagrama comutativo

Exemplo 1.6. *Considere os campos lineares X e Y de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$ definidos por $X(x,y) = (x,y)$ e $Y(x,y) = (x+y, -x+y)$. Os fluxos associados aos campos são $\varphi_t(x,y) = e^t(x,y)$ e $\psi_t(x,y) = e^t(x\cos(t) + y\sin(t), -x\sin(t) + y\cos(t))$, respectivamente.*

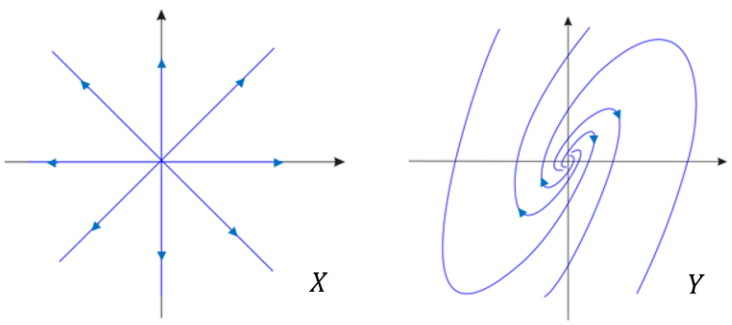

Figura 1.2: Órbitas dos fluxos gerados pelos campos lineares X e Y, respectivamente.

Vamos construir um homeomorfismo h em $\mathbb{R}^2$ conjugando os fluxos φ_t e ψ_t. Temos que a origem $(0,0)$ é o único ponto fixo para os fluxos φ_t e ψ_t, portanto, devemos ter $h(0,0) = (0,0)$. Podemos ver que o círculo unitário $S^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\| = 1\}$ é transversal a X e Y. Assim, seja $h_* : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo da esfera unitária S^1 em si mesma, definida por $h_*(p) = p$ para todo $p \in S^1$.

Para $q \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, existe um único $\tau(q) \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{\tau(q)}(q) = p \in S^1$.

Defina $h : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por $h(q) = \psi_{-\tau(q)}(h_*(\varphi_{\tau(q)}(q)))$. Observe que $h \mid S^1 = h_*$.

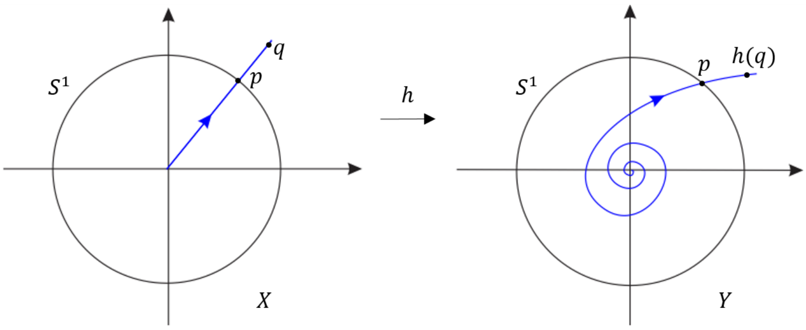

Figura 1.3: Construindo uma conjugação entre dois sistemas lineares.

É fácil ver que a aplicação h definida desta forma é contínua com inversa contínua, onde a inversa é dada por $h^{-1}(q) = \varphi_{-\tau(q)}(h_*^{-1}(\psi_{\tau(q)}(q)))$. Além disso, $h(\varphi_s(q)) = \psi_s(h(q))$ para todo $q \neq 0$ e $s \in \mathbb{R}$. De fato, observe que $\tau(\varphi_s(q)) = \tau(q) - s$. Assim,

$$\begin{aligned} h(\varphi_s(q)) &= \psi_{-\tau(\varphi_s(q))}(h_*(\varphi_{\tau(\varphi_s(q))}(\varphi_s(q)))) \\ &= \psi_{-\tau(q)+s}(h_*(\varphi_{\tau(q)-s}(\varphi_s(q)))) \\ &= \psi_s(\psi_{-\tau(q)}(h_*(\varphi_{\tau(q)}(q)))) \\ &= \psi_s(h(q)) \end{aligned}$$

para qualquer $q \neq 0$ e qualquer $s \in \mathbb{R}$.

A continuidade de h e de sua inversa na origem pode ser verificada utilizando-se os fluxos φ e ψ.

Definição 1.7. *Sejam φ_t um fluxo em M, e $x \in M$ e $\varepsilon > 0$ uma constante positiva. Os conjuntos*

$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \varepsilon; \forall t \geq 0\}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \varepsilon; \forall t \leq 0\}$$

são chamados de ***conjunto estável local*** *e* ***conjunto instável local****, respectivamente.*

Pretendemos analisar fluxos induzidos por campos vetoriais através de uma perspectiva não diferencial. Desta forma, apresentaremos uma definição topológica para fluxos hiperbólicos. Assumindo que este fluxo é solução única de uma equação diferencial.

Definição 1.8. *Um fluxo φ definido em M é dito* **hiperbólico** *se existem constantes positivas ε_0, δ_0, c, r, tais que,*

(i) $W^s_{\varepsilon_0}(x) = \{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \leq ce^{-rt}d(x,y); \forall t \in \mathbb{R}^+\}$
$W^u_{\varepsilon_0}(x) = \{y \in M : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \leq ce^{rt}d(x,y); \forall t \in \mathbb{R}^-\}$

(ii) Para qualquer $(x,y) \in B_{\delta_0} = \{(x,y) \in M \times M : d(x,y) < \delta_0\}$ e uma aplicação contínua $[\,,\,] : B_{\delta_0} \to M$, existe um único elemento $[x,y] \in M$ e uma aplicação contínua $v : B_{\delta_0} \to \mathbb{R}$ tal que

$$W^s_{\varepsilon_0}(\varphi_{v(x,y)}(x)) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y) = \{[x,y]\}.$$

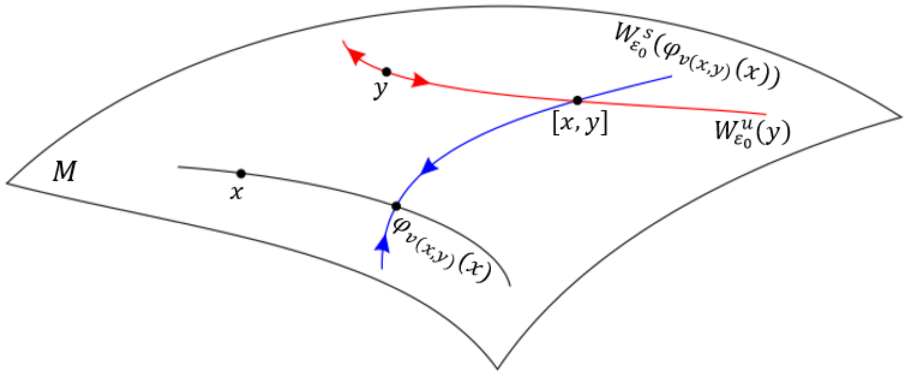

Figura 1.4: Exemplo de um fluxo hiperbólico.

1.2 Fluxos Expansivos

A seguir estudaremos algumas definições e resultados existentes para fluxos expansivos tomando como referência o trabalho [3].

Definição 1.9. *Um fluxo φ em M é dito* **expansivo** *se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$, para um par de pontos $x, y \in M$ e uma aplicação contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(0) = 0$, então $y = \varphi_t(x)$ onde $|t| \leq \varepsilon$.*

Um exemplo de fluxos expansivos são fornecidos por suspensões de homeomorfismos expansivos, como veremos a seguir. Antes disso, apresentaremos a definição de homeomorfismo expansivo e suspensão.

Definição 1.10. *Um homeomorfismo ϕ em M é dito* **expansivo** *se existe $\delta > 0$, tal que se $d(\phi^n(x), \phi^n(y)) < \delta$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, então, $x = y$.*

Definição 1.11. *Sejam $\phi : M \to M$ um homeomorfismo e $f : M \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua e positiva. Para $y \in M$, defina $y_f = \bigcup_{0 \leq t \leq f(y)} (t,y)$, e a relação de equivalência $(f(y), y) \sim (0, \phi(y))$, assim, obtemos o seguinte espaço quociente, $M_f = \bigcup_{y \in M} y_f / \sim$.*

A suspensão de ϕ por f é o fluxo definido em M_f por $\phi_t(s,y) = (t+s,y)$, onde $0 \leq t+s < f(y)$. Note que, para $f(y) = 1$, $\phi_1(0,y) = (1,y) \sim (0,\phi(y))$, para todo t.

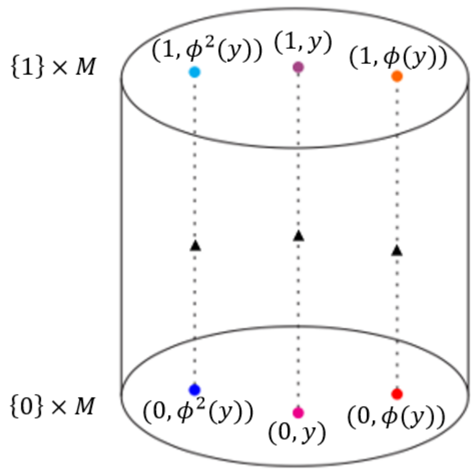

Figura 1.5: Suspensão de um homeomorfismo.

Seja d a métrica considerada em M e defina uma métrica ρ_t em $\{t\} \times M$ por

$$\rho_t((t,y),(t,z)) = (1-t)d(y,z) + td(\phi(y),\phi(z)),$$

para $y, z \in M$.

Note que, $\rho_0((0,y),(0,z)) = d(y,z)$ e $\rho_1((1,y),(1,z)) = d(\phi(y),\phi(z))$.

Se dois pontos estão em uma mesma órbita definimos a distância entre eles simplesmente como a distância entre seus tempos.

Cada suspensão de ϕ por f é conjugada a suspensão de ϕ pela função constante igual a 1. Um homeomorfismo de M_1 a M_f que conjuga os fluxos é dado pela aplicação $(t,y) \to (tf(y),y)$. Por esta razão, vamos analisar o caso particular das suspensões de ϕ por $f(y) = 1$.

Sejam x_1 e x_2 em M_1. Uma cadeia finita $\mathcal{C}_{x_1,x_2}$ entre x_1 e x_2 é um conjunto de pontos $w_1 = x_1$, $w_2, \ldots, w_{n-1} = x_2$ tal que para qualquer i entre 1 e $n-1$ temos que para um par de pontos w_i, w_{i+1}, ou ambos estão em algum y_f, ou ambos estão em uma mesma órbita do homeomorfismo ϕ.

Seja d_1 a distância entre dois pontos da cadeia $C_{x,y}$. Assim, para dois pontos $x, y \in M_f$ definimos o comprimento de uma cadeia $C_{x,y}$ por

$$|\mathcal{C}_{xy}| = \sum_{i=1}^{n-1} d_1(w_i, w_{i+1}),$$

ou seja, pela soma das distâncias entre os pontos da cadeia.

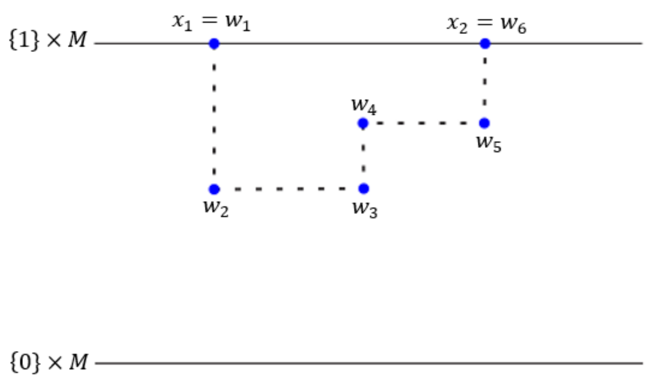

Figura 1.6: Cadeia entre x_1 e x_2.

Defina a distância d_2 entre dois pontos $x, y \in M_1$ como o ínfimo do comprimento entre todas as cadeias $C_{x,y}$ entre eles,

$$d_2(x,y) = \inf_{x,y\in M_1} |\mathcal{C}_{xy}|.$$

Exemplo 1.12. *[3] Se o homeomorfismo ϕ é expansivo em $J \subset M$, então o fluxo ϕ_t é expansivo em $J_1 \subset M_1$.*

Considere a métrica em M dada por

$$d^{'}(y_1, y_2) = \min(d(y_1, y_2), (d(\phi(y_1), \phi(y_2))).$$

Dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta^{'}$ a constante de expansividade de ϕ em relação à $d^{'}$, e tome $\delta = \min\{\delta^{'}, \varepsilon, 1/4\}$.

Suponha que existam pontos x_1 e x_2 em J_1 e uma aplicação contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(0) = 0$, tal que,

$$d(\phi_t(x_1), \phi_{f(t)}(x_2)) < \delta, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se $x_1 \in [0,1] \times J$ é representado por $(1/2, y_1)$, e x_2 representado por (t_2, y_2) então,

$$d_2(x_1, x_2) < \delta \leq \frac{1}{4} \text{ e } d^{'}(y_1, y_2) \leq d_2(x_1, x_2) < \delta.$$

Note que pela representação de x_1, temos que $\phi_1(x_1) = (1/2, \phi(y_1))$, assim,

$$d(\phi_1(x_1), \phi_{f(1)}(x_2)) < \delta \leq \frac{1}{4}.$$

Logo, $\phi_{f(1)}(x_2)$ tem uma representação dada por $(s, \phi(y_2))$, para algum s. Portanto,

$$d^{'}(\phi(y_1), \phi(y_2)) \leq d(\phi_1(x_1), \phi_{f(t)}(x_2)) < \delta.$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos,

$$d^{'}(\phi^n(y_1), \phi^n(y_2)) < \delta, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Pela expansividade de ϕ*, temos,* $y_1 = y_2$*, ou seja,* $x_2 = \phi_t(x_1)$*, onde* $|t| \leq d_2(x_1, x_2) < \delta \leq \varepsilon$*.*

Se x_1 *não está representado por* $(1/2, y_1)$*, então,* $\phi_r(x_1)$ *está representado por* $(1/2, y_1)$*, para algum* r*, com* $|r| \leq 1/2$*. Fazendo* $x_1^{'} = \phi_r(x_1)$ *e* $x_2^{'} = \phi_{f(r)}(x_2)$*, e* $h(t) = f(t+r) - f(r)$*, então,*

$$\begin{aligned} d(\phi_t(x_1^{'}), \phi_{h(t)}(x_2^{'})) &= d(\phi_t(x_1^{'}), \phi_{f(t+r)-f(r)}(x_2^{'})) \\ &= d(\phi_{t+r}(x_1), \phi_{f(t+r)}(x_2)) \\ &< \delta, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pelo argumento do caso anterior, temos $x_2^{'} = \phi_t(x_1^{'})$*, ou seja,* $x_2 = \phi_{t+r-f(r)}(x_1)$*, onde* $|t + r - f(r)| = d_2(x_1, x_2) < \delta < \varepsilon$*.*

Portanto, ϕ_t *é expansivo em* $J_1 \subset M_1$*.*

O resultado a seguir nos diz que segundo a definição de expansividade, todo ponto fixo deve ser isolado no espaço métrico M, e portanto, em espaços conexos, um fluxo expansivo não admite pontos fixos em M.

Teorema 1.13. *[3] Se um fluxo* φ *é expansivo em* M*, então cada ponto fixo de* φ *é um ponto isolado em* M*.*

Demonstração. Seja $x \in M$ um ponto fixo, ou seja, $\varphi_t(x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que satisfaz a definição 1.9. Para $B_\delta(x)$, a bola centrada em x e de raio δ, onde δ é a constante de expansividade, tome $y \in B_\delta(x)$ e considere a aplicação contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então,

$$d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) = d(x, y) < \delta.$$

Pela expansividade do fluxo φ, temos $y = \varphi_s(x) = x$, para $|s| < \varepsilon$.

Logo, como $y \in B_\delta(x)$ é arbitrário, concluímos que $B_\delta(x) = \{x\}$ e $(B_\delta(x) - \{x\}) \cap Fix(\varphi_t) = \emptyset$. Portanto, todos os pontos fixos de φ são isolados em M.

□

Obsevação 1.14. *Assim, podemos assumir, sem perda de generalidade, que o fluxo expansivo* φ*, que consideramos daqui em frente, não possui pontos fixos.*

Outra propriedade importante de fluxos expansivos é dada pelo seguinte lema,

Lema 1.15. *[3] Se* φ *é expansivo e não tem pontos fixos, existe* $T_0 > 0$*, de modo que para* T *satisfazendo* $0 < T < T_0$*, existe* $\gamma > 0$ *com* $d(\varphi_T(x), x) \geq \gamma$ *para todo* $x \in M$*.*

Demonstração. Se φ não possui órbitas periódicas, ou seja, $\varphi_t(x) \neq x$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in M$. Fixemos $T_0 = 1$, portanto, existe T onde $0 < T < T_0 = 1$ tal que

$$d(\varphi_T(x), x) \neq 0$$

ou seja, existe um $\gamma > 0$ tal que $d(\varphi_T(x), x) \geq \gamma$.

Se φ possui alguma órbita periódica, seja T_0 o menor número positivo tal que $\varphi_{T_0}(x) = x$ para algum $x \in M$. Suponha por absurdo que existe $0 < T < T_0$ e

$$
\begin{aligned}
&x_1 \in M : d(\varphi_T(x_1), x_1) < 1 \\
&x_2 \in M : d(\varphi_T(x_2), x_2) < \frac{1}{2} \\
&\ \vdots \\
&x_n \in M : d(\varphi_T(x_n), x_n) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

onde $x_n \neq x_{n+1}$. Como M é compacto, podemos supor que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$. Portanto, $d(\varphi_T(x), x) = 0$, ou seja, $\varphi_T(x) = x$, contradizendo a escolha de T_0.

□

O próximo resultado nos fornece algumas maneiras equivalentes de determinar quando um fluxo que não possui pontos fixos tem a propriedade de expansividade.

Teorema 1.16. *[3] As seguintes afirmações são equivalentes para um fluxo φ sem pontos fixos,*

i) φ é expansivo.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que se $d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) < r$ para todo $t \in \mathbb{R}$ para alguns $x, y \in M$ e um homeomorfismo crescente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(0) = 0$, então $y = \varphi_t(x)$ para $|t| < \varepsilon$.

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que se $t = \{t_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ e $u = \{u_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ são sequências duplamente infinitas de números reais com $u_0 = t_0 = 0$, $0 < t_{i+1} - t_i \leq r$, $|u_{i+1} - u_i| \leq \alpha$, $t_i \to \infty$, $t_{-i} \to -\infty$ quando $i \to \infty$, e se $x, y \in M$ satisfaz $d(\varphi_{t_i}(x), \varphi_{u_i}(y)) \leq r$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ então $y = \varphi_t(x)$ para $|t| < \varepsilon$.

Demonstração. Naturalmente **ii)** implica **i)**, pois f é um homeomorfismo, logo, f é uma aplicação contínua.

Agora provaremos que **i**) implica **ii**). Pelo lema 1.15 temos que existe $T_0 > 0$ e para cada T com $0 < T < T_0$, existe $\gamma > 0$ tal que $d(\varphi_T(x), x) \geq \gamma$, para todo $x \in M$.

Afirmação: Para todo T com $0 < T < \frac{T_0}{3}$ existem $\delta_T > 0$ e τ_T tais que se $d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) < \delta_T$ para cada $t \in \mathbb{R}$, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua onde $f(0) = 0$, então $f(t + T) - f(t) \geq \tau_T$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

De fato, seja T tal que $0 < T < \frac{T_0}{3}$, pelo lema 1.15, temos que existe $\gamma_T > 0$ tal que para todo $x \in M$,

$$d(\varphi_T(x), x) \geq \gamma_T \tag{1.1}$$

Agora, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, pela desigualdade triangular, temos,

$$d(\varphi_t(x), \varphi_{t+T}(x)) \leq d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) + d(\varphi_{f(t)}(y), \varphi_{f(t+T)}(y)) + d(\varphi_{f(t+T)}(y), \varphi_{t+T}(x))$$

logo,

$$d(\varphi_{f(t)}(y), \varphi_{f(t+T)}(y)) \geq d(\varphi_t(x), \varphi_{t+T}(x)) - d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) - d(\varphi_{f(t+T)}(y), \varphi_{t+T}(x))$$

De onde, $d(\varphi_{f(t)}(y), \varphi_{f(t+T)}(y)) \geq \gamma_T - 2\delta_T > 0$, escolhendo $2\delta_T < \gamma_T$. Pela continuidade de φ existe $\tau_T > 0$ tal que se

$$d(\varphi_{f(t)}(y), \varphi_{f(t+T)}(y)) \geq \gamma_T - 2\delta_T$$

então $|f(t+T) - f(t)| \geq \tau_T$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como $f(0) = 0$, é suficiente mostrar que $f(T) > 0$, pois queremos que f seja uma aplicação crescente. Por absurdo, existe um número positivo $T < \dfrac{T_0}{3}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n, y_n \in M$ e uma aplicação contínua $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f_n(0) = 0$ de modo que $d(\varphi_t(x_n), \varphi_{f_n(t)}(y_n)) < \dfrac{1}{n}$, com $f_n(T) < 0$.

Pela compacidade de M podemos supor que $x_n \to x$ e que $y_n \to y_0$ quando $n \to \infty$, assim, $y_0 \to x$ quando $n \to \infty$, portanto, $y_n \to x$ quando $n \to \infty$.

Como $f_n(T) < 0$, consideramos duas situações,

a) Se $f_n(T) \geq -T$ para infinitos números naturais, e como $f_n(T) \in [-T, 0) \subset [-T, 0]$, temos que existe uma subsequência convergente $f_{n_i}(T) \to -L$, para algum L com $0 \leq L \leq T$. Logo,

$$d(\varphi_T(x), \varphi_{-L}(x)) = 0$$

quando $i \to \infty$, então $x = \varphi_{L+T}(x)$, o que é um absurdo, pois contradiz o fato de T_0 ser o menor período de φ.

b) Se $f_n(T) < -T$ para infinitos números naturais, pela continuidade de f_n, existem t_n com $0 \leq t_n \leq T$ tais que $f_n(t_n) = -T$. Tomando uma subsequência convergente $t_{n_i} \to t \in [0, T]$ quando $i \to \infty$, temos,

$$d(\varphi_t(x), \varphi_{-T}(x)) = 0,$$

logo, $x = \varphi_{T+t}(x)$, o que é um absurdo, pois contradiz o fato de T_0 ser o menor período de φ.

Assim, provamos a afirmação.

Agora, suponha que $d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) < \delta_T$ para $x, y \in M$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua e $f(0) = 0$, como na afirmação anterior. Defina uma aplicação $h_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $h_T(nT) = f(nT)$, com $n \in \mathbb{Z}$ e linear em cada intervalo $[nT, (n+1)T]$. Temos que h_T é um homeomorfismo crescente de $\mathbb{R}$.

Se $t \in [nT, (n+1)T]$ existe $t' \in [nT, (n+1)T]$ com $h_T(t) = f(t')$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(\varphi_t(x), \varphi_{h_T(t)}(y)) &= d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t')}(y)) \\ &\leq d(\varphi_t(x), \varphi_{t'}(x)) + d(\varphi_{t'}(x), \varphi_{f(t')}(y)) \\ &\leq \sup_{\substack{x \in M \\ u \in [0,T]}} \{d(x, \varphi_u(x))\} + d(\varphi_{t'}(x), \varphi_{f(t')}(y)) \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$, pelo item $ii)$ existe $r > 0$ e escolhendo $0 < T < \frac{T_0}{3}$ tal que,

$$\sup_{\substack{x \in M \\ u \in [0,T]}} \{d(x, \varphi_u(x))\} < \frac{r}{2}.$$

Tomemos $\delta = \min\left\{\delta_T, \dfrac{r}{2}\right\}$, se $d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então,

$$\begin{aligned} d(\varphi_t(x), \varphi_{h_T(t)}(y)) &= d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t')}(y)) \\ &\leq \sup_{\substack{x \in M \\ u \in [0,T]}} \{d(x, \varphi_u(x))\} + d(\varphi_{t'}(x), \varphi_{f(t')}(y)) \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r, \ \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e portanto, $y = \varphi_t(x)$ para $|t| < \varepsilon$, concluindo que $i)$ implica $ii)$.

Agora, **i)** implica **iii)**. Seja $\varepsilon > 0$, escolha $r > 0$ tal que

$$r + \sup_{\substack{z \in M \\ |u| \leq r}} \{d(z, \varphi_u(z))\} < \delta,$$

onde $\delta > 0$ corresponde ao $\varepsilon > 0$ dado pela definição 1.9.

Sejam $\{t_i\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{u_i\}_{-\infty}^{\infty}$ e $x, y \in M$ satisfazendo as hipóteses de $iii)$. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(t_i) = u_i$ e estenda linearmente sobre o intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in \mathbb{N}$. Se $t \in [t_i, t_{i+1})$, temos,

$$\begin{aligned} d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) &= d(\varphi_t(x), \varphi_{t_i}(x)) + d(\varphi_{t_i}(x), \varphi_{u_i}(y)) + d(\varphi_{u_i}(y), \varphi_{f(t)}(y)) \\ &\leq r + \sup_{\substack{z \in M \\ |u| \leq r}} \{d(z, \varphi_u(z))\} \\ &< \delta, \end{aligned}$$

portanto, $d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Pela expansividade de φ temos que $y = \varphi_t(x)$ para $|t| < \varepsilon$.

iii) implica **ii)**. Sejam $\varepsilon > 0$, e $r > 0$ correspondente ao item $iii)$. Suponha que para $x, y \in M$ temos $d(\varphi_t(x), \varphi_{h(t)}(y)) < r$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e para algum homeomorfismo crescente $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $h(0) = 0$. Tomando $t_0 = 0$ e escolhendo $t_i \in \mathbb{R}$ tal que $0 < t_{i+1} - t_i \leq r$ e $0 < h(t_{i+1}) - h(t_i) \leq r$. Definindo $u_i = h(t_i)$, pelo item $iii)$, temos que $y = \varphi_t(x)$, com $|t| < \varepsilon$. Completando a prova.

$\square$

1.3 Pseudo-Órbita e Sombreamento

A propriedade de sombreamento de pseudo-órbita é uma das propriedades mais importantes de um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo ou um fluxo. Essa propriedade foi introduzida inicialmente pelos trabalhos de Anosov e Bowen, na década de 70 e, seu primeiro e conhecido resultado é o Lema do Sombreamento, o qual é uma importante ferramenta no estudo de sistemas dinâmicos hiperbólicos, como por exemplo, para o estudo da estabilidade topológica. Por esse motivo, determinar quais sistemas possuem a propriedade de sombreamento é um importante problema em dinâmica.

A seguir, apresentaremos algumas definições e resultados importantes para fluxos com tal propriedade. Mais detalhes e aprofundamento podem ser encontrados em [15].

Definição 1.17. *Seja ε, t constantes positivas. Uma sequência $(t_i, x_i)_{-\infty}^{\infty}$ em $\mathbb{R} \times M$ é chamada de (t,ε)-**pseudo órbita** se $t_i \geq t$ e $d(\varphi_{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

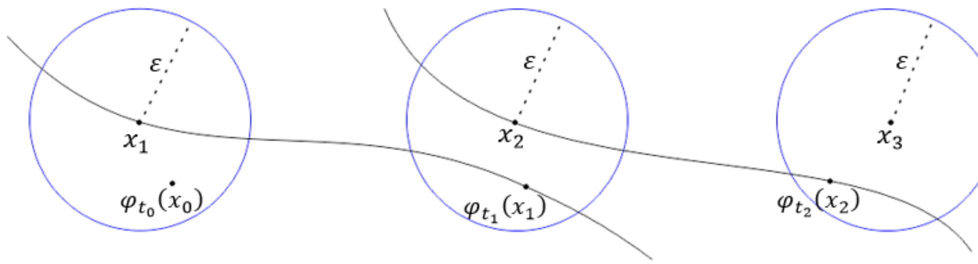

Figura 1.7: Representação de uma Pseudo-Órbita.

Definição 1.18. *Dizemos que uma (t,ε)-pseudo órbita $(t_i, x_i)_{-\infty}^{\infty}$ é δ-**sombreada** por uma órbita $(\varphi_s(z))_{s\in\mathbb{R}}$, se existir um homeomorfismo crescente $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo,*

i) $\alpha(0) = 0$,

ii) $d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - \sum_{0}^{n-1} t_i, x_n)) < \delta$ *quando* $s \geq 0$, $\sum_{0}^{n-1} t_i \leq s \leq \sum_{0}^{n} t_i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

iii) $d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s + \sum_{-n}^{-1} t_i, x_{-n})) < \delta$ *quando* $s \leq 0$, $-\sum_{-n}^{-1} t_i \leq s \leq -\sum_{-n+1}^{-1} t_i$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Definição 1.19. *Um fluxo φ tem a propriedade de **sombreamento de pseudo-órbita** com respeito ao tempo $t > 0$ se para qualquer $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que cada (t,ε)-pseudo órbita é δ-sombreada por uma órbita de φ.*

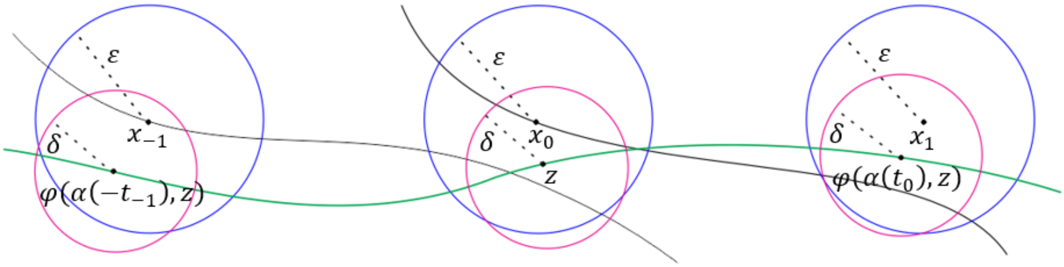

Figura 1.8: Pseudo-Órbita δ-sombreada.

As proposições a seguir nos fornece condições para um fluxo φ em M possuir a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita.

Proposição 1.20. *[15] Um fluxo φ em M tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita com respeito ao tempo $t > 0$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cada (t,ε)-pseudo órbita $(\lambda_n, x_n)_{-\infty}^{\infty}$ com $t \leq \lambda_n \leq 2t$ para $n \in \mathbb{Z}$ é δ-sombreada por uma órbita de φ.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se φ tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita com respeito ao tempo t, então cada (t,ε)-pseudo órbita $(\lambda_n, x_n)_{-\infty}^{\infty}$ é δ-sombreada por uma órbita de φ, seja $\lambda_n \geq 2t$ ou não.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, dado $\delta > 0$, escolha $\varepsilon > 0$, de tal forma que cada (t,ε)-pseudo órbita $(\lambda_n, x_n)_{-\infty}^{\infty}$ com $t \leq \lambda_n \leq 2t$ é δ-sombreada por uma órbita de φ.

Seja $(t_n, x_n)_{-\infty}^{\infty}$ uma (t,ε)-pseudo órbita qualquer de φ. Para cada t_n existe um número inteiro não negativo m_n tal que $t_n = t \cdot m_n + r_n$ com $t \leq r_n < 2t$.

Agora, construa uma sequência infinita de pontos em M da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\{&\ldots, x_{-3}, \varphi_t(x_{-3}), \varphi_{2t}(x_{-3}), \ldots, \varphi_{t\cdot m_{-3}}(x_{-3}), x_{-2}, \varphi_t(x_{-2}), \varphi_{2t}(x_{-2}), \ldots,\\ &\varphi_{t\cdot m_{-2}}(x_{-2}), x_{-1}, \varphi_t(x_{-1}), \varphi_{2t}(x_{-1}), \ldots, \varphi_{t\cdot m_{-1}}(x_{-1}), x_0, \varphi_t(x_0), \varphi_{2t}(x_0),\\ &\ldots, \varphi_{t\cdot m_0}(x_0), x_1, \varphi_t(x_1), \varphi_{2t}(x_1), \ldots, \varphi_{t\cdot m_1}(x_1), x_2, \varphi_t(x_2), \varphi_{2t}(x_2), \ldots,\\ &\varphi_{t\cdot m_2}(x_2), x_3, \varphi_t(x_3), \varphi_{2t}(x_3), \ldots, \varphi_{t\cdot m_3}(x_3), \ldots\}\end{aligned}$$

Isto é, podemos tomar uma sequência infinita $\{y_i\}_{-\infty}^{\infty}$ de pontos em M de modo que

$$y_i = \varphi(it + \sum_{j=-p}^{-1} t\cdot m_j + pt, x_{-p}), \text{ para } -\sum_{j=-p}^{-1} m_j - p \leq i \leq -\sum_{j=-p+1}^{-1} m_j - p,$$

$p = 1, 2, 3, \ldots,$

$$y_i = \varphi(it - \sum_{j=0}^{p-1} t\cdot m_j - pt, x_p), \text{ para } \sum_{j=0}^{p-1} m_j + p \leq i \leq \sum_{j=0}^{p} m_j + p,\ p = 0, 1, 2, \ldots,$$

Agora defina uma sequência $\{\lambda_i\}_{-\infty}^{\infty}$ de números reais da seguinte maneira,

$$\lambda_i = \begin{cases} t, & \text{para } -\sum_{j=-p}^{-1} m_j - p \leq i < -\sum_{j=-p+1}^{-1} m_j - p \\ r_{-p}, & \text{para } i = -\sum_{j=-p+1}^{-1} m_j - p,\ p = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

$$\lambda_i = \begin{cases} t, & \text{para } \sum_{j=0}^{p-1} m_j + p \leq i < \sum_{j=0}^{p} m_j + p \\ r_p, & \text{para } i = \sum_{j=0}^{p} m_j + p,\ p = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

que se correspondem com sequência $\{y_i\}_{-\infty}^{\infty}$.

Para $i \geq 0$ inicialmente assuma que $\sum_{j=0}^{p-1} m_j + p \leq i < \sum_{j=0}^{p} m_j + p$, então,

$$\begin{aligned} & d(\varphi(\lambda_i, y_i), y_{i+1}) \\ & = d(\varphi(t, \varphi(i \cdot t - \sum_{j=0}^{p-1} t \cdot m_j - pt, x_p)), \varphi((i+1) \cdot t - \sum_{j=0}^{p-1} t \cdot m_j - pt, x_p)) = 0. \end{aligned}$$

Para $i = \sum_{j=0}^{p} m_j + p$ temos

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \varphi((i+1)t - \sum_{j=0}^{p-1} t \cdot m_j - pt, x_p) \\ &= \varphi(\sum_{j=0}^{p} t \cdot m_j + pt + t - \sum_{j=0}^{p-1} t \cdot m_j - pt, x_p) \\ &= \varphi(t \cdot m_p + t, x_p) = \varphi_t(\varphi(t \cdot m_p, x_p)) = x_{p+1} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\lambda_i, y_i), y_{i+1}) &= d(\varphi(r_p, \varphi(\sum_{j=0}^{p} t \cdot m_j + pt + t - \sum_{j=0}^{p-1} t \cdot m_j - pt, x_p), x_{p+1}) \\ &= d(\varphi(r_p, \varphi(t \cdot m_p, x_p)), x_{p+1}) \\ &= d(\varphi(r_p + t \cdot m_p, x_p), x_{p+1}) \\ &= d(\varphi(t_p, x_p), x_{p+1}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

pois $(t_p, x_p)_{-\infty}^{\infty}$ uma (t, ε)-pseudo órbita.

Agora, para $i \leq -1$. Assuma que $-\sum_{-p}^{-1} m_j - p \leq i \leq -\sum_{-p+1}^{-1} m_j - p$, então,

$$d(\varphi(\lambda_i, y_i), y_{i+1})$$
$$= d(\varphi(t, \varphi(i \cdot t + \sum_{j=-p}^{-1} t \cdot m_j + pt, x_{-p})), \varphi((i+1) \cdot t + \sum_{j=-p}^{-1} t \cdot m_j + pt, x_{-p})) = 0.$$

E para $i = -\sum_{-p+1}^{-1} m_j - p$ temos

$$\begin{aligned} d(\varphi(\lambda_i, y_i), y_{i+1}) &= d(\varphi(r_{-p}, \varphi(-\sum_{j=-p+1}^{-1} t \cdot m_j - pt + \sum_{-p}^{-1} t \cdot m_j + pt, x_{-p})), x_{-p+1}) \\ &= d(\varphi(r_{-p}, \varphi(t \cdot m_{-p}, x_{-p})), x_{-p+1}) \\ &= d(\varphi(t_{-p}, x_{-p}), x_{-p+1}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Então, o par de sequências $(\lambda_i, y_i)_{-\infty}^{\infty}$ é (t, ε)-pseudo órbita para φ com $t \leq \lambda_i < 2t$.

Usando a hipótese da proposição, há um ponto $z \in X$ e um homeomorfismo $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha(0) = 0$ de tal modo que

$$d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - \sum_{0}^{n-1} \lambda_i, y_n)) < \delta, \text{ para } s \geq 0, \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \leq s < \sum_{0}^{n} \lambda_i,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s + \sum_{-n}^{-1} \lambda_i, y_n)) < \delta \text{ para } s < 0, \sum_{-n}^{-1} \lambda_i \leq s < -\sum_{-n+1}^{-1} \lambda_i,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Agora, podemos mostrar que a sequência $(t_n, x_n)_{-\infty}^{\infty}$ é δ-sombreada pela órbita $(\varphi_s(z))_{s \in \mathbb{R}}$.

Suponha que $i \cdot t \leq s < (i+1)t$. Observe que para $p = 0$ temos $y_i = \varphi(i \cdot t, x_0)$, e $0 \leq i \leq m_0$, além disso, para $i = m_0$ temos $\lambda_i = r_0$. Tome $0 \leq s < t_0$, assim,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s, x_0)) &= d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - i \cdot t, \varphi(i \cdot t, x_0)) \\ &= d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j, y_i)) \\ &< \delta, \end{aligned}$$

Assumindo $j \cdot t \leq t - \sum_{0}^{m_0} \lambda_i < j \cdot (t+1)$, $j \leq m_1$, observe que,

$$\sum_{0}^{m_0} \lambda_i + \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_{m_0+k+1} = \sum_{0}^{m_0+j} \lambda_i.$$

Para $t_0 \leq s < t_0 + t_1$, e $p = 1$, temos,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - t_0, x_1)) &= d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - t_0 - j \cdot t, \varphi(j \cdot t, x_1)) \\ &= d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - (\sum_{i=0}^{m_0} \lambda_i + \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_{m_0+k+1}), y_{m_0+j+1})) \\ &= d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - \sum_{i=0}^{m_0+j} \lambda_i, y_{m_0+j+1})) < \delta. \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma teremos, $d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - \sum_{0}^{k-1} t_i, x_k)) < \delta$ para $s \geq 0$, $\sum_{0}^{k-1} t_i \leq s < \sum_{0}^{k} t_i$, todo $k \geq 0$.

De maneira análoga, para $s \leq 0$, $d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s + \sum_{-k}^{-1} t_i, x_{-k})) < \delta$ para $-\sum_{-k}^{-1} t_i \leq s < -\sum_{-k+1}^{-1} t_i$, todo $k \geq 1$.

Portanto, $(t_n, x_n)_{-\infty}^{\infty}$ é δ-sombreada pela órbita $(\varphi_s(z))_{s \in \mathbb{R}}$. Assim, φ tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita com respeito ao tempo $t > 0$.

□

Proposição 1.21. *[15] O fluxo φ em M tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita com respeito ao tempo* $t = 1$ *se, e somente se, φ tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Se φ tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita então claramente φ tem a propriedade de sombreamento em relação a $t = 1$.

($\Rightarrow$) Reciprocamente, assumindo que φ tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita com respeito ao tempo $t = 1$, podemos dividir em dois casos, quando $t > 1$ e quando $t < 1$. No caso de $t > 1$, seja $m \geq t$ um número natural. Dado $\delta > 0$, escolha $\varepsilon > 0$ tal que,

i) Toda (t, ε)-pseudo órbita é $\delta/2$-sombreada por uma órbita de φ,

ii) $d(x, y) < \varepsilon$ então $d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \delta/2$ para $0 \leq s \leq 2m$.

Seja $\varepsilon_1 < \varepsilon/m$ e escolha $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ de modo que se $d(x,y) < \varepsilon_2$ então $d(\varphi_s(x), \varphi_s(y)) < \varepsilon_1$, para $0 \leq s \leq 2m$.

Seja $(t_n, x_n)_{-\infty}^{\infty}$ uma $(1, \varepsilon_2)$-pseudo órbita de φ com $t \leq t_n \leq 2t$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Tome o par de sequências

$$(\{\ldots, x_{-2m}, x_{-m}, x_0, x_m, x_{2m}, \ldots\}, \{\ldots, \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}),$$

denote $z_i = x_{i\cdot m}$ e $\lambda_i = \sum_{j=0}^{m-1} t_{(j+i\cdot m)}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned}
d(\varphi(\lambda_i, z_i), z_{i+1}) &= d(\varphi(\sum_{j=0}^{m-1} t_{(j+i\cdot m)}, x_{i\cdot m}), x_{(i+1)m}) \\
&\leq d(\varphi(\sum_{j=1}^{m-1} t_{(j+i\cdot m)} + t_{i\cdot m}, x_{i\cdot m}), \varphi((\sum_{j=1}^{m-1} t_{(j+i\cdot m)}, x_{i\cdot m+1})) \\
&+ d(\varphi(\sum_{j=2}^{m-1} t_{(j+i\cdot m)} + t_{i\cdot m+1}, x_{i\cdot m+1}), \varphi((\sum_{j=2}^{m-1} t_{(j+i\cdot m)}, x_{i\cdot m+2})) + \ldots + \\
&+ d(\varphi(t_{(i+1)\cdot m-1}, x_{(i+1)\cdot m-1}, x_{(i+1\cdot m)})) < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_1 = m\varepsilon_1 \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

pois $t \leq \lambda_i \leq 2m$. Portanto $(\lambda_i, z_i)_{-\infty}^{\infty}$ é uma (t, ε)-pseudo órbita de φ. Assim, por hipótese, existe $z \in M$ e um homeomorfismo $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha(0) = 0$ de tal modo que

$$\begin{aligned}
&d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - \sum_{0}^{n-1} \lambda_i, z_n)) < \delta/2 \text{ para } s \geq 0, \sum_{0}^{n-1} \lambda_i \leq s < \sum_{0}^{n} \lambda_i, \\
&n = 0, 1, \ldots, \\
&d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s + \sum_{-n}^{-1} \lambda_i, z_{-n})) < \delta/2 \text{ para } s \leq 0, -\sum_{-n}^{-1} \lambda_i \leq s < -\sum_{-n+1}^{-1} \lambda_i, \\
&n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Para $0 \leq k \leq m$, temos,

$$\begin{aligned}
d(\varphi(\sum_{0}^{k-1} t_i, x_0), x_k) &\leq d(\varphi(\sum_{1}^{k-1} t_i, \varphi(t_0, x_0)), \varphi(\sum_{1}^{k-1} t_i, x_1)) \\
&+ d(\varphi(\sum_{2}^{k-1} t_i, \varphi(t_1, x_1)), \varphi(\sum_{2}^{k-1} t_i, x_2)) \\
&+ \ldots + d(\varphi(t_{k-1}, x_{k-1}), x_k)) \\
&< k \cdot \varepsilon_1 < \varepsilon,
\end{aligned}$$

pois $\sum_0^{k-1} t_i \leq 2m$. Assim,

$$d(\varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i + \sum_0^{k-1} t_i, x_0), \varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i, x_k)) < \delta/2$$

para $\sum_0^{k-1} t_i \leq s \leq \sum_0^k t_i$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i, x_k)) &\leq d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s, z_0)) + d(\varphi(s, z_0), \varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i, x_k)) \\ &< \delta \end{aligned}$$

Agora, para $m < k \leq 2m$, temos,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\sum_{i=m}^{k-1} t_i, x_m), x_k) &\leq d(\varphi(\sum_{m+1}^{k-1} t_i \varphi(t_m, x_m)), \varphi(\sum_{m+1}^{k-1} t_i, x_{m+1})) \\ &+ d(\varphi(\sum_{i=m}^{k-1} t_i \varphi(t_{m+1}, x_{m+1}), \varphi(\sum_{m+2}^{k-1} t_i, x_{m+2})) \\ &+ \ldots + d(\varphi(t_{k-1}, x_{k-1}), x_k) \\ &< (k-m)\varepsilon_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Agora, para $\sum_0^{k-1} t_i \leq s < \sum_0^{k} t_i$, temos que $s - \sum_0^{k-1} t_i$ está no intervalo fechado $[0, 2m]$. Assim,

$$d(\varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i, \varphi(\sum_{i=m}^{k-1} t_i, x_m)), \varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i, x_k)) < \delta/2$$

Portanto,

$$d(\varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i, x_m), \varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i, x_k)) = d(\varphi(s - \lambda_0, z_1), \varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i, x_k)) < \delta/2$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\alpha(s), z), \varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i, x_k)) &\leq d(\varphi(\alpha(s), z), \lambda_0, z_1)) \\ &+ d(\varphi(s - \lambda_0, z_1), \varphi(s - \sum_0^{k-1} t_i, x_k)) \\ &< \delta \end{aligned}$$

Prosseguindo da mesma forma, teremos que a órbita $(\varphi_s(z))_{s\in\mathbb{R}}$ δ-sombreia a (t, ε)-pseudo órbita $(t_n, x_n)_{-\infty}^{\infty}$.

De maneira análoga para o caso quando $0 < t < 1$. A utilização da proposição 1.20 implica que φ tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita.

$\square$

Lema 1.22. *[15] Seja $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma família de funções contínuas crescentes de $[0,t]$ em $\mathbb{R}$ com $\alpha_j(0) = 0$ para todo j e assuma que $\alpha_j(t) \to \infty$ quando $j \to \infty$. Então para cada $\lambda, \beta > 0$ existem j e $t_1, t_2 \in [0,t]$ com $t_1 < t_2$ tal que $t_2 - t_1 < \lambda$ e $\alpha_j(t_2) - \alpha_j(t_1) = \beta$.*

Demonstração. Seja $\{0 = s_0, s_1, \ldots, s_n = t\}$ uma partição de $[0,t]$, com $s_{k+1} - s_k < \lambda$ para $0 \leq k \leq n-1$.

Para cada j assuma que $\alpha_j(s_{k+1}) - \alpha_j(s_k) < \beta$. Então, $\alpha_j(s_n) - \alpha_j(s_0) < n\beta$ para todo j. Mas $\alpha_(s_n) - \alpha_j(s_0) = \alpha_j(t) \to \infty$, o que é uma contradição.

Portanto, existe um número inteiro positivo N tal que para cada $j \geq N$, existem s_k, $s_{k+1} \in [0,t]$ de modo que $\alpha_j(s_{k+1}) - \alpha_j(s_k) \geq \beta$. Pela continuidade de α_j se tomarmos $t_2 = s_{k+1}$ podemos escolher $t_1 \in [s_k, s_{k+1}]$ tal que

$$\alpha_j(t_2) - \alpha_j(t_1) = \beta$$

.

$\square$

Capítulo 2

Estabilidade Topológica para Fluxos

Neste capítulo, nosso objetivo é introduzir o conceito de **Estabilidade Topológica** para fluxos e provar o teorema principal deste trabalho, cujo enunciado é dado a seguir.

Teorema 1. *Todo fluxo hiperbólico φ em M é topologicamente estável.*

Para provar o Teorema 1 provaremos que a expansividade e a propriedade de sombreamento são condições suficientes para garantir estabilidade topológica. Ou seja, é suficiente provar os seguintes resultados,

Teorema 2. *Todo fluxo hiperbólico φ em M é expansivo.*

Teorema 3. *Todo fluxo hiperbólico φ em M tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita.*

Teorema 4. *Todo fluxo expansivo φ contínuo sem pontos fixos e que tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita em M é topologicamente estável.*

2.1 Fluxos Topologicamente Estáveis

Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos fluxos definidos em M. Para os fluxos $\varphi_t, \psi_t \in \mathfrak{X}(M)$, definimos uma métrica em $\mathfrak{X}(M)$ por

$$d^*(\varphi_t, \psi_t) = \sup_{\substack{x \in M \\ t \in \mathbb{R}}} \{d(\varphi_t(x), \psi_t(x))\}.$$

Isto define uma topologia em $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.1. *A vizinhança de um fluxo φ é dada pelo conjunto*

$$\mathcal{V}_\varepsilon(\varphi) = \{\psi : d^*(\varphi_t, \psi_t) < \varepsilon\}.$$

Definição 2.2. *Dizemos que um fluxo φ em M é* ***topologicamente estável*** *se para qualquer $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ de modo que para qualquer outro fluxo ψ na vizinhança $\mathcal{V}_\varepsilon(\varphi)$, para todo $t \in [0,1]$, existe uma aplicação contínua $h : M \to M$ tal que*

i) $d(h, id) < \delta$,

ii) $h(\mathcal{O}(\psi_t)) \subseteq \mathcal{O}(\varphi_t)$,

onde $id : M \to M$ é o homeomorfismo identidade.

Ou seja, um fluxo φ é dito topologicamente estável se todo $\psi \in \mathcal{V}_\varepsilon(\varphi)$ possui a mesma dinâmica, e isso é consequência dos fluxos serem semi-conjugados pela aplicação h.

2.2 Lemas Auxiliares

A seguir, apresentaremos dois lemas necessários na demonstração dos teoremas 2 e 3.

Lema 2.3. *Seja φ um fluxo hiperbólico em M. Se, para qualquer $\varepsilon < \varepsilon_0$, existe uma contante $\delta > 0$ com $d(x,y) < \delta$, então,*

(i) $|v(x,y)| \leq \varepsilon$,

(ii) $W^s_\varepsilon(\varphi_{v(x,y)}(x)) \cap W^u_\varepsilon(y) = \{[x,y]\}$.

Demonstração. Seja φ um fluxo hiperbólico em M. Como, $W^s_{\varepsilon_0}(x) \cap W^u_{\varepsilon_0}(x) = \{x\}$, pela hiperbolicidade do fluxo, segue que $[x,x] = x$ e $v(x,x) = 0$.

Seja $\varepsilon < \varepsilon_0$. Pela continuidade uniforme das aplicações v e $[\,,\,]$, existe $0 < \delta < \delta_0$ tal que se $d(x,y) < \delta$, então,

$$d([x,x],[x,y]) = d(x,[x,y]) \leq \frac{\varepsilon}{2c}, \quad d([y,y],[x,y]) = d(y,[x,y]) \leq \frac{\varepsilon}{2c}$$

e $|v(x,y) - v(x,x)| = |v(x,y)| \leq \varepsilon$. Assim, tomando $d(\varphi_{v(x,y)}(x), \varphi_{v(x,x)}(x)) \leq \dfrac{\varepsilon}{2c}$, temos,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{v(x,y)}(x),[x,y]) &\leq d(\varphi_{v(x,y)}(x), x) + d(x,[x,y]) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{c} \end{aligned}$$

Como $[x,y] \in W^s_{\varepsilon_0}(\varphi_{v(x,y)}(x))$, para $t \geq 0$, temos,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{v(x,y)+t}(x), \varphi_t([x,y]) &\leq ce^{-rt} d(\varphi_{v(x,y)}(x),[x,y]) \\ &\leq ce^{-rt}\frac{\varepsilon}{c} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Então, $[x,y] \in W^s_\varepsilon(\varphi_{v(x,y)}(x))$.

Para $[x,y] \in W^u_{\varepsilon_0}(y)$, com $t \geq 0$, temos,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{-t}(y), \varphi_{-t}([x,y]) &\leq ce^{-rt} d(y,[x,y]) \\ &\leq ce^{-rt}\frac{\varepsilon}{c} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Então, $[x,y] \in W^u_\varepsilon(y)$.

Assim, $[x,y] \in W^s_\varepsilon(\varphi_{v(x,y)}(x)) \cap W^u_\varepsilon(y)$, e como φ é hiperbólico, essa intersecção é única.

$\square$

Lema 2.4. *Seja φ um fluxo hiperbólico em M e $\varepsilon > 0$ uma constante. Suponha que exista uma constante $\delta > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$d(\varphi_t(x), \varphi_{t+f(t)}(y)) \leq \delta,$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua com $f(0) = 0$. Então,

(i) $|v(x,y)| \leq \varepsilon$,

(ii) $y = \varphi_{v(x,y)}(x)$.

Demonstração. Seja φ um fluxo hiperbólico em M. Podemos escolher $\varepsilon > 0$ tão pequeno tal que

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{8}, \frac{\varepsilon_0}{2c}\right\}$$

e $\max\{d(x,\varphi_t(x)) : x \in M, |t| \leq 4\varepsilon\} \leq \dfrac{\varepsilon_0}{8}$.

Pelo Lema 2.3, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,y) \leq \delta$, então, $|v(x,y)| \leq \varepsilon$ e $W^s_\varepsilon(\varphi_{v(x,y)}(x)) \cap W^u_\varepsilon(y) = \{[x,y]\}$.

Para $t = 0$ temos $d(\varphi_0(x), \varphi_{0+f(0)}(y)) = d(x,y) \leq \delta$, assim concluímos o item (i).

Seja $v = v(x,y)$ e $z = [x,y]$. Agora, consideremos os conjuntos

$$U = \left\{t \in \mathbb{R}^+ : |f(t)| \geq 3\varepsilon \text{ ou } d(\varphi_t(y), \varphi_t(z) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\right\}$$

$$V = \left\{t \in \mathbb{R}^- : |f(t)| \geq 3\varepsilon \text{ ou } d(\varphi_{v+t}(x), \varphi_t(z)) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\right\}.$$

Suponha que $U \neq \emptyset$. Seja $s = \min U \in U$. Como $0 \notin U$ segue que $s > 0$, pois $|f(0)| < 3\varepsilon$ e $d(y,z) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ já que $z \in W^u_\varepsilon(y)$.

Afirmação: $d(\varphi_{s-t}(y), \varphi_{s-t}(z)) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ para todo $t \geq 0$.

De fato, se $0 < t \leq s$, então

$$d(\varphi_{s-t}(y), \varphi_{s-t}(z)) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

pois $0 \leq s-t < s$ e então $s-t \notin U$. Assim temos que se $t \to 0$, então,

$$d(\varphi_s(y), \varphi_s(z)) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Se $0 < s < t$, então

$$\begin{aligned} d(\varphi_{s-t}(y), \varphi_{s-t}(z)) &\leq ce^{r(s-t)} d(y,z) \\ &\leq ce^{r(s-t)} \frac{\varepsilon}{2} \\ &< ce^{r(s-t)} \frac{\varepsilon_0}{2c} < \frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned}$$

Usando a continuidade de f, temos,

$$|f(s)| \leq |f(s) - f(0)| + |f(0)| \leq \varepsilon + 3\varepsilon = 4\varepsilon.$$

Assim, para todo $t \geq 0$, temos,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{s+f(s)-t}(y), \varphi_{s+f(s)-t}(z)) &\leq d(\varphi_{s+f(s)-t}(y), \varphi_{s-t}(y) + d(\varphi_{s-t}(y), \varphi_{s-t}(z)) \\ &+ d(\varphi_{s-t}(z), \varphi_{s+f(s)-t}(z)) \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{8} + \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{8} < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

De onde, $\varphi_{s+f(s)}(z) \in W^u_{\varepsilon_0}(\varphi_{s+f(s)}(y))$.

Além disso, $\varphi_{s+f(s)}(z) \in W^s_{\varepsilon_0}(\varphi_{s+f(s)+v}(x))$ para todo $t \geq 0$, pois,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{s+f(s)+v+t}(x), \varphi_{s+f(s)+t}(z)) &\leq d(\varphi_{s+f(s)+v+t}(x), \varphi_{s+v+t}(x) + d(\varphi_{s+v+t}(x), \varphi_{s+t}(z)) \\ &+ d(\varphi_{s+t}(z), \varphi_{s+f(s)+t}(z)) \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{8} + \frac{\varepsilon_0}{8} + \frac{\varepsilon_0}{8} < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi_{s+f(s)}(z) \in W^s_{\varepsilon_0}(\varphi_{f(s)+v}(\varphi_s(x)) \cap W^u_{\varepsilon_0}(\varphi_{s+f(s)}(y))$.

Como $|f(s)+v| \leq |f(s)| + |v| \leq 4\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon$ e $d(\varphi_s(x), \varphi_{s+f(s)}(y)) \leq \delta$, temos pelo item (i),

$$|v(\varphi_s(x), \varphi_{s+f(s}(y))| = |f(s) + v(x,y)| < \varepsilon$$

e $[\varphi_s(x), \varphi_{s+f(s)}(y)] = \varphi_{s+f(s)}(z)$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} d(\varphi_s(y),\varphi_s(z)) &\le d(\varphi_s(y),\varphi_{s+f(s)}(y)) + d(\varphi_{s+f(s)}(y),\varphi_{s+f(s)}(z)) \\ &+ d(\varphi_{s+f(s)}(z),\varphi_s(z)) \\ &\le \frac{\varepsilon_0}{8} + \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{8} < \frac{3\varepsilon_0}{8} \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned}$$

pois $d(\varphi_{s+f(s)}(y),\varphi_{s+f(s)}(z)) \le \varepsilon$ e $|f(s)| < |f(s)+v| + |v| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

Isso contradiz o fato que $s \in U$. Portanto, $U = \emptyset$. De maneira análoga, obtemos $V = \emptyset$.

Como $U = \emptyset$, seja $A > 0$ um número qualquer e $t \le 0$. Quando $t \ge -A$, temos

$$d(\varphi_{A+t}(y),\varphi_{A+t}(z)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

E para $t \le -A$

$$\begin{aligned} d(\varphi_{A+t}(y),\varphi_{A+t}(z)) &\le ce^{r(A+t)} d(\varphi_A(y),\varphi_A(z)) \\ &< ce^{r(A+t)} \frac{\varepsilon_0}{2c} \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned}$$

Portanto $\varphi_A(z) \in W^u_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(\varphi_A(y))$. Assim, segue que,

$$\begin{aligned} d(y,z) &= d(\varphi_A(\varphi_{-A}(y)),\varphi_A(\varphi_{-A}(z))) \\ &\le ce^{-rA} d(\varphi_A(y),\varphi_A(z)) \\ &\le \frac{c\varepsilon_0 e^{-rA}}{2}. \end{aligned}$$

Como $V = \emptyset$, para todo $t \ge 0$, quando $t \le A$ temos,

$$d(\varphi_{v-A+t}(x),\varphi_{-A+t}(z)) < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

e quando $t \ge A$

$$\begin{aligned} d(\varphi_{v-A+t}(x),\varphi_{-A+t}(z)) &\le ce^{r(A-t)} d(\varphi_v(x),z) \\ &\le ce^{r(A-t)} \frac{\varepsilon_0}{2c} \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi_{-A}(z) \in W^s_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(\varphi_{v-A}(x))$. Assim, segue que,

$$\begin{aligned} d(\varphi_v(x), z) &= d(\varphi_A(\varphi_{v-A}(x)), \varphi_A(\varphi_{-A}(z)) \\ &\leq ce^{-rA} d(\varphi_{v-A}(x), \varphi_{-A}(z)) \\ &\leq \frac{ce^{-rA}\varepsilon_0}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} d(\varphi_v(x), y) &\leq d(\varphi_v(x), z) + d(z, y) \\ &\leq \frac{ce^{-rA}\varepsilon_0}{2} + \frac{ce^{-rA}\varepsilon_0}{2} \\ &\leq ce^{-rA}\varepsilon_0 \end{aligned}$$

e portanto, $d(\varphi_v(x), y) = 0$ quando $A \to \infty$. Isto completa a prova.

□

2.3 Prova do Teorema Principal

A seguir, apresentamos três resultados fundamentais na demonstração do teorema principal e que nos fornecem propriedades importantes dos fluxos hiperbólicos.

Teorema 2. *Todo fluxo hiperbólico φ em M é expansivo.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ uma contante qualquer, pelo lema 2.4, podemos escolher uma constante $\delta > 0$. Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(t) = f(t) - t$. Assim temos $g(0) = 0$ e

$$d(\varphi_t(x), \varphi_{t+g(t)}(y)) = d(\varphi_t(x), \varphi_{f(t)}(y)) < \delta.$$

Além disso, pelo Lema 2.4, temos $y = \varphi_{v(x,y)}(x)$ onde $|v(x, y)| \leq \varepsilon$. Portanto, φ é expansivo.

□

No próximo teorema assumiremos a seguinte notação,

$$\begin{cases} T(-m) &= \displaystyle\sum_{-m}^{-1} t_i \\ \\ T(n) &= \displaystyle\sum_{0}^{n} t_i \end{cases}$$

E para cada $x_0 \in M$ e $s \in \mathbb{R}$ com $-T(-m) \leq s \leq T(n)$, definiremos

$$\varphi_t(x_0) = \begin{cases} \varphi(s+T(-m), x_{-j}), \text{ para } -T(-m) \leq s \leq -T(-m+1), \\ \varphi(s-T(n-1), x_n), \text{ para } T(n-1) \leq s \leq T(n), \\ \varphi(t_n, x_n), \text{ para } s = T(n) \end{cases}$$

Teorema 3. *Todo fluxo hiperbólico φ em M tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita.*

Demonstração. Seja φ um fluxo hiperbólico em M. Pela continuidade de φ, para $\varepsilon_0 = \varepsilon/3$, existe $p > 0$, tal que

$$d(\varphi_t(x), \varphi_0(x)) = d(\varphi_t(x), x) < \varepsilon/3$$

para $|t| < p$, para todo $x \in M$.

Seja $z = [x, y]$ e $v = v(x, y)$. Pela hiperbolicidade de φ, temos,

$$W^s_{\varepsilon_0}(\varphi_v(x)) \cap W^u_{\varepsilon_0}(y) = \{z\}.$$

Tome $\varepsilon_0 < p/4$ e $\delta < q_1/2$. Pelo lema 2.4, existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$d(\varphi_t(x), \varphi_{t+h(t)}(y))) \leq \delta < q_1/2$$

onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua com $h(0) = 0$, então, $|v(x, y)| \leq \varepsilon_0 < p/4$. Assim,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{f(t)}(x), \varphi_{g(t)}(y)) &\leq d(\varphi_{f(t)}(x), \varphi_t(x)) + d(\varphi_t(x), \varphi_{g(t)}(y)) \\ &< q_1 \end{aligned}$$

para todo $A \leq t \leq B$, onde $A < 0 < B$, e aplicações contínuas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(0) = g(0) = 0$. Como,

$$W^s_{\varepsilon_0}(\varphi(v + t + g(t) - f(t), x)) \cap W^u_{\varepsilon_0}(\varphi(t + g(t) - f(t), y)) = \varphi(t + g(t) - f(t), z))$$

e tomando $g(t) - f(t) = h(t)$, temos $d(\varphi_t(x), \varphi_{t+h(t)}(y)) \leq \delta$, então,

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| = |f(t) - g(t) + v - v| &\leq |f(t) - g(t) + v| + |v| \\ &= |v(\varphi(t, x), \varphi(t + g(t) - f(t), y))| + |v| \\ &\leq 2\varepsilon_0 < p/2 \end{aligned}$$

Tome $q = \min\{q_1/2, \varepsilon_3\}$. Para $b > 0$, seja $(s_i, z_i)^n_{i=-m}$ uma $(1, b)$-pseudo-órbita qualquer de φ, com $0 \leq m, n < \infty$. Pelas considerações anteriores, existe uma aplicação crescente contínua $g : [-S(-m), S(0)] \to \mathbb{R}$ e um ponto $z \in M$, tal que $g(0) = 0$, e

$$d(\varphi_{g(t)}(z), \varphi_t(z_0)) < q \leq \varepsilon/3 < \varepsilon$$

para todo $t \in [-S(-m), S(n)]$.

Tome $x_j = z_{j-m}$ e $t_j = s_{j-m}$ para $j \in \mathbb{Z}$. Seja $(t_j, x_j)^{\infty}_{-\infty}$ uma $(1, b)$-pseudo órbita qualquer de φ. Considere $n_1 = 1$ e tome $n_{k+1} > n_k$. Temos que $(t_j, x_j)_{-n_k}^{n_k}$ é também uma $(1, b)$-pseudo órbita de φ, então existem $y_k \in M$ e funções monótonas crescentes contínuas $g_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}$, com $g_k(0) = 0$, tal que

$$d(\varphi_{g_k(t)}(y_k), \varphi_t(x_0)) < q$$

onde $a_k = -T(-n_k)$ e $b_k = T(n_k)$. Como M é compacto, podemos assumir que $y_k \to x$ quando $k \to \infty$.

Como

$$\begin{aligned} d(\varphi_{g_k(t)}(y_k), \varphi_{g_{k+1}(t)}(y_{k+1})) &\leq d(\varphi_{g_k(t)}(y_k), \varphi_t(x_0) + d(\varphi_t(x_0)), \varphi_{g_{k+1}(t)}(y_{k+1})) \\ &< 2q \end{aligned}$$

para todo $t \in [a_k, b_k] \subset [a_{k+1}, b_{k+1}]$, assim, $|g_k(t) - g_{k+1}(t)| < p/2$. Portanto, $|g_k(a_k) - g_{k+1}(a_k)| < p/2$ e $|g_k(b_k) - g_{k+1}(b_k)| < p/2$.

Considerando que g_k é uma sequência crescente de funções em $\mathbb{R}^+$, ou seja, $g_{k+1}(t) > g_k(t)$ para $t \in \mathbb{R}^+$. E uma sequência decrescente em $\mathbb{R}^-$, ou seja, $g_{k+1}(t) < g_k(t)$ para $t \in \mathbb{R}^-$. Então, $g_{k+1}(a_{k+1}) < g_k(a_k)$ e $g_k(b_k) < g_{k+1}(b_{k+1})$. Assim, existem funções monótonas crescentes contínuas $f_k^- : [a_{k+1}, a_k] \to \mathbb{R}$ e $f_k^+ : [b_k, b_{k+1}] \to \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\begin{cases} f_k^-(a_{k+1}) = g_{k+1}(a_{k+1}), f_k^-(a_k) = g_k(a_k), \\ f_k^+(b_k) = g_k(b_k), f_k^+(b_{k+1}) = g_{k+1}(b_{k+1}), \\ |f_k^-(t) - g_{k+1}(t)| < p/2, a_{k+1} \leq t \leq a_k, \\ |f_k^+(t) - g_{k+1}(t)| < p/2, b_k \leq t \leq b_{k+1}. \end{cases}$$

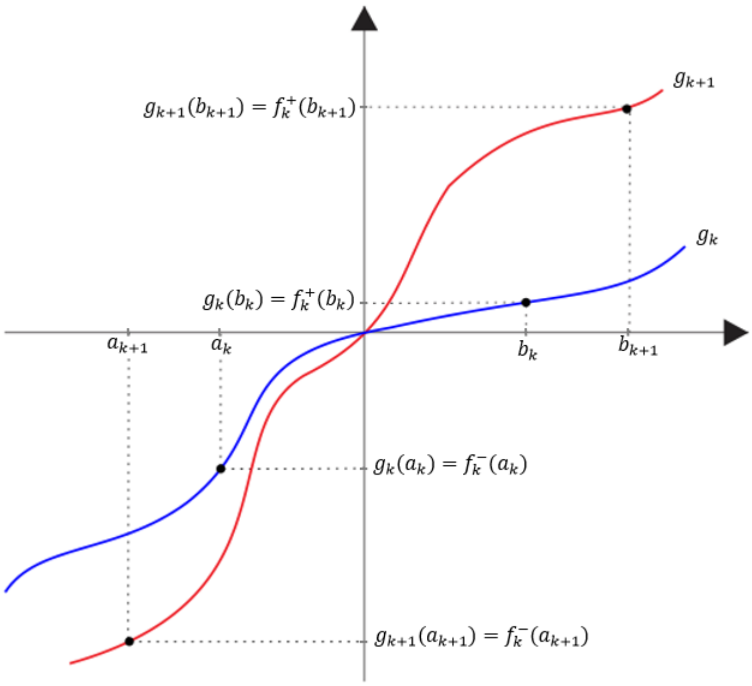

Figura 2.1: Representação das funções g_k e g_{k+1}.

Definindo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$f = g_1 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (f_k^- \cup f_k^+) \right),$$

temos $f(0) = 0$ e f monótona crescente e contínua.

Para qualquer $t \in \mathbb{R}$, existe $i > k+1$ tal que

$$d(\varphi_{f(t)}(y_i), \varphi_{f(t)}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

quando $a_{k+1} \leq t \leq a_k$ pois $y_k \to x$, assim, $\varphi_{f(t)}(y_k) \to \varphi_{f(t)}(x)$.

Observe que para $a_{k+1} \leq t \leq a_k$, temos,

$$\begin{aligned} |f(t) - g_i(t)| &= |f_k^-(t) - g_i(t)| \\ &\leq |f_k^-(t) - g_{k+1}(t)| + |g_{k+1}(t) - g_i(t)| \\ &< p. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{f(t)}(x), \varphi_t(x_0)) &\leq d(\varphi_{f(t)}(x), \varphi_{f(t)}(y_i)) + d(\varphi_{f(t)}(y_i), \varphi_{g_i(t)}(y_i)) \\ &+ d(\varphi_{g_i(t)}(y_i), \varphi_t(x_0)) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Para $b_k \leq t \leq b_{k+1}$, temos,

$$\begin{aligned} |f(t) - g_i(t)| &= |f_k^+(t) - g_i(t)| \\ &\leq |f_k^+(t) - g_{k+1}(t)| + |g_{k+1}(t) - g_i(t)| \\ &< p. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{f(t)}(x), \varphi_t(x_0)) &\leq d(\varphi_{f(t)}(x), \varphi_{f(t)}(y_i)) + d(\varphi_{f(t)}(y_i), \varphi_{g_i(t)}(y_i)) \\ &+ d(\varphi_{g_i(t)}(y_i), \varphi_t(x_0)) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a $(1, b)$-pseudo órbita $(t_i, x_i)_{-\infty}^{\infty}$ é ε-sombreada por uma órbita de φ. Pela proposição 1.21, φ tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita.

□

Antes de apresentar a prova do teorema principal, vejamos o último resultado anunciado na introdução deste capítulo.

Teorema 4. *[15] Todo fluxo φ expansivo contínuo sem pontos fixos e que tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita em M é topologicamente estável.*

Demonstração. Seja φ um fluxo definido em M satisfazendo as hipóteses do teorema. Vamos definir uma aplicação h que satisfaz as condições da definição 2.2.

Dado $\delta > 0$, sem perda de generalidade, podemos assumir que $0 < \delta < T_0/2$, onde T_0 é como no lema 1.15. Usando o teorema 1.16, tome $0 < r < \varepsilon$. Assim, $0 < r < T_0/2$. Usando o lema 1.15, existe $\gamma > 0$ tal que $d(\varphi_r(y), y) \geq \gamma$ para todo $y \in M$.

Pela expansividade, seja $\delta' < \gamma$, $\delta' < r$, tal que se $d(\varphi_{f(t)}(x), \varphi_t(y)) \leq \delta'$ para todo $x, y \in M$ e uma aplicação contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(0) = 0$, então $y = \varphi_t(x)$ para $|t| \leq r$.

Usando a proposição 1.21 que diz que φ tem a propriedade de sombreamento de pseudo-órbita se, e somente se, tem esta propriedade com respeito ao tempo $t = 1$, seja $0 < \varepsilon < \delta'/12$ tal que,

a) Cada $(1, \varepsilon)$-pseudo órbita é $\delta'/2$-sombreada por uma órbita de φ,

b) Para cada $x, y \in M$, se $d(x, y) < \varepsilon$ então $d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \delta'/12$ para todo $t \in [0, 1]$.

Seja ψ um fluxo contínuo em M tal que $d^*(\varphi_t, \psi_t) = \sup\limits_{x \in X} d(\varphi_t(x), \psi_t(x)) < \varepsilon$ para $t \in [0, 1]$.

Fixando um ponto $y \in M$, e como

$$d(\varphi_1(\psi_n(y), \psi_{n+1}(y)) = d(\varphi_1(\psi_n(y), \psi_1(\psi_n(y)) < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que $(\psi_n(y), t_n = 1)_{-\infty}^{\infty}$ é uma $(1, \varepsilon)$-pseudo órbita para φ. Portanto, por hipótese, existem $z \in M$ e um homeomorfismo crescente $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha(0) = 0$ tal que

$$d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \varphi_{t-n}(\psi_n(y))) < \frac{\delta'}{12}, \text{ para } t \geq 0, n \leq t < n+1, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \varphi_{t+n}(\psi_{-n}(y))) < \frac{\delta'}{2}, \text{ para } t \leq 0, -n \leq t < -n+1, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Para o caso em que $t \geq 0$, sejam m, k números inteiros positivos tais que $n \leq \dfrac{m}{k} \leq t < \dfrac{m+1}{k} \leq n+1$, assim

$$d\left(\psi_{\frac{m}{k}-n}(\psi_n(y), \varphi_{\frac{m}{k}-n}(\psi_n(y))\right) < \varepsilon$$

Do item b) acima, temos,

$$\begin{aligned} d\left(\varphi_{t-\frac{m}{k}}(\psi_{\frac{m}{k}}(y), \varphi_{t-n}(\psi_n(y))\right) &= d\left(\varphi_{t-\frac{m}{k}}(\psi_{\frac{m}{k}}(y), \varphi_{t-\frac{m}{k}}(\varphi_{\frac{m}{k}-n}(\psi_n(y)))\right) \\ &= d\left(\varphi_{t-\frac{m}{k}}(\psi_{\frac{m}{k}-n}(\psi_n(y)), \varphi_{t-\frac{m}{k}}(\varphi_{\frac{m}{k}-n}(\psi_n(y)))\right) \\ &< \frac{\delta'}{12} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \varphi_{t-\frac{m}{k}}(\psi_{\frac{m}{k}}(y))) &\leq d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \varphi_{t-n}(\psi_n(y))) \\ &+ d(\varphi_{t-n}(\psi_n(y)), \varphi_{t-\frac{m}{k}}(\psi_{\frac{m}{k}}(y))) \\ &< \frac{\delta'}{12} + \frac{\delta'}{12} = \frac{\delta'}{6}, \text{ para } \frac{m}{k} \leq t < \frac{m+1}{k} \end{aligned}$$

Como para cada $t \in \mathbb{R}$ existe uma sequência de números racionais $\left\{\frac{m_i}{t_i}\right\}$, onde $t_i \in \mathbb{Z}$, tal que $\frac{m_i}{t_i} \to t$, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, segue que

$$d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \varphi_{t-\frac{m_i}{t_i}}(\psi_{\frac{m_i}{t_i}}(y))) < \delta'/6 \text{ para todo } i.$$

De maneira análoga, temos

$$d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \varphi_{t+\frac{m_i}{t_i}}(\psi_{-\frac{m_i}{t_i}}(y))) < \delta'/6 \text{ para } t \leq 0, -n \leq -\frac{m}{k} \leq t < \frac{-m+1}{k}.$$

Assim, provamos que para uma órbita $(\psi_t(y))_{t\in\mathbb{R}}$ existe um ponto $z \in M$ e um homeomorfismo crescente $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha(0) = 0$ tal que

i) $d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \psi_t(y)) < \delta'/6$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sejam $z' \in M$ e $\alpha' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um homeomorfismo crescente com $\alpha(0) = 0$ tal que,

$$d(\varphi_{\alpha'(t)}(z'), \psi_t(y)) \leq \delta'/6 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Então

$$\begin{aligned} d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \varphi_{\alpha'(t)}(z')) &\leq d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \psi_t(z)) + d(\psi_t(z), \varphi_{\alpha'(t)}(z')) \\ &< \frac{\delta'}{6} + \frac{\delta'}{6} = \frac{\delta'}{3}, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} d(\varphi_{\alpha(t)}(z'), \varphi_t(z)) &\leq d(\varphi_{\alpha(t)}(z'), \psi_t(z)) + d(\psi_t(z), \varphi_t(z)) \\ &< \frac{\delta'}{6} + \frac{\delta'}{6} = \frac{\delta'}{3}, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pela expansividade e pela escolha de δ' temos que $z' = \varphi_t(z)$ com $|t| \leq r < \delta$. Ou seja, cada órbita $(\psi_t(y))_{t\in\mathbb{R}}$ de ψ é $\delta'/6$-sombreada por uma única órbita $(\varphi_t(z))_{t\in\mathbb{R}}$ de φ.

Agora, para $x, y \in M$ definimos o conjunto A_y da seguinte forma

$$\begin{aligned} A_y = \{x \in X: &\text{ para cada } \eta, T > 0, \text{ existe um homeomorfismo } \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\text{com } \alpha(0) = 0 \text{ tal que } d(\varphi_{\alpha(t)}(x), \psi_t(y)) < \delta^{'}/6 + \eta, \forall t \in [-T, T]\}. \end{aligned}$$

Agora, vamos definir uma função h em M, e para isso precisamos selecionar um determinado ponto no conjunto A_y da seguinte maneira: Um ponto $x \in A_y$ é chamado maior limite de A_y ($m \cdot l \cdot A_y$) se, e somente se, $x = \varphi_w(x^{'})$ com $w \geq 0$ para $x^{'} \in A_y$. Este ponto $x = m \cdot l \cdot A_y$ é o único ponto em A_y com essa propriedade.

Assim, defina $h : M \to M$ por

$$h(y) = m \cdot l \cdot A_y \text{ para todo } y \in M.$$

Pela unicidade de $m \cdot l \cdot A_y$ esta função está bem definida, além disso h é contínua, como verificamos no Apêndice A.

Da definição de A_y, se $x \in A_y$ temos que para cada $\eta, T > 0$ existe um homeomorfismo $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha(0) = 0$ tal que

$$d(\varphi_{\alpha(t)}(x), \psi_t(y)) < \delta^{'}/6 + \eta \text{ para todo } t \in [-T, T].$$

Tome $\eta < \delta^{'}/2$, então em $t = 0$, $d(x, y) < \delta^{'} < \delta$. Assim $d(y, h(y)) = d(y, m \cdot l \cdot A_y) < \delta$ então $d(h, I) < \delta$, onde I é o homeomorfismo identidade da aplicação em M. Assim, h satisfaz o item $i)$ da definição 2.2.

Agora, mostraremos que h também satisfaz o item $ii)$ da definição 2.2, ou seja, que $h(\mathcal{O}(\psi_t)) \subseteq (\mathcal{O}(\varphi_t)$. Seja $y \in M$, como mostramos acima a órbita $(\psi_t(y))_{t \in \mathbb{R}}$ é $\delta^{'}$-sombreada por uma única órbita $(\varphi_t(z))_{t \in \mathbb{R}}$ de φ, ou seja, existe um homeomorfismo crescente $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha(0) = 0$ tal que

$$d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \psi_t(y)) \leq \delta^{'}/6 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Seja $\psi_u(y)$ um outro ponto em $(\psi_t(y))_{t \in \mathbb{R}}$. Assim,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\alpha(t+u) - \alpha(u), \varphi(\alpha(u), z))), \psi(t, \psi(u, y)))) &= d(\varphi(\alpha(t+u), z), \psi(t+u, y)) \\ &\leq \delta^{'}/6 \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se tomarmos $\gamma(t) = \alpha(t+u) - \alpha(u)$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo crescente com $\gamma(0) = 0$, ou seja, uma reparametrização para a órbita $(\varphi_t(z))_{t \in \mathbb{R}}$. Portanto,

$$d(\varphi(\gamma(t), \varphi(\alpha(u), z))), \psi(t, \psi(u, y)))) \leq \delta^{'}/6 < \delta^{'}/6 + \eta$$

e $h(\psi_u(y)) = m \cdot l \cdot A_{\psi_u(y)} = \varphi_w(\varphi_{\alpha(u)}(z))$, para $w \geq 0$. Assim, $\varphi_{\alpha(u)}(z) \in A_{\psi_u(y)}$, e $h(\mathcal{O}(\psi_t)) \subseteq \mathcal{O}(\varphi_t)$, concluindo o item $ii)$ da definição 2.2 e completando a prova do teorema.

$\square$

Finalmente, estamos em condições de provar o teorema principal. Por questões de compreensão de leitura e acompanhamento o enunciamos mais uma vez.

Teorema 1. *Todo fluxo hiperbólico φ em M é topologicamente estável.*

Demonstração. Como φ é hiperbólico, pelos teoremas 2 e 3, φ é expansivo e tem a propriedade de sombreamento. Pelo teorema 1.13 e pela observação 1.14, φ não tem pontos fixos. Portanto, pelo teorema 4, φ é topologicamente estável.

$\square$

Considerações Finais

Neste trabalho fizemos um estudo sobre estabilidade topológica para fluxos hiperbólicos. Começamos, no primeiro capítulo, apresentando algumas propriedades topológicas importantes no estudo da dinâmica dos fluxos, como expansividade e sombreamento.

Apresentamos, no segundo capítulo, que as propriedades de expansividade e sombreamento são características fundamentais dos fluxos hiperbólicos. Utilizamos tais propriedades para alcançar o objetivo principal do trabalho, caracterizar os fluxos hiperbólicos como fluxos topologicamente estáveis.

Por fim, observamos que há a possibilidade desse trabalho ser continuado com o estudo do caso em que o fluxo possui singularidades. A definição de fluxos expansivos dada aqui, em um espaço métrico conexo, não admite singularidades. A partir disso, uma pergunta razoável é: o que acontece quando a definição de expansividade admite singularidades e como podemos garantir a estabilidade topológica dos fluxos hiperbólicos?

Apêndice A

Prova da continuidade da aplicação h

Para $x, y \in M$ definimos o conjunto A_y da seguinte forma

$$\begin{aligned} A_y = \{x \in X : & \text{ para cada } \eta, T > 0, \text{ existe um homeomorfismo } \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \text{com } \alpha(0) = 0 \text{ tal que } d(\varphi_{\alpha(t)}(x), \psi_t(y)) < \delta^{'}/6 + \eta, \forall t \in [-T, T]\}. \end{aligned}$$

Proposição .1. *O conjunto A_y satisfaz as seguintes afirmações,*

1) $A_y \subset (\varphi_t(z))_{t \in \mathbb{R}}$ e o diâmetro do tempo de A_y é menor que δ,

2) A_y é um conjunto fechado em M.

Demonstração. Para provar o item 1), sabemos que $z \in A_y$, pois,

$$d(\varphi_{\alpha(t)}(z), \psi_t(y)) \leq \delta^{'}/6 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\{\eta_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ sequências positivas de números reais tais que $\eta_i \to 0$ e $T_i \to \infty$ quando $i \to \infty$.

Seja $x \in A_y$, então existem homeomorfismos $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha_i(0) = 0$ tal que

$$d(\varphi_{\alpha_i(t)}(x), \psi_t(y)) < \delta^{'}/6 + \eta_i \text{ para todo } t \in [-T_i, T_i].$$

De $i)$ temos

$$\begin{aligned} d(\varphi_{\alpha_i(t)}(x), \varphi_{\alpha(t)}(z)) &\leq d(\varphi_{\alpha_i(t)}(x), psi_t(z)) + d(\psi_t(z), \varphi_{\alpha(t)}(z)) \\ &< \delta^{'}/3 + \eta_i \text{ para } t \in [-T_i, T_i]. \end{aligned}$$

Como $\eta_i \to 0$, sem perda de generalidade, assuma que $\eta_i < \delta^{'}/6$ para todo i. Tome $T_i^{'} = \min\{|\alpha(T_i)|, |\alpha(-T_i)|\}$. Observe que $T_i^{'} \to \infty$ quando $i \to \infty$, assim

$$d(\varphi(\alpha_i \alpha^{-1}(u), x), \varphi(u, z)) < \delta^{'}/3 + \eta_i \text{ para todo } u \in [-T_i^{'}, T_i^{'}].$$

Denote por $\gamma_i = \alpha_i\alpha^{-1}$, temos que $\gamma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo crescente com $\gamma_i(0) = 0$ para todo i. Pela continuidade de γ_i, seja $0 < s_i < n$ tal que se $|u - u^{'}| < s_i$ então $|\gamma_i(u) - \gamma_i(u^{'})| < r$. Assim,

$$\begin{aligned}
&d(\varphi(\gamma_{i+1}(u) - \gamma_i(u), \varphi(\gamma_i(u), x)), \varphi(\gamma_i(u), x)) = d(\varphi(\gamma_{i+1}(u), x), \varphi(\gamma_i(u), x)) \\
&\leq d(\varphi(\gamma_{i+1}(u), x), \varphi(\gamma_u, z)) + d(\varphi(\gamma_i(u), x), \varphi(\gamma_u, z)) \\
&< 2\delta^{'}/3 + 2\eta_i < \delta^{'}, \text{ para todo } u \in [-T_i^{'}, T_i^{'}],
\end{aligned}$$

portanto $|\gamma_{i+1}(u) - \gamma_i(u)| < r$, pois $\delta^{'} < \gamma$ e pela continuidade de γ_{i+1} e γ_i. Assim, podemos tomar ξ_i com $0 < \xi_i < r$ tal que se $u \leq T_i^{'} < u^{'}$ e $|u^{'} - u| < \xi_i$ então $|\gamma_{i+1}(u^{'}) - \gamma_i(u)| < r$.

Fixe i e defina uma sequência $\{u_j\}_{-\infty}^{\infty}$ de números reais tal que $u_0 = 0$, $u_j < u_{j+1}$, $u_j \to \infty$ quando $j \to \infty$, $u_j \to -\infty$ quando $j \to -\infty$, $u_{j+1} - u_j < \min\{\xi_i, s_i\}$ se $u_j \in [0, T_i^{'}]$ para $j \geq 1$ e $u_{j+1} - u_j < \min\{\xi_i, s_i\}$ se $u_{j+1} \in [-T_i^{'}, 0]$ para $j \leq -1$. Segue que, se tomarmos $t_j = \gamma_i(u_j)$ se $u_j \in [-T_i^{'}, T_i^{'}]$ e $t_j = \gamma_{i+1}(u_j)$ se $u_j \in [-T_{i+'}^{'}, -T_i^{'}] \cup [T_i^{'}, T_{i+1}^{'}]$ e assim por diante, que $|t_{j+1} - t_j| < r$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, $t_0 = u_0 = 0$, e

$$d(\varphi_{t_j}(x), \varphi_{u_j}(z)) < \delta^{'}/3 + \eta_i < \delta^{'}/3 + \delta^{'}/6 < \delta^{'} < r \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Usando o teorema 1.16, temos que $x = \varphi_t(z)$ para $|t| < \delta$, provando 1).

Agora, para provar 2), usando 1), só precisamos mostrar que A_y é fechado na órbita $(\varphi_t(z))_{t\in\mathbb{R}}$ com topologia relativa.

Seja $z^{'}$ um ponto limite de algum ponto de A_y, e assuma que $z^{'} \in (\varphi_t(z))_{t\in\mathbb{R}}$. Seja $\{z_i\}$ uma sequência em A_y tal que $z_i \to z^{'}$. Dados $\eta, T > 0$ existem homeomorfismos $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha_i(0) = 0$ tal que

$$d(\varphi_{\alpha_i(t)}(z_i), \psi_t(y)) < \delta^{'}/6 + \eta/2 \text{ para todo } t \in [-T, T], \text{ todo } i.$$

Como z_i e z estão na mesma órbita dentro da distância de tempo $\delta < T_0$, existe um inteiro N grande o suficiente, tal que

$$d(\varphi_t(z_i), \varphi_t(z^{'}) < \eta/2 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ todo } i \geq N.$$

Portanto,

$$d(\varphi_{\alpha_i(t)}(z_i), \varphi_{\alpha_i(t)}(z^{'}) < \eta/2 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ todo } i \geq N.$$

Assim,

$$d(\varphi_{\alpha_i(t)}(z_i^{'}), \psi_t(y)) < \delta^{'}/6 + \eta \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Logo, $z^{'} \in A_y$ e isso prova 2).

□

Como o conjunto A_y é fechado em M, e além disso M é um espaço métrico compacto, podemos definir o seguinte elemento em A_y.

Definição .2. *Um ponto $x \in A_y$ é chamado maior limite de A_y ($m \cdot l \cdot A_y$) se, e* *somente se, $x = \varphi_w(x')$ com $w \geq 0$ para $x' \in A_y$. Este ponto $x = m \cdot l \cdot A_y$ é o único ponto em A_y com essa propriedade.*

Defina $h : M \to M$ por

$$h(y) = m \cdot l \cdot A_y \text{ para todo } y \in M.$$

Pela unicidade de $m \cdot l \cdot A_y$ esta função está bem definida. Provaremos que h é contínua.

Seja $\eta, T > 0$, $y \in M$ e defina

$$\begin{aligned} A_{y,\eta,T} = \{ & x \in M : \text{ existe um homeomorfismo } \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ com } \alpha(0) = 0 \\ & \text{tal que } d(\varphi_{\alpha(t)}(x), \psi_t(y)) < \delta'/6 + \eta \text{ para todo } t \in [-T, T]\}. \end{aligned}$$

Se verifica pela definição de $A_{y,\eta,T}$ que valem, entre outras, as seguintes propriedades,

a) Se $\eta_1 \geq \eta_2 > 0$ então $A_{y,\eta_1,T} \supseteq A_{y,\eta_2,T}$ para todo $y \in M$, $T \in \mathbb{R}$,

b) Se $0 < T_1 \leq T_2$ então $A_{y,\eta,T_1} \supseteq A_{y,\eta,T_2}$ para todo $y \in M$, $\eta \in \mathbb{R}$,

c) Se $0 > \eta_1 \geq \eta_2$ e $0 < T_1 \leq T_2$ então $A_{y,\eta_1,T_1} \supseteq A_{y,\eta_2,T_2}$ para todo $y \in M$,

d) Se $\{\eta_i\}$, $\{T_i\}$ são sequências de números reais positivos com $\eta_i \to 0$ e $T_i \to \infty$, então

$$A_y = \bigcap_i A_{y,\eta_i,T_i}.$$

Para mostrar que h é contínua, mostraremos as seguintes propriedades adicionais de $A_{y,\eta,T}$ que nos serão úteis.

Lema .3. *Para cada $\lambda > 0$ e $y \in M$ existem $\eta, T > 0$ tal que $d(x, A_y) < \lambda$ para todo $x \in A_{y,\eta,T}$.*

Demonstração. Seja $\{\eta_i\}$, $\{T_i\}$ sequências de números reais positivos com $\eta_i \to 0$, $T_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. Assuma que $\eta_i < \delta'/6$ para todo i. Seja $\{z_i\}$ uma sequência de pontos tais que $z_i \in A_{y,\eta_i,T_i}$ para todo i e $z_i \to z$ quando $i \to \infty$. Da definição de A_{y,η_i,T_i} temos que existem homeomorfismos $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha_i(0) = 0$ para todo i tal que,

$$d(\varphi_{\alpha_i(t)}(z_i), \psi_t(y)) < \delta'/6 + \eta_i, \ \forall t \in [-T_i, T_i], \ \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Como $z_i \to z$, existem sequências $\{w_j\}$, $\{\beta_j\}$ de números reais positivos com $\beta_j \to 0$, $w_j \to \infty$ quando $j \to \infty$ tal que

$$d(\varphi_t(z_i), \varphi_t(z)) < \beta_i \text{ para } t \in [-w_i, w_i].$$

Fixando N grande o suficiente, para todo $j \geq i \geq N$ temos

$$d(\varphi_t(z_i), \varphi_t(z_j)) < \beta_i \text{ para todo } t \in [-w_i, w_i]$$

Sem perda de generalidade tome $\beta_i < \delta'/6$ para todo $i \geq N$. Portanto

$$d(\varphi_{\alpha_i(t)}(z_i), \varphi_{\alpha_i(t)}(z)) < \beta_i, \text{ para todo } t \in [\alpha_i^{-1}(-w_i), \alpha_i^{-1}(w_i)].$$

Agora vamos mostrar que $\alpha_i^{-1}(w_i) \to \infty$ quando $i \to \infty$. Suponha por contradição que existe uma constante $a > 0$ tal que $\alpha_i^{-1}(w_i) \leq a$ para todo $i \geq N$. Assim, $w_i \leq \alpha_i(a)$ para todo $i \geq N$, mas $w_i \to \infty$ quando $i \to \infty$ então $\alpha_i(a) \to \infty$ quando $i \to \infty$.

Sem perda de generalidade, tome N suficientemente grande tal que a pertença ao domínio de α_i para $t \geq N$, ou seja, $a \in [-T_i, T_i]$ para todo $i \geq N$. Usando o lema 1.22 e a ideia de que se $\alpha_j(a) \to \infty$ quando $j \to \infty$ então existem números reais $t_1 \leq t_2$ em $[0, a]$, e $j \geq N$ tal que t_1 está muito próximo de t_2, assim $d(\psi_{t_1}(y), \psi_{t_2}(y)) < \varepsilon$ e $\alpha_j(t_2) - \alpha_j(t_1) = r$. Pela maneira como definimos r no início, e usando o lema 1.15 teremos

$$d(\varphi(\alpha_j(t_1), z_j), \varphi(\alpha_j(t_2), z_j)) \geq \gamma > \delta' \tag{2}$$

Mas usando a equação 1, temos,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\alpha_j(t_1), z_j), \varphi(\alpha_j(t_2), z_2)) &\leq d(\varphi(\alpha_j(t_1), z_j), \psi(t_1, y)) + d(\psi(t_1, y), \psi(t_2, y)) \\ &+ d(\varphi(\alpha_j(t_2), z_j), \psi(t_2, y)) \\ &< \delta'/6 + \eta_i + \varepsilon + \delta'/6 + \eta_i \\ &< \delta'/3 + 2\eta_i + \varepsilon \\ &< \delta'/3 + \delta'/3 + \delta'/12 \\ &= 9\delta'/12 < \delta' \end{aligned}$$

e isso contradiz a equação 1. Portanto, $\alpha_j^{-1}(w_j) \to \infty$, analogamente, $\alpha_j^{-1}(w_j) \to -\infty$ quando $j \to \infty$. Assim, podemos supor que existam sequências de números reais positivos $\{\beta_i\}$, $\{v_i\}$ com $\beta_i \to 0$, $v_i \to \infty$ tal que

$$d(\varphi(\alpha_i(t), z_i), \varphi(\alpha_i(t), z)) < \beta_i \text{ para todo } t \in [-v_i, v_i].$$

Usando a equação 1, temos,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\alpha_i(t), z), \psi(t, y)) &\leq d(\varphi(\alpha_i(t), z), \varphi(\alpha_i(t), z_i)) + d(\varphi(\alpha_i(t), z_i), \psi(t, y)) \\ &< \delta'/6 + \eta_i + \beta_i \text{ para todo } t \in [-k_i, k_i] \end{aligned}$$

com $k_i = \min\{v_i, T_i\}$. Logo, $z \in A_{y,\eta_i+\beta_i,k_i}$ para todo i. Mas $\eta_i + \beta_i \to 0$ e $k_i \to \infty$ quando $i \to \infty$, assim, $z \in A_y$. Assumindo que $d(z_i, A_y) \geq \lambda$ para todo i, então $d(z, A_y) \geq \lambda$, mas isso é uma contradição, pois o diâmetro de tempo de A_y é menor que λ. Assim, terminamos a prova do lema.

□

Lema .4. *Para cada $\lambda > 0$ existem $\eta, T > 0$ qual que para cada $y \in M$, $d(x, A_y) < \lambda$ para todo $x \in A_{y,\eta,T}$.*

Demonstração. Para cada ponto $y \in M$, seja U_y uma vizinhança de y com a seguinte propriedade

$$d(\psi_t(y), \psi_t(y^{'})) < \frac{\eta_y}{2} \text{ para todo } t \in [-T_y, T_y], \text{ todo } y^{'} \in U_y,$$

onde η_y, T_y são tomados como no lema .3, ou seja, $d(x, A_y) < \lambda/2$ para todo $x \in A_{y,\eta_y,T_y}$.

Seja x um ponto qualquer em $A_{y^{'},\frac{\eta_y}{2},T_y}$. Assim, existe um homeomorfismo $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha(0) = 0$ tal que

$$d(\varphi_{\alpha(t)}(x), \psi_t(y^{'})) < \frac{\delta^{'}}{6} + \frac{\eta_y}{2} \text{ para } t \in [-T_y, T_y].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(\varphi_{\alpha(t)}(x), \psi_t(y)) &\leq d(\varphi_{\alpha(t)}(x), \psi_t(y^{'})) + d(\psi_t(y'), \psi_t(y)) \\ &< \delta^{'}/6 + \eta_y \text{ para } t \in [-T_y, T_y]. \end{aligned}$$

Assim, $A_{y^{'},\frac{\eta_y}{2},T_y} \subseteq A_{y,\eta_y,T_y}$ para todo $y^{'} \in U_y$.

Pela compacidade de M,existem pontos $y_1, y_2, \ldots, y_k$, uma cobertura de abertos $U_1, U_2, \ldots, U_k$, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ e $T_1, T_2, \ldots, T_k$, tomados como acima.

Seja $\eta = \min_{1 \leq j \leq k}\{\eta_i\}$, $T = \max_{1 \leq j \leq k}\{T_i\}$. Se $y^{'}$ é um ponto qualquer em M, então existe j com $1 \leq j \leq k$ tal que $y^{'} \in U_j$. Mas $A_{y^{'},\frac{\eta}{2},T} \subseteq A_{y_j,\eta,T}$, portanto, se tomarmos $z \in A_{y^{'},\frac{\eta}{2},T}$, temos $d(z, A_{y_j}) < \lambda/2$. E como $A_{y^{'}} \subseteq A_{y^{'},\frac{\eta}{2},T} \subseteq A_{y_j,\eta,T}$, temos, $d(A_{y^{'}}, A_y) < \lambda/2$. Portanto,

$$d(z, A_{y^{'}}) \leq d(z, A_{y_j}) + d(A_{y_j}, A_{y^{'}}) < \lambda.$$

□

Lema .5. *Seja $\{y_i\}$, $\{z_i\}$ sequências de pontos em M. Se $z_i \in A_{y_i}$ para todo i, $z_i \to z$ e $y_i \to y$, então $z \in A_y$.*

Demonstração. Seja $\{\lambda_i\}$ uma sequência de números reais positivos tal que $\lambda_i \to 0$. Usando o lema .4, existem η_i, $T_i > 0$ tal que $d(x, A_y) < \lambda_i$, para todo $x \in A_{y,\eta_i,T_i}$, e para cada $y \in M$.

Como $y_i \to y$, existe uma subsequência $\{y_{j_i}\}$ de $\{y_i\}$ tal que,

$$d(\psi_(y), \psi_t(y_{j_i})) < \frac{\eta}{2}, \ \forall t \in [-T_i, T_i], \forall i.$$

Mas $z_{j_i} \in A_{y_{j_i}}$, portanto, existem homeomorfismos $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\alpha_i(0) = 0$, tal que,

$$d(\varphi(\alpha_i(t), z_{j_i}), \psi(t, y_{j_i})) < \delta'/6 + \eta_i/2, \ \forall t \in [-T_i, T_i]$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\alpha_i(t), z_{j_i}), \psi(t, y)) &\leq d(\varphi(\alpha_i(t), z_{j_i}), \psi(t, y_{j_i})) + d(\psi(t, y_{j_i}), \psi(t, y)) \\ &< \delta'/6 + \eta_i, \ \forall t \in [-T_i, T_i] \end{aligned}$$

Portanto, $z_{j_i} \in A_{y,\eta_i,T_i}$, para todo i. Pelo lema .4, temos $d(z_{j_i}, A_y) < \lambda_i$, para todo i. Mas, $z_{j_i} \to z$ e $\lambda_i \to 0$ quando $i \to \infty$. Portanto, $d(z, A_y) = 0$, como A_y é fechado, então $z \in A_y$.

□

Proposição .6. *A aplicação h é contínua.*

Demonstração. Sejam $\{y_i\}$, $\{z_i\}$ sequências de pontos em M tal que $z_i = m \cdot l \cdot A_{y_i}$ para todo i, e assuma que $y_i \to y$ e $z = m \cdot l \cdot A_y$.

Queremos provar que $z_i \to z$. Pela compacidade de M, $\{z_i\}$ possui uma subsequencia convergente, assim, sem perda de generalidade, assuma que $z_i \to z'$. Pelo lema .5, $z' \in A_y$.

Sejam x um ponto qualquer em A_y e $\{\lambda_i\}$ uma sequência convergente onde $\lambda_i \to 0$.

Sejam $\eta_i, T_i > 0$ como no lema .4. Se $y_i \to y$, existe uma subsequencia $\{y_{k_i}\}$ tal que,

$$d(\psi_t(y_{k_i}), \psi_t(y)) < \eta_i/2, \ \forall t \in [-T_i, T_i], \forall i.$$

Como $x \in A_y$, existem homeomorfismos $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$d(\varphi(\alpha_i(t), x), \psi(t, y)) < \delta'/6 + \eta_i/2, \ \forall t \in [-T_i, T_i].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(\varphi(\alpha_i(t), x), \psi(t, y_{k_i})) &\leq d(\varphi(\alpha_i(t), x), \psi(t, y)) + d(\psi(t, y), \psi(t, y_{k_i})) \\ &< \delta'/6 + \eta_i, \ \forall t \in [-T_i, T_i]. \end{aligned}$$

Assim, $x \in A_{y_{k_i},\eta_i,T_i}$, pelo lema .4, $d(x, A_{y_{k_i}}) < \lambda_i$, para todo i.

Seja $x_{k_i} \in A_{y_{k_i}}$ tal que $d(x, x_{k_i}) = d(x, A_{y_{k_i}}) < \lambda$, isto pode ser feito pois $A_{y_{k_i}}$ é fechado. Segue que $x_{k_i} \to x$. Como $z_{k_i} = m \cdot l \cdot A_{y_{k_i}}$, existe $w_{k_i} \geq 0$ tal que $z_{k_i} = \varphi_{w_{k_i}}(x_{k_i})$. Além disso, $z_{k_i} \to z'$, portanto, $z' = \varphi_w(x)$, com $w \geq 0$ para cada x, então z' é o maior limite de A_y. Mas o maior limite de A_y é único, assim, $z = z'$. Então, provamos que toda subsequencia de $\{z_i\}$ converge para z, assim, $z_i \to z$. Provando que h é contínua.

□

Referências Bibliográficas

[1] ANOSOV, D. V. *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature.* Trudy Mat. Inst. Steklov., vol. 90, pag. 3-210, 1967.

[2] BOWEN, R. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Vol. 470 of Lect. Notes in Math. Springer Verlog, 1975.

[3] BOWEN, R.; WALTERS, P. *Expansive one-parameter flows*, Journal of Differential Equations, vol. 12, n. 1, pag. 180-193, 1972.

[4] CHOI, S; PARK, J. *Hyperbolic Flows Are Topologically Stable.* Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 43, n.2, pag. 225-232, 1991.

[5] DEVANEY, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, -2. Ed. - United States of America: Westview press, (2003).

[6] HIRSCH, W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos.* Academic press, 2012.

[7] HURLEY, M. *Consequences of topological stability*, Journal of differential Equations, vol. 54, n. 1, pag. 60 - 72, 1984.

[8] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *A moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos*, Coordenação e revisão da tradução por Luis Barreira, Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, (2005).

[9] OMBACH, J. *Consequences of the pseudo orbits tracing property and expansiveness*, J. Austral. Math. Soc., vol. 43, pag. 301-313, 1987.

[10] PALIS, J.; MELO, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Rio de Janeiro: IMPA, 1978.

[11] ROBINSON, C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos.* CRC Press Inc, 1995.

[12] SHUB, M. *Global stability of dynamical systems* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[13] SMALE, S. *Differentiable dynamical systems* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 73, 1967.

[14] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[15] THOMAS, R. F. *Stability propeties of one-parameter flows*, Proc. London Math. Soc., vol. 45, pag. 479-505, 1982.

[16] WALTERS, P. *Anosov diffeomorphisms are topologically stable*, Topology, vol. 9, n. 1, pag. 71-78, 1970.