

VINICIUS TAVARES AZEVEDO

**ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE TIMOSHENKO  
TERMOELÁSTICOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2018

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

A994e  
2018 Azevedo, Vinicius Tavares, 1990-  
Estabilidade para sistemas de Timoshenko termoelásticos /  
Vinicius Tavares Azevedo. – Vicosa, MG, 2018.  
viii, 110 f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Margareth da Silva Alves.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 108-110.

1. Estabilidade. 2. Timoshenko, Sistema de.  
3. Termoelasticidade. 4. Polinômios. I. Universidade Federal de  
Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de  
Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

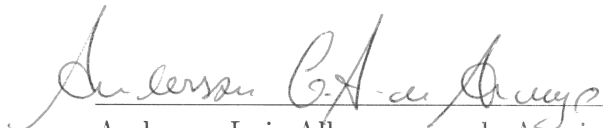
CDD 22. ed. 515.392

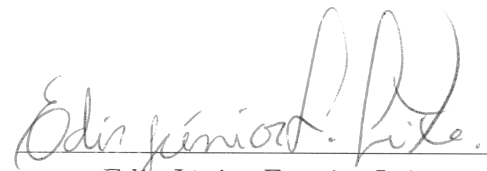
VINICIUS TAVARES AZEVEDO

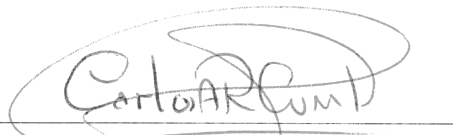
**ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE TIMOSHENKO  
TERMOELÁSTICOS**

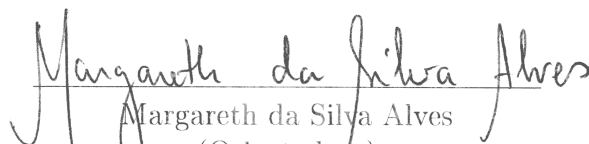
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 2 de março de 2018.

  
Anderson Luis Albuquerque de Araujo

  
Edir Júnior Ferreira Leite

  
Carlos Alberto Raposo da Cunha

  
Margareth da Silva Alves  
(Orientadora)

*Dedico este trabalho aos meus  
familiares e amigos.*

O dinheiro faz homens ricos, o  
conhecimento faz homens sábios e  
a humildade faz grandes homens.

---

Mahatma Gandhi

# Agradecimentos

Em primeiro lugar sou muitíssimo grato aos meus pais, Adauto e Leni, pelo exemplo, carinho e motivação, vocês são sem dúvida os meus primeiros e eternos professores, graças a vocês consegui chegar onde estou, e sei que posso contar com vocês para conseguir ir mais além.

Agradeço a minha orientadora, Margareth, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções e incentivo. Enfim pela pessoa maravilhosa que é.

Agradeço de uma forma especial minha namorada que sempre esteve ao meu lado me incentivando, dando apoio.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

# Sumário

<b>Resumo</b>	vii
<b>Abstract</b>	viii
<b>Introdução</b>	1
<b>1 Preliminares</b>	6
1.1 Análise funcional	6
1.2 Espaços funcionais e espaços de Sobolev	10
1.3 Semigrupos de classe $C_0$	15
1.4 Espaços $L^p(0, T; X)$	20
1.5 Distribuições vetoriais	21
1.6 Estabilidade	22
<b>2 O sistema de Timoshenko termoelástico homogêneo.</b>	24
2.1 Introdução	24
2.2 Existência e unicidade de solução	25
2.2.1 Regularidade da solução do problema de Cauchy	36
2.3 Lemas técnicos	36
2.4 A falta de estabilidade exponencial para o sistema Timoshenko termoelástico.	51
2.5 Estabilidade exponencial do sistema Timoshenko termoelástico.	54
2.6 Taxas de decaimento polinomial e otimização	58
<b>3 O sistema de Timoshenko termoelástico não-homogêneo</b>	63
3.1 Introdução	63

3.2	Lemas técnicos	66
3.2.1	Desigualdades de observabilidade	84
3.3	Taxa de decaimento polinomial	93
3.4	Estabilidade Exponencial	96
4	Invariância da taxa de decaimento em relação às condições de contorno em sistemas de Timoshenko termoelásticos homogêneos.	98
4.1	Introdução	98
4.2	Lemas técnicos	101
4.2.1	Desigualdades de observabilidade	104
4.3	Taxa de decaimento polinomial	105
4.4	Estabilidade exponencial	105
	Considerações Finais	107
	Referências Bibliográficas	108



# Resumo

AZEVEDO, Vinicius Tavares, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2018. **Estabilidade para sistemas de Timoshenko termoelásticos.** Orientadora: Margareth da Silva Alves.

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico de sistemas dissipativos com aplicações à modelagem de vibrações transversais de vigas de materiais elásticos. Mais especificamente, estuda-se a existência, unicidade e comportamento assintótico de dois sistemas termoelásticos do tipo Timoshenko, um homogêneo e outro não-homogêneo. O objetivo é estabelecer condições que assegurem a estabilidade exponencial e a polinomial do semigrupo associado. Para isso, usaremos a abordagem da teoria de semigrupos de operadores lineares de classe  $C_0$ , propriedades do conjunto resolvente e do operador resolvente do gerador infinitesimal de um  $C_0$  - semigrupo e técnicas multiplicativas.

# Abstract

AZEVEDO, Vinicius Tavares, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2018. **Stability for thermosetting Timoshenko systems.** Advisor: Margareth da Silva Alves.

In this paper we study the asymptotic behavior of dissipative systems with applications to the modeling of transverse vibrations of beams of elastic materials. More specifically, the existence, uniqueness and asymptotic behavior of two thermoelastic systems of the Timoshenko type, a homogeneous and a nonhomogeneous one, are studied. The objective is to establish conditions that ensure the exponential and polynomial stability of the associated semigroup. For this, we will use the approach of semigroup theory operators linear class  $C_0$ , resolvent set properties and resolvent operator of the infinitesimal generator of a  $C_0$ -semigroup and technical multiplicative.

# Introdução

Estruturas elásticas do tipo viga constituem um importante tema de investigação na engenharia, arquitetura, matemática, etc. No campo da análise matemática, especialmente na teoria de controle, há o interesse em estudar propriedades qualitativas para problemas dinâmicos em estruturas elásticas traduzidas em termos de equações diferenciais parciais. Neste trabalho, pretende-se estudar o comportamento assintótico de sistemas dissipativos com aplicações à modelagem de vibrações transversais de vigas de materiais elásticos. Mais especificamente, estuda-se a existência, unicidade e comportamento assintótico de dois sistemas termoelásticos do tipo Timoshenko, um homogêneo e outro não-homogêneo. O objetivo é estabelecer condições que assegurem a estabilidade exponencial e a polinomial do semigrupo associado. Para isso, usaremos a abordagem da teoria de semigrupos de operadores lineares de classe  $C_0$ , propriedades do conjunto resolvente e do operador resolvente do gerador infinitesimal de um  $C_0$  semigrupo de contrações e técnicas multiplicativas.

Considere uma viga delgada de comprimento  $L$  em sua posição de equilíbrio, constituída de material isotrópico e linearmente elástico. O modelo clássico para movimento da viga proposto por Timoshenko [35], que adiciona tanto o efeito de cisalhamento quanto o efeito de rotação ao movimento vibratório da viga, tem equações de movimento dadas por

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - S_x &= F_1 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - M_x + S &= F_2 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{1}$$

em que  $t$  denota a variável temporal e  $x$  a variável espacial. As funções  $\varphi = \varphi(x, t)$ ,  $\psi = \psi(x, t)$  são, respectivamente, os deslocamentos transversal e do ângulo de rotação de um filamento da viga. Aqui,

$$S = k(\varphi_x + \psi) \quad \text{e} \quad M = b\psi_x \tag{2}$$

são as relações tensão-deformação para o comportamento elástico. Os coeficientes constitutivos são  $\rho_1 = \rho A$ ,  $\rho_2 = \rho I$ ,  $k = k'GA$ ,  $b = EI$ , em que  $\rho$  é a densidade do material,  $E$  é o módulo de Young ou módulo de elasticidade,  $G$  é o módulo de rigidez,  $k'$  é o coeficiente de cisalhamento,  $A$  é a área da secção

transversal e  $I$  é o segundo momento de área da secção transversal. Finalmente por  $F_j, j = 1, 2$ , denotamos as forças externas que atuam no sistema. Uma descrição mais detalhada deste modelo pode ser encontrada em [8], [15] e [35]. Portanto, substituindo (2) em (1), obtemos que as equações de movimento do modelo são dadas por

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= F_1 \quad \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) &= F_2 \quad \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (3)$$

Durante os últimos anos, diferentes tipos de amortecimento (damping) foram introduzidos no sistema de Timoshenko e vários resultados de estabilidade foram obtidos. Começamos por recordar alguns desses resultados, os quais se utilizam do método da energia ou de propriedades espectrais do gerador infinitesimal do semigrupo associado ao sistema. Em seu trabalho pioneiro, Kim e Renardy [20] consideraram o sistema (3) com  $F_1 = F_2 = 0$ , junto com dois controles de fronteira da forma

$$\begin{aligned} k(\varphi_x(L, t) - \psi(L, t)) &= -\alpha \varphi_t(L, t) \quad \text{em } \mathbb{R}^+, \\ b\psi_x(L, t) &= -\beta \psi_t(L, t) \quad \text{em } \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

e condições iniciais

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \quad \text{em } (0, L). \quad (4)$$

Com o uso do método da energia estabeleceram que a energia do sistema, dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\varphi_x^2 + \psi_x^2 + \varphi_t^2 + \psi_t^2) dx,$$

é decrescente e verifica

$$E(t) \leq C e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

sendo  $\alpha > 0$ . Em [9], Raposo et al. utilizaram a dissipação dada pelo atrito agindo em ambas as equações, ou seja, consideraram  $F_1 = \varphi_t$  e  $F_2 = \psi_t$  em (9) e estabeleceram um resultado de decaimento como em (5) para o sistema com as condições iniciais (4) e condições de fronteira de Dirichlet

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^+, \quad (6)$$

ou Dirichlet-Neumann

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^+. \quad (7)$$

Entretanto, uma questão importante de pesquisa é investigar sobre a dissipação mínima que deve ser introduzida no sistema de Timoshenko para que sua solução tenha decaimento uniforme para o estado estável quando o tempo vai para o infinito. Durante os últimos anos, muitos matemáticos têm se dedicado a esta tarefa. Nesta direção, um importante resultado foi dado por Soufyane [34], o qual afirma que o sistema de Timoshenko (3), com  $F_1 = 0$  e damping  $F_2 = -\beta(x)\psi_t$ , é exponencialmente estável, se e só, se  $\mathcal{X} = 0$ , onde  $\mathcal{X}$  significa a diferença de velocidades de onda

$$\mathcal{X} := \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}. \quad (8)$$

Por outro lado, Sare e Rivera em [16] consideraram um sistema tipo Timoshenko com damping diferente. A dissipação é dada pela história passada agindo apenas sobre uma das relações tensão - deformação, isto é, em [2] eles consideraram

$$S = k(u_x + v), \quad N = bv_{xx} + \int_0^\infty g(t)v_{xx}(t - s, \cdot)ds,$$

onde  $g$  é uma função duas vezes diferenciável satisfazendo, para constantes positivas  $k_0, k_1$  e  $k_2$ , as condições

$$g(t) > 0, \quad -k_0g(t) \leq g'(t) \leq -k_1g(t), \quad |g''(t)| \leq k_2g(t), \quad \forall t \geq 0, \\ \hat{b} = b - \int_0^\infty g(s) ds > 0.$$

Eles provaram que a dissipação dada pelo termo história é forte o bastante para estabilizar exponencialmente o sistema se, e somente se, as velocidades de onda são iguais, isto é,  $\mathcal{X} = 0$ . Eles também provaram que a solução decai polinomialmente no caso em que  $\mathcal{X} \neq 0$ . Em [36], S. A. Messoudi e B. Said-Houari estudaram o mesmo sistema com condições mais fracas sobre a função  $g$  e obtiveram os mesmo resultado. Na mesma linha de pesquisa, citamos o trabalho de Ammar-Khodja et al. [11].

Um problema interessante surge quando a dissipação age de maneiras diferentes no domínio. Em [24], Alves et al. consideraram o problema de transmissão do sistema de Timoshenko com duas memórias, o mecanismo de memória atuando apenas no ângulo dos filamentos de rotação de uma viga composta por dois materiais diferentes; neste caso, a densidade não é, necessariamente, uma função contínua. Os autores mostraram que a energia associada decai para zero à medida que o tempo vai para infinito. Em outras palavras, o resultado indica que as propriedades dissipativas do sistema são transferidos para a viga inteira e estabiliza o sistema.

Poderíamos continuar descrevendo sobre vários outros trabalhos de tese ou artigos sobre o modelo, contudo nos restringimos a citar [8], [14], [15], [18], [19], [26], [29] e as referências neles contidas.

Em 2014, Almeida Júnior et al. [10] consideraram um novo acoplamento para o sistema de Timoshenko termoelástico, quando as leis constitutivas são dadas por

$$S = k(\varphi_x + \psi) + \sigma\theta, \quad M = b\psi_x,$$

$F_1 = F_2 = 0$  e a temperatura seguindo a lei de Fourier, isto é, eles consideraram o sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x &= 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta &= 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3\theta_t - \gamma\theta_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t &= 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \quad (9)$$

em que as constantes  $\sigma, \rho_3, \gamma$  vêm da teoria da termoelasticidade e  $\theta$  é a diferença de temperatura. Nesse artigo, eles obtiveram que a estabilidade exponencial ocorre se, e só, se  $\mathcal{X} = 0$ . Quando  $\mathcal{X} \neq 0$ , eles mostraram que o semigrupo associado ao sistema (9) com dados iniciais

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \text{em } (0, L) \quad (10)$$

e condições de fronteira Dirichlet -Neumann- Neumann

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^+ \quad (11)$$

decai com taxa  $1/\sqrt{t}$ . Adicionalmente, eles provaram que esta taxa é ótima. Considerando condições de fronteira de Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^+, \quad (12)$$

eles obtiveram que o semigrupo decai como  $1/\sqrt[4]{t}$ .

O sistema (9)-(12) também foi estudado em Alves et al. [27]. Com o uso auxiliar de funções *cut-off* e resultados de observabilidade, os autores melhoraram a taxa de decaimento polinomial para o semigrupo associado a (9) com condições de fronteira de Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet para  $1/\sqrt{t}$ . O resultado obtido é mais geral que em [10] pois foi estabelecida a taxa  $1/\sqrt{t}$  para várias condições de fronteira, além de (11) e (12). Em [28], os mesmos autores estudaram o sistema para materiais não-homogêneos, ou seja, quando os coeficientes constitutivos do sistema são funções de  $x$ . Quando a condição  $\mathcal{X} = 0$  é válida apenas localmente, isto é, em um subintervalo de  $(0, L)$ , eles estabeleceram a estabilidade exponencial do sistema (9) - (12). O caso contrário também foi retratado.

A proposta desse trabalho é estudar os sistemas de Timoshenko termoelásticos retratados nos artigos [10], [27] e [28], nossas principais referências.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentamos as principais ferramentas da teoria da Análise Funcional, de espaços de Sobolev na reta, de semigrupos de classe  $C_0$  e resultados sobre estabilidade exponencial e estabilidade polinomial de sistemas dissipativos. Estes resultados

serão utilizados em todo o trabalho.

No Capítulo 2, fundamentados por Almeida Júnior et al. [10], provamos a existência e unicidade de solução para o sistema (9)-(12). A principal ferramenta utilizada para mostrar a boa colocação do sistema é a teoria de semigrupos lineares de classe  $C_0$ , especificamente o Teorema 1.57 (Lumner-Phillips) e o Teorema 1.59. Posteriormente, fazemos um estudo sobre a estabilidade do sistema, usando como ferramenta o Teorema 1.65, devido a Prüss [32], e o Teorema 1.67, devido a Borichev e Tomilov [3]. Mostramos que a condição  $\mathcal{X} = 0$ , onde  $\mathcal{X}$  é dado por (8), é necessária e suficiente para garantir a estabilidade exponencial do semigrupo associado ao sistema com condições de fronteira dadas por (11). Também estabelecemos a estabilidade exponencial para o sistema com condições (12) se  $\mathcal{X} = 0$ . Quando  $\mathcal{X} \neq 0$ , os resultados sobre estabilidade polinomial são apresentados. A maioria dos lemas técnicos e teoremas são apresentados considerando as condições de fronteira do tipo Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet que é o caso mais difícil devido aos termos pontuais que surgem quando efetuamos integração por partes.

No Capítulo 3, baseados em Alves et al. [28], estudamos o sistema (9)-(12), caso não-homogêneo. Supondo que a hipótese  $\mathcal{X} = 0$  é válida localmente, mostramos que o semigrupo associado é exponencialmente estável. O caso contrário também é estudado, sendo obtida a taxa  $1/\sqrt{t}$  para a estabilidade polinomial.

No Capítulo 4, fazemos um breve comentário sobre os resultados obtidos em Alves et al. [27]. Os resultados de estabilidade são enunciados sem demonstrações, pois elas são análogas às demonstrações dos lemas e teoremas apresentadas no Capítulo 3.

Finalmente, observamos que em toda a dissertação,  $C$  representa uma constante positiva genérica, não necessariamente a mesma em cada ocasião; ela poderá mudar de linha para linha.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo vamos rever alguns conceitos e resultados importantes para o estudo dos capítulos seguintes.

### 1.1 Análise funcional

Nesta seção vamos definir e apresentar alguns resultados de Análise Funcional. Para maiores detalhes, consultar Cavalcanti [7], Brezis [5] e Oliveira [30].

**Definição 1.1.** *Seja  $X$  um espaço normado. Dizemos que  $X$  é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em  $X$  é convergente.*

**Definição 1.2** (Forma Sesquilinear). *Seja  $V$  um espaço vetorial complexo. Uma **forma sesquilinear de  $V$**  é uma aplicação  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $(u, v) \rightarrow a(u, v)$ , que satisfaz as seguintes condições:*

- (i)  $a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w)$  para todo  $u, v, w \in V$ .
- (ii)  $a(\lambda u, w) = \lambda a(u, w)$  para todo  $u, v \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
- (iii)  $a(u, v + w) = a(u, v) + a(u, w)$  para todo  $u, v$  e  $w \in V$ .
- (iv)  $a(u, \lambda w) = \bar{\lambda} a(u, w)$  para todo  $u, w \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Definição 1.3.** *Uma forma sesquilinear sobre um espaço normado  $X$ ,  $a(\cdot, \cdot)$ , é denominada **limitada** ou **contínua** se existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_X \|v\|_X, \quad \text{para todo } u, v \in X.$$

**Definição 1.4.** *Uma forma sesquilinear sobre um espaço normado  $X$ ,  $a(\cdot, \cdot)$ , é dita **coerciva** se existe uma constante  $\beta > 0$  tal que*

$$|a(v, v)| \geq \beta \|v\|_X^2, \quad \text{para todo } v \in X.$$



**Definição 1.5.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. Uma transformação linear  $T : X \rightarrow Y$  é dita **limitada** se existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|T(u)\|_Y \leq C\|u\|_X, \quad \text{para todo } u \in X.$$

**Definição 1.6.** *Seja  $V$  um espaço vetorial complexo. Um funcional  $T : V \rightarrow \mathbb{C}$  é dito **antilinear** se*

$$(i) \quad T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \text{para todo } u \text{ e } v \in V.$$

$$(ii) \quad T(\lambda u) = \bar{\lambda}T(u) \quad \text{para todo } u \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Teorema 1.7.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados, sendo  $Y$  um espaço de Banach. Então  $\mathfrak{L}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y; f \text{ é um operador linear limitado}\}$  é um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_{\mathfrak{L}(X, Y)} = \sup\{\|f(x)\|_Y; x \in X \text{ e } \|x\|_X = 1\}.$$

*Demonstração.* Ver Oliveira [30], p. 27. □

Quando  $X = Y$ , denotamos  $\mathfrak{L}(X, X)$  por  $\mathfrak{L}(X)$ .

**Definição 1.8.** *Se  $X$  é um espaço vetorial normado, então o espaço de Banach  $\mathfrak{L}(X, \mathbb{C})$  será denotado por  $X'$  e chamado de dual topológico de  $X$ .*

**Teorema 1.9** (Hahn-Banach). *Sejam  $V$  um espaço vetorial complexo e  $p : V \rightarrow [0, \infty)$  uma aplicação satisfazendo*

$$\begin{aligned} p(u + v) &\leq p(u) + p(v), & \forall u, v \in V, \\ p(\alpha u) &= |\alpha|p(u), & \forall u \in V, \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

*Se  $f : Z \rightarrow \mathbb{C}$  é um funcional linear definido no subespaço  $Z \subset V$  com  $|f(w)| \leq p(w)$ , então  $f$  possui uma extensão linear  $F : V \rightarrow \mathbb{C}$  dominada por  $p$ , ou seja,*

$$|F(u)| \leq p(u), \quad \forall u \in V.$$

*$F$  é chamada de extensão de Hahn-Banach de  $f$ .*

*Demonstração.* Ver Botelho et al. [4], p. 58. □

**Teorema 1.10** (Lax-Milgran). *Sejam  $H$  é um espaço de Hilbert e  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  uma forma sesquilinear limitada e coerciva. Então, para todo funcional antilinear limitado  $T : H \rightarrow \mathbb{C}$  existe um único  $u \in H$  tal que*

$$a(u, v) = T(v) \quad \text{para todo } v \in H.$$

*Demonstração.* Ver Cavalcanti, M. M e Cavalcanti, V. N. D., [7], p. 167. □

**Proposição 1.11.** *Sejam números reais  $a, b \geq 0$  e  $p \geq 1$ . Então*

$$(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

*Demonstração.* Usando as propriedades do máximo obtemos

$$\begin{aligned} (a + b)^p &\leq (2 \max\{a, b\})^p \\ &= 2^p \max\{a^p, b^p\} \\ &\leq 2^p(a^p + b^p). \end{aligned}$$

□

**Proposição 1.12** (Desigualdade de Young). *Se  $a, b \geq 0$  e  $p, q > 1$  são tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Demonstração.* Ver R.G. Bartle [2], p. 56. □

Uma variação da desigualdade de Young que será muito utilizada neste trabalho é dada pelo seguinte corolário.

**Corolário 1.13.** *Sejam  $a, b \geq 0$  e  $p, q > 1$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  tem-se*

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q.$$

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} ab &= (q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} ab \\ &= \left( \frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} \right) \left( (q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b \right). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{1}{p} \left( \frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} \right)^p + \frac{1}{q} \left( (q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b \right)^q \\ &= \frac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}} a^p + \varepsilon b^q, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Tomando  $c(\varepsilon) = \frac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}}$  temos,

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

□

**Teorema 1.14** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  e norma induzida  $\|\cdot\|_V$ . Então para todos  $u, v \in V$  temos*

$$|\langle u, v \rangle_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V;$$

*a igualdade ocorre se, e somente se,  $\{u, v\}$  é linearmente dependente.*

*Demonstração.* Ver Oliveira [30], p. 121. □

**Teorema 1.15.** *Se  $M$  é um subespaço fechado do espaço de Hilbert  $H$ , então  $H = M \oplus M^\perp$ , isto é, cada  $u \in H$  admite uma única representação na forma*

$$u = p + q \text{ com } p \in M \text{ e } q \in M^\perp,$$

*onde  $M^\perp = \{q \in H : \langle p, q \rangle_H = 0 \text{ para todo } p \in M\}$ .*

*Demonstração.* Ver Botelho et al. [4], p. 111. □

**Definição 1.16** (Resolvente). *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  um operador linear. Dizemos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  está no **conjunto resolvente** de  $\mathcal{A}$ , o qual será denotado por  $\rho(\mathcal{A})$ , se o operador*

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$$

*existe, está densamente definido em  $X$  e é limitado. Em outras palavras,*

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{ existe, } D((\lambda I - \mathcal{A})^{-1}) \text{ é denso em } X \text{ e } (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{ é limitado}\}.$$

*Neste caso,  $R(\lambda, \mathcal{A})$  denomina-se o **operador resolvente** de  $\mathcal{A}$ .*

**Definição 1.17** (Espectro). *O **espectro** do operador linear  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  é o conjunto*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$$

*formado por três subconjuntos disjuntos:*

- (i) *O **espectro pontual** de  $\mathcal{A}$  é o conjunto de seus autovalores, denotado por  $\sigma_p(\mathcal{A})$ .*
- (ii) *O **espectro contínuo** de  $\mathcal{A}$ , denotado por  $\sigma_c(\mathcal{A})$ , é o conjunto dos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que  $\lambda I - \mathcal{A}$  é um operador injetivo, tem imagem densa em  $X$ , mas  $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : R(\lambda I - \mathcal{A}) \rightarrow X$  é não limitado.*
- (iii) *O **espectro residual** de  $\mathcal{A}$ , denotado por  $\sigma_r(\mathcal{A})$ , é o conjunto dos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que  $\lambda I - \mathcal{A}$  é um operador injetivo mas sua imagem não é densa em  $X$ .*

**Definição 1.18.** Um operador linear  $T : D(T) \subset X_1 \rightarrow X_2$  é **fechado** se para toda sequência  $(v_n) \subset D(T)$  tal que  $v_n \rightarrow v \in X_1$  e  $Tv_n \rightarrow w \in X_2$  tem-se  $v \in D(T)$  e  $Tv = w$ .

**Lema 1.19.** Sejam  $X$  é um espaço de Banach e  $S : X \rightarrow X$  um operador linear contínuo com inverso contínuo. Se  $B \in \mathfrak{L}(X)$  satisfaz

$$\|B\|_{\mathfrak{L}(X)} < \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathfrak{L}(X)}},$$

então  $S + B$  é um operador linear inversível, com inversa contínua.

*Demonstração.* Temos que  $S + B$  é bijetivo. De fato, seja  $w \in X$ , defina  $P$  o seguinte operador linear

$$P(x) = S^{-1}(w) - S^{-1}B(x).$$

Note que  $P$  é uma contração, pois

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(y)\|_X &= \|-S^{-1}B(x) + S^{-1}B(y)\|_X \\ &\leq \underbrace{\|S^{-1}\|_{\mathfrak{L}(X)}\|B\|_{\mathfrak{L}(X)}}_{:=\alpha} \|x - y\|_X. \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  é uma constante de contração,  $0 \leq \alpha < 1$ . Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, segue que existe um único  $z \in X$  tal que  $P(z) = z$ , ou seja, existe um único  $z \in X$  de modo que

$$z = S^{-1}(w) - S^{-1}B(z) \quad \Leftrightarrow \quad (S + B)(z) = w.$$

Logo, temos que  $S + B$  é um operador bijetivo e, conseqüentemente, inversível.

Por outro lado, como  $S + B$  é um operador contínuo, segue, pelo Teorema da aplicação aberta, que  $(S + B)^{-1}$  existe e é contínuo. □

**Teorema 1.20.** Seja  $\mathcal{A}$  um operador linear fechado em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que o operador resolvente  $(\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}$  existe e é compacto para algum  $\lambda_0$ . Então o espectro  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$  é constituído apenas de autovalores de  $\mathcal{A}$  com multiplicidade finita.

*Demonstração.* Ver Kato T, [38], p. 187. □

## 1.2 Espaços funcionais e espaços de Sobolev

Nesta seção vamos descrever as notações e definições de espaços funcionais que serão usados ao longo deste trabalho; para mais detalhes consultar Brézis [5]. Nessas definições,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto.

**Definição 1.21.** *Seja  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. O suporte de  $u$ , que será denotado por  $\text{supp}(u)$ , é definido como o fecho em  $\Omega$  do conjunto  $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ . Se  $\text{supp}(u)$  for um compacto do  $\Omega$  então dizemos que  $u$  possui suporte compacto. Denotamos por  $C_0(\Omega)$  ao espaço vetorial das funções contínuas em  $\Omega$  com suporte compacto.*

**Definição 1.22.** *Seja  $m$  inteiro não-negativo ou  $m = \infty$ . Por  $C^m(\Omega)$  denotamos o espaço vetorial das funções com todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a  $m$  contínuas em  $\Omega$ . Além disso,  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$  e  $C^\infty(\Omega) = \bigcap_m C^m(\Omega)$ .*

**Definição 1.23.** *O espaço vetorial das funções  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que possuem todas as derivadas até a ordem  $m$  contínuas em  $\Omega$  e que têm suporte compacto, sendo que esse suporte depende de  $\varphi$ , é denotado por  $C_0^m(\Omega)$  (ou  $C_0^\infty(\Omega)$  se  $m = \infty$ ).*

**Definição 1.24.** *Uma sucessão  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  de funções de  $C_0^\infty(\Omega)$  converge para zero quando existe  $K \subset \Omega$  compacto tal que:*

- \*  $\text{supp } \varphi_\nu \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N};$
- \* Dado  $n \in \mathbb{N}$ , para cada  $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente em } K,$$

onde  $D^\alpha$  denota o operador derivação de ordem  $\alpha$  definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

com  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  e  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .

**Definição 1.25.** *O espaço vetorial  $C_0^\infty(\Omega)$  com a noção de convergência definida acima é representado por  $\mathcal{D}(\Omega)$  e denominado espaço das funções testes em  $\Omega$ .*

**Proposição 1.26.** *Sejam  $K$  um compacto não vazio e  $F$  um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ , tais que  $K \cap F = \emptyset$ . Então existe  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\psi = 1$  em  $K$ ,  $\psi = 0$  em  $F$  e  $0 \leq \psi(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .*

**Definição 1.27.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Denotamos por  $L^p(\Omega)$  o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em  $\Omega$  com valores em  $\mathbb{R}$ , tais que  $|u|^p$  é integrável no sentido de Lebesgue em  $\Omega$  com norma*

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Para  $p = \infty$ , denotamos por  $L^\infty(\Omega)$  o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis de  $u$  definidas sobre  $\Omega$  que são essencialmente limitadas com a norma dada por

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)| = \inf \{C \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

**Definição 1.28.** *Seja  $1 \leq p < \infty$ . Diremos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente integrável em  $L^p(\Omega)$ , e denotaremos por  $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ , se  $f$  for uma função mensurável e para qualquer conjunto compacto  $K \subset \Omega$  tivermos*

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty.$$

**Teorema 1.29** (Desigualdade de Hölder). *Sejam  $f_1 \in L^{p_1}(\Omega)$ ,  $f_2 \in L^{p_2}(\Omega)$ ,  $\dots$ ,  $f_n \in L^{p_n}(\Omega)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , com  $p_1, \dots, p_n > 1$  e  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$ . Então  $f_1 \cdot \dots \cdot f_n \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} |f_1 \cdot \dots \cdot f_n| dx \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdot \dots \cdot \|f_n\|_{L^{p_n}}.$$

*Demonstração.* Ver H. Brézis [5], p. 92. □

No que segue, denotaremos por  $I$  um intervalo  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}$ , com  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ .

**Teorema 1.30.** *Seja  $u \in L^1_{loc}(I)$  tal que*

$$\int_I u \varphi_x dx = 0, \quad \forall \varphi \in C^1_0(I).$$

*Então existe uma constante  $C$  tal que  $u(x) = C$  em quase todo ponto de  $I$ .*

*Demonstração.* Ver H. Brezis [5], p. 205. □

**Definição 1.31.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . O **espaço de Sobolev**  $W^{1,p}(I)$  é definido como sendo o conjunto*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists u_x \in L^p(I) \text{ com } \int_a^b u \varphi_x dx = - \int_a^b u_x \varphi dx \quad \forall \varphi \in C^1_0(I) \right\}$$

*O espaço  $W^{1,p}(I)$  é um espaço de Banach com a norma*

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}} &= (\|u\|_{L^p}^p + \|u_x\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{W^{1,\infty}} &= \|u\|_{L^\infty} + \|u_x\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

*Quando  $p = 2$ , denotamos  $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ . O espaço  $H^1(I)$  é um espaço de Hilbert equipado com o produto interno*

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u_x, v_x \rangle_{L^2} = \int_a^b (uv + u_x v_x) dx.$$

**Teorema 1.32.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Se  $u \in W^{1,p}(I)$  então existe uma função*

$\tilde{u} \in C(\bar{I})$  tal que

$$u = \tilde{u} \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em}(0, L) \quad \text{e}$$

$$\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y u_x(t) dt \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

*Demonstração.* Ver H. Brezis [5], p. 204. □

**Proposição 1.33.** *O espaço  $W^{1,p}(I)$  é reflexivo para  $1 < p < \infty$  e separável para  $1 \leq p < \infty$ .*

*Demonstração.* Ver H. Brezis [5], p. 203. □

**Definição 1.34.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Dado um inteiro  $m \geq 2$  definimos, por recorrência, o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I); D^1u \in W^{m-1,p}(I)\},$$

com a notação  $D^1u = u_x$ , equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^m \|D^i u\|_{L^p}.$$

E também definimos

$$H^m(I) = W^{m,2}(I),$$

equipado com o produto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^2} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^m \langle D^i u, D^i v \rangle_{L^2} = \int_a^b uv \, dx + \sum_{i=1}^m \int_a^b D^i u D^i v \, dx.$$

A seguir estão alguns resultados, dentre eles os de imersões, que serão usados nos demais capítulos.

**Teorema 1.35.** *Existe uma constante positiva  $C$  (que depende somente de  $|I| \leq \infty$ ) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Em outras palavras,  $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$  com a imersão contínua para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .

Além disso, se  $I$  é um intervalo limitado então

A imersão  $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$  é compacta para todo  $1 < p \leq \infty$ .

A imersão  $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I)$  é compacta para todo  $1 \leq q < \infty$ .

*Demonstração.* Ver H. Brezis [5], p. 212. □

**Corolário 1.36.** *Seja  $1 \leq p < \infty$  e suponha que  $I$  seja um intervalo ilimitado. Se  $u \in W^{1,p}(I)$  então  $\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \rightarrow \infty}} u(x) = 0$ .*

*Demonstração.* Ver H. Brezis [5], p. 214. □

**Corolário 1.37.** *Sejam  $u, v \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então*

$$uv \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (uv)_x = u_x v + u v_x.$$

*Ademais, vale a formula de integração por partes*

$$\int_y^z u_x v \, dx = u(z)v(z) - u(y)v(y) - \int_y^z uv_x \, dx, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

*Demonstração.* Ver H. Brezis [5], p. 215. □

**Corolário 1.38.** *Seja  $G \in C^1(\mathbb{R})$  tal que  $G(0) = 0$ , e seja  $u \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (G \circ u)_x = (G_x \circ u)u_x.$$

*Demonstração.* Ver H. Brezis [5], p. 215. □

**Definição 1.39.** *Dado  $1 \leq p < \infty$ , denotamos por  $W_0^{1,p}(I)$  o fecho de  $C_0^1(I)$  em  $W^{1,p}(I)$ , equipado com a norma de  $W^{1,p}(I)$ .*

*O espaço  $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$  é equipado com o produto escalar de  $H^1(I)$ .*

**Teorema 1.40.** *Seja  $u \in W^{1,p}(I)$ . Então  $u \in W_0^{1,p}(I)$  se, e somente se,  $u = 0$  em  $\partial I$ .*

*Demonstração.* Ver H. Brezis [5], p. 217. □

**Teorema 1.41** (Desigualdade de Poincaré). *Suponhamos  $I$  um intervalo limitado. Então existe uma constante  $C_p > 0$ , que depende apenas do comprimento do intervalo  $I$ , tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C_p \|u_x\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

*Em outras palavras, em  $W_0^{1,p}(I)$ ,  $\|u_x\|_{L^p}$  é uma norma equivalente à norma de  $W^{1,p}(I)$ .*

*Demonstração.* Ver H. Brezis [5], p. 218. □

Para  $m \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $W^{m,p}(\Omega)$  é definido como o espaço das funções  $u \in L^p(\Omega)$  cujas derivadas distribucionais até a ordem  $m$  também estão em  $L^p(\Omega)$ . É bem conhecido, ver H. Brezis [5], que  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$



onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u$ . Quando  $p = 2$ , usualmente denotamos  $W^{m,p}(\Omega)$  por  $H^m(\Omega)$  e este é um espaço de Hilbert com o correspondente produto interno.

**Proposição 1.42.** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado do  $\mathbb{R}^N$  com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$ . Existe uma constante positiva  $C$ , dependendo apenas de  $\Omega$  e  $n$ , tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| \right), \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

*Demonstração.* Ver Liu e Zheng [22], p. 11. □

### 1.3 Semigrupos de classe $C_0$

Nesta seção vamos descrever as notações, definições e alguns teoremas sobre semigrupos de classe  $C_0$  que serão usados ao longo do trabalho. Para mais detalhes consultar Gomes [13] ou Pazy [31].

**Definição 1.43** (Semigrupo). *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $\mathfrak{L}(X)$  a álgebra dos operadores lineares limitados de  $X$ . Diz-se que uma aplicação  $S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathfrak{L}(X)$  é um semigrupo de operadores lineares limitados de  $X$  se:*

- I)  $S(0) = I$ , onde  $I$  é o operador identidade de  $\mathfrak{L}(X)$ .
- II)  $S(t+s) = S(t)S(s)$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$ .

*Diz-se que o semigrupo  $S$  é de classe  $C_0$  se*

- III)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\|_X = 0$ ,  $\forall x \in X$ .

**Definição 1.44** (Gerador Infinitesimal). *Considere*

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X ; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}.$$

*O operador linear  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \rightarrow X$  definido por*

$$\mathcal{A}x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(\mathcal{A})$$

*é dito gerador infinitesimal do semigrupo  $S$ .*

**Proposição 1.45.** *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$  com gerador infinitesimal  $\mathcal{A}$ .*

- i) *Se  $x \in D(\mathcal{A})$ , então  $S(t)x \in D(\mathcal{A})$  para  $t \geq 0$  e*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = \mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}x.$$

ii) Se  $x \in D(\mathcal{A})$ , então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t \mathcal{A}S(\tau)x \, d\tau = \int_s^t S(\tau)\mathcal{A}x \, d\tau.$$

iii) Se  $x \in D(\mathcal{A})$ , então  $\int_0^t S(\tau)x \, d\tau \in D(\mathcal{A})$  e

$$S(t)x - x = \mathcal{A} \int_0^t S(\tau)x \, d\tau.$$

*Demonstração.* Ver Gomes A. M, [13], p. 13. □

**Proposição 1.46.** (i) O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  é um operador linear fechado e seu domínio é denso em  $X$ .

(ii) Um operador linear  $\mathcal{A}$ , fechado e com domínio denso em  $X$ , é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe  $C_0$ .

*Demonstração.* Ver Gomes A. M, [13], p. 15. □

**Definição 1.47.** Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$  e  $\mathcal{A}$  seu gerador infinitesimal. Assumindo  $\mathcal{A}^0 = I$ ,  $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$  e, supondo que  $\mathcal{A}^{n-1}$  esteja definido, consideremos

$$D(\mathcal{A}^n) = \{x \in X ; x \in D(\mathcal{A}^{n-1}) \text{ e } \mathcal{A}^{n-1}x \in D(\mathcal{A})\}.$$

Vamos definir  $\mathcal{A}^n$  como

$$\mathcal{A}^n x = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}x), \quad \forall x \in D(\mathcal{A}^n).$$

**Proposição 1.48.** Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$  e  $\mathcal{A}$  seu gerador infinitesimal.

i)  $D(\mathcal{A}^n)$  é um subespaço denso de  $X$  e  $\mathcal{A}^n$  é um operador linear de  $X$ .

ii) Se  $x \in D(\mathcal{A}^n)$ , então  $S(t)x \in D(\mathcal{A}^n)$ ,  $\forall t \geq 0$  e

$$\frac{d^n}{dt^n} S(t)x = \mathcal{A}^n S(t)x = S(t)\mathcal{A}^n x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

iii) É válida a fórmula de Taylor: se  $x \in D(\mathcal{A}^n)$ , então

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} \mathcal{A}^k S(a)x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} \mathcal{A}^n S(\tau)x \, d\tau.$$

iv)  $(S(t) - I)^n x = \int_0^t \cdots \int_0^t S(\tau_1 \cdots \tau_n) \mathcal{A}^n x \, d\tau_1 \cdots d\tau_n \quad \forall x \in D(\mathcal{A}^n).$

v)  $\bigcap_n D(\mathcal{A}^n)$  é denso em  $X$ .

*Demonstração.* Ver Gomes A. M, [13], p. 20.  $\square$

**Proposição 1.49.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  um operador linear fechado. Pondo, para cada  $x \in D(\mathcal{A}^k)$ ,*

$$\|x\|_{D(\mathcal{A}^k)} = \sum_{j=0}^k \|\mathcal{A}^j x\|_X, \quad (1.1)$$

o funcional  $\|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}$  é uma norma em  $D(\mathcal{A}^k)$ , munido da qual  $D(\mathcal{A}^k)$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Ver Gomes A. M, [13], p. 22.  $\square$

**Definição 1.50.** A norma (1.1) é dita **norma do gráfico**. O espaço de Banach que se obtém munido  $D(\mathcal{A}^k)$  da norma (1.1) será representado por  $[D(\mathcal{A}^k)]$ .

**Proposição 1.51.** *Se  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , de classe  $C_0$ , então,  $\forall x \in D(\mathcal{A}^n)$ ,  $S(t)x \in C^{n-k}([0, \infty); [D(\mathcal{A}^k)])$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .*

*Demonstração.* Ver Gomes A. M, [13], p. 23.  $\square$

**Teorema 1.52.** *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$  com gerador infinitesimal  $\mathcal{A}$ . Se  $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ , onde*

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t},$$

então  $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ , existe a integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \quad \forall x \in X,$$

e

$$R(\lambda, \mathcal{A})x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \quad \forall x \in X.$$

*Demonstração.* Ver Gomes A. M, [13], p. 30.  $\square$

**Teorema 1.53** (Hille-Yosida). *Para que um operador linear  $\mathcal{A}$ , definido no subespaço vetorial  $D(\mathcal{A}) \subset X$  e com valores em  $X$ , seja o gerador infinitesimal de um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de classe  $C_0$  tal que  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$ ,  $t > 0$ , é necessário e suficiente que:*

i)  $\mathcal{A}$  seja fechado e seu domínio seja denso em  $X$ .

ii) Exista  $\omega$  tal que para cada real  $\lambda > \omega$  se tenha  $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$  e

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

*Demonstração.* Ver Gomes A. M, [13], 4.4 Teorema (Hille-Yosida) p. 32 e 4.5 Corolário p. 36.  $\square$

**Definição 1.54.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $X'$  o dual de  $X$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a dualidade entre  $X$  e  $X'$ . Ponhamos, para cada  $x \in X$ ,*

$$J(x) = \{x^* ; \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X'}^2\}.$$

*Pelo Teorema de Hahn-Banach,  $J(x) \neq \emptyset$ , para todo  $x \in X$ . Uma aplicação dualidade é uma aplicação  $j : X \rightarrow X'$  tal que  $j(x) \in J(x)$ , para todo  $x \in X$ .*

**Definição 1.55.** *Diz-se que o operador  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade  $j$ ,*

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}x, j(x) \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

**Proposição 1.56.** *Se  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow X$  é dissipativo e  $\lambda_0 I - \mathcal{A}$  é sobrejetor para algum  $\lambda_0 > 0$ , então*

- (i)  $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$  e  $\mathcal{A}$  é fechado,
- (ii)  $(0, \infty) \subset \rho(\mathcal{A})$ ,
- (iii)  $\lambda I - \mathcal{A}$  é sobrejetor, para todo  $\lambda > 0$ .

*Demonstração.* Ver Gomes A. M, [13], p. 38.  $\square$

**Teorema 1.57** (Lumner-Phillips). *Um operador linear  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de classe  $C_0$  com  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$  se, e somente se,*

- (i) o operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo;
- (ii) o operador  $\lambda_0 I - \mathcal{A}$  é um operador sobrejetor, para algum  $\lambda_0 > 0$ ;
- (iii) o operador  $\mathcal{A}$  é densamente definido.

*Demonstração.* Suponha inicialmente que o operador linear  $\mathcal{A}$  seja gerador de um semigrupo de classe  $C_0$  com  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ . Segue do Teorema 1.53 que o operador  $\mathcal{A}$  é fechado, densamente definido e que o operador  $\lambda_0 I - \mathcal{A}$  é um sobrejetor para todo  $\lambda_0 > 0$ . Além disso, para cada aplicação dualidade,  $j$ , tem-se

$$\operatorname{Re}\langle S(t)x, j(x) \rangle \leq |\langle S(t)x, j(x) \rangle| \leq \|S(t)x\|_X \|j(x)\|_{X'} \leq \|x\|_X^2$$

visto que, por hipótese,  $\|S(t)x\|_X \leq \|x\|_X$ , para todo  $x \in X$ . Portanto,

$$\operatorname{Re}\langle S(t)x - x, j(x) \rangle = \operatorname{Re}\langle S(t)x, j(x) \rangle - \|x\|_X^2 \leq 0;$$

e dividindo por  $t$  e passando ao limite com  $t \rightarrow 0^+$ , pela continuidade da dualidade, temos que

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}x, j(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in D(\mathcal{A})$$

e, assim,  $\mathcal{A}$  é dissipativo.

Reciprocamente, suponhamos que as afirmações (i)–(iii) sejam válidas. Segue da Proposição 1.56 que  $\mathcal{A}$  é fechado,  $(0, \infty) \subset \rho(\mathcal{A})$  e segue da hipótese (iii) que  $D(\mathcal{A})$  é denso em  $X$ .

Dados  $x \in D(\mathcal{A})$  e  $\lambda > 0$ , como  $\mathcal{A}$  é dissipativo, então de

$$\langle (\lambda I - \mathcal{A})x, j(x) \rangle = \lambda \|x\|_X^2 - \langle \mathcal{A}x, j(x) \rangle$$

vem

$$\lambda \|x\|_X^2 \leq \operatorname{Re} \langle (\lambda I - \mathcal{A})x, j(x) \rangle \leq | \langle (\lambda I - \mathcal{A})x, j(x) \rangle | \leq \|(\lambda I - \mathcal{A})x\|_X \|x\|_X.$$

Assim

$$\|x\|_X = \|(\lambda I - \mathcal{A})(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x\|_X \geq \lambda \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x\|_X, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall \lambda > 0,$$

ou seja,

$$\frac{\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x\|_X}{\|x\|_X} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Pela desigualdade acima, temos

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda \geq 0;$$

Pelo Teorema de Hille-Yosida, Teorema 1.53 para  $\omega = 0$ , temos que  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de classe  $C_0$  com  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ .  $\square$

**Corolário 1.58.** *Seja  $\mathcal{A}$  um operador linear dissipativo com domínio  $D(\mathcal{A})$  denso no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ . Então,  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $S$  de classe  $C_0$  com  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$ .*

*Demonstração.* Como, por hipótese  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ , existe e é limitado o operador  $\mathcal{A}^{-1}$ . Recorrendo ao Teorema 1.19, temos que  $\lambda I - \mathcal{A}$  é invertível sempre que  $0 < \lambda < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}$ . Assim, segue do Teorema de Lummer-Phillips, Teorema 1.57, que  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  sobre  $\mathcal{H}$  com  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$ .  $\square$

**Teorema 1.59.** *Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert e o operador linear  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ . Considere o problema de Cauchy abstrato*

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}U(t) \quad t > 0, \\ U(0) &= U_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

i) se  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , então o problema 1.2 tem uma única solução  $U(t) = S(t)U_0$

satisfazendo

$$U \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C([0, \infty); [\mathcal{D}(\mathcal{A})])$$

ii) se  $U_0 \in \mathcal{H}$ , então o problema [1.2](#) tem uma única solução  $U(t) = S(t)U_0$  satisfazendo

$$U \in C([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^1((0, \infty); \mathcal{H}) \cap C((0, \infty); [\mathcal{D}(\mathcal{A})])$$

iii) se  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$ , então o problema [\(1.2\)](#) tem uma única solução  $U(t) = S(t)U_0$  satisfazendo

$$U \in \bigcap_{j=0}^n C^{n-j}([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}^j))$$

*Demonstração.* Ver Gomes A. M, [\[13\]](#), Pazy [\[31\]](#). □

## 1.4 Espaços $L^p(0, T; X)$

Seja  $X$  um espaço de Banach separável. Uma função  $u$  definida em  $(0, T)$  com valores em  $X$  é mensurável quando, para toda  $f \in X'$ , a função numérica  $t \mapsto \langle f, u(t) \rangle_{X' \times X}$  for mensurável à Lebesgue em  $(0, T)$ .

A função  $u : (0, T) \rightarrow X$  é integrável no sentido de Bochner em  $(0, T)$ , se  $u$  for mensurável e a função  $t \mapsto \|u(t)\|_X$  for integrável à Lebesgue em  $(0, T)$ . Neste caso, a integral de Bochner de  $u$  é o vetor de  $X$  denotado por  $\int_0^T u(t) dt$  e caracterizado por

$$\left\langle f, \int_0^T u(t) dt \right\rangle_{X' \times X} = \int_0^T \langle f, u(t) \rangle_{X' \times X} dt, \quad \forall f \in X'.$$

Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $T > 0$  números reais. Denotamos por  $L^p(0, T; X)$  o espaço vetorial das (classes) funções  $u : (0, T) \mapsto X$  mensuráveis e tais que a aplicação  $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$  é integrável à Lebesgue em  $(0, T)$ . Em  $L^p(0, T; X)$  define-se a norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left[ \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

em relação a qual  $L^p(0, T; X)$  é um espaço de Banach.

**Observação 1.60.** Se  $p = 2$  e  $X$  é um espaço de Hilbert, então  $L^2(0, T; X)$  é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X dt, \quad \forall u, v \in L^2(0, T; X).$$

Por  $L^\infty(0, T; X)$  estaremos denotando o espaço vetorial das (classes) funções

mensuráveis  $u : (0, t) \mapsto X$  tais que

$$\sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X \leq \infty.$$

Neste espaço, definimos a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

em relação a qual  $L^\infty(0, T; X)$  é um espaço de Banach.

Se  $1 \leq p < \infty$ , o dual topológico de  $L^p(0, T; X)$  se identifica com o espaço  $L^{p'}(0, T; X')$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Demonstra-se também que se  $X$  for reflexivo (respectivamente separável) e  $1 < p < \infty$  (respectivamente  $1 \leq p < \infty$ ) então  $L^p(0, T; X)$  é reflexivo e (respectivamente separável). Com esta identificação temos

$$\langle f, u \rangle_{L^{p'}(0, T; X') \times L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{X' \times X} dt,$$

para todo  $f \in L^{p'}(0, T; X')$  e para todo  $u \in L^p(0, T; X)$ .

Temos também que o dual topológico de  $L^1(0, T; X)$  se identifica com o espaço  $L^\infty(0, T; X)$ .

## 1.5 Distribuições vetoriais

No que segue, iremos supor que o espaço de Banach  $X$  é sempre real, separável e reflexivo. Em muitas situações,  $X$  será um espaço de Hilbert.

Seja  $u \in L^p(0, T; X)$  e consideremos a aplicação  $\tilde{u} : D(0, T) \rightarrow X$  definida por

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \int_0^T u(s) \varphi(s) ds \in X, \quad \forall \varphi \in D(0, T), \quad (1.3)$$

onde a integral é entendida como a integral de Bochner em  $X$ . A igualdade (1.3) define uma aplicação linear e contínua de  $D(0, T)$  em  $X$ . Portanto,  $\tilde{u}$  pertence ao espaço das distribuições vetoriais definidas em  $D(0, T)$  com valores em  $X$ , o qual representa-se por  $D'(0, T; X)$ . Além disso, demonstra-se (ver por exemplo, R. Temam [37]) que a distribuição  $\tilde{u}$  é univocamente determinada por  $u$ , de modo que podemos identificar  $u$  com  $\tilde{u}$ . Neste sentido, identifica-se  $L^p(0, T; X)$  com parte de  $D'(0, T; X)$ , isto é,  $L^p(0, T; X) \subset D'(0, T; X)$ . Desta forma, sendo todo elemento  $u$  de  $L^p(0, T; X)$  uma distribuição,  $u$  possui derivada no sentido das distribuições, isto é, existe  $u' \in D'(0, T; X)$  a qual é definida por

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^T u(s) \varphi'(s) ds, \quad \forall \varphi \in D(0, T).$$

Diz-se que uma sucessão  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vetores de  $D'(0, T; X)$  converge para a distribuição  $u$  em  $D'(0, T; X)$  se  $\langle u_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle$  para toda  $\varphi \in D(0, T)$ .

Sejam  $V$  e  $H$  espaços de Hilbert reais. Suponhamos que  $V$  é denso em  $H$  e que a injeção  $V$  em  $H$  é contínua. Escrevemos  $V \hookrightarrow H$  para indicar tal situação. Identificando-se  $H$  com seu dual topológico  $H'$  segue que

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'.$$

A seguir enunciaremos resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [37].

**Proposição 1.61.** *Se  $u$  e  $v \in L^2(0, T; V)$  e  $u', v' \in L^2(0, T; V)$  então a aplicação  $t \mapsto (u(t), v(t))_H$  é absolutamente contínua em  $[0, T]$  e vale a seguinte igualdade*

$$\frac{d}{dt} (u(t), v(t))_H = \langle u'(t), v(t) \rangle_{V' \times V} + \langle u(t), v'(t) \rangle_{V' \times V},$$

onde a derivada no primeiro membro da igualdade é a derivada no sentido das distribuições sobre  $(0, T)$  das funções  $(u(t), v(t))_H$ .

*Demonstração.* Ver Teman, [37], p. 261. □

**Corolário 1.62.** *Se  $v \in L^2(0, T; V)$ ,  $u, v' \in L^2(0, T, H)$  e  $u' \in L^2(0, T, V')$ , então*

$$\frac{d}{dt} (u(t), v(t))_H = \langle u'(t), v(t) \rangle_{V' \times V} + \langle u(t), v'(t) \rangle_H.$$

*Demonstração.* Ver Teman, [37], p. 261. □

**Corolário 1.63.** *Se  $u \in L^2(0, T; V)$  e  $u' \in L^2(0, T; V')$ , então  $u$  é, após uma modificação eventual em um conjunto de medida nula, contínua de  $[0, T]$  em  $H$ , isto é,  $u \in C([0, T], H)$ . Além disso, temos a seguinte igualdade no sentido das distribuições escalares sobre  $(0, T)$*

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t) \rangle_{V' \times V}.$$

*Demonstração.* Ver Teman, [37], p. 261. □

## 1.6 Estabilidade

**Definição 1.64.** *Um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é dito **exponencialmente estável** se existirem constantes  $\alpha > 0$  e  $M \geq 1$  tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$



O próximo teorema, devido a Prüss, caracteriza a estabilidade exponencial de um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , tal que  $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq 1$ .

**Teorema 1.65.** *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$  num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  satisfazendo  $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$  e  $\mathcal{A}$  o gerador infinitesimal de  $S$ . Então  $S(t)$  é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$i\mathbb{R} = \{i\beta ; \beta \in \mathbb{R}\} \subset \varrho(\mathcal{A})$$

e

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

*Demonstração.* Ver Prüss [32]. □

**Definição 1.66.** *Um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  sobre um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é dito **polinomialmente estável** se existirem constantes  $C > 0$  e  $\gamma > 0$  tais que*

$$\|S(t)u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^\gamma} \|u\|_{D(\mathcal{A})}, \quad \forall u \in D(\mathcal{A}).$$

O próximo teorema, devido a A. Borichev e Y. Tomilov, caracteriza a estabilidade polinomial de semigrupos  $C_0$  limitados sobre espaços de Hilbert.

**Teorema 1.67.** *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$ , com gerador infinitesimal  $\mathcal{A}$ , sobre um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que  $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ . Então para  $\alpha > 0$  fixado, as seguintes condições são equivalentes:*

$$(I) \quad \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} = O(|\lambda|^{-\alpha}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

$$(II) \quad \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} = O\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

*Demonstração.* Ver Borichev, A., Tomilov, Y. [3]. □

# Capítulo 2

## O sistema de Timoshenko termoelástico homogêneo.

### 2.1 Introdução

A proposta neste capítulo é estudar sobre a estabilidade do sistema de Timoshenko termoelástico homogêneo, o qual é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma \theta_x = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \sigma \theta = 0, \quad (2.2)$$

$$\rho_3 \theta_t - \gamma \theta_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0, \quad (2.3)$$

para  $x \in (0, L)$  e  $t \in (0, \infty)$ , sujeito às seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \forall x \in (0, L), \\ \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x) \quad \forall x \in (0, L). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ao longo do capítulo estudaremos o sistema (2.1)-(2.4) associado a cada uma das seguintes condições de fronteira

i) **Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet**

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.5)$$

ii) **Dirichlet-Neumann-Neumann**

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Para encontrarmos a energia do sistema, procedemos formalmente.

Multiplicando a equação (2.1) por  $\varphi_t$ , integrando por partes de 0 a  $L$  e usando as condições de fronteira (2.5) ou (2.6), encontramos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 dx = -k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{t,x} dx + \sigma \int_0^L \theta \varphi_{t,x} dx. \quad (2.7)$$

Multiplicando a equação (2.2) por  $\psi_t$ , integrando por partes de 0 a  $L$  e usando as condições de fronteira (2.5) ou (2.6), obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\rho_2 |\psi_t|^2 + b |\psi_x|^2] dx = -k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \sigma \int_0^L \theta \psi_t dx. \quad (2.8)$$

Por fim, multiplicando a equação (2.3) por  $\theta$ , integrando por partes de 0 a  $L$  e usando as condições de fronteira (2.5) ou (2.6), segue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_3 |\theta|^2 dx + \gamma \int_0^L |\theta_x|^2 dx = -\sigma \int_0^L (\varphi_x + \psi)_t \theta dx. \quad (2.9)$$

Somando as equações (2.7), (2.8) e (2.9) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_3 |\theta|^2 + b |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 dx \right] + \gamma \int_0^L |\theta_x|^2 dx \\ & = 0. \end{aligned}$$

Assim, definimos a energia associada ao sistema como sendo

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_3 |\theta|^2 + b |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 dx \quad (2.10)$$

e segue que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma \int_0^L |\theta_x|^2 dx \leq 0.$$

Desta forma, a energia do sistema é decrescente.

Nosso objetivo neste trabalho é obter quais as condições necessárias e suficientes para que se tenha  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$  uniformemente em relação aos dados iniciais. Antes, porém, vamos mostrar que o sistema de Timoshenko é bem posto. Para isto, usaremos a teoria de  $C_0$ -semigrupos de operadores lineares.

## 2.2 Existência e unicidade de solução

Nosso primeiro objetivo é escrever o sistema de equações diferenciais parciais (2.1) - (2.4) com condições de fronteira (2.5) ou (2.6) como um problema de Cauchy abstrato. Motivados a isso, introduzimos os seguintes espaços

$$\mathcal{H}_1 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L), \quad (2.11)$$

$$\mathcal{H}_2 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L_*^2(0, L), \quad (2.12)$$

onde

$$L_*^2(0, L) = \left\{ u \in L^2(0, L); \int_0^L u dx = 0 \right\} \text{ e } H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L),$$

equipado com o produto interno

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}_j} &:= \int_0^L [\rho_1 \Phi_1 \overline{\Phi_2} + \rho_2 \Psi_1 \overline{\Psi_2} + b \psi_{1,x} \overline{\psi_{2,x}}] dx \\ &\quad + \int_0^L k(\varphi_{1,x} + \psi_1)(\overline{\varphi_{2,x} + \psi_2}) + \rho_3 \theta_1 \overline{\theta_2}] dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

sendo  $U_1 = (\varphi_1, \Phi_1, \psi_1, \Psi_1, \theta_1), U_2 = (\varphi_2, \Phi_2, \psi_2, \Psi_2, \theta_2) \in \mathcal{H}_j, j = 1, 2$ , e com a norma induzida

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 := \int_0^L [\rho_1 |\Phi|^2 + \rho_2 |\Psi|^2 + b |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 + \rho_3 |\theta|^2] dx. \quad (2.14)$$

Observamos que no espaço  $L_*^2(0, L)$  é válida a desigualdade de Poincaré e que, portanto, (2.14) é equivalente a norma usual de  $\mathcal{H}_j$ , conforme é mostrado na seguinte proposição.

**Proposição 2.1.** *A norma  $\|U\|_{\mathcal{H}_j}$  é equivalente à norma*

$$\|U\|_* := \|\varphi_x\|_{L^2} + \|\Phi\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + \|\Psi\|_{L^2} + \|\theta\|_{L^2}.$$

Além disso,  $\mathcal{H}_j$  é um espaço de Hilbert.

*Demonstração.* Decorre das desigualdades (1.11) e (1.41) (Poincaré) que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 &\leq \rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_3 \|\theta\|_{L^2}^2 + k(\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2})^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ &\leq \rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_3 \|\theta\|_{L^2}^2 + 4k(\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2) + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ &\leq \rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_3 \|\theta\|_{L^2}^2 + 4k(\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C_p^2 \|\psi_x\|_{L^2}^2) + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_0(\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\Psi\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2), \end{aligned}$$

onde  $C_0 = \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, 4kC_p^2 + b, 4k\}$ . Extraindo a raiz quadrada na desigualdade acima e usando a propriedade

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \forall a, b > 0,$$

obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|U\|_*, \quad (2.15)$$

onde  $C = (\max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, 4kC_p^2 + b, 4k\})^{\frac{1}{2}}$ . Por outro lado, desde que

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_{L^2} &\leq \|(\varphi_x + \psi) - \psi\|_{L^2} \\ &\leq \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \\ &\leq \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + C_p\|\psi_x\|_{L^2}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \|U\|_* &\leq \|\Phi\|_{L^2} + \|\Psi\|_{L^2} + \|\theta\|_{L^2} + \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + (C_p + 1)\|\psi_x\|_{L^2} \\ &\leq (C_p + 1)(\|\Phi\|_{L^2} + \|\Psi\|_{L^2} + \|\theta\|_{L^2} + \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2}) \\ &\leq (C_p + 1) \left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_j}}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_j}}{\sqrt{\rho_2}} + \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_j}}{\sqrt{\rho_3}} + \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_j}}{\sqrt{k}} + \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_j}}{\sqrt{b}} \right) \\ &\leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}_j} \end{aligned}$$

onde  $C_1 = 5(C_p + 1) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_3}} + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right)$ .  $\square$

Agora, reescrevemos o problema (2.1)-(2.4) com as condições de fronteira (2.5) ou (2.6) como o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}_j U(t) & t > 0 \\ U(0) := U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0)^T, \end{cases} \quad (2.16)$$

onde  $\mathcal{A}_j : \mathcal{D}(\mathcal{A}_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$  é o operador linear não-limitado definido por

$$\mathcal{A}_j U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\sigma}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\sigma}{\rho_2}\theta \\ \frac{\gamma}{\rho_3}\theta_{xx} - \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) \end{pmatrix}$$

para qualquer  $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$ , cujo domínio é dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1 \times (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1 \times (H^2 \cap H_0^1),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_2) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1 \times [H_*^2 \cap H_*^1] \times H_*^1 \times (H_*^2 \cap L_*^2),$$

onde  $H_*^2 := \{\psi \in H^2(0, L) / \psi_x \in H_0^1(0, L)\}$ .

É importante observar que o índice  $j = 1$  representa o problema de Cauchy abstrato com as condições de fronteira (2.5) enquanto  $j = 2$  representa para as condições de fronteira (2.6).

Antes de prosseguirmos, é importante ressaltar que omitiremos o índice  $j$  de  $\mathcal{A}_j$  e  $\mathcal{H}_j$ , os quais serão representados por  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{H}$ , respectivamente.

**Proposição 2.2.** *O operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo, ou seja, se  $U \in D(\mathcal{A})$  então*

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0.$$

*Demonstração.* Considere  $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Então, pela a definição do produto interno em  $\mathcal{H}$  e do operador  $\mathcal{A}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\sigma}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\sigma}{\rho_2}\theta \\ \frac{\gamma}{\rho_3}\theta_{xx} - \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \\ \theta \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_0^L [k(\varphi_x + \psi)_x - \sigma\theta_x] \bar{\Phi} dx + \int_0^L [b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) + \sigma\theta] \bar{\Psi} dx \\ &\quad + \int_0^L b\Psi_x \bar{\psi}_x dx + \int_0^L k(\Phi_x + \Psi) \overline{(\varphi_x + \psi)} dx + \int_0^L [\gamma\theta_{xx} - \sigma(\Phi_x + \Psi)] \bar{\theta} dx \\ &= k(\varphi_x + \psi) \bar{\Phi} \Big|_0^L - \int_0^L k(\varphi_x + \psi) \overline{(\Phi_x + \Psi)} dx - \sigma\theta \Big|_0^L + \int_0^L \sigma\theta [\overline{\Phi_x + \Psi}] dx \\ &\quad + b\psi_x \bar{\Psi} \Big|_0^L - \int_0^L b\psi_x \bar{\Psi}_x dx + \int_0^L b\psi_x \bar{\Psi}_x dx + \int_0^L k(\Phi_x + \Psi) \overline{(\varphi_x + \psi)} dx \\ &\quad + \gamma\theta_x \bar{\theta} \Big|_0^L - \int_0^L \gamma|\theta_x|^2 dx - \int_0^L \sigma(\Phi_x + \Psi) \bar{\theta} dx. \end{aligned}$$

Devido às condições de fronteira (2.5) ou (2.6) segue que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \overline{\left( \int_0^L k(\varphi_x + \psi) \overline{(\Phi_x + \Psi)} dx \right)} - \left( \int_0^L k(\varphi_x + \psi) \overline{(\Phi_x + \Psi)} dx \right) \\ &\quad + \int_0^L \sigma\theta [\overline{\Phi_x + \Psi}] dx + \overline{\left( \int_0^L \sigma\theta [\overline{\Phi_x + \Psi}] dx \right)} - \int_0^L \gamma|\theta_x|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= (-2i)\operatorname{Im} \left( \int_0^L k(\varphi_x + \psi) \overline{(\Phi_x + \Psi)} dx \right) + (2i)\operatorname{Im} \left( \int_0^L \sigma \theta \overline{[\Phi_x + \Psi]} dx \right) \\ &\quad - \int_0^L \gamma |\theta_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Tomando a parte real da igualdade acima obtemos

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = - \int_0^L \gamma |\theta_x|^2 dx \leq 0. \quad (2.17)$$

□

Nosso principal objetivo nesta seção é mostrar que o operador  $\mathcal{A}$  definido acima gera um semigrupo de contração de classe  $C_0$  sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Vamos provar a existência e unicidade de solução para o sistema Timoshenko com condições de fronteira Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet. No caso das condições de fronteira Dirichlet-Neumann-Neumann, a prova segue de modo análogo.

Primeiramente, mostraremos que  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ , ou seja,  $\mathcal{A}$  é bijetivo e  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  e usando o Lema [1.19](#) concluímos o resultado.

Sejam  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in \mathcal{H}_1$ . Vamos mostrar que existe  $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)$  tal que  $\mathcal{A}U = F$ . A equação resolvente  $\mathcal{A}U = F$  em termos de suas componentes é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais

$$\Phi = f_1 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.18)$$

$$k(\varphi_x + \psi)_x - \sigma \theta_x = \rho_1 f_2 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.19)$$

$$\Psi = f_3 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.20)$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) + \sigma \theta = \rho_2 f_4 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.21)$$

$$\gamma \theta_{xx} - \sigma(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.22)$$

Desta forma, segue pelas equações [\(2.18\)](#) e [\(2.20\)](#) que podemos considerar  $\Phi = f_1, \Psi = f_3$ , ou seja,  $\Phi, \Psi \in H_0^1$ . Substituindo estas igualdades na equação [\(2.22\)](#) resulta

$$\begin{cases} -\theta_{xx} = \hat{f}, \\ \theta(0) = \theta(L) = 0, \end{cases}$$

onde  $\widehat{f} := -\frac{1}{\gamma}[\rho_3 f_5 + \sigma(f_{1,x} + f_3)] \in L^2(0, L)$ , pois  $f_1, f_3 \in H_0^1$ . Já sabemos que o problema de contorno acima possui uma única solução  $\theta \in H^2 \cap H_0^1$  (ver Brezis [5]). Devido às equações (2.19) e (2.21) encontramos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = \widehat{f}_2 & (2.23) \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = \widehat{f}_4 & (2.24) \end{cases}$$

onde  $\widehat{f}_2 = -(\rho_1 f_2 + \sigma\theta_x) \in L^2(0, L)$  e  $\widehat{f}_4 = -\rho_2 f_4 + \sigma\theta \in L^2(0, L)$ , pois  $\theta \in H^2(0, L)$ .

Multiplicando (2.23) por  $\overline{\varphi_2} \in H_0^1$  e (2.24) por  $\overline{\psi_2} \in H_0^1$ , integrando por partes de 0 à  $L$  e, em seguida, somando os resultados obtidos, obtemos

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{(\varphi_{2,x} + \psi_2)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_{2,x}} dx = \int_0^L \widehat{f}_2 \overline{\varphi_2} + \widehat{f}_4 \overline{\psi_2} dx.$$

Isso nos motiva a definir a seguinte forma sesquilinear  $a$  em  $\mathcal{W} := H_0^1 \times H_0^1$  e o seguinte funcional anti-linear  $T$  sobre  $\mathcal{W}$ :

$$\begin{aligned} a : \mathcal{W} \times \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto a(\omega_1, \omega_2) = \int_0^L k(\varphi_{1,x} + \psi_1) \overline{(\varphi_{2,x} + \psi_2)} + b\psi_{1,x} \overline{\psi_{2,x}} dx, \\ T : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega_2 &\longmapsto T(\omega_2) = \int_0^L \widehat{f}_2 \overline{\varphi_2} + \widehat{f}_4 \overline{\psi_2} dx \end{aligned}$$

onde  $\omega_1 = (\varphi_1, \psi_1)$  e  $\omega_2 = (\varphi_2, \psi_2)$ .

Não é difícil verificar que  $a$  define um produto interno no espaço de Hilbert  $\mathcal{W}$ . Dessa forma, podemos definir a norma em  $\mathcal{W}$  induzida pelo produto interno

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \|\omega\|_{\mathcal{W}} = [a(\omega, \omega)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

**Lema 2.3.** *A forma sesquilinear  $a : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$  é contínua e coerciva, isto é, existem constantes  $C_1 > 0$  e  $C_2 > 0$  tais que*

- (i)  $a(\omega_1, \omega_1) \geq C_1 \|\omega_1\|_{\mathcal{W}}^2$ ,
- (ii)  $|a(\omega_1, \omega_2)| \leq C_2 \|\omega_1\|_{\mathcal{W}} \|\omega_2\|_{\mathcal{W}}$ ,

para quaisquer  $\omega_1 = (\varphi_1, \psi_1), \omega_2 = (\varphi_2, \psi_2) \in \mathcal{W}$ .



*Demonstração.* (i) Se  $\omega_1 = (\varphi_1, \psi_1) \in \mathcal{W}$ , então

$$\begin{aligned} |a(\omega_1, \omega_1)| &= \int_0^L k|\varphi_{1,x} + \psi_1|^2 dx + \int_0^L b|\psi_{1,x}|^2 dx \\ &\geq 1\|\omega_1\|_{\mathcal{W}}^2. \end{aligned}$$

(ii) Sejam  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{W}$ , segue da desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} |a(\omega_1, \omega_2)| &= \left| \int_0^L k(\varphi_{1,x} + \psi_1)(\overline{\varphi_{2,x} + \psi_2}) + b\psi_{1,x}\overline{\psi_{2,x}} dx \right| \quad (2.25) \\ &\leq (\sqrt{k}\|\varphi_{1,x} + \psi_1\|_{L^2})(\sqrt{k}\|\varphi_{2,x} + \psi_2\|_{L^2}) + (\sqrt{b}\|\psi_{1,x}\|)(\sqrt{b}\|\psi_{2,x}\|). \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \sqrt{k}\|\varphi_{j,x} + \psi_j\|_{L^2} &= \left( k \int_0^L |\varphi_{j,x} + \psi_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\omega_j\|_{\mathcal{W}}, \\ \sqrt{b}\|\psi_{j,x}\|_{L^2} &\leq \|\omega_j\|_{\mathcal{W}}, \end{aligned}$$

para  $j = 1, 2$ . Dessa forma, a desigualdade (2.25) tem a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |a(\omega_1, \omega_2)| &\leq \|\omega_1\|_{\mathcal{W}}\|\omega_2\|_{\mathcal{W}} + \|\omega_1\|_{\mathcal{W}}\|\omega_2\|_{\mathcal{W}} \\ &\leq 2\|\omega_1\|_{\mathcal{W}}\|\omega_2\|_{\mathcal{W}}. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.4.** *O funcional linear anti-linear  $T : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$  é contínuo, isto é, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$|T(\omega)| \leq C\|\omega\|_{\mathcal{W}}.$$

*Demonstração.* Devido às desigualdades de Hölder e Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
|T(w)| &\leq \|\widehat{f}_2\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} + \|\widehat{f}_4\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \\
&\leq \max \left\{ \|\widehat{f}_2\|_{L^2}, \|\widehat{f}_4\|_{L^2} \right\} \left( \|\varphi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \right) \\
&\leq \max \left\{ \|\widehat{f}_2\|_{L^2}, \|\widehat{f}_4\|_{L^2} \right\} \left( C_p \|\varphi_x + \psi - \psi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \right) \\
&\leq \max \left\{ \|\widehat{f}_2\|_{L^2}, \|\widehat{f}_4\|_{L^2} \right\} \left( C_p \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + (C_p + 1) \|\psi\|_{L^2} \right) \\
&\leq \max \left\{ \|\widehat{f}_2\|_{L^2}, \|\widehat{f}_4\|_{L^2} \right\} \left( C_p \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + (C_p + 1) C_p \|\psi_x\|_{L^2} \right) \\
&\leq \max \left\{ \|\widehat{f}_2\|_{L^2}, \|\widehat{f}_4\|_{L^2} \right\} \left( \frac{C_p}{\sqrt{k}} \|\omega\|_{\mathcal{W}} + \frac{(C_p + 1) C_p}{\sqrt{b}} \|\omega\|_{\mathcal{W}} \right) \\
&\leq C \|\omega\|_{\mathcal{W}}
\end{aligned}$$

onde  $C = \frac{\max\{\|\widehat{f}_2\|_{L^2}, \|\widehat{f}_4\|_{L^2}\} C_p}{\sqrt{k}} + \frac{\max\{\|\widehat{f}_2\|_{L^2}, \|\widehat{f}_4\|_{L^2}\} (C_p + 1) C_p}{\sqrt{b}}$ . □

Portanto, segue pelo Teorema de Lax-Milgran, Teorema [1.10](#), que existe um único vetor  $(\varphi, \psi) \in H_0^1 \times H_0^1$  de modo

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{(\varphi_{2,x} + \psi_2)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_{2,x}} dx = \int_0^L \widehat{f}_2 \overline{\varphi_2} + \widehat{f}_4 \overline{\psi_2} dx, \quad (2.26)$$

para quaisquer  $\varphi_2, \psi_2 \in H_0^1$ . Em particular, para  $(\varphi_2, 0) \in C_0^\infty \times C_0^\infty \subset \mathcal{W}$  temos

$$\int_0^L [k(\varphi_x + \psi)] \overline{\varphi_{2,x}} dx = - \int_0^L (-\widehat{f}_2) \overline{\varphi_2} dx \quad \forall \overline{\varphi_2} \in C_0^\infty.$$

Resulta da definição de espaço de Sobolev que

$$k(\varphi_x + \psi) \in H^1 \quad \text{e} \quad [k(\varphi_x + \psi)]_x = k(\varphi_x + \psi)_x = -\widehat{f}_2,$$

ou seja,  $\varphi_x \in H^1$  e, portanto,  $\varphi \in H^2 \cap H_0^1$ . Consideramos, em particular,  $(0, \psi_2) \in C_0^\infty \times C_0^\infty \subset \mathcal{W}$  em [\(2.26\)](#) e concluímos pela definição de espaço Sobolev que

$$b\psi_x \in H^1 \quad \text{e} \quad [b\psi_x]_x = b\psi_{xx} = k(\varphi_x + \psi) - \widehat{f}_4,$$

ou seja,  $\psi \in H^2 \cap H_0^1$ . Portanto, segue que  $\mathcal{A}$  é bijetivo e nos resta mostrar que  $\mathcal{A}^{-1}$  é limitado. Para isso, enunciaremos o seguinte lema.

**Lema 2.5.** *Com as notações acima, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|\theta_x\|^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.27)$$

*Demonstração.* Da equação  $\mathcal{A}U = F$  temos

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}\langle U, F \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (2.28)$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e (2.17) em (2.28) resulta que

$$\|\theta_x\|^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \quad \text{com} \quad C = \frac{1}{\gamma}.$$

□

A desigualdade (2.27) do Lema 2.5 nos forma uma estimativa para uma parcela da norma  $\|U\|_{\mathcal{H}}^2$ . Nosso objetivo é encontrar as estimativas das outras parcelas. Das equações (2.18) e (2.20) e das desigualdades de Poincaré e Young temos

$$\begin{aligned} \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 &= \rho_1\|f_1\|_{L^2}^2 + \rho_2\|f_3\|_{L^2}^2 \\ &\leq \rho_1 C_P^2 \|f_{1,x}\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|f_3\|_{L^2}^2 \\ &\leq \rho_1 C_P^2 \left( \|f_{1,x} + f_3 - f_3\|_{L^2} \right)^2 + \rho_2 \|f_3\|_{L^2}^2 \\ &\leq \rho_1 C_P^2 \|f_{1,x} + f_3\|_{L^2}^2 + (\rho_1 C_P^2 + \rho_2 C_P^2) \|f_{3,x}\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_0 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde  $C_0 = 2(\rho_1 C_P^2 + \rho_2 C_P^2)$ .

Agora, multiplique (2.19) e (2.21) por  $-\bar{\varphi}, -\bar{\psi} \in H^2 \cap H_0^1$ , respectivamente, e, em seguida, integre por partes de 0 a  $L$  e some os resultado obtidos. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L k|\varphi_x + \psi|^2 dx + \int_0^L b|\psi_x|^2 dx &= \rho_1 \int_0^L f_2 \bar{\varphi} dx + \rho_2 \int_0^L f_4 \bar{\psi} dx \\ &\quad + \sigma \int_0^L \theta[\overline{\varphi_x + \psi}] dx. \end{aligned}$$

Daí, segue do Lema (2.5) e das desigualdades de Hölder, Poincaré e Young que

$$\begin{aligned}
& k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx \\
& \leq \rho_1 C_P \|f_2\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi - \psi\|_{L^2} + \rho_2 C_P \|f_4\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} \\
& \quad + \sigma C_P \|\theta_x\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \\
& \leq \rho_1 C_P \|f_2\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + \rho_1 C_P^2 \|f_2\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} \\
& \quad + \rho_2 C_P \|f_4\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} + c_\epsilon \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \\
& \leq \rho_1 C_P \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \rho_1 C_{P_1}^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
& \quad + \rho_2 C_P \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c_\epsilon C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \\
& \leq C_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

onde  $C_1 = 4 \max\{\rho_1 C_P, \rho_1 C_P^2, \rho_2 C_P, c_\epsilon C\}$ , ou seja,

$$(k - \epsilon) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq C_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Tomando  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno na desigualdade acima resulta que

$$k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq C_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.31}$$

Segue de (2.27), (2.29), (2.31) e da desigualdade de Young que

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 & \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_0 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& \leq [2(C + C_1)] \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_0 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + [c_\epsilon + C_0] \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, considerando  $C = \sqrt{c_\epsilon + C_0}$  e tomando  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \Rightarrow \|\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.32)$$

Portanto, o operador  $\mathcal{A}^{-1}$  é limitado e, conseqüentemente,  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ .

**Proposição 2.6.** *Existe  $\lambda > 0$  tal que  $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ , isto é, existe  $\lambda$  positivo tal que  $(\lambda I - \mathcal{A})$  é inversível com  $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .*

*Demonstração.* Considere  $\lambda = 1/(2\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})})$  e note que

$$\lambda I - \mathcal{A} = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{A}^{-1} - I).$$

Se  $S := -I$  e  $B := \lambda\mathcal{A}^{-1}$ , claramente  $S$  é contínua com inversa contínua e  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , pois  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ , com

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}} = 1.$$

Logo, segue pelo Lema 1.19 que  $(\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)^{-1}$  existe e é limitado. Temos também que  $\mathcal{A}^{-1}$  existe e é limitado, pois  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ . Assim,

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} = (\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)^{-1}\mathcal{A}^{-1}$$

existe e é limitado, pois é composição de operadores lineares limitados. □

**Lema 2.7.** *O operador  $\mathcal{A}$  é densamente definido, isto é,  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ .*

*Demonstração.* Seja  $U \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^{\perp}$ , ou seja,  $\langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ , para todo  $V \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$ . Em particular, temos

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall V \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Pela Proposição 2.6 existe  $\lambda > 0$  tal que  $\text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ . Portanto, existe  $V_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  de modo que  $U = \lambda V_0 - \mathcal{A}V_0$ . Assim,

$$\langle U, V_0 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \lambda V_0, V_0 \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}V_0, V_0 \rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

ou seja,

$$\lambda \langle V_0, V_0 \rangle_{\mathcal{H}} = \text{Re} \langle \mathcal{A}V_0, V_0 \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0.$$

Portanto,  $V_0 = 0$  e, conseqüentemente,  $U = 0$ , ou seja,  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^{\perp} = \{0\}$ . Segue pelo Teorema 1.15 que  $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ . □

**Proposição 2.8.** *Com as notações acima o operador  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$  de contrações de classe  $C_0$ .*

*Demonstração.* Consequência imediata do Teorema [1.57](#) (Lumner-Phillips).  $\square$

### 2.2.1 Regularidade da solução do problema de Cauchy

**Proposição 2.9.** *Com as notações anteriores,*

(i) se  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , então o problema [2.16](#) tem uma única solução  $U(t) = S_{\mathcal{A}}(t)U_0$  satisfazendo

$$U \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C([0, \infty); [\mathcal{D}(\mathcal{A})]).$$

(ii) se  $U_0 \in \mathcal{H}$ , então o problema [2.16](#) tem uma única solução  $U(t) = S_{\mathcal{A}}(t)U_0$  satisfazendo

$$U \in C([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^1((0, \infty); \mathcal{H}) \cap C((0, \infty); [\mathcal{D}(\mathcal{A})]).$$

*Demonstração.* Decorre do Teorema [1.59](#).  $\square$

## 2.3 Lemas técnicos

Antes de prosseguirmos, chamamos a atenção para as diversas constantes positivas que aparecem no texto, representadas pela letra  $C$ . Na maioria das vezes, a constante  $C$  tem diferentes valores mudando de uma linha para outra linha.

Nosso principal objetivo nesta seção é obter as estimativas das parcelas de  $\|U\|_{\mathcal{H}}^2$ , que serão de suma importância para o estudo da estabilidade da solução do sistema Timoshenko termoelástico.

Dados  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in \mathcal{H}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , seja  $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  solução da equação resolvente  $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ , a qual em termos de suas componentes pode ser escrita como o sistema de equações

$$i\lambda\varphi - \Phi = f_1 \text{ em } H_0^1, \quad (2.33)$$

$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x = \rho_1 f_2 \text{ em } L^2, \quad (2.34)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f_3 \text{ em } H_0^1 \text{ ou } H_*^1, \quad (2.35)$$

$$i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta = \rho_2 f_4 \text{ em } L^2 \text{ ou } L_*^2, \quad (2.36)$$

$$i\lambda\rho_3\theta - \gamma\theta_{xx} + \sigma(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5 \text{ em } L^2 \text{ ou } L_*^2. \quad (2.37)$$

**Proposição 2.10.** *Com as notações acima, o operador  $\mathcal{A}^{-1}$  é compacto.*

*Demonstração.* Faremos a demonstração para as condições de fronteira (2.5), para o outro caso a prova decorre de modo análogo. Seja  $(F_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$  uma sequência limitada. Como  $0 \in \rho(\mathcal{A})$  temos

$$\|U_j\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F_j\|_{\mathcal{H}} \quad (2.38)$$

onde  $F_j = (f_1^j, f_2^j, f_3^j, f_4^j, f_5^j)^T$  e  $U_j = (\varphi^j, \Phi^j, \psi^j, \Psi^j, \theta^j)^T$  são tais que  $\mathcal{A}U_j = F_j$ .

Como  $(F_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$  é uma sequência limitada, segue da desigualdade (2.38) que  $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$  também é uma sequência limitada. Portanto, decorre da definição da norma em  $\mathcal{H}$  que as sequências  $\{\varphi^j\}_j, \{\psi^j\}_j$  são limitadas em  $H_0^1$ ,  $\{\Phi^j\}_j, \{\Psi^j\}_j$  e  $\{\theta^j\}_j$  são limitadas em  $L^2$ . Por outro lado, decorre da equação (2.17), da desigualdade de Cauchy-Scharwz e do Lema 2.5 que

$$|\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U_j, U_j \rangle_{\mathcal{H}}| = \gamma \|\theta_x^j\|_{L^2}^2 \leq C_0 \gamma \|F_j\|_{\mathcal{H}} \|U_j\|_{\mathcal{H}} \leq C, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

para alguma constante  $C > 0$ . Desta forma, segue da desigualdade de Poincaré que

$$\|\theta^j\|_{H_0^1} \leq C \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como  $H_0^1 \hookrightarrow L^2$  é uma imersão compacta, existe uma subsequência de  $\{\theta^j\}_j$ , denotada da mesma maneira, e  $\theta \in H_0^1$  tais que

$$\|\theta^j - \theta\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

A equação resolvente  $\mathcal{A}U_j = F_j$  em termos de suas componentes descrita pelas equações (2.33)-(2.37) nos permite obter, a partir das imersões compactas, uma subsequência e um vetor  $U_0 = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  que satisfaz a seguinte condição

$$\|U^j - U_0\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty,$$

o que nos permite concluir que o operador  $\mathcal{A}^{-1}$  é compacto.

Como as sequências  $\{\varphi_x^j\}_j, \{\psi^j\}_j, \{\theta^j\}_j$  e  $\{f_4^j\}_j$  são limitadas em  $L^2$ , da equação (2.36) obtemos que  $\{\psi_{xx}^j\}_j$  é limitada em  $L^2$  e, da definição de norma em  $H^2 \cap H_0^1$ , temos que  $\{\psi^j\}_j$  é limitada em  $H^2$ . Devido à imersão compacta de  $H^2 \hookrightarrow H^1$ , existe uma subsequência de  $(\psi^j)$ , denotada da mesma maneira, e  $\psi \in H_0^1$  tal que

$$\|\psi^j - \psi\|_{H_0^1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

De modo análogo, usando (2.34) concluímos que  $\{\varphi^j\}_j$  é limitada em  $H^2 \cap H_0^1$ . Portanto, concluímos a menos de subsequência que

$$\|\varphi^j - \varphi\|_{H_0^1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

Das equações (2.33) e (2.35), obtemos que  $\{\Phi^j\}_j$  e  $\{\Psi^j\}_j$  são limitadas em  $H_0^1$

e, portanto, a menos de subsquência temos

$$\|\Phi^j - \Phi\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

$$\|\Psi^j - \Psi\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

Assim,

$$\|U_j - U_0\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty,$$

onde  $U_0 = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T \in \mathcal{H}$ . Logo, o operador  $\mathcal{A}^{-1}$  é compacto.  $\square$

**Lema 2.11.** *O eixo imaginário está contido no resolvente do operador  $\mathcal{A}$ , ou seja,  $\{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$ .*

*Demonstração.* Note que  $\mathcal{A}$  é fechado, pois é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$  de contrações de classe  $C_0$  e, pela Proposição 2.10, temos que  $\mathcal{A}^{-1}$  é compacto. Segue do Teorema 1.20 que  $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A})$ , ou seja,  $\sigma(\mathcal{A})$  é constituído apenas de autovalores de  $\mathcal{A}$ . Suponha, por absurdo, que existe  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ , isto é, existe  $U \neq 0$  tal  $(i\lambda I - \mathcal{A})U = 0$ . Segue que

$$0 = \langle (i\lambda I - \mathcal{A})U, U \rangle_{\mathcal{H}} = i\lambda \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Tomando a parte real na igualdade acima obtemos

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \gamma \int_0^L |\theta_x|^2 dx = 0.$$

Da igualdade acima obtemos  $\theta = 0$ . Da equação (2.37), temos  $\Phi_x + \Psi = 0$ . De (2.33), (2.35) segue que

$$i\lambda(\varphi_x + \psi) = \Phi_x + \Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_x + \psi = \Phi_x + \Psi = 0.$$

Substituindo o resultado acima em (2.34) obtemos  $\Phi = 0$  e, prosseguindo dessa maneira, obtemos  $U = 0$ . Essa contradição nos mostra que  $\{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$ .  $\square$

Vamos introduzir as seguintes notações:

$$I_{\varphi} = |\Phi(L)|^2 + |\Phi(0)|^2 + |\varphi_x(L) + \psi(L)|^2 + |\varphi_x(0) + \psi(0)|^2, \quad (2.39)$$

$$I_{\psi} = |\Psi(L)|^2 + |\Psi(0)|^2 + |\psi_x(L)|^2 + |\psi_x(0)|^2. \quad (2.40)$$



**Lema 2.12.** *Com as notações acima existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$(i) \quad I_\varphi \leq C \int_0^L [|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi|^2] dx + C \|\Phi\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

$$(ii) \quad I_\psi \leq C \int_0^L [|\Psi|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi|^2] dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

*Demonstração.* (i) Multiplicando a equação (2.34) por  $(x - \frac{L}{2})\overline{[\varphi_x + \psi]}$  e, em seguida, integrando de 0 a  $L$ , segue que

$$\underbrace{i\lambda\rho_1 \int_0^L \Phi \left(x - \frac{L}{2}\right) \overline{[\varphi_x + \psi]} dx}_{:=I_1} - \underbrace{k \int_0^L [\varphi_x + \psi]_x \left(x - \frac{L}{2}\right) \overline{[\varphi_x + \psi]} dx}_{:=I_2}$$

$$+ \sigma \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \theta_x \overline{[\varphi_x + \psi]} dx = \rho_1 \int_0^L f_2 \left(x - \frac{L}{2}\right) \overline{[\varphi_x + \psi]} dx. \quad (2.41)$$

Substituindo as equações (2.33) e (2.35) em  $I_1$ , obtemos

$$\operatorname{Re} I_1 = -\rho_1 \operatorname{Re} \int_0^L \Phi \left(x - \frac{L}{2}\right) \overline{[f_{1,x} + f_3]} dx - \rho_1 \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \Phi \overline{\Psi} dx$$

$$- \rho_1 \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \operatorname{Re}[\Phi \overline{\Phi_x}] dx.$$

Notando que  $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [|\Phi|^2] = \operatorname{Re}[\Phi \overline{\Phi_x}]$  e efetuando uma integração por partes obtemos

$$\operatorname{Re} I_1 = -\rho_1 \operatorname{Re} \int_0^L \Phi \left(x - \frac{L}{2}\right) \overline{[f_{1,x} + f_3]} dx - \rho_1 \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \Phi \overline{\Psi} dx$$

$$- \frac{\rho_1}{2} \left(x - \frac{L}{2}\right) |\Phi| \Big|_0^L + \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\Phi|^2 dx$$

$$= -\rho_1 \operatorname{Re} \int_0^L \Phi \left(x - \frac{L}{2}\right) \overline{[f_{1,x} + f_3]} dx - \rho_1 \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \Phi \overline{\Psi} dx$$

$$- \frac{\rho_1 L}{4} (|\Phi(L)|^2 + |\Phi(0)|^2) + \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\Phi|^2 dx. \quad (2.42)$$

Através de integração por partes, obtemos a seguinte estimativa para o termo  $I_2$ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} I_2 &= \frac{-k}{2} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \frac{d}{dx} [|\varphi_x + \psi|^2] dx \\
&= -\frac{kL}{4} (|\varphi_x(L) + \psi(L)|^2 + |\varphi_x(0) + \psi(0)|^2) + \frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx. \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.42) e (2.43) na parte real de (2.41) resulta que

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho_1 L}{4} (|\Phi(L)|^2 + |\Phi(0)|^2) + \frac{kL}{4} (|\varphi_x(L) + \psi(L)|^2 + |\varphi_x(0) + \psi(0)|^2) \\
&= \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\Phi|^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - \rho_1 \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \Phi \bar{\Psi} dx \\
&\quad - \rho_1 \operatorname{Re} \int_0^L \Phi \left(x - \frac{L}{2}\right) [\overline{f_{1,x} + f_3}] dx + \sigma \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \theta_x [\overline{\varphi_x + \psi}] dx \\
&\quad - \rho_1 \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) f_2 [\overline{\varphi_x + \psi}] dx.
\end{aligned}$$

Tendo em mente a definição de  $I_\varphi$  dada em (2.39), que  $|x - L/2| \leq L/2$ , para  $x \in (0, L)$ , e usando o Lema 2.5 e a desigualdade de Young, obtemos

$$I_\varphi \leq C \int_0^L [|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi|^2] dx + C \|\Phi\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

para uma constante positiva  $C$ .

(ii) Multiplicando a equação (2.36) por  $(x - \frac{L}{2}) \bar{\Psi}_x$  e, em seguida, integrando de 0 a  $L$ , obtemos

$$\begin{aligned}
&\underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \Psi \bar{\psi}_x dx}_{:=I_3} - \underbrace{b \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \psi_{xx} \bar{\psi}_x dx}_{:=I_4} \\
&+ k \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) [\varphi_x + \psi] \bar{\psi}_x dx - \sigma \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \theta \bar{\psi}_x dx \quad (2.44) \\
&= \rho_2 \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) f_4 \bar{\psi}_x dx.
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (2.35) na parte real de  $I_3$ , temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} I_3 &= \rho_2 \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \operatorname{Re}[\Psi \overline{\Psi_x}] dx - \rho_2 \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \Psi \overline{f_{3,x}} dx \\
&= -\frac{\rho_2}{2} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \frac{d}{dx} [|\Psi|^2] dx - \rho_2 \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \Psi \overline{f_{3,x}} dx \\
&= \frac{\rho_2 L}{4} (|\Psi(L)|^2 + |\Psi(0)|^2) + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\Psi|^2 dx \\
&\quad - \rho_2 \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \Psi \overline{f_{3,x}} dx.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Através de integração por partes, obtemos a seguinte estimativa para o termo  $I_4$ :

$$\operatorname{Re} I_4 = -\frac{bL}{4} (|\psi_x(L)|^2 + |\psi_x(0)|^2) + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx. \tag{2.46}$$

Após substituir (2.45) e (2.46) na parte real de (2.44) chegamos a

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho_2 L}{4} (|\Psi(L)|^2 + |\Psi(0)|^2) + \frac{bL}{4} (|\psi_x(L)|^2 + |\psi_x(0)|^2) \\
&= \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\Psi|^2 dx - \rho_2 \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \Psi \overline{f_{3,x}} dx \\
&\quad + k \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) [\varphi_x + \psi] \overline{\psi_x} dx - \sigma \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \theta \overline{\psi_x} dx \\
&\quad - \rho_2 \operatorname{Re} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) f_4 \overline{\psi_x} dx.
\end{aligned}$$

Tendo em mente a definição de  $I_\psi$  dada em (2.40) e usando as desigualdades de Poincaré e Young e o Lema 2.5, obtemos

$$I_\psi \leq C \int_0^L [|\Psi|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi|^2] dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

□

**Lema 2.13.** *Com as notações acima, dado  $\epsilon > 0$  existe uma constante positiva  $c_\epsilon$  tal que*

(i) *com as condições de fronteira (2.6) temos*

$$\int_0^L [|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi|^2] \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + c_\epsilon |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

(ii) com as condições de fronteira (2.5) temos

$$\int_0^L [|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi|^2] dx \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + c_\epsilon |\lambda|^6 \|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.$$

desde que  $|\lambda|$  seja suficientemente grande. De modo geral, temos

$$\int_0^L [|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi|^2] \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

*Demonstração.* Segue pelas equações (2.33) e (2.35) que

$$\Phi_x + \Psi = i\lambda(\varphi_x + \psi) - [f_{1,x} + f_3]$$

e substituindo a igualdade acima na equação (2.37) obtemos

$$i\lambda\rho_3\theta - \gamma\theta_{xx} + \sigma i\lambda(\varphi_x + \psi) = \rho_3 f_5 + \sigma[f_{1,x} + f_3]. \quad (2.47)$$

Multiplicando a equação (2.47) por  $\overline{\varphi_x + \psi}$  e integrando por partes de 0 a  $L$  obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda\sigma \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 &= \gamma \int_0^L \theta_{xx} [\overline{\varphi_x + \psi}] dx - i\lambda\rho_3 \int_0^L \theta [\overline{\varphi_x + \psi}] dx \\ &\quad + \rho_3 \int_0^L f_5 [\overline{\varphi_x + \psi}] dx + \sigma \int_0^L [f_{1,x} + f_3] [\overline{\varphi_x + \psi}] dx \\ &= \gamma \theta_x [\overline{\varphi_x + \psi}] \Big|_0^L - \gamma \int_0^L \theta_x [\overline{\varphi_x + \psi}]_x dx \\ &\quad - i\lambda\rho_3 \int_0^L \theta [\overline{\varphi_x + \psi}] dx + R, \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde

$$R = \rho_3 \int_0^L f_5 [\overline{\varphi_x + \psi}] dx + \sigma \int_0^L [f_{1,x} + f_3] [\overline{\varphi_x + \psi}] dx$$

e

$$\begin{aligned} |R| &\leq \|f_5\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + \|f_{1,x} + f_3\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \\ &\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Vamos denotar por  $R$  qualquer expressão que satisfaça a desigualdade acima. Da equação (2.34) temos

$$-k[\overline{\varphi_x + \psi}]_x = i\lambda\rho_1\overline{\Phi} - \sigma\overline{\theta}_x + \rho_1\overline{f_2}.$$

Multiplicando a igualdade acima por  $-\frac{\gamma}{k}\theta_x$  e integrando de 0 a  $L$  obtemos

$$\begin{aligned} \gamma \int_0^L \theta_x [\overline{\varphi_x + \psi}]_x dx &= -i \frac{\lambda \gamma \rho_1}{k} \int_0^L \theta_x \overline{\Phi} dx + \frac{\sigma \gamma}{k} \int_0^L |\theta_x|^2 dx \\ &\quad - \frac{\gamma \rho_1}{k} \int_0^L \theta_x \overline{f_2} dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young e o Lema [2.5](#) estimamos

$$\begin{aligned} \left| \gamma \int_0^L \theta_x [\overline{\varphi_x + \psi}]_x dx \right| &\leq C |\lambda| \|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + C \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2 \\ &\leq C |\lambda| \|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + C \underbrace{(\|\theta_x\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2)}_{\leq |R|} \\ &\leq C |\lambda| \|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + |R|. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Utilizando a desigualdade [\(2.49\)](#) em [\(2.48\)](#), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq \left| \frac{\gamma}{|\lambda|} \theta_x [\overline{\varphi_x + \psi}] \right|_0^L + C \|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + \frac{1}{|\lambda|} |R| \\ &\quad + C \|\theta\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} &\leq C \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \\ &\leq |R| + \frac{1}{2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

para uma constante positiva  $C$ , temos

$$\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \frac{C}{|\lambda|} (|\theta_x(0)| + |\theta_x(L)|) I_\varphi^{1/2} + C \|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + |R|, \quad (2.50)$$

para  $|\lambda| > 1$ . Agora, vamos estimar  $\|\Phi\|_{L^2}^2$ . Para isto, multiplicamos a equação [\(2.34\)](#) por  $\overline{\varphi}$  e integramos de 0 a  $L$ , obtendo

$$\rho_1 \int_0^L \underbrace{\Phi [-i\lambda \overline{\varphi}]}_{=\overline{\Phi + f_1}} dx = -k \int_0^L [\varphi_x + \psi]_x \overline{\varphi} dx + \sigma \int_0^L \theta_x \overline{\varphi} dx - \rho_1 \int_0^L f_2 \overline{\varphi} dx.$$

Substituindo a equação (2.33) na igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_0^L |\Phi|^2 dx &= -\rho_1 \int_0^L \Phi \bar{f}_1 dx - k[\varphi_x + \psi] \bar{\varphi} \Big|_0^L - k \int_0^L [\varphi_x + \psi] \bar{\varphi}_x dx \\
&\quad - \sigma \int_0^L \theta_x \bar{\varphi} dx - \rho_1 \int_0^L f_2 \bar{\varphi} dx \\
&= -k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - k \int_0^L [\varphi_x + \psi] \bar{\psi} dx \\
&\quad - \sigma \int_0^L \theta_x \bar{\varphi} dx - \rho_1 \int_0^L f_2 \bar{\varphi} dx - \rho_1 \int_0^L \bar{f}_1 \Phi dx,
\end{aligned}$$

uma vez que  $-k[\varphi_x + \psi] \bar{\varphi} \Big|_0^L = 0$ , pois  $\varphi \in H_0^1(0, L)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_0^L |\Phi|^2 dx &\leq C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|\psi\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \\
&\quad + C \|\theta_x\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Analisaremos a demonstração para cada tipo de condições de fronteira. Inicialmente analisaremos para as condições de fronteira (2.6).

(i) Note que, devido às condições de fronteira (2.6),  $\theta_x(L) = \theta_x(0) = 0$ . Substituindo a desigualdade (2.50) em (2.51) encontramos

$$\begin{aligned}
\int_0^L |\Phi|^2 dx &\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + C \|\theta_x\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} + C \|\psi\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \\
&\quad + \underbrace{C \|U\|_{\mathcal{H}_2} \|F\|_{\mathcal{H}_2}}_{\leq |R|} + |R|.
\end{aligned}$$

Como

$$C \|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} \leq C \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|\Phi\|_{L^2}^2 \leq |R| + \frac{1}{4} \|\Phi\|_{L^2}^2$$

segue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L |\Phi|^2 dx \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi + f_1\|_{L^2} + C \|\psi\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + \frac{1}{4} \|\Phi\|_{L^2}^2 + |R| \\
&\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + C \underbrace{\|\theta_x\|_{L^2} \|f_{1,x}\|_{L^2}}_{\leq |R|} + C \|\psi\|_{L^2} \underbrace{\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}}_{\text{use (2.50)}} + \frac{1}{4} \|\Phi\|_{L^2}^2 + |R| \\
&\leq C \|\psi\|_{L^2} (\|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}) + C \|\psi\|_{L^2} |R|^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \|\Phi\|_{L^2}^2 + |R|.
\end{aligned}$$

Após usar a desigualdade de Young, segue que

$$\int_0^L |\Phi|^2 dx \leq C \|\psi\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + C \|\psi\|_{L^2} |R|^{\frac{1}{2}} + |R|. \quad (2.52)$$

Desta forma, adicionando (2.50) e (2.52) e usando as condições de fronteira (2.6) e a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq C \|\psi\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + C \|\psi\|_{L^2} |R|^{\frac{1}{2}} + C \|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + |R| \\ &\leq C \|\psi\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + C \|\psi\|_{L^2} |R|^{\frac{1}{2}} + \underbrace{\|\theta_x\|_{L^2}^2}_{\leq |R|} + \frac{1}{2} \int_0^L |\Phi|^2 dx + |R|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^L |\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \underbrace{C \|\psi\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}}_{:=I_0} + \underbrace{C \|\psi\|_{L^2} |R|^{\frac{1}{2}} + |R|}_{:=I_1}. \quad (2.53)$$

A partir das desigualdades de Young e da definição da norma em  $\mathcal{H}_2$  obtemos as seguintes estimativa para  $I_0$  e  $I_1$ :

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \|\psi_x\|_{L^2} |R|^{\frac{1}{2}} + |R| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_2} |R|^{\frac{1}{2}} + |R| \\ &\leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + c_\epsilon (\|U\|_{\mathcal{H}_2} \|F\|_{\mathcal{H}_2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2) \\ &\leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + c_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2, \\ I_0 &\leq C \|\psi_x\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{4}{3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \\ &\leq C \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{4}{3}} (\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}}) = C \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{5}{3}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} \\ &\leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + c_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2. \end{aligned}$$

Desta forma, das estimativas acima e da desigualdade (2.53) temos

$$\int_0^L |\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + c_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Agora faremos a estimativa em termos de  $\lambda$  para as condições de fronteira

(2.6). Usando a equação (2.35) e a desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned}
I_0 &\leq C \left\| \frac{\Psi + f_3}{i\lambda} \right\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|^{\frac{4}{3}}} \|\Psi\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} + \frac{C}{|\lambda|^{\frac{4}{3}}} \|f_{3,x}\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|^{\frac{4}{3}}} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{5}{3}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} + \frac{C}{|\lambda|^{\frac{4}{3}}} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{5}{3}} \\
&= \left[ \frac{C}{|\lambda|^{\frac{5}{3}}} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{5}{3}} \right] \left[ |\lambda|^{\frac{1}{3}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} \right] + \left[ \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1}{3}}} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{3}} \right] \left[ \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{5}{3}} \right] \\
&\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + c_\epsilon |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C \|\psi\|_{L^2} |R|^{\frac{1}{2}} + |R| = \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi + f_3\|_{L^2} |R|^{\frac{1}{2}} + |R| \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{L^2} |R|^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|f_{3,x}\|_{L^2} |R|^{\frac{1}{2}} + |R| \\
&\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + c_\epsilon |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.
\end{aligned}$$

Desta forma, inserindo as estimativas acima em (2.53) chegamos a

$$\int_0^L |\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + c_\epsilon |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

(ii) Vamos inicialmente estimar o termo pontual  $(|\theta_x(L)| + |\theta_x(0)|)I_\varphi^{\frac{1}{2}}$ . Por integração por partes temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \operatorname{Re}[\theta_x \overline{\theta_{xx}}] dx &= \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \frac{d}{dx} |\theta_x|^2 dx \\
&= \frac{L}{2} [|\theta_x(L)|^2 + |\theta_x(0)|^2] - \int_0^L |\theta_x|^2 dx.
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$|\theta_x(L)|^2 + |\theta_x(0)|^2 \leq \|\theta_x\|_{L^2}^2 + C \|\theta_x\|_{L^2} \|\theta_{xx}\|_{L^2}. \quad (2.54)$$



Substituindo as equações (2.33) e (2.35) em (2.37) estimamos

$$\begin{aligned} \|\theta_{xx}\|_{L^2} &\leq \frac{1}{|\gamma|} \|i\lambda\rho_3\theta + i\lambda\sigma(\varphi_x + \psi) - [\rho_3f_5 + \sigma(f_{1,x} + f_3)]\|_{L^2} \\ &\leq C|\lambda|(\|\theta_x\|_{L^2} + \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}) + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Desta forma, usando as desigualdades (2.54), (2.55) e as definições de  $I_\varphi$  estimamos o termo pontual  $(|\theta_x(L)| + |\theta_x(0)|)I_\varphi^{\frac{1}{2}}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &(|\theta_x(L)| + |\theta_x(0)|)I_\varphi^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\|\theta_x\|_{L^2} + \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\theta_{xx}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}})I_\varphi^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\|\theta_x\|_{L^2}I_\varphi^{\frac{1}{2}} + C\|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}I_\varphi^{\frac{1}{2}}(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq C\|\theta_x\|_{L^2}I_\varphi^{\frac{1}{2}} + C|\lambda|^{\frac{1}{2}}I_\varphi^{\frac{1}{2}}(\|\theta_x\|_{L^2} + \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}) \\ &\quad + C\|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}I_\varphi^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Inserindo a estimativa do termo pontual na desigualdade (2.50) obtemos, para  $|\lambda|$  suficientemente grande, que

$$\begin{aligned} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} I_\varphi^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} I_\varphi^{\frac{1}{2}} (\|\theta_x\|_{L^2} + \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}} I_\varphi^{\frac{1}{2}} + C\|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + |R| \\ &\leq C\|\theta_x\|_{L^2} I_\varphi^{\frac{1}{2}} + C \left( \frac{\|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} I_\varphi^{\frac{1}{2}}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \right) \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C \left( \frac{\|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} I_\varphi^{\frac{1}{2}}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \right) \|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}} + C\|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + |R|. \end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade de Young temos que

$$\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \underbrace{C\|\theta_x\|_{L^2} I_\varphi^{\frac{1}{2}}}_{:=J_0} + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|^{\frac{2}{3}}} \|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} I_\varphi^{\frac{2}{3}}}_{:=J_1} + \underbrace{C\|\theta_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + |R|}_{:=J_2}, \quad (2.56)$$

onde  $J_2$  tem a seguinte estimativa

$$J_2 \leq C\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon \|\theta_x\|_{L^2}^2 + |R| \leq C\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + |R|.$$

Para as estimativas de  $J_1$  e  $J_0$  vamos usar as estimativas de  $I_\varphi$  do Lema 2.12 e

a desigualdade de Young. Desta maneira, temos para  $|\lambda|$  suficientemente grande

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq C\|\theta_x\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}(\|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + \|\Phi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1})^{\frac{2}{3}} \\
&\leq C\|\theta\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}(\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{4}{3}} + \|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{4}{3}}) \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{5}{3}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{3}} + C\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{3}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{5}{3}} \\
&\leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
J_0 &\leq C\|\theta_x\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} + C\|\theta_x\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + C\|\theta_x\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + |R|
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
|R| &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 \\
&\leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que a desigualdade [\(2.56\)](#) tem a seguinte estimativa

$$\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2. \quad (2.57)$$

Usando a estimativa [\(2.57\)](#) em [\(2.51\)](#) e a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L |\Phi|^2 dx &\leq C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C\|\psi\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + C\|\theta_x\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\
&\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} \\
&\leq C \underbrace{\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx}_{\text{use [\(2.57\)](#)}} + C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + |R| \\
&\leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^L |\varphi_x + \psi| + |\Phi|^2 dx \leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.$$

Agora, provaremos a estimativa em termos de  $|\lambda|$  do Lema 2.13 para as condições de fronteira do (2.5).

A partir da definição da norma em  $\mathcal{H}_1$ , desigualdade de Young e dos Lemas 2.5 e 2.12, obtemos as seguintes estimativas para  $J_0$ ,  $J_1$  e  $J_2$ :

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq C\|\theta_x\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} + |R| \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_1} + \left( C\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 \right) \\
&\leq \left[ C\left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{3/2}}{|\lambda|^{3/2}} \right) (|\lambda|^{3/2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}) \right] + \left[ C\left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_1}}{|\lambda|} \right) (|\lambda|\|F\|_{\mathcal{H}_1}) + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 \right] \\
&\leq \left[ \frac{\epsilon}{2|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \frac{C_\epsilon}{3}|\lambda|^6\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 \right] + \left[ \frac{\epsilon}{2|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \frac{C_\epsilon}{3}|\lambda|^6\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 \right] + \underbrace{C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2}_{\leq \frac{C_\epsilon}{3}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2} \\
&\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon|\lambda|^6\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_0 &\leq C\|\theta_x\|_{L^2}I_\varphi^{1/2} \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}I_\varphi^{1/2} \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2} \underbrace{\left( \|\Phi\|_{L^2} + \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + \|\Phi\|_{L^2}^{1/2}\|\Psi\|_{L^2}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2} \right)}_{\leq C(\|U\|_{\mathcal{H}_1} + \|F\|_{\mathcal{H}_1})} \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}(\|U\|_{\mathcal{H}_1} + \|F\|_{\mathcal{H}_1}) \\
&\leq C\left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{3/2}}{|\lambda|^{3/2}} \right) (|\lambda|^{3/2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}) + C\left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{1/2}}{|\lambda|^{1/2}} \right) (|\lambda|^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{3/2}) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \frac{C_\epsilon}{2}|\lambda|^6\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \frac{\epsilon}{2|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \frac{C_\epsilon}{2}|\lambda|^6\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 \\
&\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon|\lambda|^6\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \frac{C}{|\lambda|^{2/3}}\|\theta_x\|^{2/3}I_\varphi^{2/3} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|^{2/3}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{1/3}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{1/3} \underbrace{\left( \|\Phi\|_{L^2}^{4/3} + \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^{4/3} + \|\Phi\|_{L^2}^{2/3}\|\Psi\|_{L^2}^{2/3} + \|U\|_{\mathcal{H}_1}^{2/3}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{2/3} \right)}_{\leq C(\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{4/3} + \|F\|_{\mathcal{H}_1}^{4/3})} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|^{2/3}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{5/3}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{1/3} + \frac{C}{|\lambda|^{2/3}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{1/3}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{5/3} \\
&\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon|\lambda|^6\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.
\end{aligned}$$

para  $|\lambda|$  suficientemente grande. Desta maneira, substituindo as estimativas  $J_0, J_1, J_2$  em (2.56), obtemos

$$\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon |\lambda|^6 \|F\|_{\mathcal{H}_1}^2. \quad (2.58)$$

Substituindo (2.58) em (2.51), e usando a definição da norma em  $\mathcal{H}_1$ , desigualdade de Young, Lema 2.5 e as equações (2.33) e (2.35) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\Phi|^2 dx &\leq C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \left\| \frac{\Phi + f_1}{i\lambda} \right\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \\ &\quad + C \|\theta_x\|_{L^2} \left\| \frac{\Psi + f_3}{i\lambda} \right\|_{L^2} + C \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \\ &\leq C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \left[ C \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_1}}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + C \frac{\|F\|_{\mathcal{H}_1}}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \right. \\ &\quad \left. + C \frac{\|U\|_{\mathcal{H}_1}}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} + C \frac{\|F\|_{\mathcal{H}_1}}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} + C \|U\|_{\mathcal{H}_1} \|F\|_{\mathcal{H}_1} \right] \\ &\leq C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \left( \frac{\epsilon}{2|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \frac{C_\epsilon}{2} |\lambda|^6 \|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 \right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon |\lambda|^6 \|F\|_{\mathcal{H}_1}^2. \end{aligned}$$

Adicionando a desigualdade acima com a (2.58), concluímos

$$\int_0^L |\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C_\epsilon |\lambda|^6 \|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.$$

□

**Lema 2.14.** *Para qualquer  $\delta > 0$  existe uma constante  $c_\delta > 0$  tal que*

- (i)  $I_\varphi \leq \delta \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\delta \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$
- (ii)  $I_\psi \leq c \int_0^L [|\Psi|^2 + |\psi_x|^2] dx + \delta \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\delta \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$

*Demonstração.* (i) Dado  $\delta > 0$ , segue pelos Lemas 2.12, 2.13 e pela desigualdade de Young que

$$\begin{aligned}
I_\varphi &\leq C(\|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2) + C\|\Phi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C \underbrace{(\|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2)}_{\text{use Lema 2.13}} + \frac{\delta}{3}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{3}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq C\left(\frac{\delta}{3C}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right) + \frac{\delta}{3}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\delta}{3}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \delta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

(ii) Dado  $\delta > 0$  através dos Lemas 2.12, 2.13 e da desigualdade de Young encontramos

$$\begin{aligned}
I_\psi &\leq C \int_0^L [|\Psi|^2 + |\varphi_x|^2] dx + \underbrace{\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx}_{\text{use Lema 2.13}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C \int_0^L [|\Psi|^2 + |\varphi_x|^2] dx + \frac{\delta}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\delta}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq C \int_0^L [|\Psi|^2 + |\varphi_x|^2] dx + \delta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

□

## 2.4 A falta de estabilidade exponencial para o sistema Timoshenko termoelástico.

O principal objetivo desta seção é estudar o comportamento assintótico da solução do sistema Timoshenko termoelástico com as condições de fronteira (2.5) ou (2.6). Mostraremos que a estabilidade exponencial ou polinomial da solução do problema (2.16) depende unicamente da diferença das velocidades de propagação de ondas, a qual vamos denotar por  $\mathcal{X}$ , dada por

$$\mathcal{X} := \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}.$$

O próximo teorema caracteriza a falta de estabilidade exponencial do semigrupo associado a (2.16) com condições de fronteira (2.6). A principal ferramenta nesta prova é o Teorema 1.65 (Pruss).

**Teorema 2.15.** *Se  $\mathcal{X} \neq 0$ , então o semigrupo  $\{S_{A_2}(t)\}_{t \geq 0}$  não é*

exponencialmente estável.

*Demonstração.* Já temos pelo Lema 2.11 que  $\{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}_2)$ . Afim de usar o Teorema 1.65 (Pruss), mostraremos que

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A}_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = \infty.$$

Deste modo, o objetivo da prova é construir sequências

$$(i\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \quad \text{com} \quad |\lambda_j| \rightarrow \infty$$

e

$$(F_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_2, \quad \text{com} \quad (F_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ limitada}$$

de maneira que  $\|(i\lambda_j I - \mathcal{A}_2)^{-1}(F_j)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \rightarrow \infty$ , onde  $F_j = (i\lambda_j - \mathcal{A}_2)U_j$  e  $U_j = (\varphi_j, \Phi_j, \psi_j, \Psi_j, \theta_j)^T \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ .

Reescrevendo a equação resolvente  $i\lambda U_j - \mathcal{A}_2 U_j = F_j$  em termos de suas componentes temos

$$i\lambda_j \varphi_j - \Phi_j = f_{1,j} \text{ em } H_0^1, \quad (2.59)$$

$$i\lambda_j \Phi_j - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_{j,x} + \psi_j)_x + \frac{\sigma}{\rho_1} \theta_{j,x} = \rho_1 f_{2,j} \text{ em } L^2, \quad (2.60)$$

$$i\lambda_j \psi_j - \Psi_j = f_{3,j}, \text{ em } H_*^1, \quad (2.61)$$

$$i\lambda_j \Psi_j - \frac{b}{\rho_2} \psi_{j,xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_{j,x} + \psi_j) - \frac{\sigma}{\rho_2} \theta_j = \rho_2 f_{4,j} \text{ em } L_*^2, \quad (2.62)$$

$$i\lambda_j \theta_j - \frac{\gamma}{\rho_3} \theta_{j,xx} + \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_{j,x} + \Psi_j) = \rho_3 f_{5,j} \text{ em } L_*^2. \quad (2.63)$$

Considere  $F_j := (0, 0, 0, \cos(\frac{j\pi}{L}x), 0)^T$ . Claramente  $(F_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_2$  com  $\|F_j\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{L}{2}$ . Substituindo as componentes de  $F_j$  no sistema de equações acima, podemos supor, devido as condições de fronteira (2.6), que

$$\varphi_j = A_j \sin(\frac{j\pi}{L}x), \quad \psi_j = B_j \cos(\frac{j\pi}{L}x), \quad \theta_j = C_j \cos(\frac{j\pi}{L}x).$$

Substituindo  $\Phi_j = i\lambda_j \varphi_j$  e  $\Psi_j = i\lambda_j \psi_j$  obtidas das equações (2.59) e (2.61) em (2.60), (2.62) e (2.63) obtemos o seguinte sistema de equações

$$\zeta_1(\lambda)A + \frac{k}{\rho_1} \frac{j\pi}{L} B - \frac{\sigma}{\rho_1} \frac{j\pi}{L} C = 0 \quad (2.64)$$

$$\frac{k}{\rho_2} \frac{j\pi}{L} A + \zeta_2(\lambda)B - \frac{\sigma}{\rho_2} C = 1 \quad (2.65)$$

$$\frac{\sigma}{\rho_3} i\lambda \frac{j\pi}{L} A + \frac{\sigma}{\rho_3} i\lambda B + \zeta_3(\lambda)C = 0 \quad (2.66)$$

onde

$$\zeta_1(\lambda) = -\lambda^2 + \frac{k}{\rho_1} \frac{j^2\pi^2}{L^2}, \quad \zeta_2(\lambda) = -\lambda^2 + \frac{b}{\rho_2} \frac{j^2\pi^2}{L^2} + \frac{k}{\rho_2}, \quad \zeta_3(\lambda) = i\lambda + \frac{\gamma}{\rho_3} \frac{j^2\pi^2}{L^2},$$

e suprimimos o índice  $j$  para simplificar a notação. Usando a regra de Cramer, obtemos

$$B = B_j = \frac{\zeta_1\zeta_3 + i\alpha_0\lambda j^2}{\zeta_1\zeta_2\zeta_3 - \frac{k^2 j^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} \zeta_3 + i \frac{\lambda \sigma^2}{\rho_2 \rho_3} \zeta_1 + \frac{i\lambda \sigma^2 j^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 \rho_3 L^2} (\rho_2 \zeta_2 - 2k)}$$

onde  $\alpha_0 = \frac{\sigma^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_3 L^2}$ . Vamos estimar o termo  $\zeta_1\zeta_2\zeta_3 - \frac{k^2 j^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} \zeta_3$  de  $B_j$ . Escolha um  $\lambda$  suficientemente grande de tal maneira que

$$\zeta_2(\lambda) := -\lambda^2 + \frac{b}{\rho_2} \frac{\pi^2}{L^2} j^2 + \frac{k}{\rho_2} = c_0, \quad (2.67)$$

onde  $c_0$  vai ser escolhido de modo  $\zeta_1\zeta_2\zeta_3 - \frac{k^2 j^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} \zeta_3 \approx O(j^2)$ . Claramente  $\zeta_2^{-1}(c_0) \neq 0$  para  $j$  suficientemente grande. Note que

$$\begin{aligned} \zeta_1\zeta_2\zeta_3 - \frac{k^2 j^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} \zeta_3 &= \zeta_3 \left[ \zeta_1 c_0 - \frac{k^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} j^2 \right] \\ &= \zeta_3 \left[ \underbrace{\left( -\lambda^2 + \frac{k\pi^2}{\rho_1 L^2} j^2 \right)}_{\text{use (2.67)}} c_0 - \frac{k^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} j^2 \right] \\ &= \zeta_3 \left[ \left( c_0 - \frac{b\pi^2}{\rho_2 L^2} j^2 - \frac{k}{\rho_2} + \frac{k\pi^2}{\rho_1 L^2} j^2 \right) c_0 - \frac{k^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} j^2 \right] \\ &= \zeta_3 \left[ \frac{c_0 \pi^2 \mathcal{X}}{L^2} j^2 - c_0 \frac{k}{\rho_2} + c_0^2 - \frac{k^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} j^2 \right]. \end{aligned}$$

Dessa maneira, escolha  $c_0$  de tal maneira

$$\frac{c_0 \pi^2 \mathcal{X}}{L^2} j^2 - \frac{k^2 \pi^2}{\rho_1 \rho_2 L^2} j^2 = 0,$$

ou seja,  $c_0 = \frac{k^2}{\mathcal{X}\rho_1\rho_2}$ . Deste modo, temos

$$\zeta_1\zeta_2\zeta_3 - \frac{k^2 j^2 \pi^2}{\rho_1\rho_2 L^2} \zeta_3 \approx O(j^2),$$

e, portanto,

$$B_j \approx O(j^2).$$

Assim,

$$\|U_j\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \rho_2 \int_0^L |\psi_j|^2 dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho_2 |B_j|^2 \int_0^L \left| \cos\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \right|^2 dx \approx O(j^4)$$

e, logo,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|U_j\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \infty.$$

Portanto, o semigrupo associado ao problema (2.16) com as condições de fronteira (2.6) não é exponencialmente estável.  $\square$

**Observação 2.16.** A prova do resultado do Teorema 2.15 para as condições de fronteira (2.5) é um problema em aberto.

## 2.5 Estabilidade exponencial do sistema Timoshenko termoelástico.

A principal ferramenta para a demonstração do próximo resultado é o Teorema 1.65 (Pruss). Como  $\mathcal{H}_j = \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$ , para  $j = 1, 2$ , no próximo teorema podemos considerar  $F \in D(\mathcal{A}_j)$  e depois, através de passagem ao limite, obter o resultado para o caso geral  $F \in \mathcal{H}_j$ .

**Teorema 2.17.** Se  $\mathcal{X} = 0$ , então o semigrupo  $\{S_{\mathcal{A}_j}(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $j = 1, 2$ , é exponencialmente estável.

*Demonstração.* Derivando a equação (2.34) em relação à  $x$  e somando o resultado obtido com a equação (2.36) obtemos

$$i\lambda(\Phi_x + \Psi) - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_{xx} + \frac{\sigma}{\rho_1}\theta_{xx} - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\sigma}{\rho_2}\theta = f_{2,x} + f_4.$$

Multiplicando a equação acima por  $\bar{\psi}$  e integrando por partes em  $(0, L)$  e usando as condições de fronteira (2.5) ou (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{b}{\rho_2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx &= \int_0^L (\Phi_x + \Psi)\bar{\Psi} dx + \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \bar{\psi} \Big|_0^L - \frac{k}{\rho_1} \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \bar{\psi}_x dx \\ &+ \frac{\sigma}{\rho_1} \int_0^L \theta_x \bar{\psi}_x dx + \frac{\sigma}{\rho_2} \int_0^L \theta \bar{\psi} dx - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + R. \end{aligned}$$



Note que  $\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \bar{\psi} \Big|_0^L = 0$  em ambas as condições de fronteira. No caso da condição de fronteira (2.6), como  $F \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ , temos das equações (2.18) e das condições de fronteira (2.6) que

$$\Phi = \theta_x = f_2 = 0 \quad \text{em } x = 0, L.$$

Assim, pela equação (2.19) temos

$$k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } x = 0, L.$$

A conclusão para as condições de fronteira (2.5) é trivial.

Efetuada integração por partes, segue que

$$\begin{aligned} \frac{b}{\rho_2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx &= \int_0^L (\Phi_x + \Psi) \bar{\Psi} dx - \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x \Big|_0^L + \underbrace{\frac{k}{\rho_1} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_{xx} dx}_{:=I_6} \\ &+ \frac{\sigma}{\rho_1} \int_0^L \theta_x \bar{\psi}_x dx + \frac{\sigma}{\rho_2} \int_0^L \theta \bar{\psi} dx - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + R. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Usando a equação (2.36) em  $I_6$  obtemos

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{k\rho_2}{\rho_1 b} \int_0^L [i\lambda(\varphi_x + \psi)] \bar{\Psi} dx + \frac{k^2}{\rho_1 b} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &- \frac{k\sigma}{\rho_1 b} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\theta} dx + R. \end{aligned}$$

Inserindo as equações (2.33) e (2.35) na igualdade acima resulta que

$$\begin{aligned} I_6 &= -\frac{k\rho_2}{\rho_1 b} \int_0^L [(\Phi_x + \Psi) + (f_{1,x} + f_3)] \bar{\Psi} dx + \frac{k^2}{\rho_1 b} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &- \frac{k\sigma}{\rho_1 b} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\theta} dx + R \\ &= -\frac{k\rho_2}{\rho_1 b} \int_0^L (\Phi_x + \Psi) \bar{\Psi} dx + \frac{k^2}{\rho_1 b} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &- \frac{k\sigma}{\rho_1 b} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\theta} dx + R. \end{aligned}$$

Substituindo  $I_6$  na equação (2.68) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx &= \frac{\rho_2}{b} \mathcal{X} \int_0^L (\Phi_x + \Psi) \bar{\Psi} dx - \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x \Big|_0^L + \frac{k^2}{\rho_1 b} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\quad - \frac{k\sigma}{\rho_1 b} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\theta} dx + \frac{\sigma}{\rho_1} \int_0^L \theta_x \bar{\psi}_x dx + \frac{\sigma}{\rho_2} \int_0^L \theta \bar{\psi} dx \\ &\quad + \frac{k}{\rho_2} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + R. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Como  $\mathcal{X} = 0$ , de (2.69) segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L |\psi_x|^2 dx &\leq C \left( |\varphi_x(L) + \psi(L)| |\psi_x(L)| + |\varphi_x(0) + \psi(0)| |\psi_x(0)| \right) \\ &\quad + C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \|\theta\|_{L^2} + C \|\theta_x\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} \\ &\quad + C \|\theta_x\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} + C \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} + |R|. \end{aligned}$$

Aplicando as desigualdades Young, Poincaré, Lema 2.5 e as definições de  $I_\varphi$ ,  $I_\psi$  na desigualdade acima obtemos

$$\int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq C I_\varphi^{\frac{1}{2}} I_\psi^{\frac{1}{2}} + C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + |R|.$$

Resulta da desigualdade de Young e do Lema 2.13 que

$$\int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq C_\epsilon I_\varphi + \epsilon I_\psi + C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + |R|$$

e usando o Lema 2.14 em  $I_\psi$  com  $\delta > 0$ , temos para  $\epsilon$  suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} \int_0^L |\psi_x|^2 dx &\leq C_\epsilon \int_0^L |\Psi|^2 dx + C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\epsilon I_\varphi}_{\text{use lema 2.14}} + |R| \\ &\leq C_\epsilon \int_0^L |\Psi|^2 dx + C(\epsilon + \delta) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + |R|. \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde  $\epsilon, \delta > 0$  é suficientemente pequeno.

Agora, multiplicando a equação (2.36) por  $\bar{\psi}$  e, em seguida, integrando por

partes de 0 a  $L$ , e usando as condições de fronteira (2.5) ou (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L \Psi(\overline{i\lambda\psi}) dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\psi} dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \sigma \int_0^L \theta\overline{\psi} dx \\ &\quad - \rho_2 \int_0^L f_4\overline{\psi} dx. \end{aligned}$$

Resulta da equação (2.35) e da igualdade acima que

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\psi} dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \sigma \int_0^L \theta\overline{\psi} dx \\ &\quad - \rho_2 \int_0^L f_4\overline{\psi} dx - \rho_2 \int_0^L \overline{f_3}\Psi dx. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Decorre dos Lemas 2.13 e 2.5 e das desigualdade (2.70), Young, e Poincaré que

$$\begin{aligned} \int_0^L |\Psi|^2 dx &\leq C \underbrace{\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2}_{\text{use lema (2.13)}} + C \underbrace{\|\psi_x\|_{L^2}^2}_{\text{use (2.70)}} + |R| \\ &\leq C\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\epsilon \int_0^L |\Psi|^2 dx + C(\delta + \epsilon) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + |R| \\ &\leq C(\delta + \epsilon) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\epsilon \int_0^L |\Psi|^2 dx + |R|. \end{aligned}$$

Deste modo, segue que

$$\int_0^L |\Psi|^2 dx \leq C(\delta + \epsilon) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + |R|,$$

desde que  $\epsilon > 0$  seja suficientemente pequeno. Inserindo a desigualdade acima em (2.70) obtemos

$$\int_0^L |\Psi|^2 + |\psi_x|^2 dx \leq C(\delta + \epsilon) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + |R|. \quad (2.72)$$

Portanto, decorre dos Lemas 2.13, 2.5 e das desigualdades (2.72) e de Young que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

desde que escolhamos os reais positivos  $\epsilon$  e  $\delta$  pequenos. Como  $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ , temos

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}$$

para  $|\lambda|$  suficientemente grande, ou seja,

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Portanto, como  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ , segue do Teorema 1.65 (Pruss) que existem constantes positivas  $C$  e  $\mu$  tais que

$$\|S_{\mathcal{A}_j}(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\mu t}\|U_0\|_{\mathcal{H}}, \quad t \geq 0.$$

□

**Teorema 2.18.** *O semigrupo  $\{S_{\mathcal{A}_2}(t)\}_{t \geq 0}$  é exponencialmente estável se, e somente se,  $\mathcal{X} = 0$ .*

*Demonstração.* Consequência imediata dos Teoremas 2.15 e 2.17. □

## 2.6 Taxas de decaimento polinomial e otimização

Nesta seção vamos provar a estabilidade polinomial da solução do problema (2.16) com as condições de fronteira (2.5) ou (2.6) e a otimização da taxa de decaimento para as condições de fronteira (2.6). A principal ferramenta para esta prova é o Teorema 1.67 (Borichev e Tomilov).

**Teorema 2.19.** *Se  $\mathcal{X} \neq 0$ , então o semigrupo  $\{S_{\mathcal{A}_j}(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $j = 1, 2$ , é polinomialmente estável. Mais ainda,*

(i) *com as condições de fronteira (2.5), temos*

$$\|S_{\mathcal{A}_1}(t)U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{4}}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A}_1)}, \quad \forall U_0 \in D(\mathcal{A}_1).$$

(ii) *com as condições de fronteira (2.6), temos*

$$\|S_{\mathcal{A}_2}(t)U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A}_2)}, \quad \forall U_0 \in D(\mathcal{A}_2) \quad (\text{Taxa ótima}).$$

*Demonstração.* Efetuando os mesmos cálculos realizados no Teorema 2.17, obtemos a equação (2.69), válida tanto para as condições de fronteira (2.5) ou (2.6):

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx &= \frac{\rho_2}{b} \mathcal{X} \int_0^L \underbrace{(\Phi_x + \Psi)}_{\text{use (2.33), (2.35)}} \bar{\Psi} dx - \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x \Big|_0^L + \frac{k^2}{\rho_1 b} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\quad - \frac{k\sigma}{\rho_1 b} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\theta} dx + \frac{\sigma}{\rho_1} \int_0^L \theta_x \bar{\psi}_x dx + \frac{\sigma}{\rho_2} \int_0^L \theta \bar{\psi} dx \\ &\quad + \frac{k}{\rho_2} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + R. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Assim, usando as desigualdades de Young, Poincaré e o Lema [2.5](#) na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L |\psi_x|^2 dx &\leq C|\mathcal{X}| \int_0^L |i\lambda(\varphi_x + \psi) + f_{1,x} + f_3||\Psi| dx + C \left| (\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x \right|_0^L \\
&\quad + C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + |R| \\
&\leq C|\mathcal{X}||\lambda| \int_0^L |\varphi_x + \psi| |\bar{\Psi}| dx + C \left| (\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x \right|_0^L \\
&\quad + C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + |R|. \tag{2.74}
\end{aligned}$$

Das definições de  $I_\varphi$ ,  $I_\psi$  e da desigualdade de Young temos que

$$\left| (\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x \right|_0^L \leq C I_\varphi^{\frac{1}{2}} I_\psi^{\frac{1}{2}} \leq C_\epsilon I_\varphi + \frac{\epsilon}{4} I_\psi$$

e usando o Lema [2.14](#), decorre que

$$\begin{aligned}
\left| (\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x \right|_0^L &\leq \left[ C_\epsilon \left( \frac{\epsilon}{4C_\epsilon} \right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right] \\
&\quad + \left[ \frac{C_\epsilon}{4} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{C_\epsilon}{4} \int_0^L |\Psi|^2 dx + \frac{C_\epsilon}{4} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right] \\
&\leq \frac{3\epsilon}{4} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\epsilon}{4} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + |R|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, resulta do Lema [2.13](#) que

$$C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \frac{C_\epsilon}{4} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Assim, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno temos que a desigualdade [\(2.74\)](#) tem a seguinte estimativa

$$\int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq C|\mathcal{X}||\lambda| \int_0^L |\varphi_x + \psi| |\bar{\Psi}| dx + C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + |R|. \tag{2.75}$$

Efetuando os mesmos cálculos do Teorema [2.17](#) obtemos que a equação [\(2.71\)](#) também é válida para ambas as condições de fronteira:

$$\begin{aligned}
\rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \sigma \int_0^L \theta \bar{\psi} dx \\
&\quad - \rho_2 \int_0^L f_4 \bar{\psi} dx - \rho_2 \int_0^L \bar{f}_3 \Psi dx.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Young, Poincaré e o Lema 2.5, obtemos

$$\int_0^L |\Psi|^2 dx \leq C \int_0^L |\psi_x|^2 dx + C \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + |R|$$

e decorre da desigualdade (2.75) e do Lema 2.13 que

$$\int_0^L |\Psi|^2 dx \leq C|\mathcal{X}||\lambda| \int_0^L |\varphi_x + \psi||\bar{\Psi}| dx + C\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + |R|. \quad (2.76)$$

Consequentemente, segue das desigualdades (2.75), (2.76), Young e dos Lemas 2.5 e 2.13 que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C|\mathcal{X}||\lambda| \int_0^L |\varphi_x + \psi||\bar{\Psi}| dx + C\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + |R| \\ &\leq C|\mathcal{X}||\lambda| \int_0^L |\varphi_x + \psi||\bar{\Psi}| dx + C\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.77)$$

(ii) Supondo que  $\mathcal{X} \neq 0$ , vamos analisar (2.77), primeiramente, para as condições de fronteira (2.6). Decorre das desigualdades de Hölder e Young, do Lema 2.13 e da definição de norma que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\leq C|\mathcal{X}||\lambda| \left( \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\Psi\|_{L^2} + C\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (2.78) \\ &\leq C|\mathcal{X}||\lambda| \left( \frac{\epsilon}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_2} + C_\epsilon |\lambda| \|F\|_{\mathcal{H}_2} \right) \|\Psi\|_{L^2} + C\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\ &\leq C\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + C_\epsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2. \end{aligned}$$

Assim, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C|\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_2},$$

desde que  $|\lambda|$  seja suficientemente grande. Daí, temos

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} = \|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C|\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_2},$$

ou seja,

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = \sup_{\|F\|_{\mathcal{H}_2} \neq 0} \left( \frac{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2}}{\|F\|_{\mathcal{H}_2}} \right) \leq C|\lambda|^2.$$

Desta forma, temos  $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}_2} = O(|\lambda|^2)$  quando  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Como

$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ , segue do Teorema 1.67 (Borichev e Tomilov) que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

ou seja,

$$\|(S(t)\mathcal{A}^{-1})F\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}$$

para valores de  $t$  suficientemente grandes. Se  $U_0 \in D(\mathcal{A})$ , desde que  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ , existe um único  $F_0 \in \mathcal{H}_2$  tal que  $\mathcal{A}^{-1}F_0 = U_0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_2} = \|S(t)\mathcal{A}^{-1}F_0\|_{\mathcal{H}_2} &\leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} \|F_0\|_{\mathcal{H}_2} \\ &\leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} \|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \\ &\leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}. \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que a taxa de decaimento de  $t^{-\frac{1}{2}}$  é a melhor taxa de decaimento. Suponha, por absurdo, que existe  $0 < \epsilon < 2$  tal que

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)},$$

isto é ,

$$|\lambda|^{-2+\frac{\epsilon}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}_2} \quad \text{para } |\lambda| \text{ suficientemente grande.} \quad (2.79)$$

Seguindo o mesmo processo da demonstração do Teorema 2.15, podemos construir uma sequência limitada  $(F_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_2$ , uma sequência  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  com  $\lambda_j \rightarrow \infty$  quando  $j \rightarrow \infty$  tal que  $F_j = (i\lambda_j I - \mathcal{A}_2)U_j$ . Consideramos  $F_j := (0, 0, 0, \cos(\frac{j\pi}{L}x), 0)^T$  e, como na demonstração do Teorema 2.15, escolhemos  $\lambda_j$  tal que

$$j^2 = \underbrace{\frac{\rho_2}{b} \left( c_0 - \frac{k}{\rho_2} \right)}_{:=C_1} + \underbrace{\frac{\rho_2}{b}}_{:=C_2} \lambda_j^2,$$

onde  $c_0 = \frac{k^2}{\mathcal{X}\rho_1\rho_2}$ . Deste modo, conseguimos obter  $U_j = (\varphi_j, \Phi_j, \psi_j, \Psi_j, \theta_j)^T$  por meio da equação resolvente  $i\lambda_j U_j - \mathcal{A}_2 U_j = F_j$  em termos de suas componente e das condições de fronteira (2.6), com

$$\varphi_j = A_j \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right), \quad \psi_j = B_j \cos\left(\frac{j\pi}{L}x\right), \quad \theta_j = C_j \cos\left(\frac{j\pi}{L}x\right).$$

Além disso,

$$\|U_j\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \rho_2 \int_0^L |\psi_j|^2 dx \approx O(j^4) \iff \|U_j\|_{\mathcal{H}_2} \geq Cj^2.$$

Daí, segue que

$$\|U_j\|_{\mathcal{H}_2} \geq Cj^2 = C(C_1 + C_2\lambda_j^2),$$

ou seja,

$$|\lambda_j|^{-2+\frac{\epsilon}{2}}\|U_j\|_{\mathcal{H}_2} \geq C(C_1|\lambda_j|^{-2+\frac{\epsilon}{2}} + C_2|\lambda_j|^{\frac{\epsilon}{2}})$$

Fazendo  $j \rightarrow \infty$  na desigualdade acima obtemos

$$|\lambda_j|^{-2+\frac{\epsilon}{2}}\|U_j\|_{\mathcal{H}_2} \rightarrow \infty.$$

De (2.79), como  $\|F_j\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{L}{2}$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , existe uma constante positiva  $C$  tal que

$$|\lambda_j|^{-2+\frac{\epsilon}{2}}\|U_j\|_{\mathcal{H}_2} \leq C,$$

o que é um absurdo. Portanto, a taxa de  $t^{-\frac{1}{2}}$  é a taxa de decaimento ótimo para as condições de fronteira (2.6).

(i) Para as condições de fronteira (2.5), prosseguimos de maneira análoga ao que fizemos para as condições de fronteira (2.6), obtemos a partir da desigualdade (2.78) e do Lema 2.13 que

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{4}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)}.$$

□



# Capítulo 3

## O sistema de Timoshenko termoelástico não-homogêneo

### 3.1 Introdução

Os resultados apresentados neste capítulo generalizam os obtidos para sistemas de Timoshenko termoelásticos homogêneos, com condições de fronteira Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet, apresentados no capítulo anterior. Aqui, vamos considerar  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, b, \gamma, \sigma > 0$  funções reais que depende da variável posição  $x \in (0, L)$ . O sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o modelo é

$$\rho_1 \varphi_{tt} - (k(\varphi_x + \psi))_x + (\sigma\theta)_x = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - (b\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta = 0, \quad (3.2)$$

$$\rho_3 \theta_t - (\gamma\theta_x)_x + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0, \quad (3.3)$$

para  $x \in (0, L)$  e  $t \in (0, \infty)$ . Consideramos o sistema (3.1)- (3.3) associado às condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \forall x \in (0, L), \\ \varphi_t(x, 0) &= \varphi_1(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x) \quad \forall x \in (0, L), \end{aligned} \quad (3.4)$$

e às condições de contorno Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet, ou seja,

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad (3.5)$$

onde  $t \geq 0$ . Denotaremos a diferença das velocidades de propagação de ondas por

$$\mathcal{X}(x) := \frac{k(x)}{\rho_1(x)} - \frac{b(x)}{\rho_2(x)}. \quad (3.6)$$

No capítulo anterior estabelecemos que a estabilidade do sistema (2.1) - (2.4), com condições de fronteira Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet, depende da diferença das velocidades de propagação de ondas: quando  $\mathcal{X} = 0$  mostramos que o semigrupo associado ao sistema é exponencialmente estável e, no caso contrário, obtemos a estabilidade polinomial com a taxa de decaimento de  $t^{-1/4}$ . Neste capítulo, usaremos funções *cut-off* para obter estimativas que nos permitirão generalizar a estabilidade exponencial e melhorar a taxa de decaimento polinomial de  $t^{-1/4}$  para  $t^{-1/2}$  do semigrupo associado ao sistema. Mostraremos que a estabilidade exponencial do sistema (3.1) - (3.5) pode ser alcançada se for mantida uma versão local da condição de velocidade igual da onda, isto é, se existe um subintervalo aberto  $I_0 \subseteq I$  tal que

$$\frac{k(x)}{\rho_1(x)} = \frac{b(x)}{\rho_2(x)}, \quad \forall x \in I_0. \quad (3.7)$$

Quando  $\mathcal{X}(x) \neq 0$  q.t.p em  $(0, L)$ , mostraremos a estabilidade polinomial do semigrupo associado, com taxa de decaimento de  $t^{-1/2}$ . Assumiremos que as funções parâmetros satisfazem

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, b, \gamma, \sigma \in W^{1,\infty}(0, L). \quad (3.8)$$

E mais, assumiremos que existem constantes  $c_0, c_1 > 0$  tais que

$$c_0 \leq \rho_1, \rho_2, \rho_3, k, b, \gamma, \sigma \leq c_1 \text{ e } \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, k', b', \gamma', \sigma' \leq c_1 \text{ em } (0, L). \quad (3.9)$$

Para obtermos resultados de estabilidades polinomiais e exponenciais, assumiremos que as funções  $\rho_2$  e  $b$  satisfazem a seguinte condição

$$\rho_2, b \in W^{2,\infty}(0, L). \quad (3.10)$$

Como foi feito no Capítulo 2, para mostrarmos que o sistema (3.1)-(3.5) é bem posto, escrevemos o sistema como um problema de Cauchy abstrato no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L),$$

munido do produto interno

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} := & \int_0^L [\rho_1 \Phi_1 \overline{\Phi_2} + \rho_2 \Psi_1 \overline{\Psi_2} + b \psi_{1,x} \overline{\psi_{2,x}}] dx + \\ & \int_0^L [k(\varphi_{1,x} + \psi_1) \overline{(\varphi_{2,x} + \psi_2)} + \rho_3 \theta_1 \overline{\theta_2}] dx, \end{aligned} \quad (3.11)$$

sendo  $U_1 = (\varphi_1, \Phi_1, \psi_1, \Psi_1, \theta_1)$ ,  $U_2 = (\varphi_2, \Phi_2, \psi_2, \Psi_2, \theta_2) \in \mathcal{H}$ , e com a norma

induzida

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 := \int_0^L [\rho_1|\Phi|^2 + \rho_2|\Psi|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 + \rho_3|\theta|^2] dx. \quad (3.12)$$

Dessa forma, o problema (3.1)-(3.5) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t) & t > 0 \\ U(0) := U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0)^T, \end{cases} \quad (3.13)$$

onde  $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é o operador linear não-limitado definido por

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1}[k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta]_x \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2}(b\psi_x)_x - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\sigma}{\rho_2}\theta \\ \frac{1}{\rho_3}(\gamma\theta_x)_x - \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) \end{pmatrix}$$

para qualquer  $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , cujo domínio  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  é dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1 \times (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1 \times (H^2 \cap H_0^1).$$

As demonstrações das três proposições enunciadas abaixo seguem de modo análogo ao que foi feito no Capítulo 2.

**Proposição 3.1.** *O operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo, ou seja, se  $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  então*

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = - \int_0^L \gamma|\theta_x|^2 dx \leq 0. \quad (3.14)$$

Além disso,  $\mathcal{A}$  é bijetivo e  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ .

**Proposição 3.2.** *O operador  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$  de contrações de classe  $C_0$ .*

**Proposição 3.3.** *Com as notações anteriores, temos que*

- i) se  $U_0 \in \mathcal{H}$ , então o problema (3.1) - (3.5) tem uma única solução  $U(t) = S_{\mathcal{A}}(t)U_0$  satisfazendo

$$U \in C([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^1((0, \infty); \mathcal{H}) \cap C((0, \infty); [\mathcal{D}(\mathcal{A})])$$

- ii) se  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , então o problema (3.1)-(3.5) tem uma única solução

$$U \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C([0, \infty); [\mathcal{D}(\mathcal{A})])$$

iii) se  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$ , então o problema (3.1)–(3.5) tem uma única solução

$$U \in \bigcap_{j=0}^n C^{n-j}([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}^j))$$

*Demonstração.* Decorre do Teorema 1.59. □

## 3.2 Lemas técnicos

Nesta seção, a fim de tornar a leitura deste capítulo mais didática, estabeleceremos vários lemas técnicos os quais serão usados nos dois últimos teoremas, referentes à estabilidade. Daqui em diante denotaremos por  $C > 0$  diferentes constantes.

**Lema 3.4.** *O eixo imaginário está contido no resolvente do operador  $\mathcal{A}$ , ou seja,  $\{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$ .*

*Demonstração.* Análoga à demonstração do Lema 2.11. □

Dados  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in \mathcal{H}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  seja  $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  solução da equação resolvente

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F,$$

a qual em termos de suas componentes pode ser escrita como o sistema de equações

$$i\lambda\varphi - \Phi = f_1 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (3.15)$$

$$i\rho_1\lambda\Phi - [k(\varphi_x + \psi)]_x + [\sigma\theta]_x = \rho_1 f_2 \text{ em } L^2(0, L), \quad (3.16)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f_3 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (3.17)$$

$$i\rho_2\lambda\Psi - (b\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta = \rho_2 f_4 \text{ em } L^2(0, L), \quad (3.18)$$

$$i\rho_3\lambda\theta - [\gamma\theta_x]_x + \sigma(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5 \text{ em } L^2(0, L). \quad (3.19)$$

Conforme o procedimento adotado no Capítulo 2, procuramos estimativas para o termo

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}}^2$$

dado em (3.12).

**Lema 3.5.** *Com as condições anteriores, temos que existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|\theta_x\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

*Demonstração.* De (3.14) segue que

$$c_0 \int_0^L |\theta_x|^2 dx \leq \int_0^L \gamma |\theta_x|^2 dx = |\operatorname{Re} \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto,

$$\int_0^L |\theta_x|^2 dx \leq \frac{1}{c_0} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

□

Seja  $l_0 \in (0, L)$  e  $\delta > 0$  tal que  $(l_0 - \delta, l_0 + \delta) \subset (0, L)$ . Considere os conjuntos  $K = [l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2]$  e  $F = (-\infty, l_0 - \delta] \cup [l_0 + \delta, \infty)$ . Claramente  $K$  é compacto,  $F$  é fechado e  $K \cap F = \emptyset$ . Então pela proposição 1.26 existe uma função  $s \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , chamada função auxiliar *cut-off*, tal que  $s \equiv 1$  em  $K$ ,  $s \equiv 0$  em  $F$  e  $0 \leq s(x) \leq 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Desta forma, podemos considerar uma função auxiliar *cut-off*  $s \in C^2(0, L)$  satisfazendo

$$\operatorname{supp}(s) \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta), \quad 0 \leq s(x) \leq 1, \quad x \in (0, L), \quad (3.20)$$

$$s(x) = 1 \quad \text{para } x \in \left[ l_0 - \frac{\delta}{2}, l_0 + \frac{\delta}{2} \right]. \quad (3.21)$$

**Lema 3.6.** *Sob as notações anteriores, temos que para  $|\lambda|$  suficientemente grande, existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \left( \int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Em particular, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$\int_{l_0 - \delta/2}^{l_0 + \delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

*Demonstração.* Derivando a equação (3.15) em relação à variável  $x$  e adicionando à equação (3.17), encontramos

$$\Phi_x + \Psi = i\lambda(\varphi_x + \psi) - (f_{1,x} + f_3).$$

Inserindo o resultado acima em (3.19) obtemos

$$i\lambda\rho_3\theta - [\gamma\theta_x]_x + i\lambda\sigma(\varphi_x + \psi) = \rho_3 f_5 + \sigma(f_{1,x} + f_3). \quad (3.22)$$

Agora, multiplicamos a expressão (3.22) por  $sk[\overline{\varphi_x + \psi}]$ , integramos sobre  $(0, L)$  e efetuamos uma integração por partes, de modo a obter

$$\begin{aligned}
i\lambda \int_0^L sk\sigma|\varphi_x + \psi|^2 dx &= - \underbrace{\int_0^L s\gamma\theta_x \overline{[k(\varphi_x + \psi)]_x} dx}_{:=I_1} + \underbrace{\int_0^L sk\rho_3\theta \overline{[i\lambda(\varphi_x + \psi)]} dx}_{:=I_2} \\
&\quad - \int_0^L s'k\gamma\theta_x \overline{[\varphi_x + \psi]} dx \\
&\quad + \int_0^L sk[\rho_3f_5 + \sigma(f_{1,x} + f_3)] \overline{[\varphi_x + \psi]} dx.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Pela equação (3.16) segue que

$$(k(\varphi_x + \psi))_x = i\lambda\rho_1\Phi + (\sigma\theta)_x - \rho_1f_2$$

e substituindo em  $I_1$ , obtemos

$$I_1 = i\lambda \int_0^L s\gamma\rho_1\theta_x \overline{\Phi} dx - \int_0^L s\gamma\theta_x \overline{[\sigma\theta]_x} dx + \int_0^L s\gamma\rho_1\theta_x \overline{f_2} dx.$$

Substituindo as equações (3.15) e (3.17) em  $I_2$  e, em seguida, efetuando uma integração por partes, encontramos

$$I_2 = - \int_0^L [sk\rho_3\theta]_x \overline{\Phi} dx + \int_0^L sk\rho_3\theta \overline{\Psi} dx + \int_0^L sk\rho_3\theta \overline{[f_{1,x} + f_3]} dx$$

Se usarmos estas duas últimas identidades em (3.23) obtemos

$$i\lambda \int_0^L sk\sigma|\varphi_x + \psi|^2 dx = i\lambda \int_0^L s\gamma\rho_1\theta_x \overline{\Phi} dx + I_3, \tag{3.24}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_3 &= - \int_0^L s\gamma\theta_x \overline{[\sigma\theta]_x} dx - \int_0^L s'k\gamma\theta_x \overline{[\varphi_x + \psi]} dx \\
&\quad - \int_0^L [sk\rho_3\theta]_x \overline{\Phi} dx + \int_0^L sk\rho_3\theta \overline{\Psi} dx + \int_0^L sk\rho_3\theta \overline{[f_{1,x} + f_3]} dx \\
&\quad + \int_0^L s\sigma\rho_1\theta_x \overline{f_2} dx + \int_0^L sk[\rho_3f_5 + \sigma(f_{1,x} + f_3)] \overline{[\varphi_x + \psi]} dx.
\end{aligned}$$

Segue pelas desigualdades de Hölder e Young, a condição (3.9) e o Lema 3.5 a

seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq C \underbrace{\int_0^L |\theta_x| |\sigma' \theta| dx + C \int_0^L |\theta_x| |\sigma \theta_x| dx}_{\leq C \|\theta_x\|_{L^2}^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}} + C \underbrace{\int_0^L |\theta_x| |\varphi_x + \psi| dx}_{\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}}} \\
&+ C \underbrace{\int_0^L |\Phi| |(sk\rho_3)\theta_x| dx + C \int_0^L |\Phi| |(sk\rho_3)_x \theta| dx + C \int_0^L |\theta| |\Psi| dx}_{\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}}} \\
&+ C \underbrace{\int_0^L |\theta| |f_{1,x} + f_3| dx + C \int_0^L |\theta_x| |f_2| dx}_{\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}}} \\
&+ C \underbrace{\int_0^L |f_5| |\varphi_x + \psi| dx + \int_0^L |f_{1,x} + f_3| |\varphi_x + \psi| dx}_{\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}} \\
&\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|\theta_x\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

para alguma constante  $C > 0$ . Retornando à equação (3.24), usando (3.9) e as condições (3.20)- (3.21) sobre  $s$ , concluímos

$$\begin{aligned}
|\lambda| \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq C |\lambda| \|\theta_x\|_{L^2} \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|\theta_x\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Para obtermos a outra estimativa do lema em termos de  $\epsilon$ , basta considerarmos  $|\lambda| \geq 1$  e usando a desigualdade de Young, a definição de norma em  $\mathcal{H}$  e o Lema

**3.5** na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&\leq C \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\epsilon}{2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\epsilon}{2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\epsilon}{2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\epsilon}{2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\epsilon}{2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.7.** *Com as notações anteriores, temos que para  $|\lambda|$  suficientemente grande, existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0-\delta} s |\Phi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} (\|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}) \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{2/3} \|U\|_{\mathcal{H}}^{4/3} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Em particular, dado  $\epsilon > 0$ , temos que existe uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\Phi|^2 dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

*Demonstração.* Multiplicamos a equação (3.16) por  $-s(x)\bar{\varphi}$ , integramos sobre  $(0, L)$  e, em seguida, efetuamos uma integração por partes, obtemos

$$\int_0^L s \rho_1 |\Phi|^2 dx = \int_0^L s k |\varphi_x + \psi|^2 dx - \int_0^L s k (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + I_4 + I_5, \quad (3.25)$$

onde adicionamos e subtraímos o termo  $\int_0^L s k (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx$  e

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{i}{\lambda} \int_0^L s [\sigma \theta]_x [\overline{\Phi + f_1}] dx - \int_0^L s \rho_1 [\Phi \bar{f}_1 + f_2 \bar{\varphi}] dx, \\
I_5 &= \int_0^L s' k (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi} dx.
\end{aligned}$$



Pela hipótese (3.9) e o Lema 3.5 obtemos a seguinte estimativa para  $I_4$ :

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |(\sigma\theta_x + \sigma'\theta)\bar{\Phi}| dx + \frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |\sigma\theta||\overline{f_{1,x}}| dx \\ &\quad + C \int_0^L |\Phi||\overline{f_1}| dx + C \int_0^L |f_2||\overline{\varphi}| dx \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

para alguma constante  $C > 0$ . Agora, usando as equações (3.15) e (3.17) obtemos

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^L s'k \left( -\frac{i}{\lambda} \right) [f_{1,x} + f_3 + \Phi_x + \Psi] \left( \frac{i}{\lambda} \right) [\overline{\Phi} + \overline{f_1}] dx \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left[ \int_0^L s'k(f_{1,x} + f_3)\overline{\Phi} dx + \int_0^L s'k(f_{1,x} + f_3)\overline{f_1} dx \right] \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} \left[ \int_0^L s'k\Phi_x\overline{\Phi} dx + \int_0^L s'k\Phi_x\overline{f_1} dx \right] \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} \left[ \int_0^L s'k\Psi\overline{\Phi} dx + \int_0^L s'k\Psi\overline{f_1} dx \right]. \end{aligned}$$

Tomando parte real da igualdade acima, usando que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} |\Phi|^2 = \operatorname{Re}[\Phi_x \overline{\Phi}],$$

e as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young, segue que

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} I_5| &\leq \frac{C}{|\lambda|^2} \left[ \|f_{1,x} + f_3\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} + \|f_{1,x} + f_3\|_{L^2} \|f_{1,x} + f_3 - f_3\|_{L^2} + \int_0^L |\Phi|^2 dx \right] \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^2} \left[ \|\Phi\|_{L^2} \|f_{1,x} + f_3 - f_3\| + \|\Psi\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} \right] \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|^2} \left[ \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f_{1,x} + f_3\|_{L^2}^2 + \|f_{1,x} + f_3\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2} \right] \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^2} \left[ \|\Phi\|_{L^2} \|f_{1,x} + f_3\|_{L^2} + \|\Phi\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2} \right] \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

para alguma constante  $C > 0$ . Então, tomando parte real da equação (3.25), usando a hipótese (3.9) e que  $\operatorname{supp} s \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta)$  obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx &\leq C \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x + \psi|^2 dx + C \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x + \psi||\psi| dx \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x + \psi||\psi| dx \leq C \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \|\psi\|_{L^2}$$

resulta pelo Lema [3.6](#) que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x + \psi||\psi| dx &\leq C \|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/4} \|\psi\|_{L^2} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left( \|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \right) \|\psi\|_{L^2} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|F\|_{\mathcal{H}} \|\psi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Assim, usando a última estimativa e o Lema [3.6](#) resulta, para  $|\lambda| > 1$ , que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx &\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ C \|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/4} \|\psi\|_{L^2} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left( \|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}} \right) \|\psi\|_{L^2} \\
&+ \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2}_{\leq \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}}_{\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2}_{C \|F\|_{\mathcal{H}}^2}.
\end{aligned}$$

De (3.17) temos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx &\leq C\|\theta_x\|_{L^2} \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad + C \left( \|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \left\| \frac{f_3 + \psi}{i\lambda} \right\|_{L^2} \right) \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/4} \\
&\quad + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left( \|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}} \right) \left\| \frac{f_3 + \psi}{i\lambda} \right\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \\
&\leq C\|\theta_x\|_{L^2} \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \left( \|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} (\|F\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}}) \right) \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/4} \\
&\quad + \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \left( \|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}} \right) \left( \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}} \right) \\
&\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Agora, utilizamos a desigualdade de Young nas duas primeiras parcelas do lado direito da desigualdade acima e encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \left( \|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}} \right) \left( \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}} \right) \\
&\quad + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{2/3} (\|U\|_{\mathcal{H}}^{4/3} + \|F\|_{\mathcal{H}}^{4/3}) + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Observe que usando a desigualdade de Young na parcela  $\frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{2/3} \|F\|_{\mathcal{H}}^{4/3}$  da desigualdade acima temos

$$\begin{aligned}
\frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{2/3} \|F\|_{\mathcal{H}}^{4/3} &\leq C\|\theta_x\|^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

para  $|\lambda|$  suficientemente grande. Daí, concluímos a desigualdade do lema em termos de  $\lambda$ . Em particular, usando novamente, a desigualdade de Young, concluímos o resultado em termos de  $\epsilon$ .  $\square$

**Lema 3.8.** *Sob as condições anteriores, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} (\|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}) \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{2/3} \|U\|_{\mathcal{H}}^{4/3} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

para  $|\lambda|$  suficientemente grande.

*Demonstração.* O resultado segue do uso dos Lemas [3.6](#) e [3.7](#), da desigualdade de Young e da definição da função *cut off*  $s$ . Temos, para  $|\lambda|$  suficientemente grande, que

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq C \|\theta_x\|_{L^2} + C \left( \int_0^L s |\Phi|^2 dx \right) + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} (\|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}) \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{2/3} \|U\|_{\mathcal{H}}^{4/3} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

□

Agora, considere  $s_1 \in C^2(0, L)$  uma função auxiliar *cut-off* satisfazendo

$$\text{supp}(s_1) \subset \left( l_0 - \frac{\delta}{2}, l_0 + \frac{\delta}{2} \right), \quad 0 \leq s_1(x) \leq 1, \quad x \in (0, L), \quad (3.26)$$

$$s_1(x) = 1 \quad \text{para } x \in \left[ l_0 - \frac{\delta}{3}, l_0 + \frac{\delta}{3} \right]. \quad (3.27)$$

**Lema 3.9.** *Com as notações anteriores, temos que para  $|\lambda|$  suficientemente grande, existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\psi_x|^2 dx &\leq C|\lambda| \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 \left| b - \frac{k\rho_2}{\rho_1} \right| |\varphi_x + \psi| |\Psi| dx \\ &+ C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Tomando o produto interno em  $L^2(0, L)$  de (3.18) com  $s_1 \frac{b}{\rho_2} \bar{\psi}$  e, em seguida, efetuando uma integração por partes em  $(0, L)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L s_1 \frac{b^2}{\rho_2} |\psi_x|^2 dx &= -i\lambda \int_0^L s_1 b \Psi \bar{\psi} dx - \int_0^L s_1 \frac{bk}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx \quad (3.28) \\ &+ \int_0^L s_1 \frac{b\sigma}{\rho_2} \theta \bar{\psi} dx + \int_0^L s_1 b f_4 \bar{\psi} dx - \int_0^L \left( \frac{s_1 b}{\rho_2} \right)' b \psi_x \bar{\psi} dx. \end{aligned}$$

Agora, multiplique a equação (3.16) por  $\frac{1}{\rho_1}$ , derive a expressão resultante, e em seguida multiplique por  $s_1 b \bar{\psi}$  e integre por partes. Dessa maneira, obtemos

$$\begin{aligned} - \int_0^L f_2 [s_1 b \bar{\psi}]_x dx &= i\lambda \int_0^L s_1 b \Phi_x \bar{\psi} dx + \int_0^L s_1 \frac{b}{\rho_1} [k(\varphi_x + \psi)]_x \bar{\psi}_x dx \quad (3.29) \\ &+ \int_0^L \frac{(s_1 b)'}{\rho_1} [k(\varphi_x + \psi)]_x \bar{\psi} dx - \int_0^L \frac{1}{\rho_1} [\sigma \theta]_x [s_1 b \bar{\psi}]_x dx \end{aligned}$$

Segue da equação (3.18) que

$$-i\lambda \rho_2 \bar{\Psi} - \overline{[b\psi_x]_x} + k \overline{[\varphi_x + \psi]} - \sigma \bar{\theta} = \rho_2 \bar{f}_4,$$

e multiplicando esta equação por  $\frac{s_1}{\rho_1} k(\varphi_x + \psi)$  e, em seguida, integrando por partes

em  $(0, L)$  e usando a equação (3.18) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L s_1 \frac{b}{\rho_1} [k(\varphi_x + \psi)]_x \bar{\psi}_x dx &= - \int_0^L s_1 \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) [\overline{b\psi}]_x dx \\
&\quad - \int_0^L \left( \frac{s_1}{\rho_1} \right)' bk(\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x dx \\
&= i\lambda \int_0^L s_1 \frac{k\rho_2}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{\Psi} dx - \int_0^L s_1 \frac{k^2}{\rho_1} |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&\quad + \int_0^L s_1 \frac{k\sigma}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{\theta} dx + \int_0^L s_1 \frac{k\rho_2}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{f}_4 dx \\
&\quad - \int_0^L \left( \frac{s_1}{\rho_1} \right)' bk(\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x dx
\end{aligned}$$

e por integração por partes também temos

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{(s_1 b)'}{\rho_1} [k(\varphi_x + \psi)]_x \bar{\psi} dx &= - \int_0^L \left[ \frac{(s_1 b)'}{\rho_1} \right]' k(\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx \\
&\quad - \int_0^L (s_1 b)' \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x dx.
\end{aligned}$$

Substituindo estas duas últimas identidades em (3.29), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= -i\lambda \int_0^L s_1 b \Phi_x \bar{\psi} dx - i\lambda \int_0^L s_1 \frac{k\rho_2}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{\Psi} dx + \int_0^L s_1 \frac{k^2}{\rho_1} |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&\quad - \int_0^L s_1 \frac{k\sigma}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{\theta} dx - \int_0^L s_1 \frac{k\rho_2}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{f}_4 dx \\
&\quad + \int_0^L \left( \frac{s_1}{\rho_1} \right)' bk(\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x dx + \int_0^L \left[ \frac{(s_1 b)'}{\rho_1} \right]' k(\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx \\
&\quad + \int_0^L (s_1 b)' \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x dx + \int_0^L \left( \frac{1}{\rho_1} [\sigma\theta]_x - f_2 \right) [s_1 b \bar{\psi}]_x dx. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Adicionando as expressões (3.28) e (3.30), usando as equações (3.13) e (3.16), e integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L s_1 \frac{b^2}{\rho_2} |\psi_x|^2 dx &= i\lambda \int_0^L s_1 \left[ b - \frac{k\rho_2}{\rho_1} \right] (\varphi_x + \psi) \bar{\Psi} dx + \int_0^L s_1 \frac{k^2}{\rho_1} |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&\quad + \int_0^L \left\{ \left[ \frac{(s_1 b)'}{\rho_1} \right]' - \frac{s_1 b}{\rho_2} \right\} k(\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx \\
&\quad + \int_0^L \left\{ b \left( \frac{s_1}{\rho_1} \right)' + \frac{(s_1 b)'}{\rho_1} \right\} k(\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x dx + I_8 + I_9, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_0^L s_1 b \Psi \overline{f_3} dx - \int_0^L s_1 b (f_{1,x} + f_3) \overline{\Psi} dx - \int_0^L \Phi [s_1 b \overline{f_3}]_x dx + \int_0^L s_1 b f_4 \overline{\psi} dx \\
&\quad - \int_0^L s_1 \frac{k \rho_2}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \overline{f_4} dx + \int_0^L s_1 \frac{b \sigma}{\rho_2} \theta \overline{\psi} dx - \int_0^L s_1 \frac{k \sigma}{\rho_1} (\varphi_x + \psi) \overline{\theta} dx \\
&\quad + \int_0^L \left( \frac{1}{\rho_1} [\sigma \theta]_x - f_2 \right) [s_1 b \overline{\psi}]_x dx
\end{aligned}$$

e

$$I_9 = - \int_0^L \left( \frac{s_1 b}{\rho_2} \right)' b \psi_x \overline{\psi} dx.$$

Segue, aplicando o Lema [3.5](#), a definição usual da norma em  $\mathcal{H}$  e a desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}
|I_8| &\leq C \|\Psi\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2} + C \|f_{1,x} + f_3\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\Phi\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2} \\
&\quad + C \|f_4\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} + C \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \|f_4\|_{L^2} + C \|\theta_x\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} \\
&\quad + C \|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \|\theta_x\|_{L^2} + C \|\theta_x\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} \\
&\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

para alguma constante  $C > 0$ . Além disso, usando uma integração por partes e a equação [\(3.17\)](#), resulta que

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Re} I_9| &\leq \left| - \int_0^L \left( \frac{s_1 b}{\rho_2} \right)' b \operatorname{Re}[\psi_x \overline{\psi}] dx \right| \\
&\leq \left| \int_0^L \left[ \left( \frac{s_1 b}{\rho_2} \right)' \frac{b}{2} \right]' |\psi|^2 dx \right| \\
&\leq \int_0^L \left| \left[ \left( \frac{s_1 b}{\rho_2} \right)' \frac{b}{2} \right]' \right| \left| - \frac{i}{\lambda} (f_3 + \Psi) \right|^2 dx \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|^2} \int_0^L |f_{3,x}|^2 dx + \frac{C}{|\lambda|^2} \int_0^L |\Psi|^2 dx \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}$$

para alguma constante  $C > 0$ , onde estamos assumindo que  $\rho_2, b \in W^{2,\infty}(0, L)$ . Retornando à equação [\(3.31\)](#) e tomando sua parte real, usando [\(3.9\)](#) e notando

$$\operatorname{supp} s_1'' \subset \operatorname{supp} s_1' \subset \operatorname{supp} s_1 \subset (l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\psi_x|^2 dx &\leq C|\lambda| \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 \left| b - \frac{k\rho_2}{\rho_1} \right| |\varphi_x + \psi| |\Psi| dx \\
&+ C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ C \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.10.** *Com as notações anteriores, temos que para  $|\lambda|$  suficientemente grande existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\Psi|^2 dx &\leq C|\lambda| \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 \left| b - \frac{k\rho_2}{\rho_1} \right| |\varphi_x + \psi| |\Psi| dx \\
&+ C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ C \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Multiplique a equação (3.18) por  $-s_1 b \bar{\psi}$ , efetue uma integração por partes e use (3.16), de modo a obter

$$\int_0^L s_1 \rho_2 b |\Psi|^2 dx = \int_0^L s_1 b^2 |\psi_x|^2 dx + I_{10} + I_{11}, \quad (3.32)$$

onde

$$\begin{aligned}
I_{10} &= - \int_0^L s_1 \rho_2 b \Psi \bar{f}_3 dx - \int_0^L s_1 \rho_2 b f_4 \bar{\psi} dx - \int_0^L s_1 \sigma b \theta \bar{\psi} dx. \\
I_{11} &= \int_0^L s_1 k b (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + \int_0^L (s_1 b)' b \psi_x \bar{\psi} dx.
\end{aligned}$$



É fácil verificar que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |I_{10}| &\leq C\|\theta_x\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + C\|f_4\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + C\|\Psi\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} \\ &\leq C\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_{11}| &\leq C \int_0^L |\varphi_x + \psi| \left| \frac{i}{\lambda} \overline{[f_3 + \Psi]} \right| dx + C \int_0^L |\psi_x| \left| \frac{i}{\lambda} \overline{[f_3 + \Psi]} \right| dx \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \left[ \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \|\varphi_x + \psi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} \right] \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|}\|\psi_x\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Portanto, usando a estimativa do Lema [3.9](#), a hipótese [\(3.9\)](#) e inserindo as duas últimas estimativas em [\(3.32\)](#) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/2}^{l_0-\delta/2} s_1 |\Psi|^2 dx &\leq C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0-\delta/2} s_1 |\psi_x|^2 dx + |I_{10}| + |I_{11}| \\ &\leq C|\lambda| \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 \left| b - \frac{k\rho_2}{\rho_1} \right| |\varphi_x + \psi| |\Psi| dx \\ &\quad + C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C\|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + C\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

para  $|\lambda|$  suficientemente grande. □

**Corolário 3.11.** *Considere  $\epsilon > 0$  arbitrário.*

(i) *Suponha que  $\mathcal{X}(x) \neq 0$  q.t.p em  $(0, L)$ , então existe uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que*

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

*desde que  $|\lambda|$  seja suficientemente grande.*

(ii) *Suponha que exista um subintervalo aberto  $I_0 \subset [0, L]$  que satisfaça [\(3.7\)](#), então existe uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que*

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

*Demonstração.* Decorre dos Lemas [3.9](#) e [3.10](#) que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx &\leq \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1(|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \\
&\leq C|\lambda| \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} \left( \sqrt{s_1} \left| b - \frac{k\rho_2}{\rho_1} \right| |\varphi_x + \psi| |\lambda|^{1/2} \right) \left( \frac{\sqrt{s_1}}{|\lambda|^{1/2}} |\Psi| \right) dx \\
&\quad + C\|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\quad + C \left( \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Devido à desigualdade de Young e as propriedades da função  $s_1$  obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \\
&\leq C|\lambda|^2 \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 \left| b - \frac{k\rho_2}{\rho_1} \right|^2 |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&\quad + C\|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\quad + C \left( \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned} \tag{3.33}$$

para alguma constante  $C > 0$ .

(i) Suponha que  $\mathcal{X}(x) \neq 0$  q.t.p em  $(0, L)$ , assim temos

$$\left| b(x) - \frac{k(x)\rho_2(x)}{\rho_1(x)} \right| \neq 0 \quad \text{q.t.p} \quad \forall x \in (0, L).$$

Desta forma, usando o Lema [3.5](#) e Young, a desigualdade [\(3.33\)](#) se reduz

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx &\leq C|\lambda|^2 \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi|^2 dx + C_\epsilon \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&\quad + C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Daí, usando o Lema [3.6](#) e considerando  $|\lambda| \geq \frac{1}{\epsilon}$  na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \\
& \leq C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + |\lambda|^2 \left( C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi|^2 dx \right) \\
& \leq C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + |\lambda|^2 \left( C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s |\varphi_x + \psi|^2 dx \right) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

para alguma constante  $C > 0$ . Nosso principal objetivo agora é estimar o termo  $\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s |\varphi_x + \psi|^2 dx$  da desigualdade acima.

Resulta do Lema [3.6](#) que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s |\varphi_x + \psi|^2 dx & \leq \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
& \leq \underbrace{C \|\theta_x\|_{L^2} \left( \int_0^L s |\Phi|^2 dx \right)^{1/2}}_{:=S_1} + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}}}_{:=S_2} \\
& \quad + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}}_{:=S_3} + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2}_{:=S_4}. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
S_2 & \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}}{|\lambda|} (\|F\|_{\mathcal{H}} |\lambda|) \\
& \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

De modo análogo, segue que

$$S_i \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \text{ para } i = 3, 4,$$

desde que  $|\lambda| > 1$ . Mostraremos que

$$S_1 \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

De fato, usando a desigualdade de Young e os Lemas [3.7](#) e [3.5](#) em  $S_1$  temos,

para  $|\lambda|$  suficientemente grande, que

$$\begin{aligned} S_1 &\leq C\|\theta_x\|_{L^2} \left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2}}{|\lambda|^{3/4}} [\|\theta_x\|_{L^2}^{1/4}\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/4} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/4}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/4}] \right) \\ &\quad + C\|\theta_x\|_{L^2} \left( \frac{\|\theta_x\|_{L^2}^{1/3}}{|\lambda|^{2/3}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{2/3} + \frac{\|\theta_x\|_{L^2}^{1/2}}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \right) \\ &\quad + C\|\theta_x\|_{L^2} \left( \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}}{|\lambda|} \right) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/4}}\|\theta_x\|_{L^2}^{5/4}\|U\|_{\mathcal{H}}^{3/4} + \frac{C}{|\lambda|^{3/4}}\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^{3/4}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/4} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^{2/3}}\|\theta_x\|_{L^2}^{4/3}\|U\|_{\mathcal{H}}^{2/3} + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}}\|\theta_x\|_{L^2}^{3/2}\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \\ &\quad + C\|\theta_x\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\theta_x\|_{L^2}\frac{\|U\|_{\mathcal{H}}}{|\lambda|} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/4}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{11/8}\|F\|_{\mathcal{H}}^{5/8} + \frac{C}{|\lambda|^{3/4}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{5/4}\|F\|_{\mathcal{H}}^{3/4} + \frac{C}{|\lambda|^{2/3}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{4/3}\|F\|_{\mathcal{H}}^{2/3} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{5/4}\|F\|_{\mathcal{H}}^{3/4} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{3/2} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^{3/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}. \end{aligned}$$

Ajeitando os termos resulta que

$$\begin{aligned} S_1 &\leq C \left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}^{11/8}}{|\lambda|^{11/8}} \right) \left( |\lambda|^{5/8}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right) + C \left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}^{5/4}}{|\lambda|^{5/4}} \right) \left( |\lambda|^{3/4}\|F\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \right) \\ &\quad + C \left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}^{4/3}}{|\lambda|^{4/3}} \right) \left( |\lambda|^{2/3}\|F\|_{\mathcal{H}}^{2/3} \right) + C \left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}^{5/4}}{|\lambda|^{5/4}} \right) \left( |\lambda|^{3/4}\|F\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \right) \\ &\quad + C \left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}}{|\lambda|} \right) \left( |\lambda|\|F\|_{\mathcal{H}} \right) + C \left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2}}{|\lambda|^{1/2}} \right) \left( |\lambda|^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{3/2} \right) \\ &\quad + C \left( \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}^{3/2}}{|\lambda|^{3/2}} \right) \left( |\lambda|^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \right) \end{aligned}$$

e através da desigualdade de Young chegamos a

$$S_1 \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Substituindo as estimativas para  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  em (3.35) obtemos

$$\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s|\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Substituindo a desigualdade acima em (3.34), obtemos

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

(ii) De (3.7) temos que existe  $I_0 \subset I$  aberto tal que para todo  $x \in I_0$  temos

$$\frac{k(x)}{\rho_1(x)} = \frac{b(x)}{\rho_2(x)} \quad \Rightarrow \quad \left| b - \frac{k\rho_2}{\rho_1} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi(x) = 0 \quad (3.36)$$

Sem perda de generalidade podemos considerar  $I_0 = (l_0 - \delta, l_0 + \delta)$ . Desta forma, temos de (3.33) que

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx &\leq C \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\quad + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + C \left( \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young e os Lemas 3.5 e 3.6 na desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx &\leq \frac{\epsilon}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\epsilon \|\theta_x\|_{L^2}^2}_{\leq C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}} + C_\epsilon \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\quad + \frac{\epsilon}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + \frac{\epsilon}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \frac{5\epsilon}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

Considere  $|\lambda| \geq 6C/\epsilon$ . Resulta da desigualdade acima que

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

### 3.2.1 Desigualdades de observabilidade

Nesta seção, estabeleceremos desigualdades de observabilidade para o sistema não-homogêneo relacionado aos sistemas de Timoshenko. O nosso principal objetivo é obter estimativas para a solução do sistema

$$i\lambda u - v = g_1 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.37)$$

$$i\lambda\rho_1 v - [k(u_x + w)]_x = g_2 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.38)$$

$$i\lambda w - z = g_3 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.39)$$

$$i\lambda\rho_2 z - [bw_x]_x + k(u_x + w)_x = g_4 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.40)$$

no intervalo  $(0, L)$  a partir de estimativas em um subintervalo de  $(0, L)$ ; onde  $g_1, g_3 \in H_0^1(0, L)$ ,  $g_2, g_4 \in L^2(0, L)$ .

Vamos denotar  $V$  e  $G$  por vetores  $(u, v, w, z)^T$  e  $(g_1, g_2, g_3, g_4)^T$  respectivamente. Além disso, dados quaisquer  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  com  $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$ , denotaremos  $\|\cdot\|_{a_1, a_2}$  e  $\mathcal{I}(\cdot)$  por

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 := \int_{a_1}^{a_2} (|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2) dx,$$

$$\mathcal{I}(a_j) := |u_x(a_j) + w(a_j)|^2 + |v(a_j)|^2 + |w_x(a_j)|^2 + |z(a_j)|^2, \quad j = 1, 2.$$

**Proposição 3.12.** *Com as notações anteriores, considere  $V = (u, v, w, z)^T$  a solução forte de (3.37)-(3.40) e  $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$  quaisquer. Então existem constantes  $C_0, C_1 > 0$  tais que*

$$\mathcal{I}(a_j) \leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{0, L}^2, \quad j = 1, 2,$$

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq C_1 \mathcal{I}(a_j) + C_1 \|G\|_{0, L}^2, \quad j = 1, 2.$$

*Demonstração.* Fixe uma função  $q_1 \in C^1[a_1, a_2]$ . Multiplique a expressão (3.38) por  $q_1 k \overline{[u_x + w]}$  e em seguida integre em  $(a_1, a_2)$ , obtendo

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} q_1 k g_2 \overline{[u_x + w]} dx &= - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \overline{[i\lambda(u_x + w)]} dx}_{:= J_1} \\ &\quad - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} q_1 [k(u_x + w)]_x \overline{[u_x + w]} dx}_{:= J_2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Devido às equações (3.37), (3.39) e integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Re} J_1 &= -\operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \overline{[v_x + g_{1,x} + g_3 + z]} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k \frac{d}{dx} |v|^2 dx - \operatorname{Re} \left( \int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \bar{z} dx \right) \\
&\quad - \operatorname{Re} \left( \int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \overline{[g_{1,x} + g_3]} dx \right) \\
&= -\frac{1}{2} q_1 \rho_1 k |v|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} [q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 dx \\
&\quad - \operatorname{Re} \left( \int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \bar{z} dx \right) - \operatorname{Re} \left( \int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \overline{[g_{1,x} + g_3]} dx \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} J_2 &= -\frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_1 \frac{d}{dx} |k(u_x + w)|^2 dx \\
&= -\frac{1}{2} q_1 k^2 |u_x + w|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2 dx.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando parte real da equação (3.41) resulta que

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} (q_1 \rho_1 k |v|^2 + q_1 k^2 |u_x + w|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} ([q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 + q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2) dx \\
&= \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \bar{z} dx + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_1 k (\rho_1 v \overline{[g_{1,x} + g_3]} + g_2 \overline{[u_x + w]}) dx. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Agora, fixe uma função  $q_2 \in C^1[a_1, a_2]$ , multiplique (3.40) por  $q_2 b \bar{w}_x$  e, em seguida, integre em  $(0, L)$ . Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{a_2} q_2 b g_4 \bar{w}_x dx &= - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_2 b z \overline{[i \lambda w_x]} dx}_{:=J_3} - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} q_2 [b w_x]_x \overline{[b w_x]} dx}_{:=J_4} \\
&\quad + \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} q_2 k b (u_x + w) \bar{w}_x dx}_{:=J_5}. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Como  $i \lambda w_x = z_x + g_{3,x}$  segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} J_3 &= - \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_2 b \operatorname{Re}[z \bar{z}_x] dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_2 b \overline{g_{3,x}} dx \\
&= - \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_2 b \frac{d}{dx} |z|^2 dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_2 b \overline{g_{3,x}} dx \\
&= - \frac{1}{2} q_2 \rho_2 b |z|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} [q_2 \rho_2 b]_x |z|^2 dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_2 b \overline{g_{3,x}} dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} J_4 &= - \int_{a_1}^{a_2} q_2 \operatorname{Re}[(bw_x) \overline{(bw_x)}] dx \\
&= - \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \frac{d}{dx} |bw_x|^2 dx \\
&= - \frac{1}{2} q_2 b^2 |w_x|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_{2,x} b^2 |w_x|^2 dx.
\end{aligned}$$

Além disso, usando integração por partes e as equações (3.38)-(3.39), obtemos

$$\begin{aligned}
J_5 &= \int_{a_1}^{a_2} q_2 k b (u_x + w) \bar{w}_x dx \\
&= q_2 k b (u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} [q_2 b k (u_x + w)]_x \bar{w} dx \\
&= q_2 k b (u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b)_x [k (u_x + w)] \bar{w} dx + \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b) [-k (u_x + w)]_x \bar{w} dx \\
&= q_2 k b (u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b)_x [k (u_x + w)] \bar{w} dx \\
&\quad + \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b) (-i \lambda \bar{w}) \rho_1 v dx + \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b) g_2 \bar{w} dx \\
&= q_2 k b (u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b)_x [k (u_x + w)] \bar{w} dx \\
&\quad + \int_{a_1}^{a_2} q_2 b \bar{z} \rho_1 v dx + \int_{a_1}^{a_2} q_2 b \rho_1 v \bar{g}_3 dx + \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b) g_2 \bar{w} dx \\
&= q_2 k b (u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b)_x [k (u_x + w)] \frac{i}{\lambda} \bar{z} dx \\
&\quad - \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b)_x [k (u_x + w)] \frac{i}{\lambda} \bar{g}_3 dx + \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_1 b v \bar{z} dx + \int_{a_1}^{a_2} q_2 b [\rho_1 v \bar{g}_3 + g_2 \bar{w}] dx.
\end{aligned}$$

Tomando parte real na igualdade acima e usando que  $\operatorname{Re}(-iz) = \operatorname{Im}(z)$



obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} J_5 &= \operatorname{Re} \left( q_2 b k(u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} \right) + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_1 b v \bar{z} \, dx \\
&\quad + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_1 b [\rho_1 v \bar{g}_3 + g_2 \bar{w}] \, dx + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re} \left( -i \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b)_x [k(u_x + w)] \bar{z} \, dx \right) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re} \left( -i \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b)_x [k(u_x + w)] \bar{g}_3 \, dx \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( q_2 b k(u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} \right) + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_1 b v \bar{z} \, dx \\
&\quad + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_1 b [\rho_1 v \bar{g}_3 + g_2 \bar{w}] \, dx + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k [q_2 b]_x (u_x + w) \bar{z} \, dx \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k [q_2 b]_x (u_x + w) \bar{g}_3 \, dx.
\end{aligned}$$

Agora, tomamos a parte real da igualdade (3.43) e substituímos no resultado as três últimas identidades, de modo a obter

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} (q_2 \rho_2 b |z|^2 + q_2 b^2 |w_x|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} ([q_2 \rho_2 b]_x |z|^2 + q_{2,x} b^2 |w_x|^2) \, dx \\
&= -\operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_1 b v \bar{z} \, dx - \operatorname{Re} \left( q_2 b k(u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} \right) \\
&\quad + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 b [\rho_2 \bar{g}_{3,x} - \rho_1 v \bar{g}_3 + g_4 \bar{w}_x - g_2 \bar{w}] \, dx \tag{3.44} \\
&\quad - \frac{i}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k [q_2 b]_x (u_x + w) \bar{z} \, dx - \frac{i}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k [q_2 b]_x (u_x + w) \bar{g}_3 \, dx.
\end{aligned}$$

Combinando (3.42) e (3.44) concluímos que

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2} (q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2 + [q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 + q_{2,x} b^2 |w_x|^2 + [q_2 \rho_2 b]_x |z|^2) \, dx \\
&= (q_1 k^2 |u_x + w|^2 + q_1 \rho_1 k |v|^2 + q_2 b^2 |w_x|^2 + q_2 \rho_2 b |z|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} \tag{3.45} \\
&\quad + 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} [q_1 \rho_1 k - q_2 \rho_1 b] v \bar{z} \, dx + P(a_j) + J_6 + J_7,
\end{aligned}$$

para quaisquer  $q_1, q_2 \in C^1[a_1, a_2]$ , onde

$$P(a_j) = -2 \operatorname{Re} \left( q_2 b k(u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} \right), \quad J_6 = -\frac{2}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k [q_2 b]_x (u_x + w) \bar{z} \, dx,$$

$$\begin{aligned}
J_7 = & 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 b [\rho_2 \overline{g_{3,x}} - \rho_1 v \overline{g_3} + g_4 \overline{w_x} - g_2 \overline{w}] dx \\
& - \frac{2}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k [q_2 b]_x (u_x + w) \overline{g_3} dx \\
& + 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_1 k (\rho_1 v \overline{[g_{1,x} + g_3]} + g_2 \overline{[u_x + w]}) dx.
\end{aligned}$$

Agora estamos em condições de concluir a proposição. Vamos provar o resultado para o caso  $j = 2$ . Para isso escolhemos  $q_1$  e  $q_2$  da seguinte maneira

$$(q_1 \rho_1 k)(x) = \int_{a_1}^x e^{n\tau} d\tau \quad e \quad (q_2 \rho_1 b)(x) = \int_{a_1}^x e^{n\tau} d\tau,$$

para quaisquer  $x \in [a_1, a_2]$  e  $n \in \mathbb{N}$  (será escolhido a posteriori). Então, de (3.45), decorre que

$$\begin{aligned}
& \int_{a_1}^{a_2} (q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2 + [q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 + q_{2,x} b^2 |w_x|^2 + [q_2 \rho_2 b]_x |z|^2) dx \\
& = (q_1 k^2)(a_2) |u_x(a_2) + w(a_2)|^2 + (q_1 \rho_1 k)(a_2) |v(a_2)|^2 \\
& \quad + (q_2 b^2)(a_2) |w_x(a_2)|^2 + (q_2 \rho_2 b)(a_2) |z(a_2)|^2 + P(a_2) + J_6 + J_7,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

onde

$$P(a_2) = -2 \operatorname{Re} \left\{ (q_2 b k)(a_2) [u_x(a_2) + w(a_2)] \overline{w(a_2)} \right\}.$$

e

$$\begin{aligned}
|J_6| & \leq \frac{2}{|\lambda|} \int_{a_1}^{a_2} |k [q_2 b]_x (u_x + w) \overline{z}| dx \leq \frac{C}{|\lambda|} \int_{a_1}^{a_2} |u_x + w| |z| dx \\
& \leq \frac{C}{|\lambda|} \int_{a_1}^{a_2} [|u_x + w|^2 + |z|^2] dx \\
& \leq \frac{C}{|\lambda|} \|V\|_{a_1, a_2}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|J_7| & \leq C \int_{a_1}^{a_2} [|z| |g_{3,x}| + |v| |g_3| + |g_4| |w_x| + |g_2| |w|] dx + \frac{C}{|\lambda|} \int_{a_1}^{a_2} |(u_x + w) \overline{g_3}| dx \\
& \quad + C \int_{a_1}^{a_2} |v| |\overline{[g_{1,x} + g_3]}| + |g_2| |\overline{[u_x + w]}| dx.
\end{aligned}$$

Segue pela desigualdade de Hölder que

$$|J_7| \leq C \|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, L},$$

para alguma constante  $C > 0$ . Além disso, usando (3.39), a desigualdade de Young e a imersão  $H^1(a_1, a_2) \hookrightarrow L^\infty(a_1, a_2)$ , obtemos

$$\begin{aligned} |P(a_2)| &\leq C |(q_2 b k)(a_2) [u_x(a_2) + w(a_2)] \overline{w(a_2)}| \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} |u_x(a_2) + w(a_2)| |\overline{z(a_2)} + \overline{g_3(a_2)}| \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} |u_x(a_2) + w(a_2)| |z(a_2)| + \frac{C}{|\lambda|} |u_x(a_2) + w(a_2)| |g_3(a_2)| \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} |u_x(a_2) + w(a_2)|^2 + \frac{C}{|\lambda|} |z(a_2)|^2 + \frac{C}{|\lambda|} |g_3(a_2)|^2 \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} |u_x(a_2) + w(a_2)|^2 + \frac{C}{|\lambda|} |z(a_2)|^2 + C \|G\|_{0, L}^2, \end{aligned}$$

pois

$$|g_3(a_2)| \leq \sup_{x \in (0, L)} |g_3(x)| = \|g_3\|_\infty \leq C \|g_3\|_{H^1(a_1, a_2)} \leq C \|G\|_{0, L}.$$

Para provarmos a segunda desigualdade da proposição, necessitamos majorar inferiormente a equação (3.46) pelo termo  $\|V\|_{a_1, a_2}^2$ , com isso enunciaremos a seguinte afirmação.

**Afirmção 3.13.** *Com as notações anteriores existe uma constante  $\widetilde{C}_0 > 0$  tal que*

$$\widetilde{C}_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq \int_{a_1}^{a_2} (q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2 + [q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 + q_{2,x} b^2 |w_x|^2 + [q_2 \rho_2 b]_x |z|^2) dx$$

*Demonstração.* De fato, temos

$$(a) \quad q_1(x) = \underbrace{\left( \frac{1}{\rho_1 k} \right)}_{:= \xi_1} \int_{a_1}^x e^{n\tau} d\tau.$$

$$(b) \quad q_1 \rho_1 k(x) = 1 \int_{a_1}^x e^{n\tau} d\tau.$$

$$(c) \quad q_2(x) = \underbrace{\left( \frac{1}{\rho_1 b} \right)}_{:= \xi_2} \int_{a_1}^x e^{n\tau} d\tau.$$

$$(d) \quad (q_2 \rho_2 b)(x) = \frac{\rho_2}{\rho_1} (q_2 \rho_1 b)(x) = \underbrace{\left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}_{:= \xi_3} \int_{a_1}^x e^{n\tau} d\tau.$$

Nos casos (a), (c) e (d) temos  $\xi_j \in W^{1,\infty}(0, L)$ , devido às hipóteses sobre  $\rho_2, \rho_1, b, k$ . Mais ainda, existem  $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1 > 0$  tais que

$$0 < \tilde{c}_0 \leq \xi_i \leq \tilde{c}_1 \quad e \quad \xi'_j \leq \tilde{c}_1 \quad em \quad (0, L), \quad (3.47)$$

onde  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} q_{1,x} &= \xi'_1 \int_{a_1}^x e^{n\tau} d\tau + \xi_1 e^{nx} \\ &= \frac{\xi'_1}{n} [e^{nx} - e^{na_1}] + \xi_1 e^{nx} \\ &= \frac{1}{n} [n\xi_1 e^{nx} + \xi'_1 e^{nx} - \xi'_1 e^{na_1}] \\ &= \frac{1}{n} [(n\xi_1 + \xi'_1) e^{nx} - \xi'_1 e^{na_1}] \\ &\geq \frac{1}{n} [(n\tilde{c}_0 - \|\xi'_1\|_\infty) e^{na_1} - \|\xi'_1\|_\infty e^{na_1}] \\ &= \frac{1}{n} \underbrace{(n\tilde{c}_0 - 2\|\xi'_1\|_\infty)}_{:=c_{01}>0} e^{na_1} \end{aligned}$$

onde escolhemos  $n \geq \frac{2}{\tilde{c}_0} \|\xi'_1\|_\infty$ . Analogamente, temos

$$q_{2,x} \geq c_{02} > 0 \quad e \quad [q_2 \rho_2 b]_x \geq c_{03} > 0$$

desde que  $n \geq \frac{2}{\tilde{c}_0} \|\xi'_2\|_\infty$  e  $n \geq \frac{2}{\tilde{c}_0} \|\xi'_3\|_\infty$ , respectivamente. Deste modo, escolhendo  $c_{04} = \min\{c_{01}, c_{02}, c_{03}\}$  e notando que as funções  $k$  e  $b$  são limitados inferiormente, segue que existe uma constante  $\tilde{C}_0 > 0$  tal que

$$\tilde{C}_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq \int_{a_1}^{a_2} (q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2 + [q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 + q_{2,x} b^2 |w_x|^2 + [q_2 \rho_2 b]_x |z|^2) dx.$$

□

Deste modo, aplicando módulo na equação (3.46) e usando a afirmação acima e as estimativas de  $P(a_2)$ ,  $J_6$  e  $J_7$  obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 &\leq \int_{a_1}^{a_2} (q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2 + [q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 + q_{2,x} b^2 |w_x|^2 + [q_2 \rho_2 b]_x |z|^2) dx \\
&\quad + (q_1 k^2)(a_2) |u_x(a_2) + w(a_2)|^2 + (q_1 \rho_1 k)(a_2) |v(a_2)|^2 \\
&\quad + (q_2 b^2)(a_2) |w_x(a_2)|^2 + (q_2 \rho_2 b)(a_2) |z(a_2)|^2 \\
&\quad + |P(a_2)| + |J_6| + |J_7| \\
&\leq C\mathcal{I}(a_2) + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} |u_x(a_2) + w(a_2)|^2 + \frac{C}{|\lambda|} |z(a_2)|^2}_{\leq C\mathcal{I}(a_2)} + C\|G\|_{0,L}^2 \\
&\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C\|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0,L}
\end{aligned}$$

Finalmente, usando a desigualdade de Young na estimativa acima segue que existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq C_1 \mathcal{I}(a_2) + C_1 \|G\|_{0,L}^2,$$

desde que  $|\lambda|$  suficientemente grande

A outra desigualdade da proposição também é obtida a partir da equação (3.46). Considere

$$\widetilde{C}_1 := \min\{(q_1 k^2)(a_2), (q_1 \rho_1 k)(a_2), (q_2 b^2)(a_2), (q_2 \rho_2 b)(a_2)\} > 0.$$

e observe que

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_1 \mathcal{I}(a_2) &\leq (q_1 k^2)(a_2) |u_x(a_2) + w(a_2)|^2 + (q_1 \rho_1 k)(a_2) |v(a_2)|^2 \\
&\quad + (q_2 b^2)(a_2) |w_x(a_2)|^2 + (q_2 \rho_2 b)(a_2) |z(a_2)|^2 \\
&\leq |P(a_2)| + |J_6| + |J_7| \\
&\quad + \left| \int_{a_1}^{a_2} (q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2 + [q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 + q_{2,x} b^2 |w_x|^2 + [q_2 \rho_2 b]_x |z|^2) dx \right| \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|} |u_x(a_2) + w(a_2)|^2 + \frac{C}{|\lambda|} |z(a_2)|^2 + C\|G\|_{0,L}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 \\
&\quad + C\|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0,L} + C\|V\|_{a_1, a_2}^2,
\end{aligned}$$

para uma constante positiva  $C$ . É fácil concluir que existe uma constante  $C_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{I}(a_2) \leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{0,L}^2$$

para  $|\lambda|$  suficientemente grande.

No caso  $j = 1$ , escolhemos as funções

$$(q_1 \rho_1 k)(x) = - \int_x^{a_2} e^{-n\tau} d\tau \quad e \quad (q_2 \rho_1 b)(x) = - \int_x^{a_2} e^{-n\tau} d\tau,$$

e prosseguimos de modo análogo ao que fizemos no caso  $j = 2$ .

□

**Corolário 3.14.** *Seja  $V = (u, v, w, z)^T$  a solução forte de (3.37)-(3.40). Se para qualquer subintervalo  $(a_1, a_2) \subset (0, L)$  temos*

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq \Lambda,$$

então existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|V\|_{0, L}^2 \leq C\Lambda + C\|G\|_{0, L}^2$$

*Demonstração.* Resulta da primeira desigualdade da Proposição 3.12 e da hipótese que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(a_j) &\leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{0, L}^2 \\ &\leq C_0 \Lambda + C_0 \|G\|_{0, L}^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Combinando a segunda desigualdade da Proposição 3.12 com (3.48) encontramos

$$\begin{aligned} \|V\|_{a_1, a_2} &\leq C_1 \mathcal{I}(a_j) + C_1 \|G\|_{0, L}^2 \\ &\leq C\Lambda + C\|G\|_{0, L}^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde  $C = C_0 C_1 + C_1 > 0$ . Considerando na desigualdade (3.49),  $a_1 = 0$  e  $j = 2$  obtemos

$$\int_0^{a_2} (|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2) dx \leq C\Lambda + C\|G\|_{0, L}^2. \quad (3.50)$$

De modo análogo, fazendo  $a_1 = a_2$ ,  $a_2 = L$  na equação (3.49) obtemos

$$\int_{a_2}^L (|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2) \leq C\Lambda + C\|G\|_{0, L}^2. \quad (3.51)$$

Dessa maneira, somando as estimativas (3.49) com (3.51) segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^L (|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2) dx &= \int_0^{a_2} (|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2) dx \\
&\quad + \int_{a_2}^L (|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2) dx \\
&\leq C\Lambda + C\|G\|_{0,L}^2.
\end{aligned}$$

□

### 3.3 Taxa de decaimento polinomial.

**Teorema 3.15.** *Suponha que  $\mathcal{X}(x) \neq 0$  q.t.p em  $(0, L)$  e a condição (3.10) é satisfeita. Então o semigrupo associado ao sistema Timoshenko termoelástico não-homogêneo (3.1)- (3.5) é polinomialmente estável, ou seja, existe uma constante  $C_n > 0$  independente de  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$ ,  $n \geq 1$  inteiro, tal que a solução  $\{S_{\mathcal{A}}(t)U_0\}_{t \geq 0}$  tem a seguinte taxa de decaimento*

$$\|S_{\mathcal{A}}(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_n}{t^{\frac{n}{2}}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}^n)}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall U_0 \in D(\mathcal{A}^n).$$

*Demonstração.* Segue dos Lemas 3.6 e 3.7 que

$$\int_{l_0 - \delta/2}^{l_0 + \delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Resulta pelo Corolário 3.11, item (i), temos

$$\int_{l_0 - \delta/3}^{l_0 + \delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Assim, concluímos que

$$\int_{l_0 - \delta/3}^{l_0 + \delta/3} (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \underbrace{\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2}_{:=\Lambda}$$

Considere  $V = (u, v, w, z)^T$  a solução forte de (3.37)-(3.40) com

$$\begin{aligned}
g_1 &:= f_1, \\
g_2 &:= \rho_1 f_2 - (\sigma\theta)_x, \\
g_3 &:= f_3, \\
g_4 &:= \rho_2 f_4 + \sigma\theta.
\end{aligned}$$

Decorre do Corolário 3.14, que

$$\begin{aligned} \int_0^L (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx &\leq C\Lambda + C\|G\|_{0,L}^2 \\ &\leq \epsilon C\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|G\|_{0,L}^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Entretanto, note que

$$\begin{aligned} \|G\|_{0,L}^2 &\leq C \int_0^L [ |f_{1,x} + f_3|^2 + |\rho_1 f_2 - \sigma \theta_x|^2 + |f_{3,x}|^2 + |\rho_2 f_4 + \sigma \theta|^2 ] dx \\ &\leq C \underbrace{\int_0^L [ |f_{1,x} + f_3|^2 + |f_{3,x}|^2 + |f_2|^2 + |f_4|^2 ] dx}_{\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2} + \underbrace{C\|\theta_x\|_{L^2}}_{\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}} \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C \left( \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \\ &\leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \quad (3.53)$$

para  $|\lambda|$  suficientemente grande. Desta forma, substituindo (3.53) em (3.52) obtemos

$$\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 dx \leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.54)$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \|\theta_x\|_{L^2}^2 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

para constantes  $C, C_\epsilon > 0$ . Somando a desigualdades (3.54) e (3.55) e usando a definição de norma em  $\mathcal{H}$ , obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \epsilon C\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

ou seja,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}.$$



Como  $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ , temos

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Em outras palavras, temos

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\|F\|_{\mathcal{H}} \neq 0} \left( \frac{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}}}{\|F\|_{\mathcal{H}}} \right) \leq C|\lambda|^2,$$

para  $|\lambda|$  suficientemente grande. Dessa forma, como  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$  e

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^2) \quad \text{quando } |\lambda| \rightarrow \infty,$$

segue pelo Teorema [1.67](#) (Borichev e Tomilov) que

$$\|(S_{\mathcal{A}}(t)\mathcal{A}^{-1})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1/2}) \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Como  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ , existe  $F_0 \in \mathcal{H}$  tal que  $\mathcal{A}^{-1}F_0 = U_0$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \|S_{\mathcal{A}}(t)U_0\|_{\mathcal{H}} &= \|(S_{\mathcal{A}}(t)\mathcal{A}^{-1})F_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}}\|F_0\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{C}{t^{1/2}}\|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{C}{t^{1/2}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}. \end{aligned}$$

Segue que o Teorema [3.15](#) está provado para o caso  $n = 1$ . O caso geral será provado por indução. Suponha que o resultado seja válido para todo  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k \leq n - 1$ .

Seja  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$ . Por definição temos  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{n-1})$  e  $\mathcal{A}^{n-1}U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  e mais, pela Proposição [1.48](#), item (ii), temos que  $S_{\mathcal{A}}(t/2)U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{n-1})$ . Desse modo, segue que

$$\begin{aligned}
\|S_{\mathcal{A}}(t)U_0\|_{\mathcal{H}} &= \|S_{\mathcal{A}}(t/2)(S_{\mathcal{A}}(t/2)U_0)\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \frac{C_{n-1}}{(t^{1/2})^{n-1}} \|S_{\mathcal{A}}(t/2)U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{n-1})} \\
&= \frac{C_{n-1}}{(t^{1/2})^{n-1}} (\|S_{\mathcal{A}}(t/2)U_0\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{A}(S_{\mathcal{A}}(t/2)U_0)\|_{\mathcal{H}} + \dots + \|\mathcal{A}^{n-1}(S_{\mathcal{A}}(t/2)U_0)\|_{\mathcal{H}}) \\
&\leq \frac{C_{n-1}}{(t^{1/2})^{n-1}} (\|S_{\mathcal{A}}(t/2)U_0\|_{\mathcal{H}} + \|S_{\mathcal{A}}(t/2)(\mathcal{A}U_0)\|_{\mathcal{H}} + \dots + \|S_{\mathcal{A}}(t/2)(\mathcal{A}^{n-1}U_0)\|_{\mathcal{H}}) \\
&\leq \frac{C_{n-1}}{(t^{1/2})^{n-1}} \left( \frac{C_1}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \frac{C_1}{t^{1/2}} \|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \frac{C_1}{t^{1/2}} \|\mathcal{A}^{n-1}(U_0)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \right) \\
&\leq \frac{C_{n-1}}{(t^{1/2})^{n-1}} \left( (n-1) \frac{C_1}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^n)} \right) \\
&\leq \frac{C_n}{(t^{1/2})^n} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^n)}.
\end{aligned}$$

□

### 3.4 Estabilidade Exponencial

**Teorema 3.16.** *Considere as notações anteriores e assuma que o sistema (3.1)-(3.5) satisfaça as condições (3.7)-(3.10). Então existem constantes  $C, \mu > 0$ , independente de  $U_0 \in \mathcal{H}$ , tal que o semigrupo  $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz*

$$\|S_{\mathcal{A}}(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\mu t} \|U_0\|_{\mathcal{H}}, \quad t > 0. \quad (3.56)$$

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$ , temos pelo Corolário 3.11, item (ii), que existe  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$\int_{l_0+\delta/3}^{l_0-\delta/3} |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.57)$$

Resulta dos Lemas 3.6 e 3.7 que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0+\delta/3}^{l_0-\delta/3} |\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 dx &\leq \int_{l_0+\delta/2}^{l_0-\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 dx \\
&\leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \quad (3.58)$$

Somando as desigualdades (3.57) e (3.58) obtemos

$$\int_{l_0+\delta/3}^{l_0-\delta/3} |\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 dx \leq \underbrace{\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2}_{:=\Lambda}.$$

Decorre do Corolário 3.14 que

$$\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 dx \leq C\Lambda + C\|G\|_{0,L},$$

para uma constante  $C > 0$ . De maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Teorema 3.15 obtemos

$$C\|G\|_{0,L} \leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Assim,

$$\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 dx \leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.59)$$

Do Lema 3.5 e da desigualdade de Young também temos

$$\begin{aligned} \|\theta_x\|_{L^2}^2 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Somando as desigualdades (3.59) (3.60) e usando a definição de norma em  $\mathcal{H}$ , obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Como  $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ , temos para  $\epsilon$  suficientemente pequeno que

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Portanto, como  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ , segue do Teorema 1.65 (Pruss) que

$$\|S_{\mathcal{A}}(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\mu t}\|U_0\|_{\mathcal{H}}, \quad t > 0.$$

□

# Capítulo 4

## Invariância da taxa de decaimento em relação às condições de contorno em sistemas de Timoshenko termoelásticos homogêneos.

### 4.1 Introdução

No Capítulo 2, mostramos que quando não é assumido as velocidades de ondas iguais, ou seja,  $\mathcal{X} = \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} \neq 0$ , temos diferentes taxas de decaimento polinomial para o sistema de Timoshenko, dependendo das condições de contorno. Para as condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann obtemos a taxa de  $t^{-\frac{1}{2}}$ , que é ótima, e para condições de contorno Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet obtemos a taxa de  $t^{-\frac{1}{4}}$ .

Nosso principal objetivo neste capítulo é mostrar que o sistema Timoshenko termoelástico homogêneo associado à condições de fronteira misturadas Dirichlet-Neumann tem a mesma taxa de decaimento polinomial de  $t^{-\frac{1}{2}}$ . Além disso, mostraremos que estabilidade exponencial do sistema com as condições de fronteira misturado Dirichlet-Neumann ocorre quando  $\mathcal{X} = 0$ .

É importante ressaltar que para obtermos esta invariância de estabilidade em relação às várias condições de fronteira misturadas Dirichlet-Neumann, usaremos a técnica das funções *cut-off* para encontrar melhores estimativas como feitas no Capítulo 3. Este capítulo é uma consequência direta do capítulo anterior, portanto as demonstrações de todos os resultados apresentados serão omitidas.

O sistema de equações diferenciais parciais que descreve o sistema de Timoshenko termoelástico homogêneo é

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma \theta_x = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \sigma \theta = 0, \quad (4.2)$$

$$\rho_3 \theta_t - \gamma \theta_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0, \quad (4.3)$$

para  $x \in (0, L)$  e  $t \in (0, \infty)$ , com as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ \varphi_t(x, 0) &= \varphi_1(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Estudaremos o sistema de equações (4.1) - (4.4) associado a exatamente uma das seguintes condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, L) = \theta(L, t) = 0, \\ (b) \quad \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, L) = \theta(L, t) = 0, \\ (c) \quad \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta(0, L) = \theta(L, t) = 0, \\ (d) \quad \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta_x(0, L) = \theta_x(L, t) = 0, \\ (e) \quad \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta_x(0, L) = \theta_x(L, t) = 0, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

onde  $t \geq 0$ . Denotaremos a diferença de velocidade das ondas por

$$\mathcal{X} := \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}.$$

Nosso primeiro objetivo é escrever o sistema de equações diferenciais parciais (4.1) - (4.4) com condições de fronteira (4.5) em um problema de Cauchy abstrato. Motivados a isso, introduzimos os seguintes espaços.

$$\mathcal{H}_j = \left\{ \begin{array}{ll} H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) & \text{para (1.5)}_a \\ H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) & \text{para (1.5)}_b \\ H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L^2(0, L) & \text{para (1.5)}_c \\ H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L_*^2(0, L) & \text{para (1.5)}_d \\ H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L_*^2(0, L) & \text{para (1.5)}_e \end{array} \right.$$

onde  $L_*^2(0, L) = \left\{ u \in L^2(0, L); \int_0^L u dx = 0 \right\}$  e  $H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L)$ .

Munimos o espaço Hilbert  $\mathcal{H}_j$  com o seguinte produto interno

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}_j} := & \int_0^L [\rho_1 \Phi_1 \overline{\Phi_2} + \rho_2 \Psi_1 \overline{\Psi_2} + b \psi_{1,x} \overline{\psi_{2,x}}] dx + \\ & \int_0^L [k(\varphi_{1,x} + \psi_1) \overline{(\varphi_{2,x} + \psi_2)} + \rho_3 \theta_1 \overline{\theta_2}] dx \end{aligned} \quad (4.6)$$

sendo  $U_1 = (\varphi_1, \Phi_1, \psi_1, \Psi_1, \theta_1)$ ,  $U_2 = (\varphi_2, \Phi_2, \psi_2, \Psi_2, \theta_2) \in \mathcal{H}_j$ , e com a norma induzida

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 := \int_0^L [\rho_1 |\Phi|^2 + \rho_2 |\Psi|^2 + b |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 + \rho_3 |\theta|^2] dx. \quad (4.7)$$

Dessa forma, o problema (4.1)-(4.4) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = \mathcal{A}_j U(t) & t > 0 \\ U(0) := U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0)^T, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde  $\mathcal{A}_j : \mathcal{D}(\mathcal{A}_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$  é o operador linear não-limitado definido por

$$\mathcal{A}_j U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x - \frac{\sigma}{\rho_1} \theta_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) + \frac{\sigma}{\rho_2} \theta \\ \frac{\gamma}{\rho_3} \theta_{xx} - \frac{\sigma}{\rho_3} (\Phi_x + \Psi) \end{pmatrix}$$

para qualquer  $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$ , cujo domínio é dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_j) = \{U \in \mathcal{H}_j; \varphi, \psi, \theta \in H^2(0, l) \text{ e (D) é satisfeito} \}$$

$$(D) \begin{cases} \Phi, \Psi, \theta \in H_0^1(0, L) & \text{para (5)}_a \\ \Psi, \varphi_x, \theta \in H_0^1(0, L), \Phi \in H_*^1(0, L) & \text{para (5)}_b \\ \Phi, \psi_x, \theta \in H_0^1(0, L), \Psi \in H_*^1(0, L) & \text{para (5)}_c \\ \Phi, \Psi, \theta_x \in H_0^1(0, L) & \text{para (5)}_d \\ \Phi, \psi_x, \theta_x \in H_0^1(0, L), \Psi \in H_*^1(0, L) & \text{para (5)}_e \end{cases} .$$

Com procedimento análogo ao feito no Capítulo 2, podemos mostrar que o operador  $\mathcal{A}_j$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe  $C_0$ , denotado por  $\{S_{\mathcal{A}_j}(t)\}_{t \geq 0}$ . Usamos a teoria de semigrupos para concluir que cada um dos sistemas (4.1)-(4.4) munido de uma das condições de fronteira dadas em (4.5) é bem posto.

**Proposição 4.1.** *Com as notações anteriores, temos que*

i) se  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$ , então o problema 4.8 tem uma única solução  $U(t) = S_{\mathcal{A}_j}(t)U_0$  satisfazendo

$$U \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}_j) \cap C([0, \infty); [\mathcal{D}(\mathcal{A}_j)])$$

ii) se  $U_0 \in \mathcal{H}_j$ , então o problema 4.8 tem uma única solução

$$U \in C([0, \infty); \mathcal{H}_j) \cap C^1((0, \infty); \mathcal{H}_j) \cap C((0, \infty); [\mathcal{D}(\mathcal{A}_j)])$$

iii) se  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j^n)$ , então o problema (4.8) tem uma única solução

$$U \in \bigcap_{l=0}^n C^{n-l}([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}_j^l))$$

## 4.2 Lemas técnicos

Seja  $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Dados  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in \mathcal{H}_j$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  seja  $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$  solução da equação resolvente  $(i\lambda I - \mathcal{A}_j)U = F$ , a qual em termos de suas componentes pode ser escrita como o sistema de equações

$$i\lambda\varphi - \Phi = f_1, \quad (4.9)$$

$$i\rho_1\lambda\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x = \rho_1 f_2, \quad (4.10)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f_3, \quad (4.11)$$

$$i\rho_2\lambda\Psi - (b\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta = \rho_2 f_4, \quad (4.12)$$

$$i\rho_3\lambda\theta - \gamma\theta_{xx} + \sigma(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5. \quad (4.13)$$

**Lema 4.2.** *Com as notações anteriores, temos que existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|\theta_x\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

**Lema 4.3.** *O eixo imaginário está contido no resolvente do operador  $\mathcal{A}_j$ , ou seja,  $\{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$ .*

Seja  $l_0 \in (0, L)$  e  $\delta > 0$  tal que  $(l_0 - \delta, l_0 + \delta) \subset (0, L)$ . Considere uma função auxiliar *cut-off*  $s \in C^2(0, L)$ , satisfazendo

$$\text{supp}(s) \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta), \quad 0 \leq s(x) \leq 1, \quad x \in (0, L),$$

$$s(x) = 1 \quad \text{para } x \in \left[ l_0 - \frac{\delta}{2}, l_0 + \frac{\delta}{2} \right].$$

**Lema 4.4.** *Com as notações anteriores, temos que para  $|\lambda|$  suficientemente grande, existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq C\|\theta_x\|_{L^2} \left( \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Em particular dado  $\epsilon > 0$ , temos que existe uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

*Demonstração.* Demonstração análoga ao Lema [3.6](#). □

**Lema 4.5.** *Com as notações anteriores, temos que para  $|\lambda|$  suficientemente grande, existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta}^{l_0-\delta} s|\Phi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} (\|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}) \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{2/3} \|U\|_{\mathcal{H}}^{4/3} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

Em particular dado  $\epsilon > 0$ , temos que existe uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\Phi|^2 dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

*Demonstração.* Demonstração análoga ao Lema [3.7](#). □



**Lema 4.6.** *Com as notações anteriores, temos que para  $|\lambda|$  suficientemente grande, existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} (\|\theta_x\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}) \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\theta_x\|_{L^2}^{2/3} \|U\|_{\mathcal{H}}^{4/3} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Demonstração análoga ao Lema [3.8](#).

□

Considere  $s_1$  uma função auxiliar *cut-off*  $s_1 \in C^2(0, L)$  satisfazendo

$$\text{supp}(s_1) \subset \left( l_0 - \frac{\delta}{2}, l_0 + \frac{\delta}{2} \right), \quad 0 \leq s_1(x) \leq 1, \quad x \in (0, L),$$

$$s_1(x) = 1 \quad \text{para } x \in \left[ l_0 - \frac{\delta}{3}, l_0 + \frac{\delta}{3} \right].$$

**Lema 4.7.** *Com as notações anteriores, temos que para  $|\lambda|$  suficientemente grande existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\psi_x|^2 dx &\leq C |\lambda| |b\rho_1 - k\rho_2| \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi| |\Psi| dx \\ &\quad + C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + C \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Demonstração análoga ao Lema [3.9](#).

□

**Lema 4.8.** *Com as notações anteriores, temos que para  $|\lambda|$  suficientemente grande existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\Psi|^2 dx &\leq C|\lambda| |b\rho_1 - k\rho_2| \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi| |\Psi| dx \\
&+ C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ C \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Demonstração análoga ao Lema [3.10](#). □

**Corolário 4.9.** *Com as notações anteriores, e considere  $\epsilon > 0$ .*

*i ) Seja  $\mathcal{X} \neq 0$ , então existe uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que*

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

*desde que  $|\lambda|$  seja suficientemente grande.*

*ii ) Seja  $\mathcal{X} = 0$ , então existe uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que*

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

*Demonstração.* Demonstração análoga ao Corolário [3.11](#). □

## 4.2.1 Desigualdades de observabilidade

Considere as seguintes equações.

$$i\lambda u - v = g_1 \text{ em } (0, L), \quad (4.14)$$

$$i\lambda\rho_1 v - k(u_x + w)_x = g_2 \text{ em } (0, L), \quad (4.15)$$

$$i\lambda w - z = g_3 \text{ em } (0, L), \quad (4.16)$$

$$i\lambda\rho_2 z - bw_{xx} + k(u_x + w)_x = g_4 \text{ em } (0, L), \quad (4.17)$$

onde  $g_1, g_3 \in H_0^1(0, L)(H_*^1(0, L))$ ,  $g_2, g_4 \in L^2(0, L)$ .

Vamos denotar por  $V$  e  $G$  os vetores  $V = (u, v, w, z)^T$  e  $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)^T$  respectivamente. Além disso, dado qualquer  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  com  $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$ ,

denotaremos  $\|\cdot\|_{a_1, a_2}$  e  $\mathcal{I}(\cdot)$  por

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 := \int_{a_1}^{a_2} (|u_x + \omega|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2) dx,$$

$$\mathcal{I}(a_j) := |u_x(a_j) + w(a_j)|^2 + |v(a_j)|^2 + |w_x(a_j)|^2 + |z(a_j)|^2, \quad j = 1, 2$$

**Proposição 4.10.** *Com as notações anteriores, considere  $V = (u, v, w, z)^T$  a solução forte de (4.14)-(4.17) e  $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$  quaisquer. Então existe constantes  $C_0, C_1 > 0$  tais que*

$$\mathcal{I}(a_j) \leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{0, L}^2, \quad j = 1, 2,$$

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq C_1 \mathcal{I}(a_j) + C_1 \|G\|_{0, L}^2, \quad j = 1, 2,$$

*Demonstração.* Demonstração análoga a Proposição 3.12. □

**Corolário 4.11.** *Seja  $V = (u, v, w, z)^T$  a solução forte de (4.14)-(4.17). Se para qualquer subintervalo  $(a_1, a_2) \subset (0, L)$  temos*

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq \Lambda,$$

*então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|V\|_{0, L}^2 \leq C\Lambda + C\|G\|_{0, L}^2$$

*Demonstração.* Demonstração análoga ao Corolário 3.14. □

### 4.3 Taxa de decaimento polinomial

**Teorema 4.12.** *Se  $\mathcal{X} \neq 0$ , então o semigrupo associado ao sistema Timoshenko termoelástico (4.1)-(4.4) com as condições de fronteira (4.5) é polinomialmente estável, ou seja, existe uma constante  $C_n > 0$ , independente de  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_j^n)$ ,  $n \geq 1$  inteiro, tal que  $\{S_{\mathcal{A}_j}(t)U_0\}_{t \geq 0}$  tem a seguinte taxa de decaimento*

$$\|S_{\mathcal{A}_j}(t)U_0\|_{\mathcal{H}_j} \leq \frac{C_n}{t^{\frac{n}{2}}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_j^n)}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall U_0 \in D(\mathcal{A}_j^n).$$

*Demonstração.* Demonstração análoga ao Teorema 3.15. □

### 4.4 Estabilidade exponencial

**Teorema 4.13.** *Considere as notações anteriores e assuma  $\mathcal{X} = 0$ . Então existem constantes  $C, \mu > 0$ , independentes de  $U_0 \in \mathcal{H}_j$ , tal que o semigrupo*

$\{S_{\mathcal{A}_j}(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaz

$$\|S_{\mathcal{A}_j}(t)U_0\|_{\mathcal{H}_j} \leq Ce^{-\mu t}\|U_0\|_{\mathcal{H}_j}, \quad t > 0. \quad (4.18)$$

*Demonstração.* Demonstração análoga ao Teorema [3.16](#).

□

# Considerações Finais

Neste trabalho, usamos a teoria de semigrupos lineares para provar a existência e unicidade de solução para dois sistemas termoelásticos do tipo Timoshenko, um homogêneo e outro não-homogêneo, o qual modela as vibrações transversais de vigas de materiais elásticos que na sua posição de equilíbrio apresenta comprimento  $L$ . Usamos propriedades do gerador infinitesimal do semigrupo associado ao sistema para obtermos resultados de estabilidades exponenciais ou polinomiais.

Seguindo com este objetivo, mostramos que o sistema Timoshenko termoelástico homogêneo com as condições de fronteira Dirichlet-Neumann-Neumann é exponencialmente estável se, e só se, a diferença de velocidades de ondas são iguais, isto é,  $\mathcal{X} = \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0$ . Este mesmo sistema com as condições de fronteira Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet é exponencialmente estável para  $\mathcal{X} = 0$ , sendo a recíproca um problema em aberto. No caso de  $\mathcal{X} \neq 0$ , obtemos uma taxa de decaimento polinomial para as condições de fronteira Dirichlet-Neumann-Neumann de  $t^{-1/2}$ , sendo esta a melhor taxa, enquanto que com as condições de Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet obtemos a taxa de decaimento de  $t^{-1/4}$ .

Prosseguindo com o objetivo de obter resultados melhores de estabilidades para modelos mais genéricos, trabalhamos com as funções *cut-off*, e obtemos que a estabilidade exponencial é alcançada em uma versão local de velocidades iguais de propagação de ondas para sistemas de Timoshenko termoelásticos não homogêneos, com condições de fronteira Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet, e no caso quando  $\mathcal{X}(x) \neq 0$  q.t.p em  $(0, L)$  obtemos um melhoramento na taxa de decaimento de  $t^{-1/4}$  para  $t^{-1/2}$ .

Continuando com a mesma técnica das funções *cut-off*, obtemos a invariância da taxa de decaimento de  $t^{-1/2}$  em relação as condições de contorno misturada Dirichlet-Neumann para sistema Timoshenko homogêneo, quando  $\mathcal{X} \neq 0$ . E no caso contrário, obtemos a estabilidade exponencial.

# Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R.A. **Sobolev Spaces**, New York: Academic Press, 1975.
- [2] Bartle, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**, New York: Wiley Classics. Wiley-Interscience. 1995.
- [3] Borichev, A.; Tomilov, Y. **Optimal polynomial decay of functions and operator semigroup**, *Math. Ann.*,347,455-478, 2000.
- [4] Botelho, G.; Pelegrino D.; Teixeira. E. **Fundamentos de Análise Funcional**, Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [5] Brezis, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations**, Paris: Springer, 2011.
- [6] Cavalcanti, M. M.; Cavalcanti, V. N. D. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**, Maringá: UEM/DMA, Vol. 1, 2000.
- [7] Cavalcanti, M. M.; Cavalcanti, V. N. D. **Introdução à Análise Funcional**, Maringá: UEM/DMA, 2007.
- [8] C. A. Raposo. **Problema de Transmissão para o Sistema de Timoshenko com Memória**, Tese de Doutorado, IM/UFRJ, (2001).
- [9] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos and N. N. O. Castro. **Exponential Stability for the Timoshenko system with two weak dampings**, *Applied Mathematics Letters*, 18 (5), pages 535-541, (2005).
- [10] D. Almeida Santos Junior, M. L. Santos and J. E. Muñoz Rivera. **Stability to 1-D thermoelastic Timoshenko beam acting on shear force**, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 65, pages 1233-1249, (2014).
- [11] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. M. Rivera and R. Racke. **Energy decay for Timoshenko systems of memory type**, *Journal Differential Equations*, 194 (1), pages 82-115, (2003).
- [12] Fernandez Sare, H. D.; Munõz Rivera, J. E. **Exponential decay of Timoshenko systems with past memory**, *J. Mathemmatical Analysis and Applications*, 339, 482-502, 2008.

- [13] Gomes. A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**, Rio de Janeiro: UFRJ. IM , 200
- [14] G. Q. Xu and S. P. Yung. **Exponential decay rate for a Timoshenko beam with boundary damping**, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 123, (3), pages 669-693, (2004).
- [15] H. D. Fernandez Sare. **Propriedades Assintóticas e Problemas Inversos para Sistemas de Timoshenko**, *Tese de Doutorado*, IM/UFRJ, (2006).
- [16] H. D. Fernandez Sare and J. M. M. Rivera. **Stability of Timoshenko systems with past history**, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 339, pages 482 - 502, (2008).
- [17] J. Neerven. **The asymptotic behaviour of semigroups of linear operator**, *Operator Theory: Advances and Applications*, 1996.
- [18] J. E. Muñoz Rivera , R. Racke. **Timoshenko systems with indefinite damping**, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 341, pages 1068 - 1083, (2008).
- [19] J. E. Muñoz Rivera, A. I. Ávila. **Rates of decay to non homogeneous Timoshenko model with tip body**, *Journal of Differential Equations*. Vol. 258, pages 3468-3490, (2015).
- [20] J. U. Kim and M. Renardy. **Boundary Control of the Timoshenko beam**, *Siam J. Control. Optim.*, 25, pages 1417-1429, (1987).
- [21] Kreyszig, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**, New York: John Wiley & Sons. Inc, 1978.
- [22] Liu, Z. and Zheng, S., **Semigroups associated with dissipative systems**, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, vol. 398, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [23] L. Gearhart. **Spectral theory for contractions semigroups on Hilbert space**, *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 236(1), pages 385- 349, (1978).
- [24] M. S. Alves, C. A. Raposo, J. E. M. Rivera, M. Sepúlveda and O. V. Villagrán. **Uniform stabilization for the transmission problem of the Timoshenko system with memory**, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 369, pages 323 - 345, (2010).
- [25] Medeiros, L. A. da J.; Miranda, M. A. M. **Espaços de Sobolev : Iniciação aos problemas elípticos não homogêneos**, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000.
- [26] M. S. Carneiro. **Estabilidade Assintótica de Modelos de Vigas Viscoelásticas com Cargas Pontuais**, *Tese de Doutorado. Instituto de Matemática, UFRJ*, (2014).

- [27] M. S. Alves, M. A. Jorge Silva, M. F. Ma and J. E. Muñoz Rivera. **Invariance of decay rate with respect to boundary conditions in thermoelastic Timoshenko systems**, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 67, page 70, (2016).
- [28] M.S. Alves, M.A. Jorge Silva, M.F. Ma, e J. E. Muñoz Rivera. **Non-homogeneous thermoelastic Timoshenko systems**, *Bulletin Brazilian Mathematical Society*, (2017) .
- [29] M. Bassam, D. Mercier, S. Nicaise and A. Wehbe. **Polynomial stability of the Timoshenko system by one boundary damping**, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 425, (2), pages 1177-1203, (2015).
- [30] Oliveira, César R. de. **Introdução à Análise Funcional**, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [31] Pazy, A. **Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [32] Prüss J. **On the Spectrum of  $C_0$ -Semigroups**, *Transaction of the American Mathematical Society*, 284, Nro.2, pp 847-857, 1984.
- [33] Prüss J. ; Bátkai A. ; Engel K. and Schnaubelt R. **Polynomial Stability of Operator Semigroups**, *Math. Nachr.* Vol. 279, (1), pages 1425-1440, 2006.
- [34] Soufyane, Abdelaziz. **Stabilisation de la poutre de Timoshenko**, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* Vol. 328, (8), pages 731- 734, (1999).
- [35] S. Timoshenko. **Vibration Problems in Engineering**, first edition, Van Nostrand Inc., 1928, 470 pages.
- [36] S. A. Messoudi and B. Said-Houari. **Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history**, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 360, pages 459 - 475, (2009).
- [37] Teman, R. **Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis**, New York, American Mathamatical Society, 2001.
- [38] Tosio Kato . **Pertubation Theory for Linear Operators**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1980.
- [39] Z. Liu, B. Rao. **Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation**, *Z. Angew. Math. Phys.* Vol. 56(4), pages 630- 644, (2005).