

MAICOM DOUGLAS VARELLA COSTA

**APLICAÇÕES DE SUPERFÍCIES FECHADAS NO PLANO  
PROJETIVO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2018

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

C837a  
2018  
Costa, Maicom Douglas Varella, 1992-  
Aplicações de superfícies fechadas no plano projetivo /  
Maicom Douglas Varella Costa. – Viçosa, MG, 2018.  
ix, 57 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 56-57.

1. Planos projetivos. 2. Invariantes. 3. Euler, Característica de. 4. Singularidades (Matemática). I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

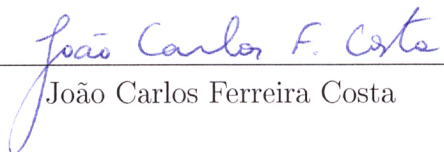
CDD 22. ed. 516.5


MAICOM DOUGLAS VARELLA COSTA

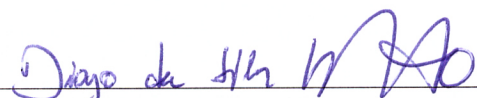
**APLICAÇÕES DE SUPERFÍCIES FECHADAS NO PLANO  
PROJETIVO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de julho de 2018.

  
João Carlos Ferreira Costa

  
Pouya Mehdipour Balagafsheh

  
Diogo da Silva Machado  
(Presidente)

O presente trabalho foi realizado  
com apoio da Coordenação de  
Aperfeiçoamento de Pessoal de  
Nível Superior - Brasil (CAPES) -  
Código de Financiamento 001.

---

*Dedico este trabalho a minha família,  
em especial minha mãe, Márcia.*

"Pedir eu não peço não, mas se  
achar que eu mereço."

---

Maicom Varela

# Agradecimentos

Sou extremamente grato a minha mãe, pelo exemplo, por todo incentivo e por não medir esforços para providenciar tudo o que foi necessário para eu poder chegar até aqui. Agradeço também aos meus irmãos Gabriella, Luiz Otávio e Joana, por todo o apoio e todo o incentivo durante esta jornada.

Agradeço a minha orientadora, Catarina, por toda paciência e por todo aprendizado que me propiciou, além de suas correções e incentivo. Foi uma das pessoas fundamentais para a realização desse trabalho, sempre prestativa e atenciosa, além de orientadora, uma amiga.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas de curso pela amizade, e pelos bons momentos que passamos juntos durante esse período.

Agradeço aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e por todos os serviços prestados.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Agradeço a todos que contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho.

# Sumário

<b>Resumo</b>	viii
<b>Abstract</b>	ix
<b>1 Preliminar</b>	<b>3</b>
1.1 Complexos regulares . . . . .	3
1.2 Superfícies . . . . .	4
1.3 Característica de Euler . . . . .	6
1.4 Grafos com pesos nos vértices . . . . .	10
1.5 Grafos associados a superfícies com curvas . . . . .	12
<b>2 Aplicações estáveis entre superfícies</b>	<b>17</b>
2.1 Aplicações estáveis . . . . .	17
2.2 Singularidades de aplicações estáveis . . . . .	18
2.3 Exemplos de aplicações estáveis . . . . .	21
2.4 Grafos associados a aplicações estáveis . . . . .	24
<b>3 Invariantes do contorno aparente</b>	<b>28</b>
3.1 Transições de codimensão um . . . . .	28
3.2 Transições de codimensão dois . . . . .	35
3.3 Invariantes locais de aplicações estáveis . . . . .	41
<b>4 Realização de grafos com pesos</b>	<b>45</b>
4.1 Cirurgias entre aplicações estáveis . . . . .	45
4.2 Realização de grafos de aplicações estáveis . . . . .	48





# Resumo

COSTA, Maicom Douglas Varella, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2018. **Aplicações de superfícies fechadas no plano projetivo.** Orientadora: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.

O principal objetivo do trabalho aqui apresentado é estudar invariantes locais e globais de aplicações estáveis entre superfícies. Apresentamos três invariantes de aplicações estáveis, que carregam informações do contorno aparente, que são, o número de pontos de cúspides, o número de pontos duplos e o número de componentes conexas do conjunto singular. Além disso, o grafo dual é apresentado como um importante invariante global das aplicações estáveis, que carrega informações a respeito da superfície domínio e ajuda na classificação dessas aplicações. As principais referências, nas quais este estudo está baseado, são [20] e [8].

# Abstract

COSTA, Maicom Douglas Varella, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2018. **Maps from closed surfaces to the projective plane.** Adviser: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.

The main purpose of the work presented here is to study local and global invariants of stable maps between surfaces. We present three local mappings invariants that carries information about the apparent contour of the maps, the number of cusp, the number of double points and the number of connected components of the singular set. More over, the dual graph is presented as a significant global invariant of stable maps, which carries information about the domain surface and it helps in classifying these maps. The main references, which this study is based, are [\[20\]](#) and [\[8\]](#).

# Introdução

Whitney publicou, em 1955, o artigo "Mappings of the plane into the plane" que foi fundamental para o surgimento da Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis. Whitney demonstrou que, para aplicações estáveis do plano no plano, se um ponto pertence ao conjunto singular, então esse ponto é do tipo dobra ou cúspide. Atualmente, muitos temas da Teoria de Singularidades podem ser encontrados em vários títulos, como em [4] e [5].

Um dos problemas clássicos na Teoria de Singularidades é a classificação completa das aplicações estáveis, a menos de  $\mathcal{A}$ -equivalência. Tal problema tem sido um difícil trabalho desde o surgimento da teoria. Em muitos casos, a procura por essa classificação se dá na busca por invariantes que permitam classificar grande parte das aplicações. Em um estudo mais recente, Ohmoto [21], determinou um conjunto completo de geradores para o anel dos invariantes semi-locais de primeira ordem do tipo Vassiliev, que está associado ao contorno aparente. Ohmoto e Aicardi [20], apresentaram invariantes numéricos locais, para o contorno aparente de aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano. Entretanto, existem aplicações em diferentes classes de  $\mathcal{A}$ -equivalência associadas a um mesmo invariante, o que mostra que estes invariantes não são suficientes para classificar estas aplicações.

Em sua tese de Doutorado, Mendes de Jesus [15] introduziu um novo invariante global, o grafo dual. Em conjunto com Hacon e Romero-Fuster, Mendes de Jesus apresentou resultados importantes para a realização de grafos associados à aplicações estáveis entre superfícies: aplicações dobra da esfera no plano em [9], aplicações de superfícies no plano em [8] e [10] e aplicações de superfícies fechadas e orientadas na esfera [11]. Mendes de Jesus e Romero-Fuster estenderam os resultados para aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano projetivo em [9] e [10].

O trabalho aqui apresentado tem como finalidade o estudo de aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano projetivo, assim como alguns invariantes locais e globais associados a tais aplicações. Os principais resultados, aqui apresentados, são baseados nos trabalhos de Mendes de Jesus e Romero-Fuster [13] e Ohmoto e Aicardi [20]. O conteúdo apresentado nesse trabalho tem a seguinte estrutura:

No Capítulo 1, introduzimos o conceito de superfícies fechadas que são os domínios das aplicações estáveis que são trabalhadas no decorrer deste trabalho. Apresentamos também o conjunto,  $\mathcal{E}(M, N)$ , das aplicações estáveis entre

superfícies  $M$  e  $N$ , bem como o conjunto discriminante que é o complementar de  $\mathcal{E}(M, N)$  no conjunto das aplicações suaves de  $M$  em  $N$ . Além disso, apresentamos conceitos a respeito das aplicações estáveis  $f : M \rightarrow N$ , tais como as características do conjunto singular e conjunto regular, além de ilustrarmos alguns exemplos e introduzirmos o conceito de cirurgias entre aplicações estáveis. As principais referências utilizadas neste capítulo são [4], [5], [12], [7], [19] e [27].

No segundo capítulo, apresentamos as transições de codimensão um e de codimensão dois, que são realizadas através de homotopias ao longo do conjunto  $C^\infty(M, N)$ , e seus efeitos no conjunto regular e no conjunto singular. Por fim, apresentamos alguns invariantes de aplicações estáveis, os invariantes locais e globais  $I_C$  e  $I_D$  e o invariante global  $I_\mu$ , assim como a relação entre eles. Aqui utilizamos como principais referências [8], [20] e [21].

No Capítulo 3, introduzimos alguns conceitos e resultados da teoria de grafos e um tipo de cirurgia para grafos. Além disso, fizemos uma associação entre grafos com pesos nos vértices e superfícies com curvas simples, fechadas e disjuntas, mergulhadas nessas superfícies. As referências deste capítulo são: [9], [12], [18], [17] e [26].

No último capítulo, apresentamos a associação entre grafos com pesos nos vértices e aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano projetivo. Além disso, vimos os efeitos das transições lábios e bicos nos grafos, assim como os efeitos das cirurgias de aplicações estáveis nos grafos. Por último, apresentamos resultados sobre a realização de tais grafos. As principais referências deste capítulo são [18] e [17].

# Capítulo 1

## Preliminar

Apresentamos nesse capítulo definições e resultados a respeito de superfícies, como soma conexa, característica de Euler e gênero. Por outro lado, introduzimos alguns conceitos e resultados importantes da teoria de grafos como grafos conexos, bipartidos e com pesos nos vértices. Finalmente, associamos os grafos a superfícies com curvas. As principais referências deste capítulo são [9], [12], [18], [17] e [26].

### 1.1 Complexos regulares

**Definição 1.1.1.** [12] Uma **n-célula** é um conjunto cujo interior é homeomorfo a um disco n-dimensional  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$  com a propriedade adicional de que sua fronteira deve ser dividida em um número finito de células com dimensões menores, chamadas **faces** da n-célula. Escrevemos  $\sigma < \tau$  se  $\sigma$  é uma face de  $\tau$ .

Por exemplo, no espaço euclidiano tridimensional, um ponto  $A$  pode ser considerado uma 0-célula; uma 1-célula é um segmento de reta  $a = AB$ , onde  $A < a$  e  $B < a$ ; uma 2-célula é um polígono (geralmente um triângulo) tal que  $\sigma = \Delta ABC$ , e então  $AC, BC$  e  $AB < \sigma$ . Note que  $A < AB < \sigma$ , então  $A < \sigma$ . A Figura [1.1] ilustra alguns exemplos de células.

**Exemplo 1.1.2.** A Figura [1.1] ilustra exemplos de uma 0-célula, 1-célula e 2-célula.

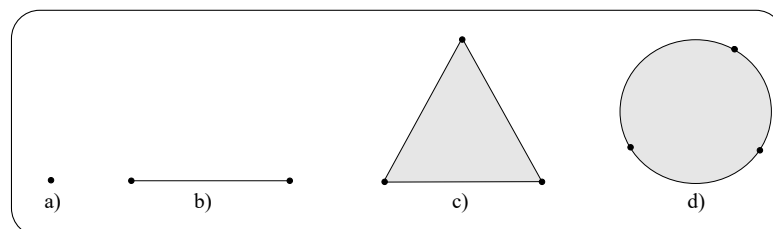


Figura 1.1: Exemplos de células.

**Definição 1.1.3.** Um **complexo K** é um conjunto finito de células.

$$K = \bigcup \{ \sigma \mid \sigma \text{ é uma célula} \}.$$

tal que:

1. Se  $\sigma$  é uma célula em  $K$ , então todas as faces de  $\sigma$  são elementos de  $K$ ;
2. Se  $\sigma$  e  $\tau$  são células em  $K$ , então  $\text{int}(\sigma) \cap \text{int}(\tau) = \emptyset$ .

Note que, um objeto topológico pode ser representado por diferentes complexos, como na Figura [1.2](#).

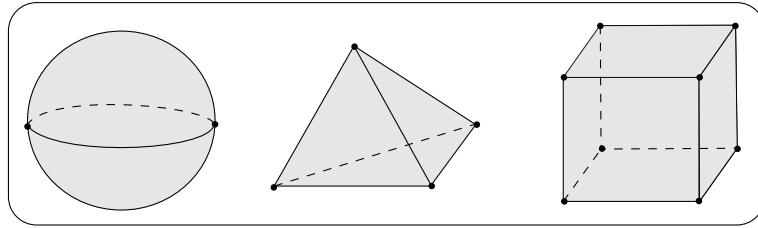


Figura 1.2: Diferentes complexos na esfera.

**Definição 1.1.4.** Seja  $K$  um  $n$ -complexo. O conjunto de todos os pontos nas células de  $K$  é

$$X = |K| = \{x; x \in \sigma \in K; \sigma \text{ é uma célula em } K\}.$$

$X$  é chamado **espaço subjacente** do complexo  $K$ .

**Definição 1.1.5.** A **característica de Euler** de um  $n$ -complexo regular  $K$ , denotada por  $\chi(K)$  é definida pela soma alternada do número de células do complexo  $K$ , isto é

$$\chi(K) = \#(0\text{-célula}) - \#(1\text{-célula}) + \#(2\text{-célula}) - \dots - (-1)^n \#(n\text{-célula}),$$

onde  $\#(r\text{-célula})$  denota o número de  $r$ -células do complexo  $K$ .

Em particular, para um 2-complexo, denotando  $F = \#(\text{faces})$ ,  $A = \#(\text{arestas})$  e  $V = \#(\text{vertices})$ , a carecterística de Euler é dada por:

$$\chi(K) = V - A + F.$$

## 1.2 Superfícies

**Definição 1.2.1.** Uma  **$n$ -variedade**  $M$  é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e tal que para cada  $x \in M$  existe um aberto  $U \subset M$  com  $x \in U$  e um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$ , onde  $V$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Uma 2-variedade é chamada de **superfície**.

**Exemplo 1.2.2.** A esfera  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ , é uma superfície. Como um ponto na esfera,  $x$  possui vizinhanças da forma

$$N = \{y \in \mathbb{R}^3; |x - y| < r, y \in S^2\}.$$

Essas vizinhanças se parecem com discos bidimensionais os quais foram um pouco deformados.

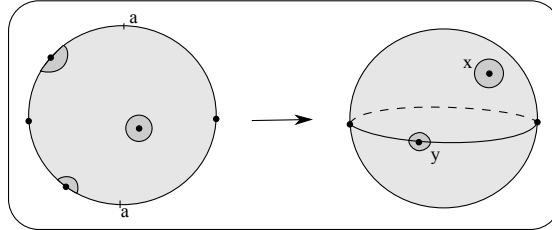


Figura 1.3: Vizinhanças de  $x$  e  $y$  em  $S^2$ .

**Definição 1.2.3.** [12] Uma **superfície com bordo** é um espaço topológico tal que todo ponto possui uma vizinhança topologicamente equivalente ou a um disco aberto  $n$ -dimensional ou o meio disco, dado por

$$D_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x| < r \text{ e } x_n \geq 0\}.$$

Os pontos com vizinhança de meio disco são chamados **pontos de bordo**.

**Exemplo 1.2.4.** O cilindro e a faixa de Mobius são superfícies com bordo, pois possuem pontos com somente vizinhanças de meio disco (ver Figura 1.4).

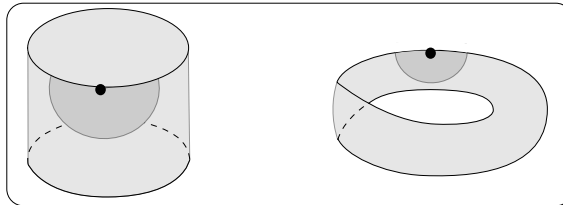


Figura 1.4: Pontos de bordo e vizinhança.

O bordo do cilindro consiste de dois círculos, e o bordo da faixa de Mobius é um único círculo.

**Definição 1.2.5.** [12] Uma superfície  $M$  é **orientável** se contém uma faixa de Mobius. Caso contrário, se existe um caminho que inverte a orientação, dizemos que  $M$  é **não-orientável**.

**Definição 1.2.6.** [12] Um espaço topológico bidimensional  $M$  é **triangulável** se o seu espaço subjacente  $K$  é homeomorfo a  $M$  e possui apenas células triangulares que satisfazem a condição de que dois triângulos são identificados ao longo de uma aresta ou somente um vértice ou são disjuntos.

**Definição 1.2.7.** Uma triangulação de um complexo  $K$  é dito **complexo simplicial** ou uma **triangulação** em  $M$ . Uma célula de um complexo simplicial é dito **simplex**.



**Definição 1.2.8.** Uma **triangulação de uma superfície** é um simplicial 2-complexo tal que:

- i) Cada aresta é identificada com exatamente uma outra aresta;
- ii) Um dado vértice pode pertencer a  $n$  triângulos, denotados por  $T_1, \dots, T_n$ , de modo que nesta sequência, dois a dois triângulos são adjacentes e possuem uma aresta em comum e  $T_n$  identifica com  $T_1$  ao longo de uma aresta.

**Teorema 1.2.9.** *Uma superfície é compacta se, e somente se, qualquer triangulação possui um número finito de triângulos.*

A demonstração do Teorema [1.2.9](#) pode ser encontrada em [\[12\]](#) página 80.

**Definição 1.2.10.** Uma superfície é dita **fechada** se é compacta e não possui bordo.

O seguinte resultado e sua prova é encontrado em [\[12\]](#) página 81.

**Teorema 1.2.11.** *Uma superfície é conexa se, e somente se, uma triangulação pode ser arranjada na ordem  $T_1, \dots, T_n$ , de modo que cada triângulo possui no mínimo uma aresta identificada com a aresta do triângulo anterior.*

**Exemplo 1.2.12.** A Figura [1.5](#) ilustra uma triangulação da esfera ( $S^2$ ). Como pode-se ver, cada triângulo possui pelo menos uma aresta comum com a aresta de outro triângulo. Além disso, qualquer triangulação de  $S^2$  é finita. Portanto, ela é uma superfície compacta e conexa.

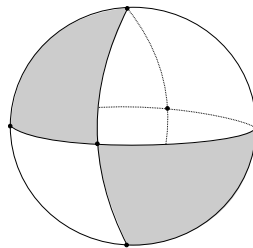


Figura 1.5: Uma triangulação de  $S^2$ .

## 1.3 Característica de Euler

Como já vimos na Definição [1.2.8](#), uma triangulação de uma superfície é um 2-complexo, então de acordo com a Definição [1.1.5](#), a característica de Euler de uma superfície  $M$  é dada por:

$$\chi(M) = V - A + F,$$

onde  $F$ ,  $A$  e  $V$  denotam o número de faces, arestas e vértices, respectivamente, da triangulação da superfície  $M$ . O Teorema [1.3.1](#) pode ser encontrado em [\[12\]](#) página 109.

**Teorema 1.3.1.** *A característica de Euler é um invariante topológico para superfícies compactas e conexas.*

**Proposição 1.3.2.** *Se  $M$  e  $N$  são superfícies compactas e conexas, então*

$$\chi(M \cup N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N).$$

*Demonstração.* Primeiramente, consideramos o caso em que  $M \cap N = \emptyset$ , ou seja,  $\chi(M \cap N) = 0$ . Como  $M$  e  $N$  são disjuntas, então é suficiente considerar um 2-complexo em cada superfície para calcular a característica de Euler de  $\chi(M \cup N)$ . Assim, temos

$$\chi(M \cup N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N) = \chi(M) + \chi(N).$$

Agora, fazemos o caso em que  $M \cap N \neq \emptyset$ . Construindo um 2-complexo  $K$  em  $M \cap N$  de modo que  $|K|$  é homeomorfo a  $M \cap N$ , temos

$$\chi(M \cap N) = \chi(K).$$

A partir de  $K$ , construímos um 2-complexo  $K'$  em  $M \cup N$  tal que sua restrição à  $M \cap N$  seja  $K$ . Supondo que  $|K'|$  seja homeomorfo à  $M \cup N$ , temos

$$\chi(M \cup N) = \chi(K').$$

Sejam  $K_M$  e  $K_N$  as restrições de  $K'$  às superfícies  $M$  e  $N$ , respectivamente. Assim,

$$\chi(M) = \chi(K_M) \text{ e } \chi(N) = \chi(K_N).$$

e

$$\chi(K') = \chi(K_M) + \chi(K_N) - \chi(K).$$

Portanto,

$$\chi(M \cup N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N).$$

□

**Proposição 1.3.3.** *Seja  $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ , onde  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , é uma superfície com bordo compacta e conexa, tal que para quaisquer  $i, j = 1, 2, \dots, k$ , ou  $M_i \cap M_j = \emptyset$  ou  $M_i \cap M_j$  é homeomorfo a  $S^1$ . Então*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \chi(M_i).$$

*Demonstração.* Segue da Proposição [1.3.2](#) e do fato que  $\chi(S^1) = 0$ . □

Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies. Remova um pequeno disco de cada uma, e cole os círculos do bordo destes discos para formar uma nova superfície.

**Definição 1.3.4.** [\[12\]](#) A superfície obtida pela construção acima é chamada **soma conexa** de  $S_1$  e  $S_2$  e é denotada por  $S_1 \# S_2$ .

**Exemplo 1.3.5.** A Figura [1.6](#) ilustra uma soma conexa entre dois toros.

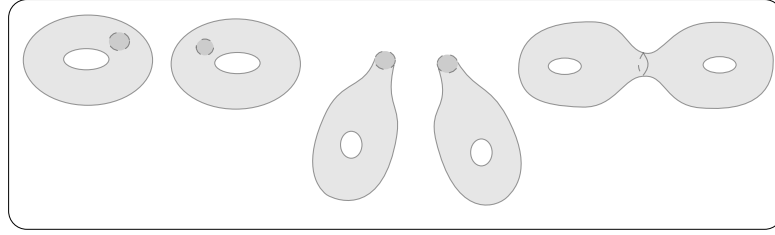


Figura 1.6: Construção da soma conexa.

**Observação 1.3.6.** Ao efetuarmos a soma conexa de uma superfície qualquer com a esfera, não alteramos (a menos de homeomorfismo) a superfície. Em outras palavras,  $S^2$  é o elemento neutro da soma conexa de superfícies.

**Proposição 1.3.7.** Para a soma conexa de duas superfícies,  $M$  e  $N$ , temos

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

*Demonstração.* Seja  $D_i$  um disco na superfície  $M_i$ ,  $i = 1, 2$ . Pela proposição [1.3.3](#), temos

$$\chi(M_i) = \chi(M_i - D_i) + \chi(D_i) = \chi(M_i - D_i) + 1.$$

Além disso,

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi((M_1 - D_1) \cup (M_2 - D_2)) = \chi(M_1 - D_1) + \chi(M_2 - D_2).$$

Logo,

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) - 1 + \chi(M_2) - 1 = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

□

**Notação:** Usamos a seguinte notação para superfícies:

- i) O toro é denotado por  $\mathbb{T}$ ;
- ii) O plano projetivo é denotado por  $\mathbb{P}$ ;
- iii) A garrafa de Klein é denotado por  $\mathbb{K}$ .

**Teorema 1.3.8.** Toda superfície compacta e conexa,  $S$  é homeomorfa a esfera, a soma conexa de  $n$  toros ou a soma conexa de  $m$  planos projetivos, isto é:

$$S \cong S^2 \# n\mathbb{T} \# m\mathbb{P}$$

para algum  $n \geq 0$  e  $m \geq 0$ .

A prova do Teorema [1.3.8](#) pode ser encontrada em [\[12\]](#) página 1001.

**Exemplo 1.3.9.** A Figura [1.7](#) ilustra alguns exemplos de superfícies compactas e conexas.

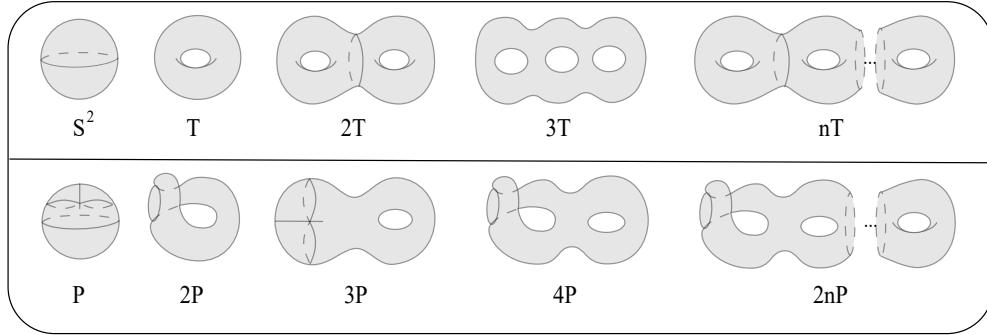


Figura 1.7: Superfícies fechadas orientadas e não orientadas.

Superfície	Característica de Euler
esfera	2
$n$ toros	$2 - 2n$
$m$ planos projetivos	$2 - m$

Tabela 1.1: Características de Euler.

Agora podemos determinar a característica de Euler de todas as superfícies, observando a Tabela [1.3](#).

**Definição 1.3.10.** Seja  $S$  uma superfície compacta. Então o gênero de  $S$  é dado por:

$$g(S) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(S)) & \text{se } S \text{ é orientada} \\ \frac{2}{2} - \chi(S) & \text{se } S \text{ é não orientada} \end{cases}.$$

Com a Definição [1.3.10](#) determinamos o gênero de todas as superfícies a partir de sua característica de Euler e vice versa, observando a Tabela [1.3](#).

Superfície	Gênero
esfera	0
$n$ toros	$n$
$m$ planos projetivos	$m$

Tabela 1.2: Características de Euler.

**Definição 1.3.11.** Seja  $S$  uma superfície com bordo, a superfície fechada associada a  $S$  é a superfície  $S'$  obtida pela identificação de um disco a cada uma de suas componentes de bordo. O gênero de  $S'$  é dado pelo gênero de  $S$ .

**Observação 1.3.12.** O bordo de  $S$  consiste de círculos disjuntos. Se  $S$  possui  $k$  componentes de bordo, então  $S'$  pode ser considerada como  $S$  com  $k$  discos ou 2-células adicionadas. Portanto

$$\chi(S') = \chi(S) + k.$$

**Proposição 1.3.13.** [\[12\]](#) Se  $S$  é uma superfície com  $k$  componentes de bordo, então

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g(S) - k & \text{se } S \text{ é orientada} \\ 2 - g(S) - k & \text{se } S \text{ é não orientada} \end{cases}.$$

*Demonstração.* Sejam  $S$  uma superfície com  $k$  componentes de bordo e  $S'$  a superfície associada a  $S$ , de acordo com a Observação [1.3.12](#). Temos

$$\chi(S) = \chi(S') - k.$$

Suponha que  $S$  seja orientada, então  $S'$  é orientada e, pela Definição [1.3.10](#),

$$\chi(S') = 2 - 2g(S').$$

Da definição [1.3.11](#) temos

$$\chi(S) = 2 - 2g(S) - k.$$

Analogamente, se  $S$  é não orientada, então  $\chi(S) = 2 - g(S) - k$ . □

## 1.4 Grafos com pesos nos vértices

Nesta seção apresentamos conceitos e resultados importantes da teoria de grafos, dando uma maior atenção aos grafos com pesos nos vértices, que no decorrer deste estudo terá um papel fundamental na classificação de aplicações estáveis.

**Definição 1.4.1.** Um grafo finito  $G(V, E)$  é formado por um conjunto  $\{u_1, u_2, \dots, u_V\}$  de  $V$  pontos chamados **vértices** e um conjunto de  $E$  traços de curvas chamados **arestas**, onde cada aresta conecta um par de vértices de  $V$ .

**Observação 1.4.2.** Um grafo é um 1-complexo.

**Exemplo 1.4.3.** Na Figura [1.8](#) temos exemplos de vários tipos de grafos que serão caracterizados pelas definições nesta seção.

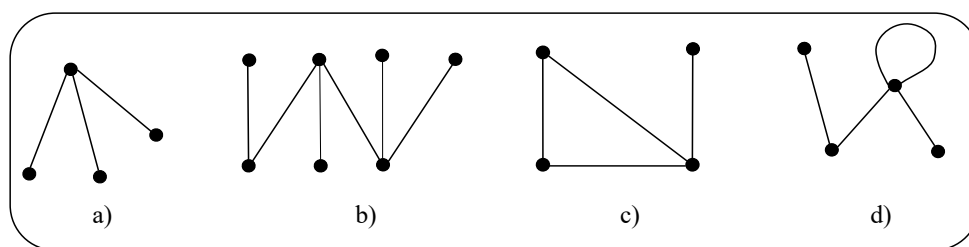


Figura 1.8: Exemplos de grafos.

**Definição 1.4.4.** Um **caminho** sobre um grafo  $G(V, E)$  é uma sequência de vértices distintos e arestas distintas  $v_1 a_1 v_2 a_2 \dots a_k v_{k+1}$ , onde  $a_j$  é incidente aos vértices  $v_j$  e  $v_{j+1}$ , isto é, a aresta  $a_j$  é conecta vértices  $v_j$  e  $v_{j+1}$ .

**Notação:** Usamos a notação  $uv$ , para a aresta que conecte os vértices  $u$  e  $v$ .

**Definição 1.4.5.** Dize que um grafo  $G(V, E)$  é **conexo** se existe um caminho que liga quaisquer dois de seus vértices.

**Exemplo 1.4.6.** Os quatro grafos ilustrados na Figura [1.8](#) são conexos.

Apesar da definição de grafo acima ser um pouco mais geral, vamos restringir a maior parte do nosso estudo a grafos conexos.

**Definição 1.4.7.** Um caminho fechado no grafo, ou seja, um caminho tal que  $v_1 = v_n$ , é dito **ciclo** e uma aresta que conecta um vértice nele mesmo, é chamada **laço**.

A Figura 1.8 c) e d) ilustram exemplos de um grafo com ciclo e um grafo com laço, respectivamente.

**Definição 1.4.8.** Uma **árvore** é um grafo conexo que não possui ciclos. Uma árvore com uma única aresta é dita **árvore irredutível**.

**Exemplo 1.4.9.** Nos itens a) e b) na Figura 1.8 temos exemplos de árvores.

Os grafos tipo árvore são grafos específicos que terão grande relevância nas demonstrações dos principais resultados apresentados no decorrer deste trabalho, pois após definir algumas ferramentas que serão utilizadas, esse tipo de grafo será nosso ponto de partida para generalizações de grafos. Sendo assim, serão tratados alguns resultados válidos somente para esses grafos.

**Observação 1.4.10.** Toda árvore  $G(V, E)$  tem  $E = V - 1$  arestas.

**Definição 1.4.11.** O número de **ciclos livres** de um dado grafo com  $V$  vértices é o número mínimo de arestas que podem ser retiradas do grafo para obter uma árvore com os  $V$  vértices.

**Definição 1.4.12.** Um grafo é dito **bipartido** se é possível atribuir sinais  $\pm$  a cada um de seus vértices de modo que cada aresta conecte vértices de sinais opostos. Caso contrário o grafo é dito **não-bipartido**.

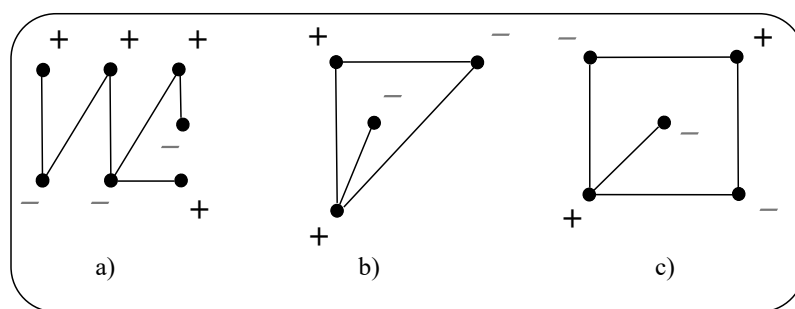


Figura 1.9: a) e c) são grafos bipartidos e b) é não-bipartido.

Note que a distribuição dos sinais  $\pm$  não é única, o que pode levar a questão: Não existiria em b) uma distribuição dos sinais que fosse satisfeita a Definição 1.4.12 para grafo bipartido? O Teorema 1.4.13 dá uma boa caracterização de grafos bipartidos.

O Teorema 1.4.13 é devido a White, e pode ser encontrado em [26] página 11.

**Teorema 1.4.13.** *Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui nenhum ciclo ímpar. Caso contrário, se o grafo tem um ciclo ímpar, isto é, um ciclo com um número ímpar de arestas, ele é não-bipartido. Conseqüentemente toda árvore é um grafo bipartido.*

**Exemplo 1.4.14.** Do Teorema 1.4.13, pode-se afirmar que o grafo b) da Figura 1.9 é não-bipartido, pois possui um ciclo de tamanho 3. O mesmo ocorre com os grafos d) e e) da Figura 1.8, já que um laço sempre conecta um vértice nele mesmo. Os grafos em a) e c) na Figura 1.9 são bipartidos pois possuem zero ciclos e um único ciclo de tamanho quatro, respectivamente.

**Definição 1.4.15.** Um grafo com peso nos vértices é um grafo que tem associado a cada um dos seus vértices ou o par  $(t, 0)$  ou o par  $(0, p)$ , onde  $t$  e  $p$  são números naturais.

**Exemplo 1.4.16.** A Figura 1.10 a) e b) ilustram grafos com pesos nos vértices.

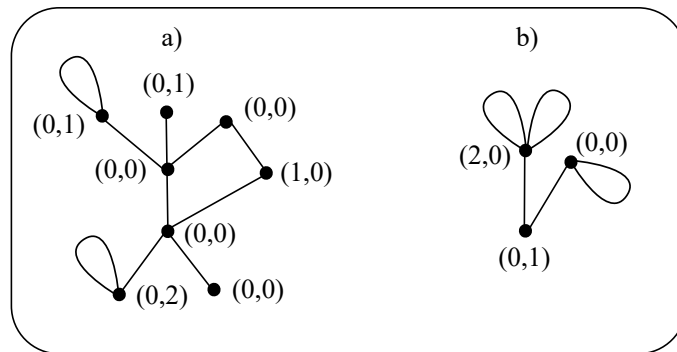


Figura 1.10: Exemplos de grafos com peso.

**Definição 1.4.17.** Dois grafos com pesos nos vértices,  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , são **isomorfos** se existe uma bijeção  $\psi : V(\mathcal{G}_1) \rightarrow V(\mathcal{G}_2)$ , entre os conjuntos de vértices de  $\mathcal{G}_1$  e de  $\mathcal{G}_2$ , preservando as adjacências dos vértices (com pesos correspondentes), isto é:  $uw \in E(\mathcal{G}_1)$  se, e somente se,  $\psi(u)\psi(w) \in E(\mathcal{G}_2)$ , onde  $V(\mathcal{G}_i)$  e  $E(\mathcal{G}_i)$  são, respectivamente, os vértices e arestas do grafo  $\mathcal{G}_i$ , com  $i = 1, 2$ .

**Observação 1.4.18.** Se dois grafos  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  têm as 5-upla  $(V, E, T, P, S)$  diferentes então os grafos não são isomorfos, pois não teria como estabelecer uma bijeção entre dois grafos. De fato, se a quantidade de vértices, arestas, laços e laços  $\star$  são diferentes já não é possível estabelecer uma bijeção  $\psi$  entre os vértices e entre as arestas. Se o peso total dos dois grafos forem diferentes, algum vértice em  $\mathcal{G}_1$  terá um peso  $t_i$  ( $p_i$ ) que nenhum vértice em  $\mathcal{G}_2$  terá, não preservando assim os pesos nos vértices que se correspondem pela bijeção.

## 1.5 Grafos associados a superfícies com curvas

Sejam  $M$  uma superfície fechada (sem bordo) e  $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^E \alpha_i$  um conjunto com  $E$  curvas fechadas, simples e regulares sobre  $M$ . O conjunto  $\mathcal{C}$  separa  $M$  em um conjunto de  $V$  regiões conexas, isto é,  $M \setminus \mathcal{C}$ , é uma união disjunta de regiões conexas de  $M$ . Pode-se associar um grafo  $\mathcal{G}$  ao par  $(M, \mathcal{C})$  da seguinte forma:

- i) cada região conexa  $U_i$  de  $M \setminus \mathcal{C}$  corresponde a um vértice  $v_i$  em  $\mathcal{G}$  e cada curva  $\alpha_j$  de  $\mathcal{C}$  corresponde a uma aresta de  $e_j$  em  $\mathcal{G}$ ;

- ii) uma aresta  $e_j$  incide no vértice  $v_i$  se, e somente se, a curva de  $\mathcal{C}$  correspondente a  $e_j$  está no bordo da região  $M \setminus \mathcal{C}$  corespondente a  $v_i$ ;
- iii) um laço ocorre quando a curva correspondente é bordo (duas vezes) de uma única região;
- iv) um vértice  $v_i$  recebe o peso  $(t_i, 0)$  se a região correspondente a  $v_i$  é orientada e tem gênero  $t_i$ , e um vértice  $v_j$  recebe o peso  $(0, p_j)$  se a região correspondente a  $v_j$  é não orientada e tem gênero  $p_j$ .

**Observação 1.5.1.** Quando  $M$  é não orientada temos duas possibilidades para uma curva fechada  $\alpha$  em  $M$  (veja Figura 1.11):

- i) A curva  $\alpha$  tem uma pequena vizinhança homeomorfa ao cilindro;
- ii) A curva  $\alpha$  tem uma pequena vizinhança homeomorfa a faixa de Mobius.

Associamos uma  $\star$  a cada aresta do grafo  $\mathcal{G}$  que corresponde a uma curva singular de  $\mathcal{C}$  que possui uma vizinhança homeomorfa a faixa de Mobius.

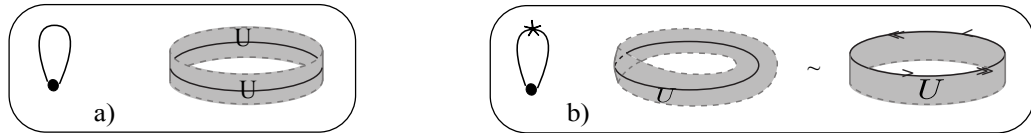


Figura 1.11: Vizinhança de uma curva.

**Observação 1.5.2.** Uma aresta com  $\star$  sempre determina um laço, isto é, ambas as extremidades da aresta correspondem ao mesmo vértice do grafo, uma vez que a faixa de Mobius possui apenas uma componente de bordo.

**Exemplo 1.5.3.** A Figura 1.12 ilustra os grafos de cinco superfícies com curvas.

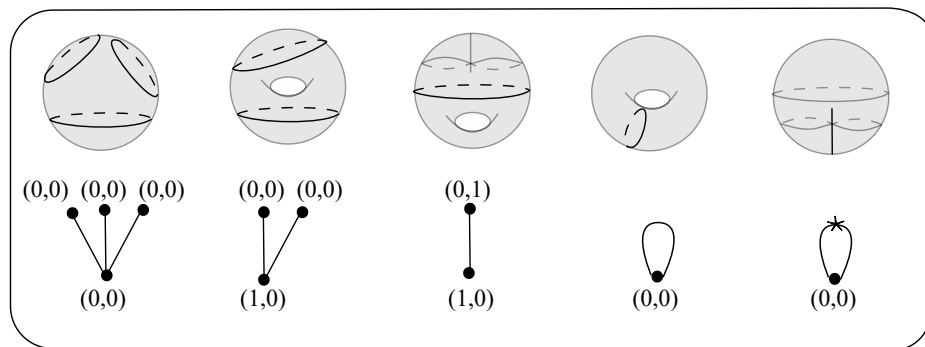


Figura 1.12: Exemplos de grafos associados a superfícies com curvas

**Notação:** Denotamos por  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$  o grafo que possui  $V$  vértices,  $E$  arestas,  $S$  laços com  $\star$  e peso total  $(T, P)$ . Denotando por  $A$  o número de arestas que conectam dois vértices distintos e  $L$  o número de laços (sem  $\star$ ) do grafo temos  $E = A + L + S$ .



**Observação 1.5.4.** As curvas correspondentes as arestas que são conectadas a dois vértices distintos são bordo de duas componentes disjuntas de  $M$ . As curvas correspondentes a laços (sem  $\star$ ) são bordo da mesma componente duas vezes. As curvas correspondentes a laços  $\star$  são bordo de uma única componente uma única vez. Consequentemente, o número de componentes de bordo de uma região  $M_i$  correspondente a um vértice  $v_i$  é igual a  $E_i + 2L_i + S_i$ .

**Observação 1.5.5.** Considere o par  $(M, \mathcal{C})$ , onde  $M$  é uma superfície fechada e  $\mathcal{C}$  é um conjunto de curvas fechadas simples e regulares sobre  $M$ . Se  $M = \cup_{i=1}^V M_i$ , com cada  $M_i$  sendo uma componente de  $M \setminus \mathcal{C}$  e  $k_i = \#\partial(M_i)$  (isto é,  $k_i$  é o número de componentes de bordo de  $M_i$ ) então  $\sum_{i=1}^V k_i = 2A + 2L + S$ , onde  $A$  fica multiplicado por dois, pois as curvas correspondentes as arestas de  $A$  são bordo de duas componentes disjuntas de  $M$ . Como  $E = A + L + S$ , então  $\sum_{i=1}^V k_i = 2E - S$ .

**Proposição 1.5.6.** *Todo grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$  pode ser associado a um par  $(M, \mathcal{C})$ , onde  $M$  é uma superfície fechada e  $\mathcal{C}$  é um conjunto com  $E$  componentes de curvas fechadas e mergulhadas sobre  $M$ .*

*Demonstração.* Dado um grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$  pode-se obter o par  $(M, \mathcal{C})$  associado a  $\mathcal{G}$  seguindo o seguinte algoritmo (ver Figura 1.13):

- i) primeiramente, retiramos os laços  $\star$  e os pesos de cada vértice, obtendo o grafo  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E - S)$ ;
- ii) agora, mergulhamos o grafo  $\mathcal{G}'$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- iii) tomamos uma região (convenientemente), que denotamos por  $R$ , vizinhança de  $\mathcal{G}'$  em  $\mathbb{R}^3$ ;
- iv) considere a superfície fechada bordo de  $R$ , que é conhecida como vizinhança tubular de  $\mathcal{G}'$  e é denotada por  $Z$ ;
- v) cada aresta  $e_i$  de  $\mathcal{G}'$  corresponde a uma curva fechada  $\alpha_i$  em  $Z$ , transversal à aresta  $e_i$ . Denotamos por  $\mathcal{C}$  o conjunto destas curvas. O par  $(Z, \mathcal{C})$  corresponde ao grafo  $\mathcal{G}'$ ;
- vi) para realizar o grafo  $\mathcal{G}'$  com os pesos, fazemos em cada uma das regiões  $Z_i$  de  $Z$ , correspondente ao vértice  $v_i$  com peso  $(t_i, 0)$ , onde  $t_i > 0$ , uma soma conexa de uma superfície fechada e orientada  $T_i$  com gênero  $t_i$  com  $Z$ ; e a cada região  $Z_j$  de  $Z$ , correspondente ao vértice  $v_j$  com peso  $(0, p_j)$ , onde  $p_j > 0$ , uma soma conexa de uma superfície fechada não orientada de gênero  $p_j$ ;
- vii) Finalmente, para obtermos o grafo com laços  $\star$ , em cada região  $Z_j$  de  $Z$ , correspondente ao vértice  $v_j$ , de onde retiramos os laços  $\star$  no item i), fazemos uma soma conexa de um plano projetivo.

Esta soma conexa resulta numa superfície fechada  $M$ , onde o par  $(M, \mathcal{C})$  realiza o grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ .  $\square$

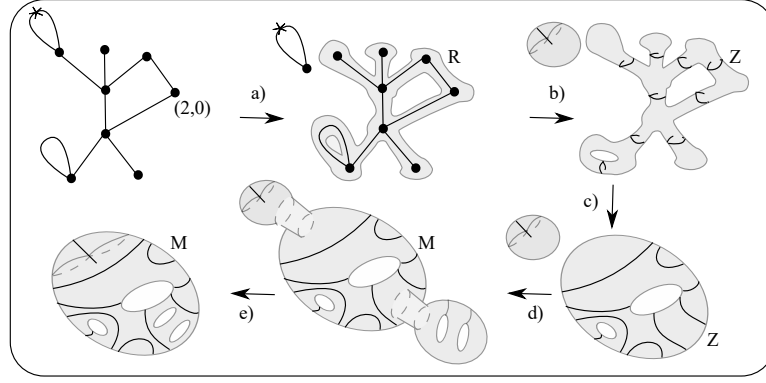


Figura 1.13: Exemplo de superfície com curva associada a um grafo.

**Proposição 1.5.7.** *Se  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$  é um grafo associado ao par  $(M, \mathcal{C})$ , onde  $M$  é uma superfície fechada. Então o gênero de  $M$  é dado por:*

- i)  $g(M) = 1 - V + E + T$ , se  $M$  é orientada;
- ii)  $g(M) = 2(1 - V + E + T) + P - S$ , se  $M$  é não orientada.

*Demonstração.* Para cada região  $M_i$  em  $M \setminus \mathcal{C}$  denotamos por  $k_i$  o número de componentes de bordo de  $M_i$ , por  $g_i$  o gênero da região  $M_i$ .

- i) Suponha  $M$  orientada, então  $P = S = 0$ . Das proposições [1.3.3](#) e [1.3.13](#) temos

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^V \chi(M_i) = \sum_{i=1}^V (2 - 2g_i - k_i) = 2V - 2 \sum_{i=1}^V g_i - \sum_{i=1}^V k_i.$$

Como  $\sum_{i=1}^V g_i$  corresponde a soma total de pesos do grafo, neste caso  $T$ , e pela Observação [1.5.5](#)

$$\sum_{i=1}^V k_i = 2E - S = 2E,$$

temos

$$\chi(M) = 2V - 2T - 2E.$$

Substituindo o  $\chi(M)$  na Definição [1.3.10](#) temos

$$g(M) = 1 - \frac{1}{2}\chi(M) = 1 - (V - T - E) = 1 - V + E + T.$$

- ii) Agora, suponha  $M$  não orientada. Das proposições [1.3.3](#) e [1.3.13](#) temos

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^V \chi(M_i) = \sum_{i=1}^V (2 - g_i - k_i) = 2V - 2 \sum_{i=1}^V g_i - \sum_{i=1}^V k_i. \quad (1.1)$$

Como  $g_i$  corresponde ao peso de cada vértice do grafo e  $M$  é não orientada, então

$$\sum_{i=1}^V g_i = 2T + P. \quad (1.2)$$

Pela Observação [1.5.5](#), temos

$$\sum_{i=1}^V k_i = 2E - S. \quad (1.3)$$

Então, substituindo as Equações [1.2](#) e [1.3](#) na equação [1.1](#), obtemos

$$\chi(M) = 2V - 2T - P - 2E + S. \quad (1.4)$$

Substituindo a Equação [1.4](#) na Definição [1.3.10](#) temos

$$g(M) = 2 - \chi(M) = 2(1 - V + E + T) + P - S.$$

□

# Capítulo 2

## Aplicações estáveis entre superfícies

Neste capítulo introduzimos conceitos de aplicações estáveis entre superfícies, superfícies fechadas, como conjunto singular e conjunto regular. Além disso, ilustramos vários exemplos de aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano projetivo. Por último, associamos grafos com pesos nos vértices às aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano projetivo. As principais referências usadas nesse capítulo são [4], [5], [18], [17] e [27].

### 2.1 Aplicações estáveis

Nesta seção apresentamos alguns conceitos a respeito de aplicações estáveis do plano no plano e temos como referência [5].

Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades suaves,  $\mathcal{F}(M, N)$  o conjunto de todas as aplicações de  $M$  em  $N$  e  $C^\infty(M, N)$  o conjunto de todas as aplicações suaves de  $M$  em  $N$ .

**Definição 2.1.1.** Duas aplicações  $f, g \in C^\infty(M, N)$  são  **$\mathcal{A}$ -equivalentes** se existem difeomorfismos  $k : M \rightarrow M$  e  $l : N \rightarrow N$  tais que o diagrama abaixo comuta, isto é,  $g = l \circ f \circ k^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ k \downarrow & & \downarrow l \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

**Definição 2.1.2.** Uma aplicação  $f \in C^\infty(M, N)$  é dita  **$\mathcal{A}$ -estável** se existe uma vizinhança  $W_f$  de  $f$  em  $C^\infty(M, N)$  tal que para cada  $g \in W_f$ ,  $g$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f$ .

**Notação:** O conjunto das aplicações estáveis de  $C^\infty(M, N)$  é denotado por  $\mathcal{E}(M, N)$ .

**Exemplo 2.1.3.** Na Figura [2.1], temos três aplicações de  $S^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Observe que em b) a aplicação é não estável com um ponto de tangência, pois através de

uma pequena perturbação em uma vizinhança do ponto de tangência, a aplicação passa a ter dois pontos de interseção, como em c), ou nenhum ponto de interseção, como em a).

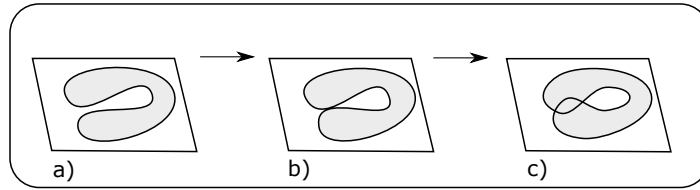


Figura 2.1: Exemplo de aplicações estáveis e não estáveis.

**Definição 2.1.4.** Sejam  $U$  e  $V$  vizinhanças abertas de  $p \in \mathbb{R}^n$ . Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicações suaves. Definimos a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists \text{ vizinhança } W \text{ de } p, W \subset U \cap V \text{ tal que } f|_W = g|_W.$$

As classes de equivalência  $\sim$  são ditas **germes** de aplicações no ponto  $p$ .

**Teorema 2.1.5.** [27] O conjunto  $\mathcal{E}(M, N)$  é aberto e denso em  $C^\infty(M, N)$ .

**Definição 2.1.6.** O complementar do conjunto  $\mathcal{E}(M, N)$  em  $C^\infty(M, N)$  é  $\mathcal{D} = C^\infty(M, N) \setminus \mathcal{E}(M, N)$ , que é chamado conjunto **discriminante**, é formado pelas aplicações não estáveis.

Em [20] Ohmoto e Aicardi afirmaram que o conjunto discriminante pode ser decomposto (ou estratificado) em diferentes subconjuntos (estratos), onde os estratos de codimensão um separam o conjunto  $\mathcal{E}(M, N)$  em componentes conexas disjuntas e as interseções destes estratos formam os conjuntos de codimensões maiores que um em  $C^\infty(M, N)$ .

**Definição 2.1.7.** Duas aplicações  $f, g : M \rightarrow N$  são ditas **estavelmente isotópicas** se existe uma aplicação suave (estável)  $F : M \times I \rightarrow N$  tal que para cada  $t \in I$  a aplicação  $F_t = F|_{M \times \{t\}}$  é estável, com  $F_0 = f$  e  $F_1 = g$ .

**Observação 2.1.8.** Dizer que  $f$  e  $g$  são estavelmente isotópicas é equivalente a dizer que  $f$  e  $g$  se encontram na mesma componente conexa de  $\mathcal{E}(M, N)$ , pois uma isotopia estável define um caminho entre estas aplicações.

## 2.2 Singularidades de aplicações estáveis

O principal objetivo desta seção é apresentar mais alguns conceitos sobre aplicações estáveis, bem como conjunto regular, conjunto singular e contorno aparente. As referências desta seção são [4], [5] e [27].

**Definição 2.2.1.** Seja  $f \in C^\infty(M, N)$  uma aplicação estável. Um ponto  $p \in M$  é dito ponto **regular** de  $f$  se numa vizinhança do ponto  $p$ , a aplicação  $f$  é um difeomorfismo local. Caso contrário,  $p$  é dito um ponto **singular** de  $f$ .

**Observação 2.2.2.** Pode-se dizer que um ponto  $p \in M$  é um ponto singular de  $f$  se a aplicação linear  $df_p$  não tem posto máximo, pois todo difeomorfismo local tem posto máximo.

**Definição 2.2.3.** Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável entre as superfícies  $M$  e  $N$ .

1. O conjunto de todos os pontos singulares de  $f$ , denotado por  $\Sigma f$ , é chamado conjunto **singular** de  $f$ ;
2. O conjunto de todos os pontos não singulares, denotado por  $M \setminus \Sigma f$ , é chamado de conjunto regular de  $f$ ;
3. A imagem do conjunto singular de  $f$ , denotado por  $f(\Sigma f)$  é chamado de **contorno aparente** ou **conjunto de ramificação** de  $f$ .

Segundo Whitney [27], as aplicações entre superfícies podem ser vistas, localmente, como aplicações do plano no plano. Então, se  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação estável e  $p = (x, y)$  é um ponto em  $U$ , então um dos seguintes casos ocorre:

- i)  $p$  é um ponto regular, então  $f$  é localmente, em uma vizinhança de  $p$ , da forma  $(x, y) \mapsto (x, y)$ ;
- ii)  $p$  é um ponto singular de  $f$  do tipo:
  - a) **Dobra**, se  $T_p \Sigma(f) \oplus \text{Ker}(df_p) = T_p U$ . Neste caso, pode-se escolher um sistema de coordenadas  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$  centrado em  $p$  tal que  $(x, y) \mapsto (x, y^2)$ ;
  - b) **Cúspide**, se  $T_p \Sigma(f) = \text{Ker}(df_p)$ . Neste caso, pode-se encontrar coordenadas centradas em  $p$  tais que  $f$  é, localmente, da forma  $(x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$ .

**Definição 2.2.4.** O ponto de uma interseção transversal entre duas curvas de dobra é chamado **ponto duplo**.

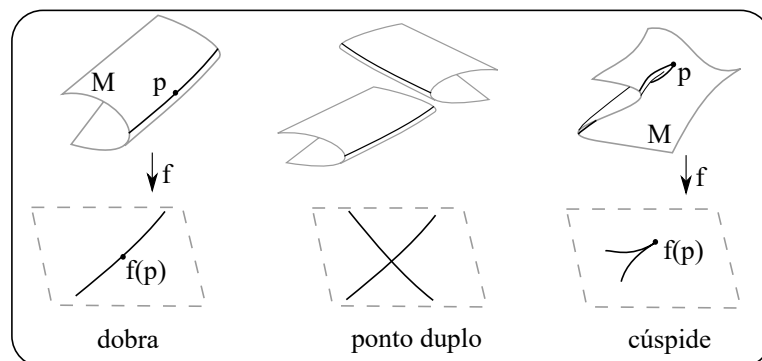


Figura 2.2: Exemplo de dobra e cúspide.

**Observação 2.2.5.** Se  $f \in C^\infty(M, N)$  é uma aplicação estável, então:

1. O conjunto singular  $\Sigma f$  é formado por um conjunto de curvas simples disjuntas e mergulhadas (suaves e sem auto interseção) no domínio de  $f$ , podendo ter pontos de cúspides isolados.
2. O conjunto  $\Sigma f$  separa o conjunto regular  $M \setminus \Sigma f$  em componentes conexas que são imersas por  $f$  sobre a imagem.

**Proposição 2.2.6.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável. Então a soma conexa de duas componentes do conjunto regular  $M \setminus \Sigma f$ ,  $M_1$  e  $M_2$ , com gênero  $g_1$  e  $g_2$ , respectivamente:*

- i) produz uma região orientada (não orientada) com gênero  $g_1 + g_2$ , se  $M_1$  e  $M_2$  são orientadas (não orientadas);*
- ii) forma uma região não orientada com gênero  $2g_1 + g_2$ , se  $M_1$  é orientada e  $M_2$  é não orientada.*

*Demonstração.* Sejam  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável e considere  $M_1$  e  $M_2$  duas componentes conexas de  $M \setminus \Sigma f$ . Então, pela Proposição [1.3.7](#), temos

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

- i) Se  $M_1$  e  $M_2$  são orientadas, a Definição [1.3.10](#) nos dá a seguinte igualdade:

$$\chi(M_i) = 2 - 2g_i, \quad i = 1, 2.$$

Logo, o gênero de  $M_1 \# M_2$  é dado por

$$g(M_1 \# M_2) = \frac{1}{2} (2 - \chi(M_1 \# M_2)) = g_1 + g_2.$$

Por outro lado, se  $M_1$  e  $M_2$  são não orientadas, da Definição [1.3.10](#), temos

$$\chi(M_i) = 2 - g_i, \quad i = 1, 2.$$

Então,

$$g(M_1 \# M_2) = (2 - \chi(M_1 \# M_2)) = g_1 + g_2.$$

- ii) Se  $M_1$  é orientada e  $M_2$  é não orientada, então, pela Definição [1.3.10](#), temos

$$\begin{cases} \chi(M_1) = 2 - 2g_1 \\ \chi(M_2) = 2 - g_2 \end{cases}.$$

Logo,

$$g(M_1 \# M_2) = (2 - \chi(M_1 \# M_2)) = 2g_1 + g_2.$$

□

**Observação 2.2.7.** Se duas aplicações  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes, os conjuntos singulares  $\Sigma f$  e  $\Sigma g$  são difeomorfos e os contornos aparentes  $f(\Sigma f)$  e  $g(\Sigma g)$  são difeomorfos. Assim, duas aplicações que não possuem conjuntos singulares difeomorfos ou contornos aparentes difeomorfos não são  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

**Definição 2.2.8.** Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável, a **orientação das curvas do contorno aparente** de  $f$  é dada da seguinte maneira: ao percorrer a curva de acordo com sua orientação, o número de pré imagens de  $f$  é sempre maior do lado esquerdo.

**Definição 2.2.9.** Sejam  $M$  e  $N$  duas superfícies orientadas e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável. Uma região  $U$  de  $M \setminus \Sigma f$  é dita **positiva** se tem a orientação preservada por  $f$ , e **negativa** no caso contrário.

**Definição 2.2.10.** Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável. O **fecho** de cada componente conexa regular de  $M \setminus \Sigma f$  cuja orientação é preservada por  $f$ , será denotado por  $U_i^+$ , enquanto o fecho de cada componente conexa regular cuja orientação é invertida por  $f$ , será denotado por  $U_j^-$ .

**Notação:** Denotamos por  $M^+ = \bigcup_i U_i^+$  e  $M^- = \bigcup_j U_j^-$ .

Segue que

$$M = M^+ \cup M^- \text{ e } \Sigma f = M^+ \cap M^-,$$

onde

$$U_i^+ \cap U_j^- \in \Sigma f \text{ ou } U_i^+ \cap U_j^- = \emptyset.$$

**Observação 2.2.11.** A característica de Euler de  $M$  é dada por

$$\chi(M) = \chi(M^+) + \chi(M^-).$$

Pois,  $M = M^+ \cup M^-$ , então, pela Proposição [1.3.2](#)

$$\chi(M) = \chi(M^+) + \chi(M^-) - \chi(M^+ \cap M^-).$$

Mas, o conjunto  $M^+ \cap M^- = \Sigma f$  é composto apenas de curvas fechadas, simples e disjuntas sobre  $M$  (homeomorfas a  $S^1$ ), logo  $\chi(M^+ \cap M^-) = 0$  e

$$\chi(M) = \chi(M^+) + \chi(M^-).$$

## 2.3 Exemplos de aplicações estáveis

Apresentamos nesta seção diversos exemplos de aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano projetivo.

**Exemplo 2.3.1.** A Figura [2.3](#) a) ilustra duas aplicações estáveis da esfera no plano projetivo com duas curvas singulares, duas cúspides e nenhum ponto duplo. Já em b) temos uma aplicação com três curvas singulares, sem pontos de cúspide e pontos duplos.

**Exemplo 2.3.2.** Na Figura [2.4](#) ilustramos duas aplicações estáveis da esfera no plano projetivo, com o mesmo contorno aparente.



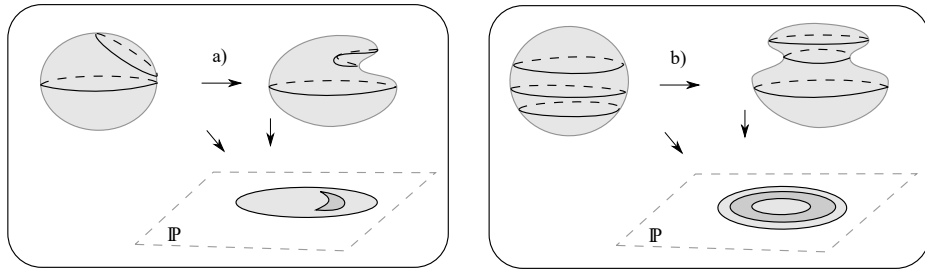


Figura 2.3: Aplicações da esfera no plano projetivo.

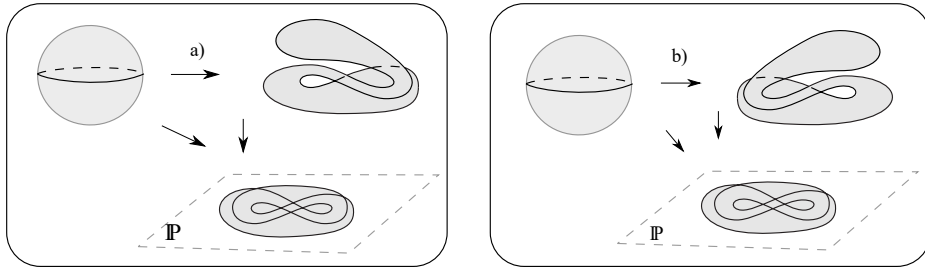


Figura 2.4: Disco de Milnor.

**Exemplo 2.3.3.** Na Figura 2.5 temos duas aplicações estáveis do toro no plano projetivo, onde a primeira possui duas curvas singulares, nenhuma cúspide e quatro pontos duplos e a segunda aplicação possui quatro curvas no conjunto singular não possui pontos de cúspides e pontos duplos.

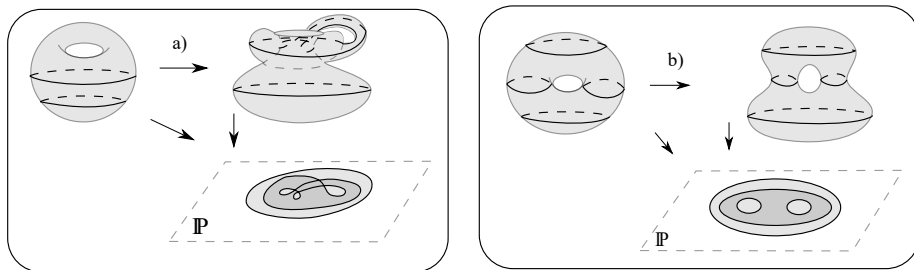


Figura 2.5: Aplicações do toro no plano projetivo.

**Exemplo 2.3.4.** A Figura 2.6 representa duas aplicações do bitoro no plano projetivo com uma única curva singular, onde em a) temos uma aplicação com quatro cúspides e quatro pontos duplos, e em b) o contorno aparente da aplicação não possui pontos de cúspides e possui quatro pontos duplos.

**Exemplo 2.3.5.** A Figura 2.7 ilustra aplicações da garrafa de Klein no plano projetivo. A primeira representa uma aplicação com uma única curva singular, dois pontos de cúspides e dois pontos duplos, na segunda temos uma aplicação com duas curvas singulares, sem pontos de cúspides e com dois pontos duplos.

**Exemplo 2.3.6.** A Figura 2.8 ilustra duas aplicações entre planos projetivos, onde a aplicação a) tem uma única curva singular, três pontos de cúspide e três pontos duplos, e a aplicação b) possui duas curvas singulares, quatro cúspides e não possui pontos duplos.

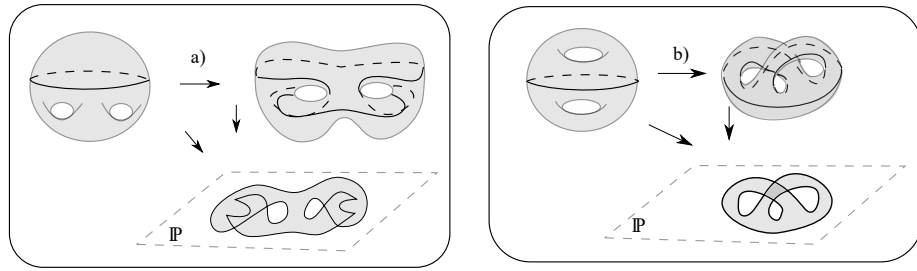


Figura 2.6: Aplicações do bitoro no plano projetivo.

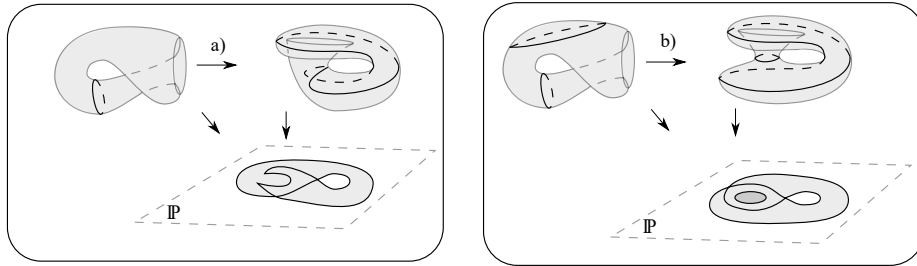


Figura 2.7: Aplicações da garrafa de Klein no plano projetivo.

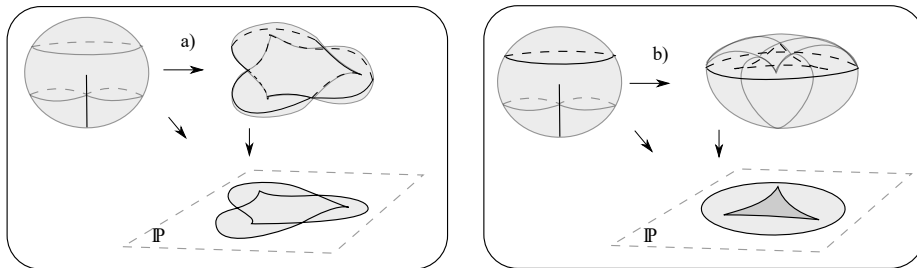


Figura 2.8: Aplicações entre planos projetivos.

**Exemplo 2.3.7.** Na Figura 2.9 temos duas aplicações da garrafa de Klein, que pode ser vista como a soma conexa  $\mathbb{P}\#\mathbb{P}$ , no plano projetivo com uma única curva singular. À direita temos uma aplicação dobra sem pontos duplos e a aplicação da esquerda possui quatro cúspides e não possui pontos duplos.

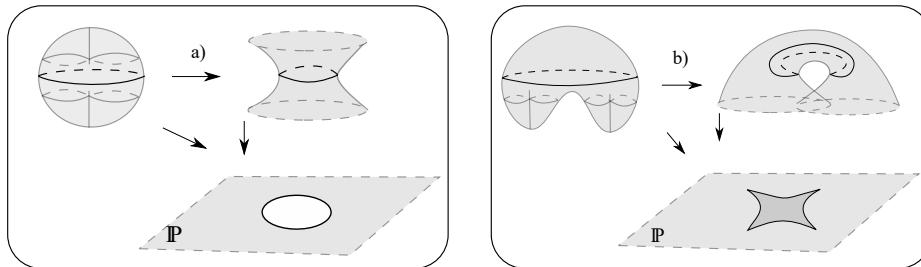


Figura 2.9: Aplicações da garrafa de Klein no plano projetivo.

## 2.4 Grafos associados a aplicações estáveis

Sejam  $M$  e  $N$  duas superfícies fechadas com gênero  $g_M$  e  $g_N$ , respectivamente, e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável. O conjunto singular  $\Sigma f$  é uma coleção finita de curvas fechadas, simples e regulares em  $M$  formadas por pontos de dobra com possíveis pontos de cúspides isolados. Mais ainda, o contorno aparente de  $f$ ,  $f(\Sigma f)$ , é uma coleção de curvas fechadas em  $N$  com singularidades isoladas correspondentes aos pontos de cúspides de  $f$ .

Naturalmente, pode-se associar ao par  $(M, \Sigma f)$  um grafo com pesos nos vértices, onde:

- i) cada região regular  $U_i$  de  $M \setminus \Sigma f$  corresponde a um vértice  $v_i$ ;
- ii) cada curva singular  $\alpha$  de  $\Sigma f$  determina uma aresta  $e_i$ ;
- iii) o gênero de  $U_i$  corresponde ao peso  $(t_i, 0)$  se a região  $U_i$  é orientada com gênero  $t_i$  e ao peso  $(0, p_i)$  se  $U_i$  é não orientada de gênero  $p_i$ .
- iv) um vértice  $v$  e uma aresta  $e$  são incidentes se, e somente se, a curva singular correspondente a aresta  $e$  pertence a fronteira da região regular correspondente ao vértice  $v$ .
- v) um laço  $\star$  corresponde a uma curva de  $M \setminus \Sigma f$  que tem vizinhança homeomorfa a faixa de Möbius.

**Definição 2.4.1.** Dada uma aplicação estável  $f : M \rightarrow N$ , seu grafo  $\mathcal{G}(f)$  é o **grafo dual** de  $\Sigma f$  em  $M$ .

**Observação 2.4.2.** O grafo dual é um invariante para aplicações estáveis, ou seja, dois grafos duais não isomorfos carregam a informação que suas aplicações associadas não são  $\mathcal{A}$ -equivalentes. De fato, no grafo está codificado informações do conjunto regular de aplicações estáveis entre superfícies e consegue separar algumas aplicações com o mesmo contorno aparente como ilustram as Figuras [2.10](#) e [2.11](#).

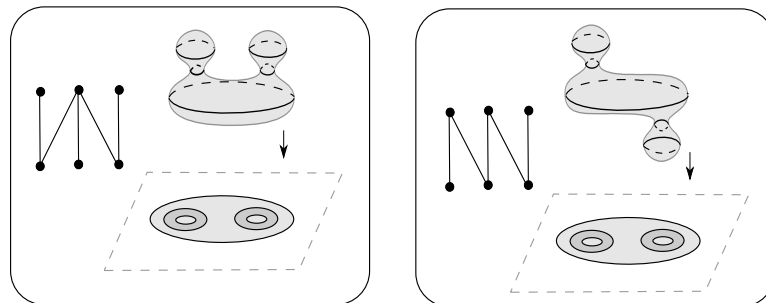


Figura 2.10: Aplicações da esfera no plano com seus respectivos grafos

**Observação 2.4.3.** Cada aplicação estável está associada a um grafo e cada grafo pode ser associada uma classe de diferentes aplicações com pares  $(M, \mathcal{C})$  equivalentes, onde  $\mathcal{C}$  corresponde ao conjunto de curvas singulares da aplicação.

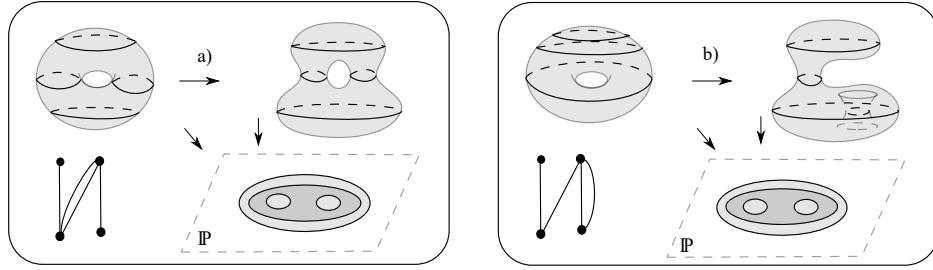


Figura 2.11: Aplicações toro no plano com  $A = 4$

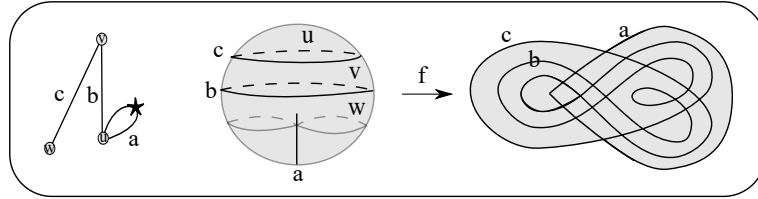


Figura 2.12: Aplicação estável do plano projetivo no plano com uma cúspide.

**Exemplo 2.4.4.** A Figura 2.12 ilustra o grafo,  $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(3, 3)$ , e o contorno aparente de uma aplicação estável com uma única cúspide do plano projetivo no plano. O conjunto singular dessa aplicação tem três componentes conexas. As regiões correspondentes aos vértices  $u$ ,  $v$  e  $w$  são respectivamente um disco, um cilindro e uma faixa de Möbius. A cúspide aparece na curva que tem uma pequena vizinhança homeomorfa a faixa de Möbius (representada na figura pela região  $u$ ).

**Exemplo 2.4.5.** A Figura 2.13 mostra quatro aplicações de superfícies fechadas (plano projetivo e garrafa de Klein) no plano projetivo cujos grafos associados possuem um único laço e todas as regiões regulares são orientadas (cada vértice possui peso do tipo  $(t, 0)$ ).

- O grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(2, 2)$  representa uma aplicação entre planos projetivos com duas curvas singulares, onde uma delas possui vizinhança homeomorfa a faixa de Möbius.
- A aplicação entre dois planos projetivos, representada pelo grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(1, 1)$ , possui uma única curva singular que tem como vizinhança a faixa de Möbius.
- A figura ilustra uma aplicação da garrafa de Klein no plano projetivo com grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 2)$  e que possui duas curvas singulares, ambas com vizinhança homeomorfa ao cilindro.
- Por fim, temos uma aplicação da garrafa de Klein no plano projetivo com grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(1, 1)$ . Note que, nesse caso, a única curva singular não desconecta a região regular.

**Exemplo 2.4.6.** A Figura 2.14 ilustra quatro aplicações dobra (sem cúspides) cujos grafos associados são árvores.

- Temos uma aplicação estável do bitoro no plano projetivo cujo grafo associado é  $\mathcal{G}_{(2,0)}^0(2, 2)$  e que tem uma única curva singular cuja imagem possui quatro pontos duplos;

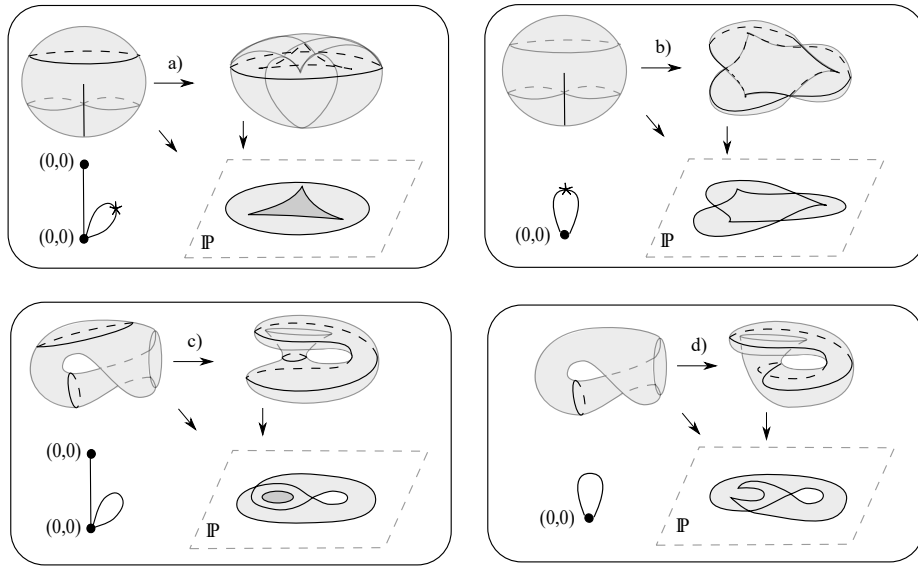


Figura 2.13: Aplicação estáveis de grafos com laço.

- b) A figura ilustra uma aplicação estável da garrafa de Klein no plano projetivo cujo grafo é  $\mathcal{G}_{(2,0)}^0(2, 1)$  que possui uma única curva singular sem pontos duplos;
- c) A imagem corresponde a uma aplicação estável do toro no plano projetivo com grafo  $\mathcal{G}_{(1,0)}^0(3, 2)$  tendo duas curvas singulares e quatro pontos duplos;
- d) Temos uma aplicação estável de uma superfície não orientada de gênero três no plano projetivo com grafo  $\mathcal{G}_{(1,1)}^0(2, 1)$  que possui uma única curva singular e quatro pontos duplos.

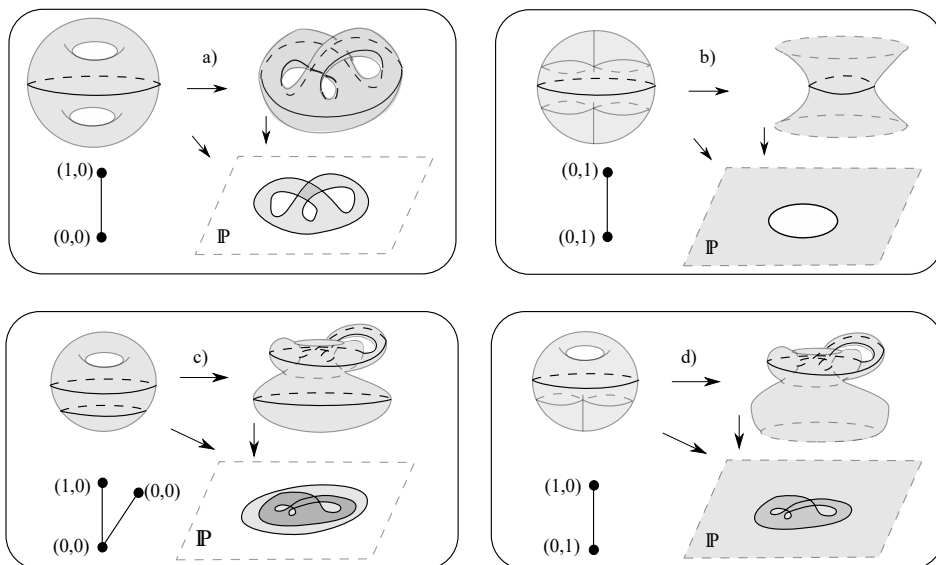


Figura 2.14: Exemplo de aplicação dobra.

**Proposição 2.4.7.** *Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície fechada e  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$  o seu grafo dual. Então  $M$  é orientada se, e somente se,  $\mathcal{G}$  é bipartido e  $P = S = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$  uma aplicação estável onde  $M$  é uma superfície fechada e  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$  o grafo dual de  $f$

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $M$  seja orientada. Então o conjunto regular  $M \setminus \Sigma f$  possui apenas componentes conexas orientadas, logo, cada componente possui peso do tipo  $(t, 0)$ , portanto,  $P = 0$ . Mais ainda, o grafo dual de  $f$  não possui laços  $\star$ , caso contrário, a superfície  $M$  contém uma faixa de Möbius e portanto seria não orientada, logo,  $S = 0$ . Agora, as curvas de  $\Sigma f$  separam as regiões de  $M \setminus \Sigma f$  de sinais opostos, como cada vértice de  $\mathcal{G}$  está associado a uma região de  $M \setminus \Sigma f$  e cada aresta de  $\mathcal{G}$  é associada a uma curva de  $\Sigma f$ , então pode-se associar a cada vértice de  $\mathcal{G}$  o mesmo sinal da região de  $M \setminus \Sigma f$  correspondente. Daí, cada aresta de  $\mathcal{G}$  conecta dois vértices de sinais opostos e, portanto,  $\mathcal{G}$  é bipartido.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $\mathcal{G}$  seja bipartido e  $P = 0$ . Então cada componente conexa de  $M \setminus \Sigma f$  é orientada, pois caso contrário  $P \neq 0$ . Além disso,  $S = 0$ , pois se  $S \neq 0$  o grafo  $\mathcal{G}$  é não bipartido. Por último, como  $\mathcal{G}$  é bipartido, então pode-se associar sinais de  $+$  e  $-$  aos vértices de  $\mathcal{G}$  de modo que cada aresta de  $\mathcal{G}$  conecta dois vértices de sinais opostos. Como cada aresta de  $\mathcal{G}$  está associada a uma curva de  $\Sigma f$  e cada vértice de  $\mathcal{G}$  é associado a uma região de  $M \setminus \Sigma f$ , e já sabemos que cada região de  $M \setminus \Sigma f$  é orientada, então cada curva de  $\Sigma f$  separa duas regiões de  $M \setminus \Sigma f$  com sinais opostos. Portanto,  $M$  é orientada.  $\square$

**Exemplo 2.4.8.** A Figura 2.13 ilustra os grafos de quatro aplicações estáveis  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ , onde  $M$  é não orientada em todas as quatro aplicações, uma vez que seus respectivos grafos não são bipartidos. A Figura 2.14 representa os grafos, que são todos bipartidos, de quatro aplicações estáveis  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ , onde em a) e c) as superfícies do domínio são orientadas, pois  $S = P = 0$ , e as superfícies ilustradas em b) e d) são não orientadas pois  $P \neq 0$ .

# Capítulo 3

## Invariantes do contorno aparente

Neste capítulo introduzimos as transições de codimensão um e dois, bem como seus efeitos no conjunto singular e no contorno aparente de aplicações estáveis. Além disso, apresentamos os invariantes locais e globais de aplicações estáveis. As principais referências utilizadas neste estudo são [8], [10], [20] e [21].

### 3.1 Transições de codimensão um

Considere uma homotopia  $F : M \times I \rightarrow N$  entre duas aplicações estáveis  $f, g : M \rightarrow N$ , no conjunto  $\mathcal{E}(M, N)$ . A medida que  $t$  varia no intervalo  $I = [0, 1]$ , o contorno aparente de  $F_0 = f$  é deformado no contorno aparente de  $F_1 = g$ . Pode acontecer que ao longo do caminho entre  $f$  e  $g$ , para algum  $t_0 \in (0, 1)$  a aplicação  $F_{t_0}$  não seja estável. Neste caso os contornos aparentes não são difeomorfos e o mesmo pode ocorrer com os conjuntos singulares, como podemos ver na Figura 3.1.

**Exemplo 3.1.1.** A Figura 3.1 ilustra uma sequência de quatro aplicações da esfera no plano, onde as aplicações  $f$  e  $g$  pertencem à mesma classe de homotopia e a aplicação  $F_{t_0}$  é não estável.

Denotamos cada estrato local do conjunto  $\mathcal{D}$  por letras maiúsculas. Além disso, coorientamos o estrato  $X$  com uma regra local, a definir. Ao longo de um caminho entre duas aplicações  $f$  e  $g$ , quando o caminho atravessa o estrato  $X$  na direção da coorientação escrevemos  $\Delta X = 1$ , caso contrário  $\Delta X = -1$ .

A Tabela 3.1, retirada de [20], apresenta as formas locais a 1-paramêtro (na vizinhança de zero), de aplicações de monogermes, bigermes e trigermes, as quais detalhamos no decorrer do trabalho. Cada transição é representada localmente por uma sequência de três aplicações em  $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ . As aplicações do centro, pertencem ao conjunto  $\mathcal{D}$ , são não estáveis de codimensão um para  $a = 0$  e estáveis para  $a \neq 0$ . Estas sequências são chamadas **transições de codimensão um**.

Uma transição de codimensão um pode ser vista como uma aplicação de codimensão um que está na interseção do conjunto discriminante  $\mathcal{D}$  com um

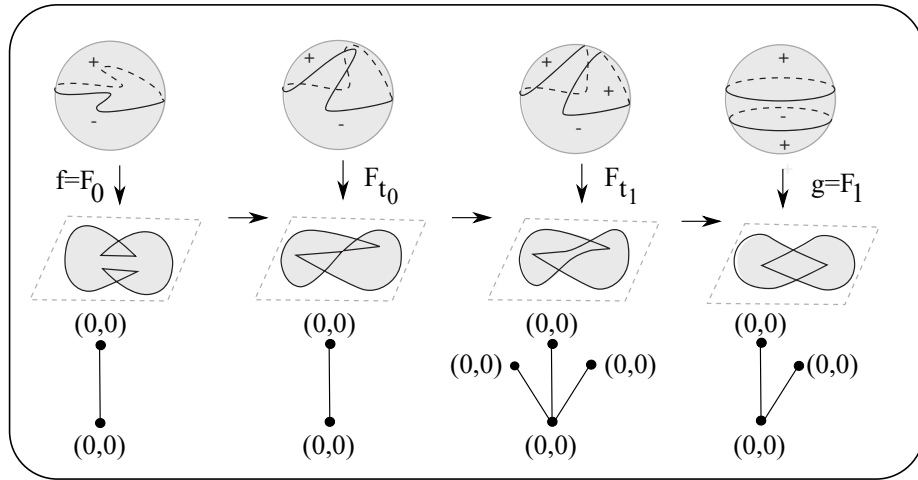


Figura 3.1: Homotopia entre as aplicações  $f$  e  $g$ .

Tipo	Nome	Forma Normal
$L$	lábios	$(x, y^3 + y(x^2 - a))$
$B$	bicos	$(x, y^3 - y(x^2 - a))$
$S$	rabo de andorinha	$(x, y^4 + xy - ay^2)$
$T^0$	tangências de dobras	$(x, -y^2 + a), (x', x'^2 + y'^2)$
$T^1$	tangências de dobras	$(x, y^2 + a), (x', x'^2 + y'^2)$
$T^2$	tangências de dobras	$(x, y^2 + a), (x', x'^2 - y'^2)$
$C^1$	cúspides com dobra	$(x, y^3 + xy), (y'^2 - a, x')$
$C^2$	cúspides com dobra	$(x, y^3 + xy), (-y'^2 - a, x')$
$Q^0$	pontos triplos	$(x + y^2, x - y^2 + a), (x', y'^2), (-x''^2, y'')$
$Q^1$	pontos triplos	$(x + y^2, x - y^2 + a), (x', y'^2), (x''^2, y'')$

Tabela 3.1: Estratos de codimensão um em  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ .

caminho que liga duas aplicações estáveis em diferentes componentes conexas de  $\mathcal{E}(M, N)$ .

Agora, apresentamos mais detalhadamente cada transição de codimensão um. Primeiramente, vamos considerar as transições **Lábios**, **Bicos** e **Rabo de andorinha**, ilustradas na Figura 3.2, que envolvem aplicações com mono-germes.

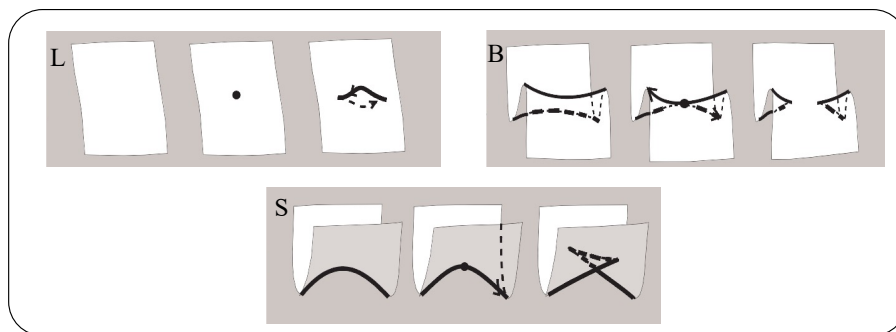


Figura 3.2: Transições de codimensão um de 1-germe em  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ .

**Lábios** ( $L$ ): No interior de uma região regular, nasce uma nova curva singular



com duas novas cúspides, apontando para a mesma região regular. A coorientação desta transição é na direção onde o número de cúspides aumenta:  $\Delta L = 1$ .

O número de pontos de cúspides é aumentado por 2, o número de componentes singulares e regulares é aumentado por 1, este fato está ilustrado na Figura 3.3 de b) para c), onde ocorrem duas transições Lábios simultaneamente.

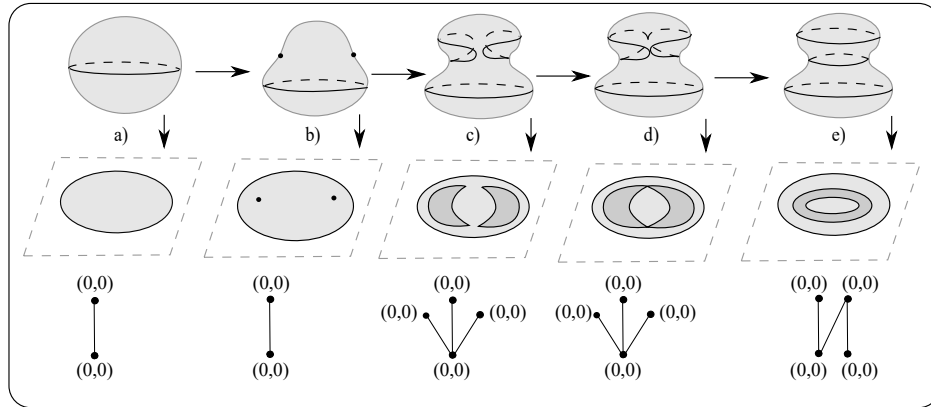


Figura 3.3: Transições Lábios e Bicos em  $C^\infty(S^2, \mathbb{R}^2)$ .

A transição de lábios altera o número de componentes conexas do conjunto singular de uma aplicação, então ela também altera o número de arestas de um grafo. Tal fato é ilustrado na Figura 3.3.

**Bicos ( $B$ ):** Na região regular, tangenciam dois arcos de curvas singulares criando duas novas cúspides. A corientação é na direção da região onde o número de cúspides aumenta:  $\Delta B = 1$ .

O número de cúspides é aumentado por 2, o número total de componentes de  $\Sigma f$  pode aumentar ou diminuir por 1, o que pode ser visto na Figura 3.3 de d) para e). Denotamos por  $B_v^+$  a transição Bicos correspondente ao nascimento de um par de cúspides onde o número de componentes de  $\Sigma f$  aumenta, e consequentemente aumenta uma aresta ao grafo de  $f$ , e por  $B_v^-$  a transição Bicos onde o número de componentes diminui, e consequentemente diminui uma aresta no grafo de  $f$  (veja Figura 3.4 a)).

A Figura 3.4 ilustra as transições Bicos, onde  $X$ ,  $X_1$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $Z_1$  e  $Z_2$  representam as regiões de ocorrência da transição e os números 1 e 2 denotam o número de componentes de  $\Sigma f$ .

Por outro lado, a transição bicos pode aumentar (diminuir) o gênero por 1 ao mesmo tempo em que diminui (aumenta) por 1 o número de componentes do conjunto singular, o efeito desta transição no grafo da aplicação é o seguinte: o peso do grafo correspondente aumenta (diminui) por 1 enquanto o número de arestas diminui (aumenta) por 1, como ilustrado na Figura 3.5. Denotamos por  $B_w^+$  a transição Bicos que aumenta por 1 o gênero e diminui por 1 o número de componentes singulares, e por  $B_w^-$  a transição Bicos onde o gênero é diminuído por 1 e o número de componentes de  $\Sigma f$  aumenta (veja Figura 3.4 b)).  $\Delta B = \Delta B_v^+ + \Delta B_v^- + \Delta B_w^+ + \Delta B_w^-$ .

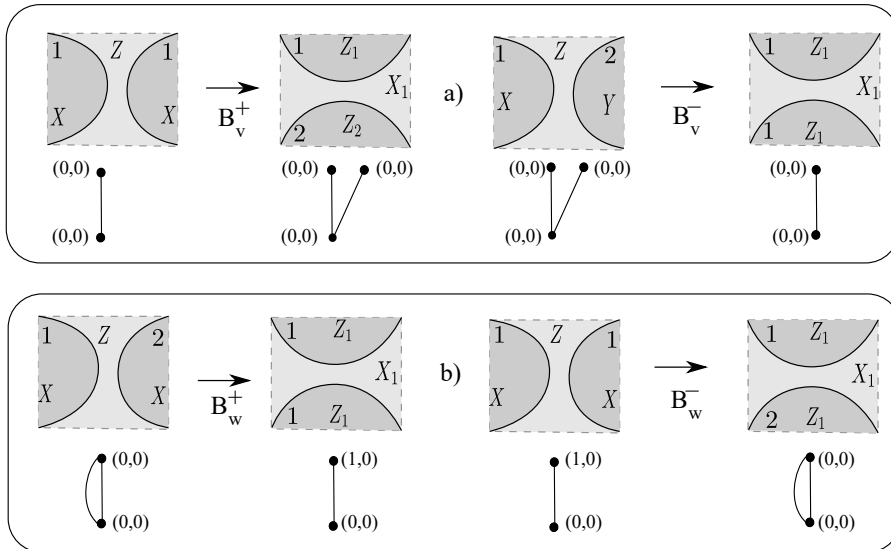


Figura 3.4: Decomposição da transição Bicos.

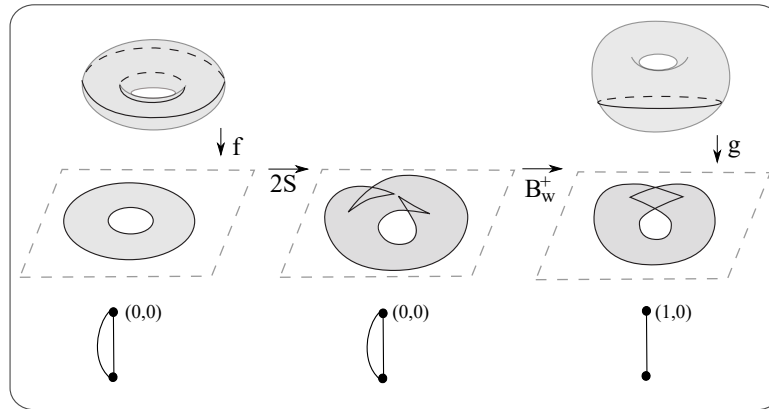


Figura 3.5: Transição Rabo de Andorinha e Bicos em  $C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2)$ .

Antes de continuarmos a detalhar as transições de codimensão um, vejamos alguns exemplos ilustrando os efeitos das transições lábios e bicos nos grafos.

**Exemplo 3.1.2.** Na Figura [3.6](#) apresentamos quatro aplicações estáveis da esfera no plano projetivo.

- A aplicação é dada pela projeção ortogonal da esfera no plano projetivo e tem como grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 1)$ ;
- Essa aplicação, cujo grafo é dado por  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(3, 2)$ , pode ser obtida aplicando uma transição Lábios na projeção ortogonal da esfera na aplicação a).
- A imagem representa uma aplicação com três curvas singulares, sem pontos duplos e com quatro pontos de cúspides cujo grafo é do tipo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(4, 3)$ . Essa aplicação pode ser obtida aplicando uma transição Lábios na aplicação b).
- A aplicação, cujo grafo é  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(4, 3)$ , tem três curvas singulares, nenhum ponto duplo e nenhuma cúspide. Essa aplicação pode ser obtida aplicando duas vezes a transição Bicos na projeção ortogonal ilustrada em c).

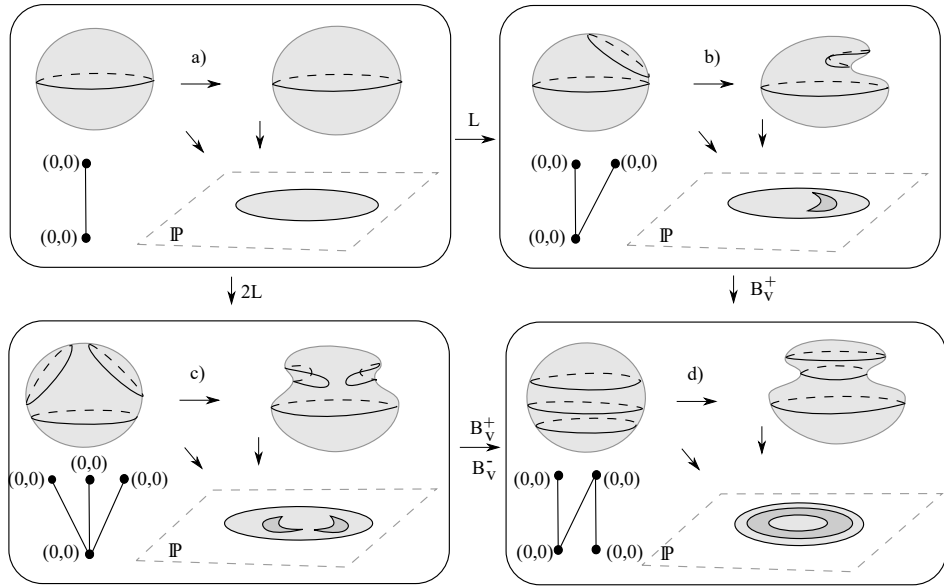


Figura 3.6: Aplicações estáveis da esfera no plano projetivo.

**Exemplo 3.1.3.** Na Figura 3.7 temos quatro aplicações estáveis e seus respectivos grafos, que ilustra os efeitos das transições bicos em um grafo.

- No exemplo mostramos uma aplicação entre dois planos projetivos com grafo  $\mathcal{G}_{(1,0)}^0(2,1)$ , cuja curva singular separa um disco de uma faixa de Mobius. Essa aplicação possui duas cúspides, nenhum ponto duplo e pode ser obtida através de uma transição bicos na aplicação identidade do plano projetivo nele mesmo.
- Aplicação entre planos projetivos cujo grafo associado é  $\mathcal{G}_{(0,1)}^0(3,2)$ , com duas curvas singulares, nenhuma cúspide e nenhum ponto duplo que pode ser obtida a partir de a) através de uma transição bicos, eliminando as duas cúspides.
- Ilustramos uma aplicação do toro no plano projetivo com dois pontos duplos, nenhum ponto de cúspide e duas curvas singulares que decompõem o toro em dois cilindros. O grafo dessa aplicação é dado por  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2,2)$ .
- Temos uma aplicação do toro no plano projetivo com grafo  $\mathcal{G}_{(1,0)}^0(2,1)$ . A aplicação possui uma única curva singular, que separa um disco e um toro com um disco removido, dois pontos duplos e duas cúspides, e pode ser obtida através de uma transição bicos na aplicação c).

A próxima transição de codimensão um a ser detalhada é a transição *Rabo de Andorinha*.

**Rabo de Andorinha ( $S$ ):** Sobre um arco de curva de dobras nasce dois pontos de cúspides, e um ponto duplo, sua coorientação é na direção onde o número de cúspides aumenta:  $\Delta S = 1$ .

A transição Rabo de Andorinha altera o número de pontos duplos por 1, o número de cúspides por 2 e o número de componentes regulares e singulares por 1, o que está ilustrado na Figura 3.5).

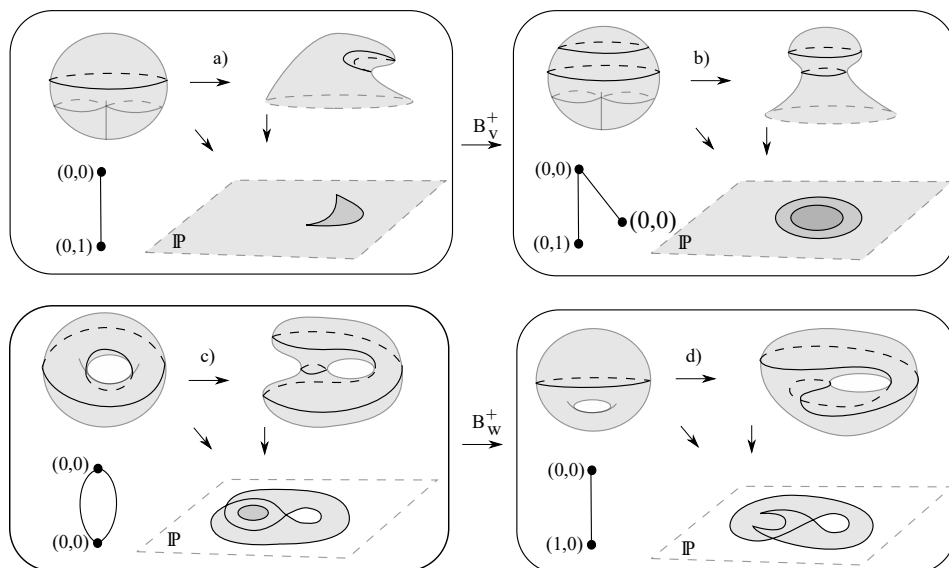


Figura 3.7: Aplicações estáveis obtidas através de transições bicoid.

As **Tangências** são transições de codimensão um envolvendo aplicações de bigermes. As tangências podem ocorrer de dois modos, que dão nome a estas transições, **entre duas curvas de dobras** e **entre uma cúspide e uma curva de dobra**. Essas transições são ilustradas nas Figuras 3.8 e 3.9.

As *Tangências entre duas curvas de dobra* se dividem em três casos. São denotadas por  $T^i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , e alteram somente o número de pontos duplos por 2, como pode ser visto na Figura 3.8.

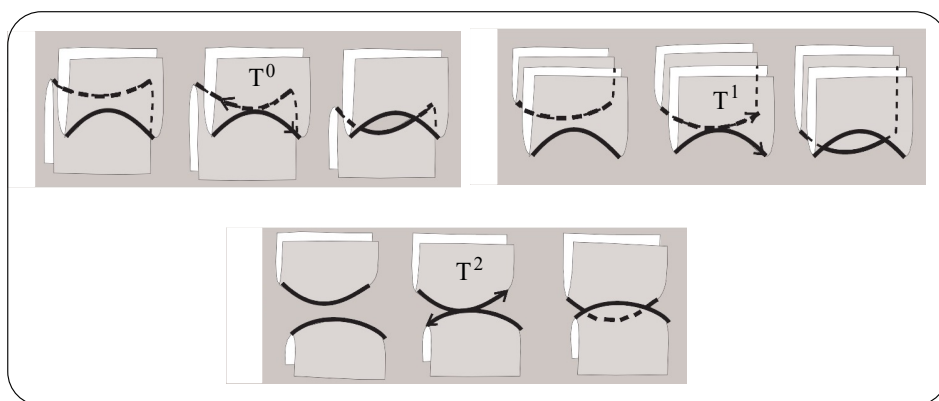


Figura 3.8: Transições tangências entre duas curvas de dobra.

$T^0$ : As orientações das duas componentes do conjunto de ramificação são opostas. A coorientação desse estrato é na direção da região onde o número de pontos duplos aumenta :  $\Delta T^0 = 1$ .

$T^1$ : As orientações das duas componentes do conjunto de ramificação são concordantes. A coorientação desse estrato é na direção da região onde o número de pontos duplos aumenta :  $\Delta T^1 = 1$ .

$T^2$ : As orientações das duas componentes do conjunto de ramificação são opostas. A coorientação desse estrato é na direção da região onde o número de pontos

duplos aumenta :  $\Delta T^2 = 1$ .

As transições *Tangências entre uma cúspide e uma curva de dobra*, se dividem em dois casos. São denotadas por  $C^i$ ,  $i = 1, 2$  e alteram somente o número de pontos duplos por 2, fato que está ilustrado na Figura 3.9.

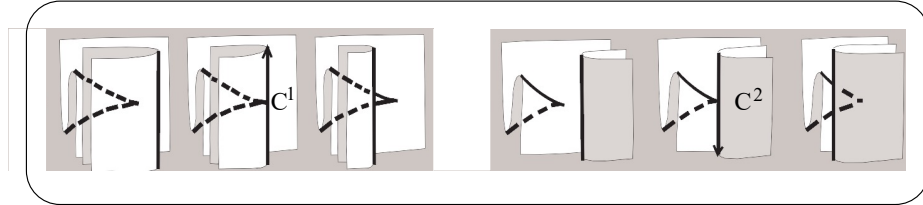


Figura 3.9: Transições tangências entre uma cúspide e uma dobra.

$C^1$ : A coorientação deste estrato é na direção onde o número de cúspides aumenta:  $\Delta C^1 = 1$ .

$C^2$ : A coorientação deste estrato é na direção onde o número de cúspides aumenta:  $\Delta C^2 = 1$ .

As transições **Pontos triplos**, envolvem aplicações de trigermes e são denotadas por  $Q^i$ ,  $i = 0, 1$ . Esta transição consiste na passagem por um ponto triplo formado pela interseção de três curvas de dobras, não alteram o conjunto singular nem o regular, como vemos na Figura 3.10.

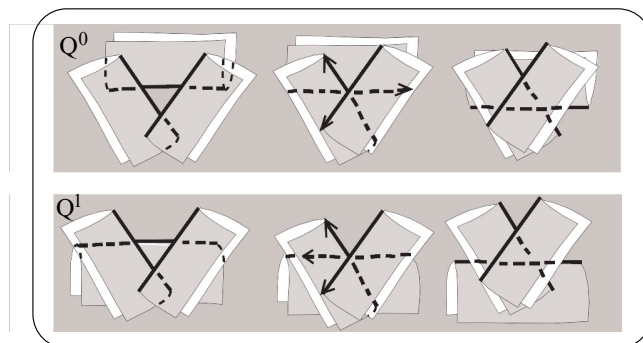


Figura 3.10: Transições pontos triplos.

$Q^0$ : As três setas de orientação saindo do ponto triplo são direcionadas a três vértices alternados de um hexagono. A coorientação desse estrato é na direção da região onde o número de pré imagens do novo triângulo nascido é maior:  $\Delta Q^0 = 1$ .

$Q^1$ : As três setas de orientação saindo do ponto triplo são direcionadas a três vértices adjacentes de um hexagono. A coorientação desse estrato é na direção da região onde o número de pré imagens do novo triângulo nascido é maior:  $\Delta Q^1 = 1$ .

**Teorema 3.1.4.** [24] *Sejam  $M$  e  $N$  superfícies fechadas. Se  $M$  é orientada e  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação estável, então o número de cúspides do contorno aparente  $f(\Sigma f)$  é par.*

**Observação 3.1.5.** As classes de homotopia de  $C^\infty(M, N)$  são conexas por caminhos, logo existe um caminho em  $C^\infty(M, N)$  que conecta duas aplicações em diferentes componentes conexas de cada classe de homotopia que atravessa  $\mathcal{D}$  passando somente por aplicações de codimensão um. Isto mostra que o Teorema 3.1.4 é bastante natural, pois  $M$  é orientada, então sempre é possível ligar uma aplicação estável qualquer a uma aplicação dobra (sem cúspide) passando pelo discriminante somente através de transições de codimensão um em  $C^\infty(M, N)$ . Todas as transições de codimensão um alteram o número total de cúspides sempre em um número par (ver Tabela 3.1).

A Tabela 3.1 mostra como cada estrato de codimensão um altera o número de pontos de cúspide, de pontos duplos e de componentes conexas de  $f(\Sigma f)$  de uma aplicação.

	$L$	$B_v^+$	$B_v^-$	$B_w^+$	$B_w^-$	$S$	$T^0$	$T^1$	$T^2$	$C^1$	$C^2$
Cúspides	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0
Pontos duplos	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2
Componentes singulares	1	1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.2: Estrato de codimensão um.

## 3.2 Transições de codimensão dois

O conjunto das transições de codimensão dois, formam o que chamamos de estratos de codimensão dois. Este estrato é muito importante para determinar os invariantes das aplicações estáveis que dependem das transições de codimensão um. A soma total dos valores recebidos das transições de codimensão um, ao longo de um caminho fechado em torno de uma transição de codimensão dois, deve ser nulo. O sistema composto por estas igualdades devem determinar os invariantes das aplicações, pois os estratos de codimensão dois consistem de interseções transversais de estratos locais de codimensão um, chamados triviais. A coorientação nesses estratos seguem as mesmas regras dos estratos triviais. Estratos de codimensão dois não triviais correspondem aos contornos aparentes com um único ponto degenerado de codimensão dois. Tal ponto é a imagem, sob  $f$ , de um a quatro pontos diferentes de  $M$ .

Analizamos todos os casos distintos pelas possíveis coorientações locais dos estratos de codimensão um. A Tabela 3.2 apresenta as formas locais a 2-parâmetro,  $a$  e  $b$  na vizinhança de zero, de aplicações com até quatro germes. No plano de coordenadas  $(a, b)$ , as aplicações de codimensão dois, ocorrem quando  $a = b = 0$ , na vizinhança de  $(0, 0)$  podem ocorrer as aplicações de codimensão um ou zero.

Na Figura 3.11, e nas demais imagens desta seção, cada curva representa estratos de codimensão um, a interseção e o complemento dessas curvas representam os estratos de codimensão dois correspondentes e os estratos

Estrato	Nome	Forma Normal
$A$	ganso	$(x, y^3 + x^3y + ay + bxy)$
$B^\pm$	borboleta	$(x, xy + y^5 + (\pm y^7) + ay^3 + by^2)$
$C$	gaivota	$(x, xy^2 + y^4 + y^5 + axy + by)$
$D_{2,2}^{1,1}$	barbatana	$(x^2 + y^3 + ay, y^2 + x^3 + bx)$
$E_{2,2}^{1,1}$	deltoide	$(x^2 - y^2 + ax^3 + ay, xy + bx)$
$F^-$	bicos e dobras	$B$ e $(x'^2 + b, y')$
$F^+$	lábios e dobras	$L$ e $(x'^2 + b, y')$
$G$	rabo de andorinha e dobra	$S$ e $(x'^2 + b, y')$
$H^+$	inflexão e dobra	$(x, x^3 - ax + y^2), (x', +y'^2 + b)$
$H^-$	inflexão e dobra	$(x, x^3 - ax + y^2), (x', -y'^2 + b)$
$I$	cúspide e cúspide	$(x + a, y^3 + xy), (y'^3 + x'y', x' + b)$
$J$	cúspide e tangência	$(x + a, y^3 + xy), (y'^3 + x'y', x' + b)$
$P^+$	(++) dobra e tangência	$(x, x^2 + y^2), (x', y'^2 + a), (x''^2 + b, y'')$
$P_0^-$	(+-) dobra e tangência	$(x, x^2 + y^2), (x', -y'^2 + a), (x''^2 + b, y'')$
$P_1^-$	(-- ) dobra e tangência	$(x, x^2 - y^2), (x', +y'^2 + a), (x''^2 + b, y'')$
$R_{+,+}$	2 dobra e cúspide	$(x, y^3 + xy), (x', +y'^2, x' - y'^2 + a),$ $(x'' + y''^2, -x'' + y''^2 + b')$
$R_{+,-}$	2 dobra e cúspide	$(x, y^3 + xy), (x', +y'^2, x' - y'^2 + a),$ $(x'' - y''^2, -x'' - y''^2 + b')$
$R_{-,-}$	2 dobra e cúspide	$(x, y^3 + xy), (x', -y'^2, x' - y'^2 + a),$ $(x'' - y''^2, -x'' - y''^2 + b')$
$U_0$	ponto quadruplo	$Q^0$ e $(x''' + y'''^2, -x''' + y'''^2 + b)$
$U_1$	ponto quadruplo	$Q^1$ e $(x''' + y'''^2, -x''' + y'''^2 + b)$

Tabela 3.3: Estrato de codimensão dois em  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ .

de codimensão zero (composto por aplicações estáveis), respectivamente. A orientação é na direção do aumento de pontos de cúspides e de pontos duplos. Cada transição de codimensão dois está detalhada a seguir.

A Figura 3.11 ilustra os três estratos de codimensão dois na vizinhança de um monogermes.

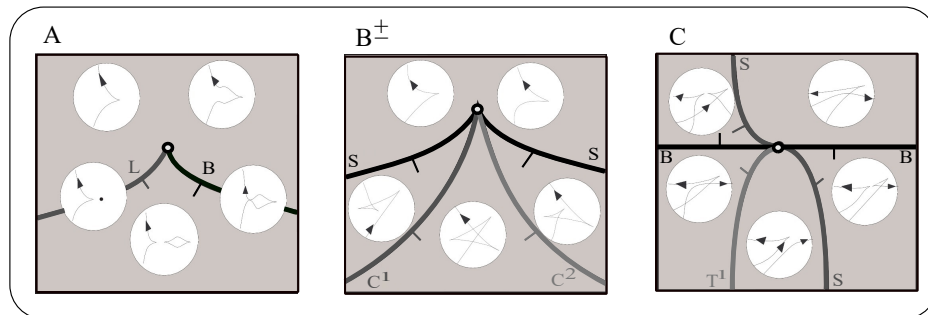


Figura 3.11: Transições de codimensão com monogermes.

**A:** Ocorre na interseção dos estratos Lábios ( $L$ ) e Bicos ( $B$ ), onde nascem simultaneamente Lábios e Bicos.

$B^\pm$ : Ocorre na interseção dos estratos de codimensão um Rabo de Andorinha

( $S$ ) e Tangência entre uma Cúspide e uma Dobra ( $C^1$  e  $C^2$ ), onde na curva de dobra nasce o Rabo de Andorinha.

$C$ : Ocorre na interseção dos estratos Bicos ( $B$ ), Rabo de Andorinha ( $S$ ) e Tangência entre duas Curvas de Dobra ( $T^1$ ), onde na tangência entre as três curvas de dobra, a tangência entre duas dessas curvas se separa, surgindo duas cúspides. Quando a aplicação atravessa o estrato  $S$ , a tangência da curva de dobra com uma das curva de dobra da cúspide se separa criando duas cúspides, uma dessas cúspides juntamente com a cúspide já existente forma um Rabo de Andorinha. Quando a aplicação atravessa  $B$  a tangência entre dobras se separa formando duas cúspides. Quando passa por  $T^1$  a tangência deixa de interceptar a curva de dobra da cúspide.

$D_{2,2}^{1,1}$  e  $E_{2,2}^{1,1}$ : Existem duas singularidades adicionais de codimensão dois (com monogermes), além dos pontos degenerados já considerados. Eles correspondem ao *deltoide*, com forma normal  $(x^2 - y^2 + x^3 + ax, xy + bx)$  e a *barbatana*, com forma normal  $(x^2 + y^3 + ay, y^2 + x^3 + bx)$ . Essas duas singularidades, as quais não aparecem no caso de projeções no plano de superfícies imersas no  $\mathbb{R}^3$ , é realizada pelas projeções no plano das duas imagens do guarda-chuva de Whitney padrão  $zy^2 = x^2$ , quando a reta  $(x = 0, z = 0)$  é substituída por uma curva genérica adequada tangente a reta (por exemplo,  $x = y^3, z = \pm y^2$ ) respectivamente. A análise das bifurcações no plano  $(a, b)$  é muito complicada, porém esses estratos não contribuem para o sistema de coerência, que será no decorrer deste trabalho. De fato, por exemplo, a singularidade deltoide é o surgimento de uma nova componente triangular (com três cúspides) no contorno aparente: essa componente existe em qualquer caminho ligado com o estrato de codimensão dois dessa singularidade, e desaparece/reaparece em um caminho não genérico atravessando esse estrato.

A Figura 3.12 representa três dos sete estratos de codimensão dois de aplicações com bigermes.

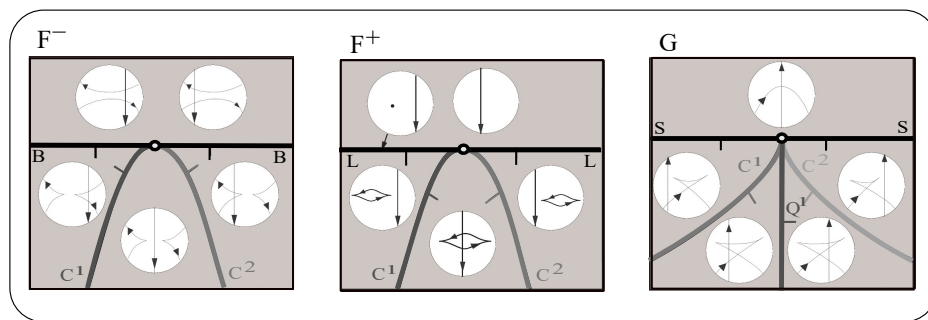


Figura 3.12: Transições de codimensão dois com bigermes.

$F^-$ : Ocorre da interseção dos estratos Bicos ( $B$ ) e Tangências entre uma Cúspide e uma Curva de Dobra ( $C^1$  e  $C^2$ ), onde a tangência se separa, no ponto de interseção com a curva de dobra, formando duas cúspides. Quando a aplicação atravessa o estrato  $B$  a tangência entre duas curvas de dobra se separa, formando duas cúspides, quando a aplicação atravessa o estrato  $C^1$ , uma dessas cúspides tangencia a curva de dobra e quando a aplicação atravessa o estrato  $C^2$ , a curva de dobra tangencia a outra cúspide.



$F^+$ : Ocorre na interseção entre os estratos Lábios ( $L$ ) e Tangências entre uma Cúspide e uma Dobra ( $C^1$  e  $C^2$ ), onde nasce lábios em um ponto da curva de dobra. Quando a aplicação atravessa o estrato  $L$  nasce um lábio, quando a aplicação atravessa o estrato  $C^1$ , uma das cúspides tangencia a curva de dobra e quando a aplicação atravessa o estrato  $C^2$ , a curva de dobra tangencia a outra cúspide.

$G$ : Esse estrato ocorre na interseção entre os estratos Rabo de Andorinha ( $S$ ), Tangência entre uma cúspide e uma dobra ( $C^1$  e  $C^2$ ) e Ponto triplo ( $Q^1$ ), onde o Rabo de Andorinha nasce na interseção entre as curvas de Dobra. Quando a aplicação passa por ( $S$ ) um Rabo de Andorinha é formado em uma das curvas de dobra, ao passar por ( $C^1$ ) a outra curva de dobra tangencia uma das cúspides do Rabo de Andorinha, ao passar por ( $Q^1$ ) a curva de dobra intercepta o Rabo de Andorinha nas interseções entre suas curvas de dobra, formando um ponto triplo e quando a aplicação passa por ( $C^2$ ) a curva de dobra tangencia a outra cúspide do Rabo de Andorinha.

Na Figura 3.13 temos outros dois estratos de codimensão dois na vizinhança de um bigerme.

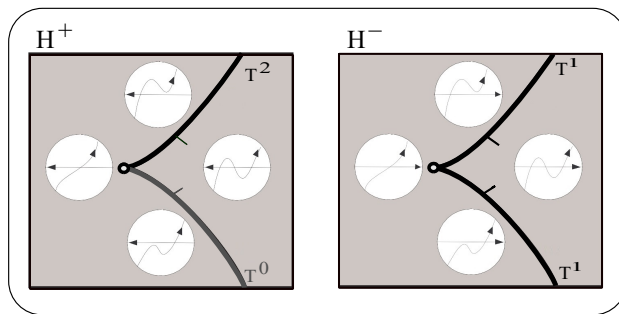


Figura 3.13: Transições inflexão e dobra.

$H^+$ : Ocorre na interseção entre os estratos Tangências entre duas curvas de dobra ( $T^0$  e  $T^2$ ), onde uma curva de dobra intercepta a outra em seu ponto de inflexão. Ao passar por ( $T^0$ ) ou ( $T^2$ ) a curva de dobra tangencia a outra curva de dobra em um ponto crítico da curva.

$H^-$ : O estrato está na interseção entre os estratos Tangências entre duas curvas de dobra ( $T^1$  e  $T^1$ ), onde uma curva de dobra intercepta a outra em seu ponto de inflexão. Ao passar por ( $T^1$ ) a curva de dobra tangencia a outra curva de dobra em um ponto crítico da curva.

Por último, a Figura 3.14 ilustra os dois últimos estratos de codimensão dois com bigerme.

$I$ : A transição ocorre na interseção entre os estratos Tangências entre uma cúspide e uma curva de dobra ( $C^1$  e  $C^2$ ), onde duas cúspides se tangenciam. Quando a aplicação passa por ( $C^1$ ) uma das cúspides tangencia uma curva de dobra da outra cúspide e quando passa por  $C^2$  essa cúspide tangencia a outra de curva de dobra.

$J$ : Ocorre na interseção entre os estratos Tangência entre duas curvas de dobra

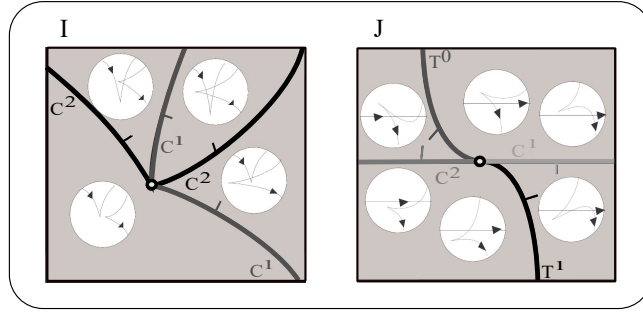


Figura 3.14: Transições de cúspides e tangências.

( $T^0$  e  $T^1$ ) e Tangência entre uma cúspide e uma curva de dobra ( $C^1$  e  $C^2$ ), onde ao mesmo tempo a cúspide e uma de suas curvas de dobra tangenciam uma curva de dobra ao mesmo tempo. Quando a aplicação atravessa o estrato ( $T^0$ ) ou ( $T^1$ ) uma das curvas de dobra da cúspide tangencia a curva de dobra e quando atravessa o estrato ( $C^1$ ) ou ( $C^2$ ) a cúspide tangencia a curva de dobra.

A Figura 3.15 representa três das seis transições de codimensão dois na vizinhança de um 3-germe.

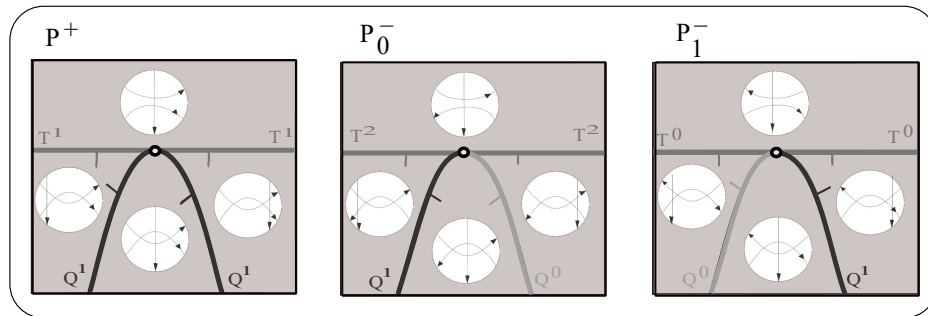


Figura 3.15: Transições dobra e tangência.

$P^+$ : Esse estrato está na interseção entre os estrato Tangência entre duas curvas de dobra ( $T^1$ ) e Pontos triplos ( $Q^1$ ), onde a curva de dobra intercepta outras duas curvas de dobra em seu ponto de tangência. Quando a aplicação atravessa o estrato ( $T^1$ ) duas curvas de dobra se tangenciam e quando passa pelo estrato ( $Q^1$ ) a curva de dobra intercepta as outras duas curvas de dobra em um dos pontos duplos formando um ponto triplo.

$P_0^+$ : A transição ocorre na interseção entre os estrato Tangência entre duas curvas de dobra ( $T^2$ ) e Pontos triplos ( $Q^0$  e  $Q^1$ ), onde a curva de dobra intercepta outras duas curvas de dobra em seu ponto de tangência. Quando a aplicação atravessa o estrato ( $T^2$ ) duas curvas de dobra se tangenciam e quando passa pelo estrato ( $Q^0$ ) ou ( $Q^1$ ) a curva de dobra intercepta as outras duas curvas de dobra em um dos pontos duplos formando um ponto triplo.

$P_1^+$ : Ocorre na interseção entre os estrato Tangência entre duas curvas de dobra ( $T^0$ ) e Pontos triplos ( $Q^0$  e  $Q^1$ ), onde a curva de dobra intercepta outras duas curvas de dobra em seu ponto de tangência. Quando a aplicação atravessa o estrato ( $T^0$ ) duas curvas de dobra se tangenciam e quando passa pelo estrato

$(Q^0)$  ou  $(Q^1)$  a curva de dobra intercepta as outras duas curvas de dobra em um dos pontos duplos formando um ponto triplo.

Na Figura 3.16 temos as outras três transições de codimensão dois de aplicações com trigermes.

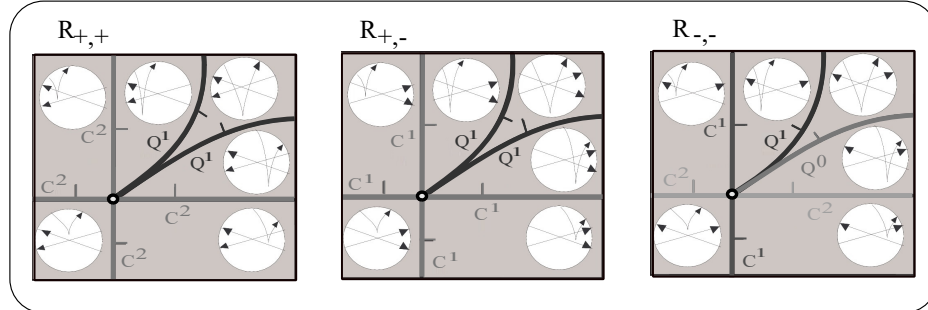


Figura 3.16: Transições dobra e cúspide.

$R_{+,+}$ : O estrato está na interseção dos estratos Tangência entre uma cúspide e uma curva de dobra ( $C^2$ ) e Pontos triplos ( $Q^1$ ), onde a cúspide tangencia duas curvas de dobra em seu ponto de interseção. Ao atravessar o estrato ( $C^2$ ) a cúspide tangencia uma das curvas de dobra e ao passar por ( $Q^1$ ) uma das curvas de dobra da cúspide intercepta as outras duas curvas de dobra em seu ponto de interseção formando um ponto triplo.

$R_{+,-}$ : A transição ocorre na interseção dos estratos Tangência entre uma cúspide e uma curva de dobra ( $C^1$ ) e Pontos triplos ( $Q^1$ ), onde a cúspide tangencia duas curvas de dobra em seu ponto de interseção. Ao atravessar o estrato ( $C^1$ ) a cúspide tangencia uma das curvas de dobra e ao passar por ( $Q^1$ ) uma das curvas de dobra da cúspide intercepta as outras duas curvas de dobra em seu ponto de interseção formando um ponto triplo.

$R_{-,-}$ : Ocorre na interseção dos estratos Tangência entre uma cúspide e uma curva de dobra ( $C^1$  e  $C^2$ ) e Pontos triplos ( $Q^0$  e  $Q^1$ ), onde a cúspide tangencia duas curvas de dobra em seu ponto de interseção. Ao atravessar o estrato ( $C^1$  ou  $C^2$ ) a cúspide tangencia uma das curvas de dobra e ao passar por ( $Q^0$  ou  $Q^1$ ) uma das curvas de dobra da cúspide intercepta as outras duas curvas de dobra em seu ponto de interseção formando um ponto triplo.

Finalmente, a Figura 3.17 ilustra os dois estratos de codimensão dois na vizinhança de um quadrigerme.

$U_0$ : O estrato está na interseção entre estratos Pontos triplos ( $Q^1$ ), onde quatro curvas de dobra se interceptam no mesmo ponto. Ao atravessar o estrato ( $Q^1$ ) a aplicação passa por um ponto triplo.

$U_1$ : Ocorre na interseção entre estratos Pontos triplos ( $Q^0$  e  $Q^1$ ), onde quatro curvas de dobra se interceptam no mesmo ponto. Ao atravessar o estrato ( $Q^0$ ) ou ( $Q^1$ ) a aplicação passa por um ponto triplo.

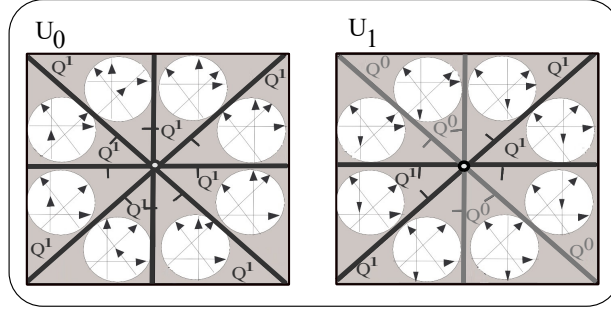


Figura 3.17: Transições pontos quadruplos.

### 3.3 Invariantes locais de aplicações estáveis

Para cada estrato de codimensão dois escrevemos a condição que a variação de um invariante  $I$ , o qual o incremento,  $\Delta I$ , é uma combinação linear de incrementos elementares, desaparece em um pequeno caminho fechado  $C$  ligado com esse estrato. A combinação linear genérica é:

$$\Delta I = \lambda \Delta L + \beta \Delta B + \sigma \Delta S + \gamma_0 \Delta T^0 + \gamma_1 \Delta T^1 + \gamma_2 \Delta T^2 + \tau_0 \Delta Q^0 + \tau_1 \Delta Q^1 + \chi_1 \Delta C^1 + \chi_2 \Delta C^2 \quad (3.1)$$

**Definição 3.3.1.** As condições para todo estrato de codimensão dois produz um sistema linear de equações nas variáveis  $\lambda, \beta, \dots, \chi_2$ , o qual chamamos de *sistema de coerência*.

**Lema 3.3.2.** *O estrato de codimensão dois correspondente as singularidades do tipo barbatana e deltoide não contribuem para o sistema de coerência.*

*Demonstração.* Primeiramente, vamos considerar o estrato de codimensão dois correspondente a barbatana, isto é, o monogerme cuja forma normal é dada por

$$G(x, y, a, b) = (x^2 + y^3 + ay, y^2 + x^3 + bx).$$

Tomamos um representante da deformação  $G : U \times W \rightarrow V$ , onde  $U$  e  $V$  são vizinhanças da origem do domínio e do contra-domínio,  $W$  uma vizinhança da origem no espaço parâmetro  $(a, b)$ . Fazamos,  $G_{(a,b)} = G(*, a, b) : U \rightarrow V$ . Note que, existe simetria  $\mathbb{Z}_2$  de  $G$  causada pela mudança de parâmetro  $h : (a, b) \rightarrow (b, a)$ : isto é, a aplicação  $G_{(a,b)}$  é equivalente a  $G_{h(a,b)} : G_{h(a,b)} = \tau \circ G_{(a,b)} \circ \phi$ , onde  $\phi(x, y) = (y, x)$ ,  $\tau(u, v) = (v, u)$ . Sob a diagonal  $(a, a)$  da origem a aplicação  $G$  é regular. Tome um pequeno círculo  $C$  no espaço parâmetro  $W$  no sentido anti-horário ao redor da origem. Então, para cada estrato  $X$  de codimensão um ( $X = L, B, \dots$ ), seu incremento  $\Delta X$  ao longo do arco  $c$  de  $C$  na área  $b > a$  é o mesmo que o incremento ao longo do arco  $h \circ c$  na área  $b < a$ . Logo, o incremento total  $\Delta X$  ao longo de  $C$  é nulo.

Para a singularidade deltoide, cuja forma normal é dada por

$$G'(x, y, a, b) = (x^2 - y^2 + x^3 + ay, xy + bx),$$

podemos também demonstrar mesmo demonstrado para o caso acima. Além dessas, não existe nenhum estrato de codimensão um adjacente a esse estrato.  $\square$

Do Lema [3.3.2](#), não é necessário verificar os estratos barbatana e deltóide. O sistema de coerência consiste nas seguintes dezoito equações, uma para cada um dos demais estratos de codimensão dois, nas dez variáveis  $\lambda, \beta, \sigma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \tau_0, \tau_1, \chi_1, \chi_2$ :

$$\begin{array}{ll}
A: & \lambda - \beta = 0 \\
B^\pm: & \sigma + \chi_1 - \chi_2 - \sigma = 0 \\
C: & \sigma - \beta - \gamma_1 + \sigma - \beta = 0 \\
F^-: & \beta - \chi_1 + \chi_2 - \beta = 0 \\
F^+: & \lambda + \chi_2 - \chi_1 - \lambda = 0 \\
G: & \sigma + \chi_2 + \tau_1 - \chi_1 - \sigma = 0 \\
H^+: & \gamma_2 - \gamma_0 = 0 \\
H^-: & \gamma_1 - \gamma_1 = 0 \\
I: & \chi_1 + \chi_2 - \chi_1 - \chi_2 = 0 \\
J: & \gamma_0 - \chi_2 + \gamma_1 - \chi_1 = 0 \\
U_0: & \tau_1 + \tau_1 + \tau_1 + \tau_1 - \tau_1 - \tau_1 - \tau_1 - \tau_1 = 0 \\
U_1: & \tau_1 + \tau_0 + \tau_0 + \tau_1 - \tau_1 - \tau_0 - \tau_0 - \tau_1 = 0 \\
P^+: & \gamma_1 - \tau_1 - \tau_1 - \gamma_1 = 0 \\
P_0^-: & \gamma_2 + \tau_1 - \tau_0 - \gamma_2 = 0 \\
P_1^-: & \gamma_0 - \tau_0 + \tau_1 - \gamma_0 = 0 \\
R_{+,+}: & \chi_2 + \chi_2 + \tau_1 - \tau_1 - \chi_2 - \chi_2 = 0 \\
R_{+,-}: & \chi_1 + \chi_1 + \tau_1 - \tau_1 - \chi_1 - \chi_1 = 0 \\
R_{,-}: & \chi_2 + \chi_1 - \tau_1 - \tau_0 - \chi_2 - \chi_1 = 0
\end{array}$$

**Teorema 3.3.3.** *Qualquer função  $I$  satisfazendo  $\Delta I = 0$  (o incremento de  $I$  é zero) em todo caminho fechado genérico contrátil em  $\mathcal{F}$  é definida, a menos de uma constante aditiva, por uma combinação linear dos seguintes incrementos básicos:*

$$\begin{array}{l}
i) \Delta I_1 = \Delta L + \Delta B + \Delta S \\
ii) \Delta I_2 = \Delta S + 2\Delta T^1 + \Delta C^1 + \Delta C^2 \\
iii) \Delta I_3 = 2\Delta T^0 + 2\Delta T^2 + \Delta C^1 + \Delta C^2
\end{array}$$

*Demonstração.* Primeiramente, é necessário mostrar que a dimensão da solução do sistema de coerência é três, isto é a solução do sistema de coerência é gerada por três elementos. Podemos reduzir o sistema de coerência à um sistema com as seguintes equações:

$$\begin{array}{ll}
I) \lambda - \beta = 0 & V) \gamma_2 - \gamma_0 = 0 \\
II) \chi_1 - \chi_2 = 0 & VI) \gamma_0 + \gamma_1 - \chi_1 - \chi_2 = 0 \\
III) 2\sigma - 2\beta - \gamma_1 = 0 & \\
IV) \tau_1 - \chi_1 + \chi_2 = 0 & VII) \tau_0 - \tau_1 = 0
\end{array}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos o seguinte conjunto solução

$$\{\lambda, \lambda, \sigma, 4\lambda - 4\sigma + 2\chi_1, 2\sigma - 2\lambda, 4\lambda - 4\sigma + 2\chi_1, 0, 0, \chi_1, \chi_1\},$$

que possui três variáveis livres. Assim, o conjunto solução possui dimensão três. Note que, em cada um dos três incrementos básicos temos:

$$i) \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = \tau_0 = \tau_1 = \chi_1 = \chi_2 = 0 \text{ e } \lambda = \beta = \sigma = 1$$

ii)  $\lambda = \beta = \gamma_0 = \gamma_2 = \tau_0 = \tau_1 = 0$ ,  $\sigma = \chi_1 = \chi_2 = 1$  e  $\gamma_1 = 2$

iii)  $\lambda = \beta = \sigma = \gamma_1 = \tau_0 = \tau_1 = 0$ ,  $\chi_1 = \chi_2 = 1$  e  $\gamma_0 = \gamma_2 = 2$

assim,  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$  e  $\Delta I_3$  satisfazem o sistema, e como são independentes, o conjunto solução é gerado por estes três elementos, e o resultado segue.  $\square$

Os Teoremas [3.3.4](#) e [3.3.5](#) são devidos a Ohmoto e Aicardi ([\[20\]](#)).

**Teorema 3.3.4.** [\[20\]](#) *O incremento de  $I_C$ , o número total de cúspides do contorno aparente de  $f$ ,  $f(\Sigma f)$ , ao longo de qualquer caminho transversal para o estrato de codimensão um em  $\mathcal{D}$  é dado por*

$$\Delta I_C = 2\Delta I_1 = 2(\Delta L + \Delta B + \Delta S).$$

*Demonstração.* Segue da classificação de transições que as únicas transições que alteram o número de cúspides são  $S$ ,  $B$  e  $L$ . Agora, uma transição positiva do tipo  $S$  aumenta esse número por dois. Por outro lado, uma transição positiva do tipo  $B$  o aumenta por dois. Mais ainda, uma transição positiva através do estrato  $L$  aumenta  $I_C$  por dois.  $\square$

**Teorema 3.3.5.** [\[20\]](#) *O incremento de  $I_D$ , o número total de pontos duplos de  $f(\Sigma f)$ , ao longo de qualquer caminho transversal para o estrato de codimensão um em  $\mathcal{D}$  é dado por*

$$\Delta I_D = \Delta I_2 + \Delta I_3 = \Delta S + 2(\Delta T^0 + \Delta T^1 + \Delta T^2) + 2(\Delta C^1 + \Delta C^2)$$

*Demonstração.* Segue da classificação de transições que as únicas transições que alteram o número de pontos duplos são  $S$ ,  $T^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e  $C^i$ ,  $i = 1, 2$ . Onde ao passar pelo estrato  $S$  no sentido da orientação a aplicação tem seu número de pontos duplos aumentado por um, e ao atravessar os demais estratos  $T^i$ , com  $i = 0, 1, 2$ , e  $C^i$ , com  $i = 1, 2$ , no sentido positivo, o número de pontos duplos da aplicação é aumentado por dois.  $\square$

Além do número de cúspides e número de pontos duplos, que são invariantes locais e globais de aplicações estáveis entre superfícies, temos um invariante global, o número de componentes conexas de  $\Sigma f$ , como pode-se ver no Teorema [3.3.6](#), que é devido a Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster ([\[8\]](#)).

Em [\[8\]](#) a transição Bicos foi decomposta, identificando os casos onde a transição ocorre sobre uma mesma curva ou sobre curvas diferentes, como ilustrado no Exemplo [3.3](#). Esta nova decomposição levou a determinação de um novo invariante,  $I_\mu$ , que mede o número de curvas do conjunto singular de uma determinada aplicação, como pode-se ver no Teorema [3.3.6](#), que é devido a Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster ([\[8\]](#)).

**Teorema 3.3.6.** [\[8\]](#) *O incremento de  $I_\mu$ , o número total de componentes conexas de  $\Sigma f$ , ao longo de qualquer caminho transversal para o estrato de codimensão um em  $\mathcal{D}$  é dado por*

$$\Delta I_\mu = \Delta B_v^+ - \Delta B_v^- - \Delta B_w^+ + \Delta B_w^- + \Delta L.$$

*Demonstração.* Segue da classificação de transições que as únicas transições que alteram o número de componentes conexas de  $\Sigma f$  são  $B$  e  $L$ . Agora, uma transição positiva do tipo  $B_v^+$  ou  $B_w^-$  aumenta esse número por um, enquanto uma transição positiva do tipo  $B_v^-$  ou  $B_w^+$  o diminui por um. Por outro lado, uma transição positiva através do estrato  $L$  aumenta  $I_\mu$  por um.  $\square$

O seguinte resultado relaciona os invariantes  $I_C$ ,  $I_D$  e  $I_\mu$ :

**Proposição 3.3.7.** [8] *Os invariantes  $I_C$ ,  $I_D$  e  $I_\mu$  satisfazem a relação*

$$I_\mu + \frac{I_C}{2} + I_D \equiv (1 + g(M)) \pmod{2},$$

onde,  $M$  é a superfície do domínio da aplicação.

*Demonstração.* O resultado segue do fato que as únicas transições que afetam  $I_C$ ,  $I_D$  e  $I_\mu$  são  $L$ ,  $B$  e  $S$ . Em qualquer uma das transições a soma  $I_\mu + \frac{I_C}{2} + I_D$ , mod 2, é a mesma. Por fim, o valor de  $I_\mu + \frac{I_C}{2} + I_D$  para a projeção de uma superfície (imersa em  $\mathbb{R}^3$ ) no plano é  $1 + g(M)$ . Logo, temos a relação.  $\square$

# Capítulo 4

## Realização de grafos com pesos

Neste capítulo introduzimos ferramentas importantes da construção de aplicações estáveis e determinamos todos os grafos possíveis que podem ser associados às aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano projetivo. As principais referências são [17] e [18].

### 4.1 Cirurgias entre aplicações estáveis

A cirurgia de aplicações estáveis está relacionada, diretamente, com a soma conexa de superfícies e soma de curvas planas. Essa ferramenta, introduzida em [10] e generalizada em [18], nos permite criar novas aplicações pertencentes a diferentes classes de homotopia.

A Definição 4.1.1 é uma generalização da soma conexa de Ohmoto [20].

Considere  $f : M_1 \rightarrow \mathbb{P}$  e  $g : M_2 \rightarrow \mathbb{P}$  duas aplicações estáveis. Fixando dois pontos  $p \in \Sigma f$  (em  $M_1$ ) e  $q \in \Sigma g$  (em  $M_2$ ), escolhamos dois discos fechados,  $D_1$  e  $D_2$ , em  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente, cujos interiores contenham os pontos  $p$  e  $q$ , respectivamente. Substituindo os interiores de  $D_1$  e  $D_2$  por um tubo limitado (homeomorfo a  $S^1 \times [0, 1]$ ), colando  $\partial D_1$  e  $\partial D_2$  às duas componentes conexas de bordo do tubo, obtemos uma nova superfície homeomorfa a soma conexa  $M_1 \# M_2$ . Conforme ilustrado na Figura 4.1, as aplicações  $f$  e  $g$  podem ser estendidas sobre o tubo e assim se obtém uma nova aplicação estável  $f + g : M_1 \# M_2 \rightarrow \mathbb{P}$ , cujas restrições a pontos de  $M_1$  e  $M_2$  correspondem à  $f$  e  $g$ , respectivamente.

**Definição 4.1.1.** [10] A aplicação  $f + g$ , obtida da cirurgia acima é chamada **cirurgia horizontal** entre  $f$  e  $g$ . Notação:  $f +_h g$ .

Sejam  $f : M_1 \rightarrow \mathbb{P}$  e  $g : M_2 \rightarrow \mathbb{P}$  duas aplicações estáveis. Escolhendo duas regiões, uma em  $M_1$  e outra em  $M_2$ , tomamos em cada uma delas um disco fechado de modo que as suas imagens no plano coincidam. Como no caso da cirurgia horizontal, substituímos os interiores destes discos por um tubo limitado, identificando convenientemente as componentes de bordo dos discos com as do tubo. Assim, obtemos uma nova superfície homeomorfa a soma conexa de



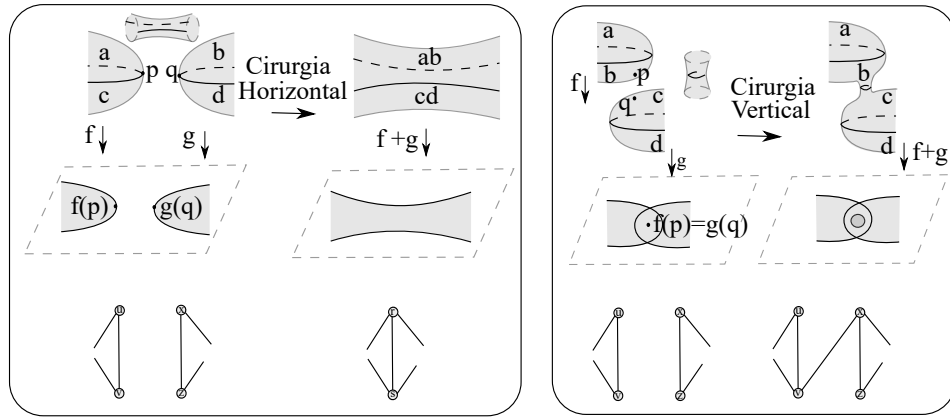


Figura 4.1: Cirurgias horizontais e verticais.

$M_1 \# M_2$ . Neste caso também, podemos estender as aplicações  $f$  e  $g$  sobre o tubo, conforme a Figura 4.1. Dessa forma, obtemos uma nova aplicação estável  $f + g : M_1 \# M_2 \rightarrow \mathbb{P}$ .

**Definição 4.1.2.** [10] A aplicação  $f + g$  obtida da cirurgia acima é chamada de **cirurgia vertical** entre  $f$  e  $g$ . Notação:  $f +_v g$ .

Uma consequência natural da construção de cirurgias entre aplicações estáveis é a cirurgia entre grafos. Ao realizarmos uma cirurgia horizontal entre aplicações estáveis identificamos duas curvas do conjunto singular de cada aplicação, o que é equivalente a identificar as duas arestas correspondentes a tais curvas do grafo de cada aplicação. Por outro lado, a cirurgia vertical entre aplicações cria uma nova curva no conjunto singular, o que acarreta no surgimento de uma nova aresta em seu grafo, conectando os vértices correspondentes.

**Definição 4.1.3.** Uma **cirurgia horizontal** entre dois grafos é feita identificando uma aresta de um dos grafos com uma aresta do outro, como ilustra a Figura 4.2, e pode ser feita das seguintes maneiras:

- i) A identificação de duas arestas, ambas as quais conectam vértices distintos do grafo, produz uma aresta que também conecta vértices distintos do grafo. Os pesos dos vértices envolvidos são adicionados de acordo com as regras seguintes:
  - a)  $(s, 0) + (t, 0) = (s + t, 0)$ ;
  - b)  $(0, p) + (0, q) = (0, p + q)$ ;
  - c)  $(t, 0) + (0, p) = (0, 2t + p)$ .
- ii) A identificação de uma aresta que conecta dois vértices distintos com um laço (respectivamente um laço  $\star$ ) produz um laço (respectivamente um laço  $\star$ ). O peso dos vértices correspondentes também seguem as regras acima;
- iii) A identificação de dois laços  $\star$  produz um laço (sem  $\star$ ). O peso de seus vértices também segue as regras acima;
- iv) A identificação de dois laços produz um laço;

- v) A identificação de um laço  $\star$  e um laço produz um laço  $\star$ .  
 Nos casos 4 e 5 os pesos dos vértices se comportam como o seguinte:
- $(t, 0) + (s, 0) = (t + s + 1, 0)$ ;
  - $(0, p) + (0, q) = (0, p + q + 2)$ ;
  - $(t, 0) + (0, p) = (0, 2t + p + 2)$ .

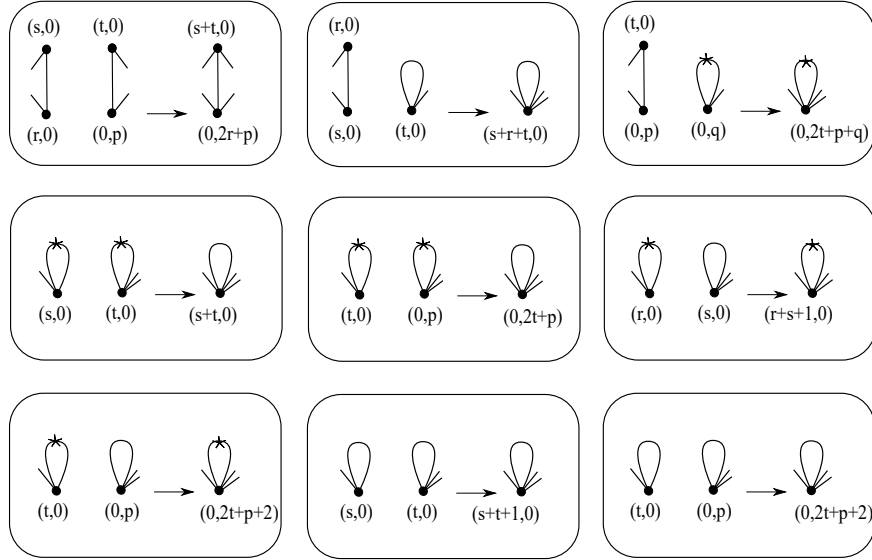


Figura 4.2: Efeitos (locais) das cirurgias horizontais nos grafos.

**Definição 4.1.4.** A **cirurgia vertical** de grafos consiste em adicionar uma aresta de uma das seguintes maneiras:

- A aresta conecta dois vértices diferentes do mesmo grafo;
- A aresta conecta dois vértices de grafos diferentes, e portanto, conecta os dois grafos;
- A aresta forma um laço em um dado vértice do grafo.

Em todos esses casos, os pesos dos vértices permanecem inalterados.

**Exemplo 4.1.5.** A Figura 4.3 ilustra quatro aplicações dobra de superfícies fechadas no plano projetivo com seus respectivos grafos que mostram os efeitos das cirurgias horizontais nos grafos. A imagem a) representa a aplicação da esfera cujo grafo é dado por  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 1)$ , a aplicação do toro, ilustrada em b) tem grafo o  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 2)$  associado, em c) temos uma aplicação do bitoro com grafo  $\mathcal{G}_{(2,0)}^0(2, 1)$ , por último, o grafo da aplicação d), é  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 3)$ .

**Exemplo 4.1.6.** A Figura 4.4 ilustra quatro aplicações dobra de superfícies fechadas no plano projetivo com seus respectivos grafos, ilustrando os efeitos das cirurgias verticias sobre grafos. Em a) temos uma aplicação da esfera com grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 1)$ , a aplicação b) tem como domínio o toro e  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 2)$  como grafo, c) ilustra uma aplicação do toro cujo grafo é dado por  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 2)$  e d) representa uma aplicação da garrafa de Klein associada ao grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 2)$ .

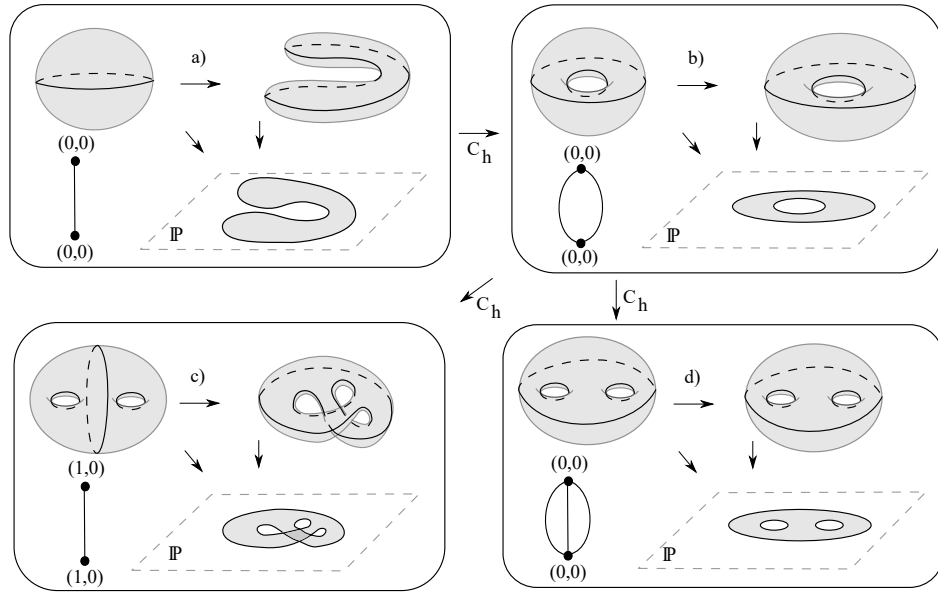


Figura 4.3: Exemplos de cirurgias horizontais.

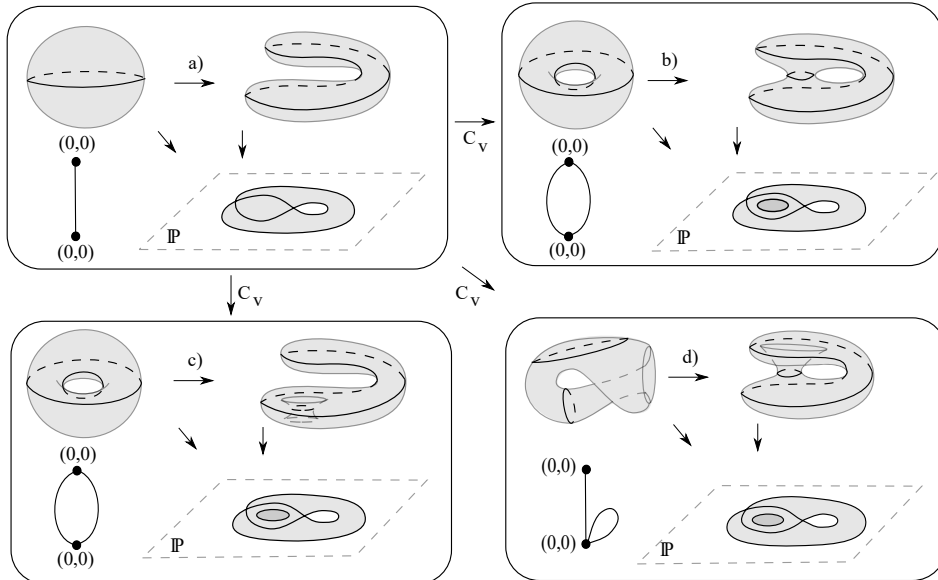


Figura 4.4: Exemplos de cirurgias verticais.

## 4.2 Realização de grafos de aplicações estáveis

Nesta seção demonstraremos os principais resultados sobre quais grafos com pesos nos vértices podem ser associados a aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano projetivo. Os resultados aqui apresentados são devidos a Mendes de Jesus e Romero-Fuster [18].

Primeiro observamos que a árvore irredutível do tipo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2,1)$  é o grafo da projeção ortogonal de  $S^2$  em  $\mathbb{P}$  com uma única curva singular, sem pontos duplos e pontos de cúspides, composta com qualquer imersão do plano em  $\mathbb{P}^2$ , como pode ser visto nos exemplos a) nas Figuras 3.6 e 4.3.

**Lema 4.2.1.** [18] *Qualquer árvore irreduzível do tipo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(2,1)$  é o grafo de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ , onde  $M$  é uma superfície fechada. A superfície  $M$  é orientada se, e somente se,  $P = 0$ . Mais ainda, o gênero de  $M$  é dado por  $T$  caso  $M$  seja orientada e por  $2T + P$  caso contrário.*

*Demonstração.* O grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(2,1)$  pode ser realizado por uma cirurgia horizontal entre o grafo  $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(2,1)$  da aplicação a) na Figura 4.5 e o grafo  $\mathcal{G}_{(0,P)}^0(2,1)$  da aplicação b) na Figura 4.5, onde os vértices de peso  $(0,0)$  e  $(T,0)$  do grafo  $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(2,1)$  são identificados aos vértices de pesos  $(0,P)$  e  $(0,0)$  do grafo  $\mathcal{G}_{(0,P)}^0(2,1)$ , respectivamente. Logo, o grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(2,1)$  é o grafo de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ , onde  $M$  é uma superfície fechada. Como o grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(2,1)$  é bipartido, pois é uma árvore, e  $S = 0$ , então, pela Proposição 2.4.7, a superfície  $M$  é orientada se, e somente se,  $P = 0$ . O gênero de  $M$  segue da Proposição 1.5.7.  $\square$

**Exemplo 4.2.2.** Na Figura 4.5 temos quatro exemplos de aplicações dobra, que estão associadas a árvores irreduzíveis, as quais podem ser obtidas através de cirurgias horizontais de aplicações estáveis.

- a) O exemplo ilustra uma aplicação do  $t$ -toro no plano projetivo com uma única curva singular que separa um disco de uma superfície de gênero  $t$  com um disco removido. O grafo associado a essa aplicação é do tipo  $\mathcal{G}_{(t,0)}^0(2,1)$  e pode ser obtido como resultado de  $t - 1$  cirurgias horizontais entre  $t$  aplicações estáveis na Figura 3.7 d).
- b) Corresponde a uma aplicação de uma superfície fechada não orientada de gênero  $p$  com  $2p$  cúspides. Essa aplicação possui grafo do tipo  $\mathcal{G}_{(0,p)}^0(2,1)$  e pode ser obtida como resultado de  $p - 1$  cirurgias horizontais dentre  $p$  aplicações estáveis na Figura 3.7 a).
- c) Mostra uma aplicação dobra do  $2t$ -toro no plano projetivo com uma única curva singular separando dois  $t$ -toro com um disco removido, que tem grafo  $\mathcal{G}_{(2t,0)}^0(2,1)$  e pode ser obtido através de  $t - 1$  cirurgias horizontais entre  $t$  das aplicações na Figura 4.3 c).
- d) Mostra uma aplicação dobra de uma superfície fechada não orientada de gênero  $2p$  no plano projetivo com  $2(p - 1)$  pontos duplos e uma única curva singular que separa duas superfícies não orientadas de gênero  $p$ . Tal aplicação possui grafo do tipo  $\mathcal{G}_{(0,2p)}^0(2,1)$  e pode ser obtida através de  $p - 1$  cirurgias horizontais entre  $p$  aplicações estáveis do tipo b) na Figura 2.14.

O resultado a seguir é uma extensão do Lema 4.2.1 para uma árvore qualquer.

**Proposição 4.2.3.** [18] *Qualquer árvore do tipo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V,E)$  é o grafo de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ , onde  $M$  é uma superfície fechada. A superfície  $M$  é orientada se e somente  $P = 0$  e o gênero de  $M$  é dado por  $T$  quando  $M$  é orientada e por  $2T + P$  caso contrário.*

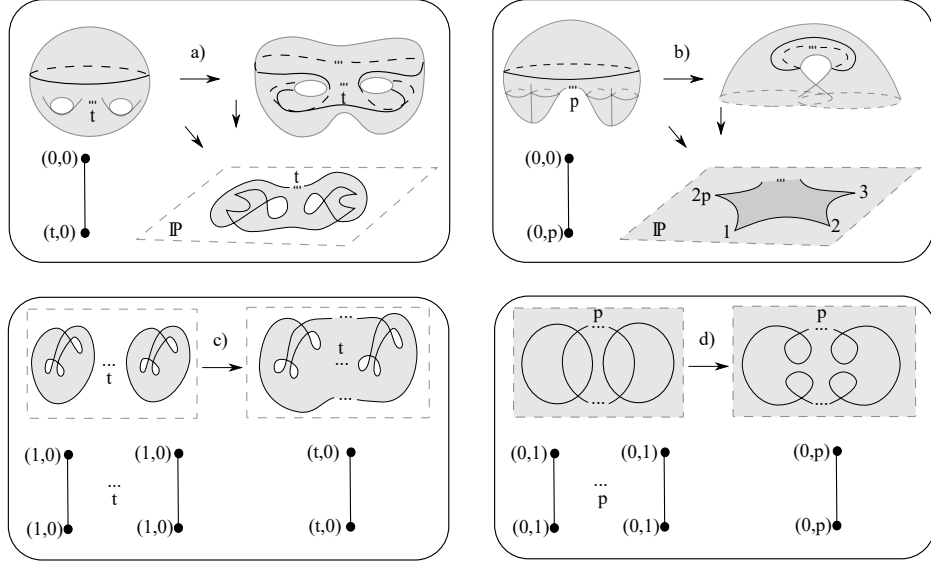


Figura 4.5: Exemplos de aplicações estáveis com árvore irreduzível.

*Demonstração.* Considere o grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E)$ , retirando os pesos de cada vértice, obtemos o grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E)$ . Se a árvore  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E)$  possui até três arestas, então ela é realizada por uma das aplicações da Figura 3.6. No caso em que  $E > 3$  considere a seguinte afirmação:

**Afirmção:** A árvore  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E)$ , com  $E > 3$  pode ser realizada através de  $E - 2$  cirurgias horizontais entre  $E - 1$  grafos  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 3)$  da aplicação b),  $h : S^2 \rightarrow \mathbb{P}$ , na Figura 3.6.

De fato, suponha que a árvore  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E)$  tenha  $E > 3$  arestas. Usamos o primeiro princípio de indução sobre  $E$ . Seja  $v$  um vértice com uma única aresta da árvore  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E)$  conectado a  $w$  pela aresta  $vw$ .

Eliminando a aresta  $vw$  de  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E)$  com o vértice  $v$ , obtemos uma árvore  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E - 1)$  contendo o vértice  $w$ . Suponha, por hipótese de indução, que o grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E - 1)$  pode ser realizado por  $E - 3$  cirurgias horizontais de  $E - 2$  grafos  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 3)$  da aplicação,  $h : S^2 \rightarrow \mathbb{P}$ , na Figura 3.6 b).

Seja  $h_0 : S^2 \rightarrow \mathbb{P}$  a aplicação que realiza o grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E - 1)$ . Fazendo uma cirurgia horizontal entre o grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E - 1)$  da aplicação  $h_0$  e o grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 3)$  da aplicação  $h$ , onde identificamos o vértice  $w$  de  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E - 1)$  com o vértice com duas arestas de  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(2, 3)$ , obtemos a aplicação  $g : S^2 \rightarrow \mathbb{P}$  que realiza o grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E)$ , como  $E - 2$  cirurgias horizontais de  $E - 1$  grafos  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(3, 2)$  da aplicação  $h$ . Portanto, a afirmação é verdadeira.

Finalmente, para adicionar os pesos que foram retirados de cada vértice do grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E)$ , aplicamos cirurgias horizontais entre grafos da seguinte maneira: a cada vértice  $u$  do grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E)$  que corresponde a um vértice do grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E)$  com peso  $(t, 0)$  (ou  $(0, p)$ ) é feita uma cirurgia horizontal entre o grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(V, E)$  da aplicação  $g$  e o grafo, com um dos vértices com peso  $(0, 0)$ ,

$\mathcal{G}_{(t,0)}^0(2,1)$  (ou  $\mathcal{G}_{(0,p)}^0(2,1)$ ) do Lema 4.2.1, onde identificamos o vértice  $u$  com o vértice de peso  $(t,0)$  (ou  $(0,p)$ ). Com este processo obtemos uma aplicação estável  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$  que realiza o grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E)$ .

Como o grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(2,1)$  é bipartido, pois é uma árvore, e  $S = 0$ , então, pela Proposição 2.4.7, a superfície  $M$  é orientada se, e somente se,  $P = 0$ . O gênero de  $M$  segue da Proposição 1.5.7.  $\square$

Antes de demonstrar o principal resultado do estudo, precisamos encontrar exemplos de aplicações cujos grafos correspondentes são do tipo:  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(1,0)$ ,  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(1, E)$  e  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(2, E)$ .

**Observação 4.2.4.** O recobrimento de grau dois  $\phi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}$  e a identidade  $id : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  são aplicações com grafos do tipo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^0(1,0)$  e  $\mathcal{G}_{(0,1)}^0(1,0)$ , respectivamente.

**Exemplo 4.2.5.** Ilustramos na Figura 4.6 quatro aplicações dobra que podem ser obtidas através de cirurgias horizontais cujos grafos são do tipo laço, ou seja, grafos com um único vértice e uma única aresta.

- a) O exemplo mostra uma aplicação, que tem grafo  $\mathcal{G}_{(1,0)}^0(1,1)$ , cujo domínio é uma superfície homeomorfa a soma conexa de quatro planos projetivos. Esta aplicação pode ser obtida através de cirurgias horizontais nas duas curvas singulares na aplicação d) da Figura 4.4, e possui uma única curva singular, nenhum ponto de cúspide e seis pontos duplos.
- b) Temos uma aplicação com grafo do tipo  $\mathcal{G}_{(0,1)}^0(1,1)$ , onde o domínio é uma superfície homeomorfa a soma conexa de três planos projetivos. Essa aplicação pode ser obtida através de uma cirurgia horizontal nas duas curvas singulares na aplicação b) na Figura 3.7, e tem uma única curva singular, nenhuma cúspide e quatro pontos duplos.
- c) A aplicação com grafo do tipo  $\mathcal{G}_{(0,1)}^1(1,1)$ , é uma aplicação dobra com domínio a soma conexa de três planos projetivos com uma única curva singular, cinco pontos de cúspides e cinco pontos duplos. Essa aplicação pode ser obtida como o resultado de uma cirurgia horizontal entre duas aplicações do tipo b) na Figura 2.13 e outra do tipo d) na Figura 3.7.
- d) A aplicação tem grafo  $\mathcal{G}_{(0,1)}^1(1,1)$  e está associado a uma aplicação cujo domínio é uma soma conexa de três planos projetivos, tendo uma única curva singular, cinco cúspides e cinco pontos duplos. Ela pode ser obtida como resultado de uma cirurgia horizontal de uma aplicação do tipo b) na Figura 2.13 e outra do tipo a) na Figura 3.7.

**Lema 4.2.6.** [18] *Qualquer grafo de um dos tipos  $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(1,1)$ ,  $\mathcal{G}_{(0,P)}^0(1,1)$ ,  $\mathcal{G}_{(T,0)}^1(1,1)$  e  $\mathcal{G}_{(0,P)}^1(1,1)$  é o grafo de uma aplicação estável de uma superfície fechada (não orientada)  $M$  no plano projetivo. O gênero de  $M$  é dado por  $2T + P - S + 2$ .*

*Demonstração.* Sejam  $f_a : M_a \rightarrow \mathbb{P}$  a aplicação a) na Figura 4.6 com grafo  $\mathcal{G}_{(1,0)}^0(1,1)$  e  $g : K \rightarrow \mathbb{P}$  a aplicação que realiza o grafo  $\mathcal{G}_{(T-1,0)}^0(2,1)$  do Lema

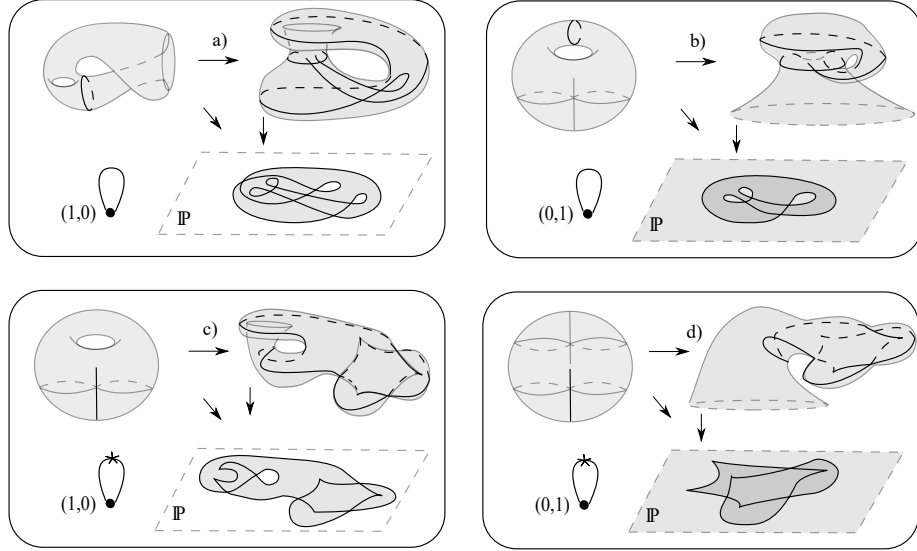


Figura 4.6: Exemplos de cirurgias horizontais.

**4.2.1.** Então o grafo  $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(1, 1)$  é realizado através da cirurgia horizontal entre o grafo  $\mathcal{G}_{(1,0)}^0(1, 1)$  da aplicação  $f_a$  e o grafo  $\mathcal{G}_{(T-1,0)}^0(2, 1)$  da aplicação  $g$ .

Sejam  $f_b : M_b \rightarrow \mathbb{P}$  a aplicação b) na Figura 4.6 com grafo  $\mathcal{G}_{(0,1)}^0(1, 1)$  e  $h : L \rightarrow \mathbb{P}$  a aplicação que realiza o grafo  $\mathcal{G}_{(0,P-1)}^0(2, 1)$  do Lema 4.2.1. Então o grafo  $\mathcal{G}_{(0,P)}^0(1, 1)$  é realizado através da cirurgia horizontal entre o grafo  $\mathcal{G}_{(0,1)}^0(1, 1)$  da aplicação  $f_b$  e o grafo  $\mathcal{G}_{(0,P-1)}^0(2, 1)$  da aplicação  $h$ .

Seja  $f_c : M_c \rightarrow \mathbb{P}$  a aplicação c) na Figura 4.6 com grafo  $\mathcal{G}_{(1,0)}^1(1, 1)$ . Então o grafo  $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(1, 1)$  é realizado através da cirurgia horizontal entre o grafo  $\mathcal{G}_{(1,0)}^1(1, 1)$  da aplicação  $f_c$  e o grafo  $\mathcal{G}_{(T-1,0)}^0(2, 1)$  da aplicação  $g$ .

Seja  $f_d : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{P}$  a aplicação d) na Figura 4.6 com grafo  $\mathcal{G}_{(0,1)}^1(1, 1)$ . Então o grafo  $\mathcal{G}_{(0,P)}^1(1, 1)$  é realizado através da cirurgia horizontal entre o grafo  $\mathcal{G}_{(0,1)}^1(1, 1)$  da aplicação  $f_d$  e o grafo  $\mathcal{G}_{(0,P-1)}^0(2, 1)$  da aplicação  $h$ .

Logo, qualquer um dos grafos acima é o grafo de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$  onde  $M$  é uma superfície fechada e não orientada, pois os grafos não são bipartidos. Pela Proposição 1.5.7, o gênero de  $M$  é dado por  $2T + P - S + 2$ .  $\square$

**Lema 4.2.7.** [18] *Qualquer laço de um dos tipos  $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(1, E)$ ,  $\mathcal{G}_{(0,P)}^0(1, E)$ ,  $\mathcal{G}_{(T,0)}^1(1, E)$  e  $\mathcal{G}_{(0,P)}^1(1, E)$  é o grafo de uma aplicação estável de uma superfície fechada (não orientada)  $M$  no plano projetivo. O gênero de  $M$  é dado por  $2(T + E) + P - S$ .*

*Demonstração.* Para obtermos aplicações com tais grafos é suficiente realizar  $E - 1$  cirurgias verticais nas aplicações no Lema 4.2.6, como ilustrado na Figura 4.7.  $\square$

**Proposição 4.2.8.** [18] *Qualquer grafo do tipo  $\mathcal{G}_{(T,0)}^S(1, E)$  ou  $\mathcal{G}_{(0,P)}^S(1, E)$  é o grafo de uma aplicação estável de uma superfície fechada (não orientada)  $M$  no plano projetivo. O gênero da superfície  $M$  é dado por  $2(T + E) + P - S$ .*

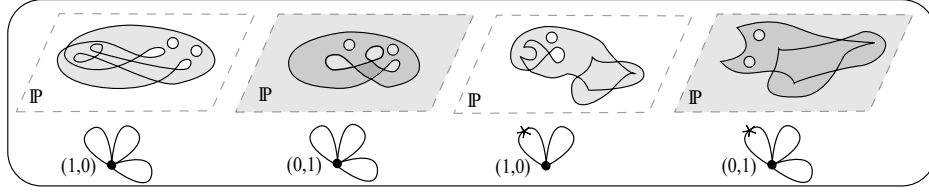


Figura 4.7: Exemplos de grafos com um vértice.

*Demonstração.* Considere os grafos  $G_{(T,0)}^S(1, E)$  e  $G_{(0,P)}^S(1, E)$ . Se  $S = 0, 1$ , então os grafos são realizados pelo Lema 4.2.7.

Suponha  $S > 1$ , removendo  $S - 1$  laços  $\star$  de cada um dos grafos, obtemos os grafos  $G_{(T,0)}^1(1, E - S + 1)$  e  $G_{(0,P)}^1(1, E - S + 1)$ . Pelo Lema 4.2.7, existem aplicações  $h_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{P}$  e  $h_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{P}$  que realizam os grafos  $G_{(T,0)}^1(1, E - S + 1)$  e  $G_{(0,P)}^1(1, E - S + 1)$ , respectivamente.

Seja  $g : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  a aplicação da Figura 2.13 com grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(2, 2)$ . Para adicionar os  $S - 1$  laços  $\star$  removidos do grafo  $G_{(T,0)}^S(1, E)$  (ou  $G_{(0,P)}^S(1, E)$ ), aplicamos  $S - 1$  cirurgias horizontais entre o grafo  $G_{(T,0)}^1(1, E - S + 1)$  da aplicação  $h_1$  (ou  $G_{(0,P)}^1(1, E - S + 1)$  da aplicação  $h_2$ ) e o grafo  $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(2, 2)$  da aplicação  $g$ . Cada uma das  $S - 1$  cirurgias horizontais é feita do seguinte modo: se o vértice  $u$  do grafo  $G_{(T,0)}^1(1, E - S + 1)$  (ou  $G_{(0,P)}^1(1, E - S + 1)$ ) corresponde a um vértice de  $G_{(T,0)}^S(1, E)$  (ou  $G_{(0,P)}^S(1, E)$ ) no qual foi retirado um laço  $\star$ , então identificamos o vértice  $u$  com o vértice de  $\mathcal{G}_{(0,0)}^1(2, 2)$  que contém o laço  $\star$ . Logo, através dessa construção, obtemos uma aplicação estável  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$  que realiza o grafo  $G_{(T,0)}^S(1, E)$  (ou  $G_{(0,P)}^S(1, E)$ ).

Como os grafos  $G_{(T,0)}^S(1, E)$  e  $G_{(0,P)}^S(1, E)$  não são bipartidos, então a superfície  $M$  não pode ser orientável. O gênero da superfície  $M$  segue da Proposição 1.5.7.  $\square$

**Exemplo 4.2.9.** A Figura 4.8 exemplifica quatro aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano projetivo:

- Aplicação da garrafa de Klein com uma única curva singular, três pontos de cúspides e nenhum ponto duplo;
- Aplicação da garrafa de Klein com cinco curvas singulares, onze cúspides e nenhum ponto duplo. Essa aplicação é obtida de a) por quatro transições lábios.
- Aplicação com uma única curva singular, onze pontos de cúspides e nenhum ponto duplo. A aplicação pode ser obtida de b) através de quatro cirurgias horizontais;
- Aplicação com três curvas singulares, onze pontos de cúspides e nenhum ponto duplo. A aplicação pode ser obtida de c) por duas cirurgias verticais.

**Teorema 4.2.10.** [18] *Todo grafo do tipo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$  é o grafo de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ , onde  $M$  é uma superfície fechada. A superfície  $M$  é orientada*



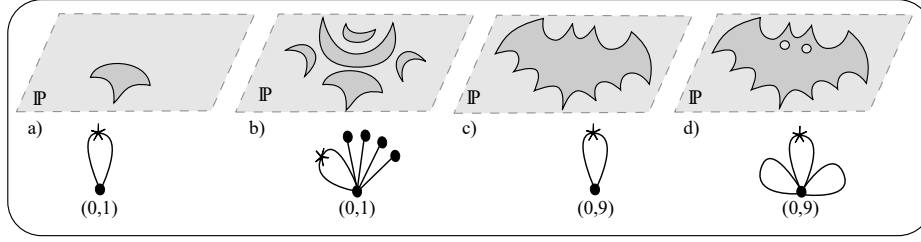


Figura 4.8: Exemplos de grafos de aplicações estáveis.

se, e somente se,  $\mathcal{G}$  é bipartido e  $P = S = 0$ . Mais ainda, o gênero de  $M$  é dado por  $1 - V + E + T$  se  $M$  é orientada e por  $2(1 - V + E + T) + P - S$  caso contrário.

*Demonstração.* Considere o grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ , retirando os seus  $S$  laços  $\star$ , obtemos o grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$ . Removendo uma aresta de cada um dos  $1 - V + E - S$  ciclos do grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$ , obtemos uma árvore  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, V - 1)$ . Pela Proposição 4.2.3, a árvore  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, V - 1)$  pode ser realizada por uma aplicação estável  $h : K \rightarrow \mathbb{P}$ . Agora, para adicionar as arestas removidas do grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$ , aplicamos  $\beta_1$  cirurgias verticais na aplicação  $h$ , cujo grafo é  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, V - 1)$  da seguinte maneira:

- i) Se a aresta removida de  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$  conectava dois vértices distintos  $u$  e  $v$ , então a cirurgia vertical é feita de modo que conectamos os dois vértices do grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, V - 1)$  correspondentes a  $u$  e  $v$ ;
- ii) Se a aresta removida de  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$  formava um laço em um vértice  $u$ , então a cirurgia vertical é feita de modo que formemos um laço no vértice de  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, V - 1)$  correspondente a  $u$ .

Assim, obtemos uma aplicação  $g : L \rightarrow \mathbb{P}$  que realiza o grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$ . Agora, seja  $g_1 : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  a aplicação na Figura 2.13 a), cujo grafo é  $G_{(0,0)}^1(2, 2)$ . Para adicionar os  $S$  laços  $\star$  removidos de  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ , aplicamos  $S$  cirurgias horizontais da aplicação  $g$ , com grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$  e  $S$  aplicações  $g_1$ , cujo grafo é  $G_{(0,0)}^1(2, 2)$ , onde cada uma das  $S$  cirurgias é feita do seguinte modo: se o laço  $\star$  foi removido do vértice  $u$  no grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ , então a cirurgia horizontal é realizada de modo que identificamos o vértice de  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$  correspondente a  $u$  com o vértice de  $G_{(0,0)}^1(2, 2)$  que contém o laço  $\star$ . Logo, obtemos uma aplicação estável  $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ , onde  $M$  é uma superfície fechada, que realiza o grafo  $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ . Pela Proposição 2.4.7, a superfície  $M$  é orientada se, e somente se,  $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$  é bipartido e  $P = S = 0$ . O gênero da superfície  $M$  pode ser calculado segundo a Proposição 1.5.7.  $\square$

# Conclusão

A realização deste trabalho nos permite ver a importância de um invariante para a classificação de uma classe de objetos, a classe das aplicações estáveis neste caso. A associação entre grafos e aplicações estáveis, criou um bom invariante global para aplicações estáveis, que classificam por completo o conjunto singular. Os resultados apresentados neste trabalho, mostram que qualquer grafo pode ser associado a uma aplicação estável de superfícies fechadas no plano projetivo. Mais ainda, foram apresentadas ferramentas que nos permitem construir aplicações mais complexas a partir de aplicações básicas, tais ferramentas se estendem a construção de grafos associados a aplicações mais elaboradas a partir de grafos associados a aplicações mais simples. Já os invariantes  $I_C$ ,  $I_D$  e  $I_\mu$  classificam o contorno aparente. Todos estes invariantes combinados refinam a classificação de aplicações estáveis, entretanto, o grafo não é capaz de classificar totalmente as aplicações, mesmo carregando bastante informação sobre elas, pois, no Exemplo [2.3.2](#), existem duas aplicações do disco de Milnor com o mesmo grafo e o mesmo contorno aparente, porém não são equivalentes. Desta forma, dado um contorno aparente, o número de possíveis aplicações associadas a esse contorno, depende do número de grafos que podem ser associados a esse contorno aparente de uma combinatória sobre o número de discos de Milnor contidos no contorno aparente, sendo que a cada disco de Milnor pode-se associar duas aplicações diferentes. Encontrar um conjunto de invariantes que possa classificar totalmente a classe das aplicações estáveis ainda está em aberto na teoria.

# Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD. V. I., Topological Invariants of Plane Curves and Caustic, *University Lecture Series*, Vol. 5, AMS Providenci 1994.
- [2] BRETAS. J. L. Singularidades de Aplicações Estáveis de Superfície Fechada e Orientada em  $S^2$ . 2011. 103 f. Dissertação de Mestrado, UFV, 2011.
- [3] FELIPE. A. C. Invariantes Globais de de Aplicações Estáveis de Superfície Fechada em  $S^2$ . 2013. 83 f. Dissertação de Mestrado, UFV, 2013.
- [4] GIBSON. C. G. Singular Points of Smooth Mappings, *Research Notes in Maths*, 25, Pitman (1979).
- [5] GOLUBITSKY. M.; GUILLEMIN. V. Stable Mappings and Their Singularities, Springer Verlag, Berlin (1976).
- [6] GORYUNOV. V. Local Invariants of Mappings os Surface into three-space, Preprint (2006).
- [7] LIMA. E. L. Introdução à Topologia Diferencial. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [8] HACON. D.; MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint. *Proceedings of the 6th Workshop on Real and Complex Singularities*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 232, Marcel and Dekker (2003), 227-235.
- [9] HACON. D.; MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Fold maps from the sphere to the plane, *Experimental Maths*, 15 (2006), 491-497.
- [10] HACON. D.; MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data, *Topology and Its Appl.*, 154 (2007), 166-175.
- [11] HACON. D.; MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere, *J. Singularities*, 2 (2010), 67-80.
- [12] KINSEY. L. C. *Topology of Surfaces*, Springer Verlag, New York (1993).
- [13] MACHADO. D. S. Invariante Global de Aplicações Estáveis de Superfície Fechada no Plano. 2010. 82 f. Dissertação de Mestrado, UFV, 2010.

- [14] MARQUES. G. P. Um Teorema Global para Singularidades de Aplicações entre Superfícies, Dissertação de Mestrado, UFV, 2015.
- [15] MENDES DE JESUS. C. Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano. 2001. 103 f. Tese (Doutorado em Matemática)- Departamento de Matemática, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2001.
- [16] MENDES DE JESUS. C. Graphs of stable maps between closed orientable surfaces, *Comp. Appl. Math.*, 2016.
- [17] MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Graphs of stable maps between closed surfaces, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B55 (2016), 147-159.
- [18] MENDES DE JESUS. C.; ROMERO FUSTER. M. C. Graphs of stable maps from closed surfaces to the projective plane, *Topology and Its Appl.*, 234 (2018), 298-310.
- [19] MUNKRES. J. R. Topology: a first course, 2ª Edição. New Jersey: Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1975.
- [20] OHMOTO. T.; AICARDI. F. First Order Local Invariants of Apparent Coutours, *Topology*, 45 (2006), 27-45.
- [21] OHMOTO. T. Vassiliev type invariants of order one of generic mappings from a surface to the plane, *Topology of real singularities and related topics (Japanese)*, (Kyoto, 1997), 55-68.
- [22] QUINE. J. R. A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds. *Trans. AMS.* 236 (1978) 307-314.
- [23] SOUZA. I. V. Singularidades de Aplicações de Gauss Estáveis. 2012. 73 f. Dissertação de Mestrado, UFV, 2012.
- [24] THOM. R. Les singularites des applications differentiables, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 6 (1955-1956), 43-87.
- [25] VASSILIEV. V. A., Complements of Discriminants of smooth maps, *Topology and applications*, AMS, Providenci, RI: Amer. Math. Soc. (1992).
- [26] WHITE. A. T., Graphs, groups and surfaces, *Mathematics Studies*, North-Holland, 1973.
- [27] WHITNEY. H., On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math.* (2) 62 (1955), 374-410.