RONAL QUISPE CALJARO

# ALGUNS RESULTADOS DA EQUAÇÃO GENERALIZADA DE ABEL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2018

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

Q8a
2018

Quispe Caljaro, Ronal, 1987-
Alguns resultados da equação generalizada de Abel / Ronal Quispe Caljaro. – Viçosa, MG, 2018.
viii, 81 f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Alexandre Miranda Alves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 79-80.

1. Green, Função de. 2. Equações diferenciais. 3. Abel, Equação de. 4. Riccati, Equação de. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 511.326

RONAL QUISPE CALJARO

**ALGUNS RESULTADOS DA EQUAÇÃO GENERALIZADA DE ABEL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

APROVADA: 14 de maio de 2018.

Luiz Fernando de Oliveira Faria

Anderson Luís Albuquerque de Araújo

Alexandre Miranda Alves
(Orientador)

*Dedico este trabalho aos meus pais,*
*Esteban e Aurora.*

Eu voltarei e serei milhões

Tupac Amaru II

# Agradecimentos

A meus pais, Esteban e Aurora, pelo exemplo, amor e motivação, vocês me mostraram o caminho certo, são meu maior exemplo de vida, nossa história de lutas e vitórias começa bem antes daqui.

A meu orientador, Alexandre, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções e incentivo. Enfim pela pessoa maravilhosa que é.

Aos Professores Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria e Dr. Anderson Luís Albuquerque de Araújo por terem aceito o convite para revisar meu trabalho e formar parte da Banca Examinadora.

Aos meus irmãos, Yaneth, Eva, David e Judith que sempre me deram coragem e incentivo para que eu pudesse encarar a minha vida.

A Sthefany Lioska e Lucianita pela força e apoio incondicional que elas me deram.

Aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Finalmente, agradeço, muito, à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

# Sumário

# Resumo

QUISPE CALJARO, Ronal, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, maio de 2018. **Alguns resultados da equação generalizada de Abel**. Orientador: Alexandre Miranda Alves.

Neste trabalho, primeiramente, baseados em [1], [12], construímos a função de Green para o caso $n - dimensional$ e para o caso $1 - dimensional$ a partir de uma equação linear com condições na fronteira. Baseados em [13], [19] e [5] mostramos a existência de pelo menos uma solução periódica da equação de Riccati, a existência de pelo menos uma solução fechada, isolada e positiva para a Equação Generalizada de Abel e a existência de uma cota superior do número de ciclos limites de alguns casos particulares da equação generalizada de Abel. Finalmente, baseados em [19] e [5], apresentamos algumas aplicações, dos resultados obtidos da equação generalizada de Abel, para campos vetoriais polinomiais no plano.

# Abstract

QUISPE CALJARO, Ronal, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, May, 2018. **Some results of Abel generalized equation**. Adviser: Alexandre Miranda Alves.

In this work, firstly, based on [1] and [12], we built the Green function for the $n-dimensional$ and $1-dimensional$ case from a linear equation with boundary conditions. Based on [13], [19] and [5], We show the existence of at least a periodic solution of the Riccati equation, the existence of at least one closed, isolated and positive solution for the generalized Abel equation, and the existence of an upper bound of the number of cycles limits for some particular cases of the generalized Abel equation. Finally, based on [19] and [5], we present some applications of the results obtained from the generalized Abel equation for polynomial vector fields on the plane

# Introdução

De acordo com [18], o estudo global das soluções de Equações Diferenciais Ordinárias, que são curvas definidas pelas equações diferenciais, tem seu inicio com um artigo de Henry Poincaré, publicado em 1881, "Sur les courbes définies par une équation différentialle". A partir desse trabalho, começou uma série de contribuições relacionadas ao comportamento geométrico das soluções, mesmo sem ter uma solução analítica. Essas contribuições, hoje, são conhecidas como Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Equações diferenciais não-autônomas do tipo

$$x' = f(t,x)\,,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ t \in I \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

com condições de contorno adicionais, são encontradas em diferentes problemas, como equações variadas de órbitas periódicas de campos vetoriais, sistemas autônomos planares de EDO's, teoria de controle entre outros. Estamos interessados em soluções particulares de (1) que são definidas em um intervalo inteiro $I$ e tal que $x(0) = x(1)$. No caso em que $f$ é $1-$*periódico* em $t$, observe que essas soluções, que são fechadas quando consideramos (1) no cilindro $\mathbb{R}^n \times [0,1]$, podem ser chamadas periódicas. Uma solução periódica, que é isolada no conjunto de todas as soluções periódicas de (1), é chamada de ciclo limite da equação diferencial. Classicamente, o interesse nesse problema vem do estudo do número de ciclos limite de um campo vetorial polinomial planar. O $16^o$ Problema de Hilbert geralmente é enunciado como a determinação do número máximo de ciclos limite (órbitas periódicas isoladas) em termos do grau de um sistema polinomial planar. Embora haja um grande interesse na pesquisa deste problema, apenas recentemente provou-se que o número de ciclos limite é finito para cada equação individual. Uma das questões mas desafiadoras para a equação (1) é o controle do número de ciclos limite em famílias de equações. Esse número é finito? É limitado? Apesar desse interesse, as situações mais simples ainda não estão completamente compreendidas, como o caso polinomial em dimensão um,

$$x' = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, x^k, \tag{2}$$

onde $x \in \mathbb{R}$, $t \in I$, $a_0, \ldots, a_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves e $1-$*periódicas*.

No presente trabalho, nos propomos a estudar aspectos dinâmicos de uma equação generalizada de Abel, ou seja, de grau $n$, quanto a existência e o número de ciclos limites.

No Capítulo 1, baseados em [18], [8], [3], [16] e [4], serão introduzidos alguns conceitos básicos da teoria qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. No final do capítulo, daremos a definição geral do que é um ciclo limite, ciclo limite estável, instável e semiestável.

No Capítulo 2, nas Seções 2.1 e 2.2, baseados em [1] e [12], construimos a função de Green $n-dimensional$ e $1-dimensional$. Resolvemos o sistema linear $n-dimensional$ de equações diferenciais de primeira ordem, com condições de valor na fronteira. Nesta situação, veremos quais são as condições para que o referido sistema tenha uma solução única e, finalmente, vamos definir a função de Green associada a esse problema. Na Seção 2.3, baseados em [13] usando a função de Green $1-dimensional$, o Teorema de Arzale-Ascoli e o Teorema do Ponto fixo de Schauder, mostraremos que, sob certas hipóteses, a equação diferencial de Riccati escalar, que é um caso particular da equação generalizada de Abel com coeficientes periódicos, admite pelo menos uma solução periódica.

No Capitulo 3, baseados em [19], focamos nossa atenção para a equação generalizada de Abel e suas soluções fechadas. Na Seção 3.1, começamos o estudo do caso quando $a_0(t) = 0$, para todo $t \in [0, 2\pi]$, isto é, da equação

$$x' = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, x^k,$$

onde nosso objetivo é obter soluções fechadas não triviais. Nesta mesma seção, estudaremos também a caso geral, isto é, da equação

$$x' = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, x^k,$$

onde nosso objetivo também é obter soluções fechadas não triviais. Na Seção 3.2, baseados em [5], definimos ciclo limite para o caso $1-dimensional$ e estudamos a cota superior para o número de ciclos limite das seguintes famílias

$$x' = a_n(t)\, x^n + a_m(t)\, x^m + a_1(t)\,,$$

onde $n > m > 1$ e pelo menos uma das funções $a_n$ ou $a_m$ não muda de sinal. E

$$x' = a_n(t)\, x^n + a_2(t)\, x^2 + a_1(t)\, x + a_0(t)\,,\ n > 2,$$

onde a função $a_n$ que não muda de sinal.

No Capítulo 4, baseados em [19] e [5], os resultados obtidos na Seção 3.1 serão usados para o estudo de alguns exemplos particulares de campos vetoriais polinomiais no plano. Mudando o sistema para coordenadas polares, mostramos que alguns sistemas polinomiais podem ser escritos como uma só equação diferencial com variável independente $\theta$. Então, as soluções fechadas isoladas positivas da equação generalizada de Abel, para os casos que estudaremos, corresponderão para os ciclos limites de um sistema polinomial planar. Na Seção 3.2, da mesma forma, mudamos para coordenadas polares e conseguimos relacionar um dos casos que estudaremos da equação generalizada de Abel e, sob algumas hipóteses, mostramos uma cota superior para o número de ciclos limites de um sistema planar.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias desde a definição do que é uma equação diferencial ordinária até alguns resultados que serão usados no trabalho. Diversos resultados foram apenas enunciados, mas as demonstrações podem ser encontradas nas referências bibliográficas [18], [8], [3], [16], [4].

## 1.1 Equações diferenciais ordinárias

A teoria de equações diferenciais ordinárias evoluiram dos métodos do Cálculo Diferencial e Integral, os quais foram descobertos pelo inglês Issac Newton e pelo alemão Wilhelm Gottfried Leibnitz. Esses métodos ajudaram os cientistas da época a resolver muitos problemas físicos e geométricos.

Nesta seção, apresentamos a definição formal das equações diferenciais ordinárias e alguns resultados básicos. Uma equação diferencial ordinária é uma equação que envolve as derivadas de uma função real desconhecida, pode ser escrita na sua forma geral

$$F\left(t, x, x', x'', \ldots\ldots, x^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

onde $F : U \subset \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^r$ no conjunto aberto $U$. A variável $t$ é chamada de variável independente e a variável $x$ é chamada de variável dependente, pois a variável $x$ depende de $t$. A função $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $I$ é um intervalo, será dita uma solução de (1.1) se $x$ tem derivadas até ordem $n$ e satisfaz a equação (1.1). A equação diferencial (1.1) é dita ordinária, pois envolve apenas derivadas com relação a uma única variável independente $t$.

Um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^r$ é uma função $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, $r \geq 1$, $r = \infty$ ou $r = \omega$ (isto é, o campo de vetores $X$ é analítico). Ao campo de vetores $X$ podemos associar uma equação diferencial da forma

$$x' = X\left(x\right),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

onde $x'$ é a derivada com relação à variável independente. Reciprocamente, dada uma EDO da forma (1.2) podemos associar um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$. As soluções de (1.2) são aplicações diferenciáveis $\varphi : I \longrightarrow U$, $I$ é um intervalo, tais que $\frac{d\varphi}{dt} = X(\varphi(t))$, para todo $t \in I$, ou seja, $\varphi(t)$ satisfaz (1.2). As soluções de (1.2) são chamadas curvas integrais, trajetórias ou órbitas. Um ponto $x_0 \in U$ é chamado de ponto singular, se $X(x_0) = 0$, e ponto regular se $X(x_0) \neq 0$. Se $x_0$ é ponto singular então a curva $\varphi(t) = x_0$, para $t \in (-\infty, +\infty)$ é uma solução de (1.2), pois $\frac{d\varphi}{dt} = 0 = X(x_0) = X(\varphi(t))$. A equação (1.2) admite a seguinte interpretação geométrica: $\varphi$ é uma curva integral de $X$ se, e somente se, o vetor tangente $\varphi'(t)$ em $\varphi(t)$ coincide com o valor que $X$ assume em $\varphi(t)$, ou seja, $X(\varphi(t))$. Uma EDO do tipo (1.2) é chamada de equação diferencial autônoma, pois não depende explicitamente de $t$. As equações da forma

$$x' = f(t, x) \tag{1.3}$$

onde $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto, é de classe $\mathcal{C}^r$ , são chamadas não autônomas.

### 1.1.1 Existência e unicidade de soluções

Apresentamos a seguir o Teorema de Existência e Unicidade de soluções. Este resultado nos garante, sob algumas hipóteses, quando uma equação diferencial ordinária com uma condição inicial tem solução única. Consideramos a EDO com condição inicial, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & f(t, x) \\ x(t_0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{1.4}$$

onde $(t_0, x_0) \in \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto, $f$ de classe $\mathcal{C}^r$ e $r \geq 1$. Chamamos (1.4) de problema de valor inicial (PVI). Uma solução deste problema é uma aplicação $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^r$, tal que

$$\begin{cases} \varphi'(t) & = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) & = x_0, \end{cases}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo contendo $t_0$, $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$.

**Proposição 1.1.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e $(t_0, x_0) \in \Omega$. Resolver o seguinte P.V.I.*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & f(t, x) \\ x(t_0) & = & x_0, \end{array} \right.$$

*é equivalente a resolver a seguinte equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

**Teorema 1.2.** (*Teorema de Existência e Unicidade*) *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$,* *onde* $\Omega$ *é da forma* $\Omega = I_a \times B_b$ *com* $I_a = \{t \in \mathbb{R};\ |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - x_0| \leq b\}$. *Consideremos o PVI*

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

*Se* $f$ *é contínua e Lipschitz na segunda variável em* $\Omega$ *com constante de Lipschitz* $K$ *e* $|f| \leq M$ *em* $\Omega$, *então o PVI* (1.5) *possui uma única solução* $\varphi : I_\alpha \longrightarrow B_b$, *onde* $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo e* $\alpha = \textit{mín}\{a, b/M\}$.

**Definição 1.3.** *Consideremos a seguinte equação diferencial*

$$x' = f(t,x). \tag{1.6}$$

*Chama-se solução máxima de* (1.6) *a toda solução* $\varphi$ *definida num intervalo* $I$, *denominado intervalo máximo de* $\varphi$, *tal que se* $\psi$ *é outra solução no intervalo* $J$ *com* $J \supseteq I$ *e* $\varphi = \psi|_I$, *então* $I = J$. *Em outras palavras,* $\varphi$ *é máxima se não admite nenhuma extensão que também é solução de* (1.6).

**Teorema 1.4.** *Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação de classe* $\mathcal{C}^k$, $1 \leq k \leq \infty$ *ou* $k = \omega$ *(ou seja,* $f$ *é analítica), onde* $\Omega$ *é um aberto.*

1. *(Existência de soluções máximas): Para cada* $(t_0, x_0, \lambda_0) \in \Omega$ *existe um intervalo* $I_{x_0}$ *aberto, onde está definida a única solução máxima* $\varphi_{x_0}$ *da equação diferencial* $x' = f(t,x,\lambda)$, *tal que* $\varphi_x(0) = x_0$.

2. *(Propriedade de Grupo): Se* $y = \varphi_x(t)$ *e* $t \in I_x$ *então* $I_y = I_x - t = \{u - t;\ u \in I_x\}$ *e* $\varphi_y(s) = \varphi_x(t+s),\ \forall s \in I_y$.

3. *(Regularidade com relação às condições iniciais): O conjunto* $D = \{(t,r,x,\lambda);\ (r,x,\lambda) \in \Omega\, e\, t \in I_x\}$ *é aberto em* $\mathbb{R} \times \Omega$ *e a aplicação* $\varphi : D \longrightarrow \Omega$, *dada por* $\varphi(t,r,x,\lambda) = \varphi_x(t)$ *é de classe* $\mathcal{C}^k$ *(mesma regularidade de* $f$*). Além disso, satisfaz a equação*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,r,x,\lambda)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x,\lambda)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,r,x,\lambda).$$

### 1.1.2 Equações diferenciais lineares

A classe mais simples, no conjunto das equações diferenciais ordinárias, é a classe das equações diferenciais lineares, pois é possível explorar bem as propriedades de suas soluções e além disso, no caso de coeficientes constantes, é possível resolvê-las. Consideramos a equação diferencial

$$x' = A(t)\,x + f(t) \tag{1.7}$$

onde $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma função matricial e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função vetorial, ambas são contínuas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A equação diferencial (1.7) chama-se equação diferencial linear. Se $f \equiv 0$ então dizemos que (1.7) é homogênea. O resultado a seguir segue do Teorema de Existência e Unicidade.

**Teorema 1.5.** *Para cada* $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ *existe uma única solução* $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ *de* (1.7) *definida em* $I$, *tal que* $\varphi(t_0) = x_0$. *Escrevendo* (1.7) *na forma matricial temos*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

*Assim,* (1.7) *é um sistema de* $n$ *equações diferenciais*

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}(t)\, x_1 + \dots a_{1n}(t)\, x_n + f_1(t) \\ \quad\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)\, x_1 + \dots a_{nn}(t)\, x_n + f_n(t)\,. \end{cases} \tag{1.9}$$

**Proposição 1.6.** *Sejam* $\varphi(t)$ *e* $\psi(t)$ *soluções da equação homogênea*

$$x' = A(t)\, x, \tag{1.10}$$

*onde* $A(t)$ *é contínua em* $I \subset \mathbb{R}$.

1. *Se* $\varphi(s) = 0$ *para algum* $s \in I$, *então* $\varphi(t) \equiv 0$ *em* $I$.

2. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *então* $y = a\varphi + b\varphi$ *também é solução de* (1.10).

**Corolário 1.7.** *Sejam* $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ *o espaço das funções contínuas* $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *e* $S \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ *o espaço das soluções da equação* $x' = A(t)\, x$. $S$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ *de dimensão* $n$.

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\{\varphi_1(t, s, v_1), \dots, \varphi_n(t, s, v_n)\}$ forma uma base para $S$, ou seja, toda solução de $x' = A(t)\, x$ se expressa de maneira única como combinação linear de $\varphi_1(t, s, v_1), \dots, \varphi_n(t, s, v_n)$.

Consideremos a equação

$$M' = A(t)\, M, \tag{1.11}$$

equações diferenciais como (1.11) são chamadas equações diferenciais matriciais lineares homogêneas, onde $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $M = (x_{ij})$, com norma $|M| = sup\,|x_{ij}|$. Temos que (1.11) é equivalente ao sistema

$$x_{ij}' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, x_{kj},\ 1 \le i, j \le n.$$

Observamos que $\phi(t)$ é solução de (1.11) se, e somente se, para todo $1 \le j \le n$, a $j$ ésima coluna $\phi_j(t)$ de $\phi(t)\, x$ é solução da equação homogênea $x' = A(t)$. Aplicando o Teorema de Existência e Unicidade podemos garantir a existência e unicidade de soluções definidas em um intervalo $I$, que passam por $(t_0, M_0) \in I \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A seguir, definimos a matriz fundamental de soluções de uma equação diferencial matricial e apresentamos uma caracterização dessa definição.

**Definição 1.8.** *Uma matriz* $\phi(t)$ *de ordem* $n \times n$*, cujas colunas formam uma base do espaço de soluções de* $x' = A(t)x$*, é chamada de matriz fundamental de soluções.*

**Proposição 1.9.** *Sejam* $\phi(t)$ *e* $\psi(t)$ *matrizes soluções da equação matricial* $M' = A(t)M$*, sendo* $\phi(t)$ *fundamental. Então existe uma única matriz* $C$*, de ordem* $n \times n$ *constante, tal que,* $\psi(t) = \phi(t)C$ *para todo* $t \in I$*. Mais ainda,* $C$ *é não-singular se, e somente se,* $\psi(t)$ *é fundamental.*

**Observação 1.10.** *Se* $\phi : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *é solução da equação matricial* $M' = A(t)M$*, então* $\phi$ *é fundamental se as seguintes condições se verificam:*

1. $det[\phi(t)] \neq 0$*, para todo* $t \in I$*, pois as colunas de* $\psi$ *devem ser linearmente independentes,*

2. $\phi(t_0) = \phi_0$ *é tal que* $det\phi_0 \neq 0$*,*

3. *As colunas de* $\phi$ *são base para o espaço vetorial das soluções de* $x' = A(t)x$*.*

A seguinte proposição explicita a solução de uma equação linear da forma (1.7), a partir do conhecimento da solução da equação diferencial homogênea associada.

**Proposição 1.11.** *(Variação de parâmetros) Seja* $\phi(t)$ *uma matriz fundamental de* $x' = A(t)x$*, então a solução de* $x' = A(t)x + b(t)$*,* $\varphi(t, t_0, x_0)$*, tal que* $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$*, é dada por*

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t)\left[\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)b(s)\,ds\right]$$

*Em particular,* $\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0$*, é a solução no caso homogêneo.*

Seja a equação diferencial linear

$$x' = Ax + f(t), \tag{1.12}$$

onde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ uma matriz com entradas constantes e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Se $f \equiv 0$ dizemos que (1.12) é uma equação linear homogênea com coeficientes constantes. A matriz fundamental de (1.12) satisfaz algumas propriedades que apresentamos a seguir.

**Proposição 1.12.** *Seja* $\phi(t)$ *a matriz fundamental da equação* (1.12)*, tal que* $\phi(0) = Id$*, então:*

1. $\phi'(t) = A\phi(t)$

2. $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$

3. $[\phi(t)]^{-1} = \phi(-t)$

4. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!}$ *converge uniformemente para* $\phi(t)$ *em todo compacto de* $\mathbb{R}$.

**Definição 1.13.** *A exponencial da matriz* $A$ *é definida por* $\phi(1)$*, e denotada como:*

$$e^A = \phi(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

Note que, $\phi(t) = e^{tA}$ é a matriz fundamental de $x' = Ax$. Além disso, se $\phi(t+s) = e^{(t+s)A}$, então $\phi(t)\phi(s) = \phi(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.

### 1.1.3 Equações diferenciais autônomas

Consideremos a equação diferencial autônoma

$$x' = X(x),$$

onde $X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $U$ aberto, é um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^k$, $1 \leq k \leq \infty$ ou $k = \omega$.

**Definição 1.14.** *Uma aplicação* $\varphi : \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathcal{C}^r$ *é dita um fluxo de classe* $\mathcal{C}^r$ *se:*

1. $\varphi(0, x) = x$
2. $\varphi(t+s) = \varphi(t, \varphi(s, x))\,;\ t, s \in \mathbb{R}$.

Se $\varphi : D \longrightarrow U$, onde $D$ é dado pelo Teorema 1.4, dizemos que o fluxo é gerado por $X$. Se $I_x = \mathbb{R}$, o fluxo gerado por $X$ é um fluxo $\mathcal{C}^r$ em $U$. Se $I_x \neq \mathbb{R}$, o fluxo gerado por $X$ é chamado fluxo local.

**Definição 1.15.** *O conjunto* $\sigma_p = \{\varphi(t, p)\,;\ t \in I_p\}$*, isto é, a imagem da curva integral de* $X$ *pelo ponto* $p$*, chama-se órbita de* $X$ *pelo ponto* $p$.

**Observação 1.16.** *Observamos que,* $q \in \sigma_p$ *se, somente se,* $\sigma_q = \sigma_p$*. De fato, se* $q \in \sigma_p$*, então* $q = \varphi(t_1, p)$ *e* $\varphi(t, q) = \varphi(t + t_1, p)$*, e* $I_p - t_1 = I_q$*. Portanto, temos que duas órbitas de* $X$ *ou coincidem ou são disjuntas. Assim,* $U \subset \mathbb{R}^n$ *fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser:*

1. *um ponto (ponto singular);*
2. *imagem biunívoca de um intervalo de* $\mathbb{R}$*;*
3. *difeomorfa a um círculo(órbita fechada).*

**Teorema 1.17.** *Se* $\varphi$ *é uma solução máxima de*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & X(x) \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{1.13}$$

*em* $I_{x_0}$*, verifica-se apenas uma das seguintes alternativas:*

1. *$\varphi$ é $1-1$;*

2. *$I_{x_0}=\mathbb{R}$ e $\varphi$ é constante;*

3. *$I_{x_0}=\mathbb{R}$ e $\varphi$ é periódica, isto é, existe $T>0$ tal que $\varphi(t+T)=\varphi(t)$, para todo $t\in\mathbb{R}$, e $\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$ se $\|t_2-t_1\|<T$.*

**Definição 1.18.** *O conjunto aberto $U\subset\mathbb{R}^n$, munido da decomposição em órbitas de $X$, chama-se retrato de fase de $X$. As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo. Os pontos singulares são munidos da orientação trivial.*

### 1.1.4 Equivalência e Conjugação de sistemas diferenciais

Um dos principais objetivos em matemática, é saber quando dois objetos, que têm mesma estrutura, preservam propriedades que estão relacionadas com tal estrutura. Este objetivo também surge na área de Sistemas Dinâmicos. Os elementos a serem preservados são as órbitas ou soluções. É neste contexto que surge a conjugação entre Sistemas Dinâmicos. A seguir, consideremos $X_1$ e $X_2$ campos de vetores definidos nos abertos $U_1$ e $U_2$ do $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

**Definição 1.19.** *Dizemos que $X_1$ é topologicamente equivalente a $X_2$, quando existe um homeomorfismo $h:U_1\longrightarrow U_2$, que leva órbitas de $X_1$ em órbitas de $X_2$, preservando a orientação. Mais precisamente, sejam $p\in U_1$ e $\sigma_p^1$ a órbita orientada de $X_1$ passando por $p$, então $h\left(\sigma_p^1\right)=\sigma^2_{(h(p))}$ é a órbita orientada de $X_2$, passando por $h(p)$. Se $h$ for difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^r$, então dizemos que $X_1$ é $\mathcal{C}^r-$ equivalente a $X_2$.*

A definição 1.19 estabelece uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de $\mathbb{R}^n$. O homeomorfismo $h$ é chamado de equivalência topológica, ou de equivalência $\mathcal{C}^r$, caso seja um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^r$, entre $X_1$ e $X_2$.

**Definição 1.20.** *Sejam $\varphi_1:D_1\longrightarrow\mathbb{R}^n$ e $\varphi_2:D_2\longrightarrow\mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $X_1:U_1\longrightarrow\mathbb{R}^n$ e $X_2:U_2\longrightarrow\mathbb{R}^n$, respectivamente. Dizemos que $X_1$ é topologicamente conjugado (respectivamente $\mathcal{C}^r-$ conjugado) a $X_2$ quando existe um homeomorfismo (respectivamente um difeomorfismo $\mathcal{C}^r$) $h:U_1\longrightarrow U_2$ tal que $h(\varphi_1(t,x))=\varphi_2(t,h(x))$, para todo $(t,x)\in D_1$. O homeomorfismo $h$ chama-se conjugação topológica ($\mathcal{C}^r-$conjugação, respectivamente) entre $X_1$ e $X_2$.*

A relação de conjugação é também uma relação de equivalência entre campos definidos no $\mathbb{R}^n$. Uma equivalência $h$ entre $X_1$ e $X_2$ leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. Se $h$ for uma conjugação, então o período também é preservado.

**Lema 1.21.** *Sejam $X_1:U_1\longrightarrow\mathbb{R}^n$ e $X_2:U_2\longrightarrow\mathbb{R}^n$ campos de vetores $\mathcal{C}^r$, $r\geq 1$, definidos nos abertos $U_i\subset\mathbb{R}^n$, $i=1,2$. Seja $h:U_1\longrightarrow U_2$ um difeomorfismo $\mathcal{C}^r$. Então $h$ é uma conjugação entre $X_1$ e $X_2$ se, e somente se, $Dh(p)\,X_1(p)=X_2(h(p))$, para todo $p\in U_1$.*

**Definição 1.22.** *Seja $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ também aberto. Uma aplicação diferencial de classe $\mathcal{C}^r$, $f : A \longrightarrow U$, chama-se seção transversal local de $X$ (de classe $\mathcal{C}^r$) quando, para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e o espaço vetorial gerado por $X(f(a))$ formam uma decomposição em soma direta do $\mathbb{R}^n$.*

Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida de $\mathbb{R}^n$. Se $f : A \longrightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, diz-se que $\Sigma$ é uma seção transversal de $X$.

O teorema de fluxo tubular, que veremos à seguir, garante que qualquer campo $X$ de classe $\mathcal{C}^r$ é localmente conjugado, numa vizinhança de um ponto regular, ao campo constante $Y = (1, 0, \ldots, 0)$.

**Teorema 1.23.** *(Teorema do Fluxo Tubular): Sejam $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores $\mathcal{C}^r$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $p \in U$ um ponto regular de $X$ e $f : A \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \Sigma = f(A) \subset U$ uma seção transversal local de $X$ de classe $\mathcal{C}^r$, com $f(0) = p$. Então existe uma vizinhança $V$ de $p$ em $U$ e um difeomorfismo $h : V \longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe $\mathcal{C}^r$, onde $\varepsilon > 0$ e $B = B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ é uma bola aberta em $\mathbb{R}^{n-1}$ de centro na origem $0 = f^{-1}(p)$ tal que*

1. *$h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$*
2. *$h$ é uma $\mathcal{C}^r-$conjugação entre $X|_V$ e o campo $Y = (Y_1, \ldots, Y_n) = (1, 0, \ldots, 0)$.*

### 1.1.5 Estrutura local dos pontos singulares hiperbólicos

Seja $X$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^r$ e $p$ um ponto regular do campo. O teorema do Fluxo Tubular nos garante que existe uma vizinhança $V$ de $p$ tal que $X_V$ é $\mathcal{C}^r$ *− conjugado* a $Y = (1, 0, \ldots, 0)$. Consequentemente, dois campos $X$ e $W$ são $\mathcal{C}^r$ *− conjugados* em torno de seus pontos regulares. Por causa desta observação, podemos considerar satisfatório o conhecimento qualitativo local das órbitas de um campo vetorial em torno de pontos regulares, sendo que existe apenas uma classe de conjugação diferenciável local. Se $p$ é um ponto singular, a situação é bem mais complexa. Mesmo nos sistemas lineares já se apresentam várias classes diferentes de conjugação diferenciável.

A seguir, veremos um resultado sobre conjugação em torno dos pontos singulares de um campo de vetores $X$.

**Definição 1.24.** *Um ponto singular $p$ de um campo vetorial $X$ de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, chama-se hiperbólico se todos os autovalores de $DX(p)$ tem parte real diferente de zero.*

O número de autovalores de $DX(p)$, com parte real negativa, chama-se índice de estabilidade de $X$ em $p$.

O teorema a seguir nos diz que um campo de vetores é localmente topologicamente conjugado à sua parte linear em torno dos pontos singulares hiperbólicos.

**Teorema 1.25.** *(Teorema de Hartman-Grobman): Sejam $X : U_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^1$ e $p$ um ponto singular hiperbólico de $X$. Então existem vizinhanças $V$ de $p$ em $U_1$ e $W$ de $0$ em $\mathbb{R}^n$ tais que $X|_V$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_W$.*

### 1.1.6 Estrutura local perto de órbitas periódicas

A principal ferramenta para estudar o comportamento das órbitas do campo na vizinhança de uma órbita periódica é a aplicação de Poincaré, ou conhecida também como a aplicação de primeiro retorno. A aplicação de Poincaré é um difeomorfismo que está associado a uma órbita fechada $\gamma$ e que descreve o comportamento do campo numa vizinhança de $\gamma$. Seja $\gamma = \{\varphi(t,p); 0 \leq t \leq T\}$ uma órbita periódica de período $T$ de um campo de vetores $X$, de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$ ou $r = \omega$, definido num conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $\Sigma$ uma seção transversal de $X$ pelo ponto $p$. Pela continuidade do fluxo $\varphi$ de $X$, para todo $q \in \Sigma$ próximo de $p$, a trajetória $\varphi(t,q)$ permanece próxima a $\gamma$, com $t$ variando em um intervalo fixado. Define-se a aplicação de Poincaré $\pi(q)$ como o primeiro ponto onde a órbita $\varphi(t,q)$ intercepta $\Sigma$ (notemos que sempre existe $\pi(q)$ devido a dependência contínua das soluções com relação às condições iniciais). Seja $\Sigma_0$ o domínio de $\pi$, então é claro que $p \in \Sigma_0$ e $\pi(p) = p$. Muitas propriedades de $X$, em uma vizinhança de $\gamma$ se refletem em $\pi$. Por exemplo, as órbitas periódicas de $X$ vizinhas de $\gamma$ correspondem aos pontos periódicos de $\pi$, que são os pontos $q_0 \in \Sigma_0$ para os quais $\pi^n(q) = q$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ com $n \geq 1$, ou então o comportamento assintótico das órbitas de $X$ perto de $\gamma$ também é descrito por $\pi$.

**Proposição 1.26.** *Seja $\varphi$ um fluxo de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. Então a aplicação de Poincaré, $\pi : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma$ associado a uma órbita fechada $\gamma$, é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^r$ sobre sua imagem.*

**Definição 1.27.** *Uma órbita $\gamma$ é um atrator periódico (ou, dizemos que, $\gamma$ é orbitalmente estável) quando $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$, para todo $q$ numa vizinhança de $\gamma$.*

**Definição 1.28.** *Seja $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^1$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é aberto. Uma órbita periódica $\gamma$ de $X$ é dita um ciclo limite se existe uma vizinhança $V$ de $\gamma$ tal que $\gamma$ é a única órbita periódica de $X$ em $V$.*

**Proposição 1.29.** *Com as notações da definição 1.28, existem os seguintes tipos de ciclos limites:*

1. *Estável, se $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$, para todo $q \in V$.*
2. *Instável, se $\lim_{t\to-\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$, para todo $q \in V$.*
3. *Semi-estável, se $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$ para $q \in V \cap Ext(\gamma)$, e $\lim_{t\to-\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$ para $q \in V \cap Int(\gamma)$, ou o contrário, onde $Ext(\gamma)$ denota a componente conexa ilimitada de $\mathbb{R}^2 - \gamma$ e $Int(\gamma)$ denota a componente conexa limitada de $\mathbb{R}^2 - \gamma$.*

# Capítulo 2

# EQUAÇÃO DE RICCATI

## 2.1 CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO DE GREEN n-dimensional

Nesta seção, nosso interesse é resolver o sistema linear $n-$dimensional de equações diferenciais de primeira ordem, com condições de valor na fronteira. Veremos quais são as condições para que o referido sistema tenha uma solução única e, finalmente, vamos definir a função de Green associada a esse problema. As principais referencias são: [1] e [12].

Considere o sistema linear $n-$dimensional de equações diferenciais de primeira ordem:

$$X'(t) = A(t)\,X(t) + f(t)\,,\ t \in J = [a, b] \tag{2.1}$$

$$BX(a) + CX(b) = h \tag{2.2}$$

onde $n \geq 1$ $a, b \in \mathbb{R}$, $A \in L^1(J, \mathcal{M}_{n\times n})$, $f \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$; $B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e $h \in \mathbb{R}^n$ (constante) e $X \in \mathcal{AC}(J, \mathbb{R}^n)$. Como é usual denotamos por $L^1(J, \mathbb{R}^n)$ e $L^1(J, \mathcal{M}_{n\times n})$ o conjunto de todas as funções Lebesgue integráveis em $J$ e $\mathcal{AC}(J, \mathbb{R}^n)$ o conjunto de funções absolutamente contínuas em $J$, ou seja,

$$\mathcal{AC}(J, \mathbb{R}^n) = \{f = (f_1, \ldots, f_2)\ :\ J \longrightarrow \mathbb{R}^n;\ f_j \in \mathcal{AC}(J, \mathbb{R})\,, \forall j = 1, \ldots, n\}\,,$$

onde,

$$\mathcal{AC}(J, \mathbb{R}) = \left\{f\ :\ J \longrightarrow \mathbb{R};\ f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})\,,\ f' \in L^1(J, \mathbb{R})\ \ e\ f(t) - f(s) = \int_s^t f'(r)\,dr,\ \forall s, t \in J\right\}.$$

Certamente $n, a, b, A, f, B, C$ são conhecidas no problema e $X$ é a variável desconhecida. Primeiramente, estudamos a estrutura do conjunto de soluções de um problema homogêneo, isto é,

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)\,X(t)\,, & t \in J \\ BX(a) + CX(b) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Seja $W = \{X \in \mathcal{AC}(J, \mathbb{R}^n)\,;\, BX(a) + CX(b) = 0\}$. Definimos o operador linear:

$$\begin{array}{rccccl} L: & W & \longrightarrow & L^1(J, \mathbb{R}^n) & & \\ & X & \longmapsto & LX & = & X' - AX. \end{array} \tag{2.4}$$

O conjunto de soluções do sistema (2.3) coincide com o Kernel do operador $L$. Além disso, o conjunto de soluções do problema (2.3) é um espaço linear de dimensão $k \leq n$. A questão natural que surge é: Qual é o valor preciso da dimensão? Em outras palavras: Qual é a influência dos dados considerados do problema ($A, B, C$ e o intervalo $J$) em relação a dimensão do conjunto de soluções do problema homogêneo (2.3)? Antes de responder a essa pergunta, apresentaremos um exemplo que ilustra esse problema.

**Exemplo 2.1.** *Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, consideramos o seguinte exemplo $2-$ dimensional de primeira ordem:*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi] \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

*Note que,*

$$\begin{cases} x'(t) = & y(t) \\ y'(t) = & -\lambda x(t) \\ y(0) = & y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Derivando a primeira equação, obtemos

$$\begin{cases} x''(t) + & \lambda x(t) = 0, \ \ t \in [0, 2\pi]\,, \\ x'(0) = & x'(2\pi) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Se $\lambda < 0$, a função $x$ é dada pela seguinte expressão geral:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 exp\left(\sqrt{-\lambda} t\right) + c_2 exp\left(-\sqrt{-\lambda} t\right), \, para \, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ x'(t) &= c_1 \sqrt{-\lambda} exp\left(\sqrt{-\lambda} t\right) - c_2 \sqrt{-\lambda} exp\left(-\sqrt{-\lambda} t\right). \end{aligned}$$

Substituindo $t = 0$ e $t = 2\pi$ temos:

$$\begin{aligned} x'(0) &= c_1\sqrt{-\lambda} - c_2\sqrt{-\lambda} = 0, \\ x'(2\pi) &= c_1\sqrt{-\lambda}exp\left(2\pi\sqrt{-\lambda}\right) - c_2\sqrt{-\lambda}exp\left(-2\pi\sqrt{-\lambda}\right) = 0. \end{aligned}$$

Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ c_1\sqrt{-\lambda}exp\left(2\pi\sqrt{-\lambda}\right) - c_2\sqrt{-\lambda}exp\left(-2\pi\sqrt{-\lambda}\right) = 0 \end{cases}.$$

Tal sistema satisfaz as condições de fronteira se, e comente se,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in Ker\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ exp\left(2\pi\sqrt{-\lambda}\right) & exp\left(-2\pi\sqrt{-\lambda}\right) \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Sabemos que o conjunto de soluções do sistema homogêneo coincide com o kernel do operador $L$, ou seja,

$$\begin{aligned} Ker(L) &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W; \; L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X' - AX = 0\right\} \\ Ker(L) &= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \end{aligned}$$

onde:

$$L\begin{pmatrix} x(\cdot) \\ y(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(\cdot) \\ y'(\cdot) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(\cdot) \\ y(\cdot) \end{pmatrix}$$

definido no espaço:

$$\begin{aligned} W = &\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{AC}\left([0,2\pi], \mathbb{R}^2\right); \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \right. \\ &\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Portanto para $\lambda < 0$, verificamos que o problema considerado tem solução trivial única.

Se $\lambda = 0$, tem-se:

$$x(t) = c_1 + c_2 t \quad e \quad x'(t) = c_2.$$

Avaliando as condições de fronteira, temos $x'(0) = c_2 = 0$ e $x'(2\pi) = c_2 = 0$ pelo qual as condições de fronteira são satisfeitas se, e comente se, $c_2 = 0$. Portanto, quando $\lambda = 0$ cada solução constante de $x$ resolve nosso problema (2.5). Além disso, $dim\,(Ker) = 1$, pois $Ker\,(L) = \left\{ \left( \begin{array}{c} c \\ 0 \end{array} \right);\; c \in \mathbb{R} \right\}$ e as soluções do sistema (2.5) são dados pelo espaço linear unidimensional gerado pelo vetor $\left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right)$.

Se $\lambda > 0$, a expressão da função $x$ é dada por:

$$\begin{aligned} x\,(t) &= c_1 cos\left(\sqrt{\lambda}t\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\lambda}t\right) \\ x'\,(t) &= -c_1\sqrt{\lambda} sen\left(\sqrt{\lambda}t\right) + c_2\sqrt{\lambda} cos\left(\sqrt{\lambda}t\right). \end{aligned}$$

Avaliando as condições de fronteira, temos:

$$\begin{aligned} x'\,(0) &= -c_1\sqrt{\lambda} sen\,(0) + c_2\sqrt{\lambda} cos\,(0) = 0 \\ x'\,(0) &= c_2\sqrt{\lambda} = 0 \\ x'\,((2\pi)) &= -c_1\sqrt{\lambda} sen\left(\sqrt{\lambda}\,(2\pi)\right) + c_2\sqrt{\lambda} cos\left(\sqrt{\lambda}\,(2\pi)\right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, as condições de fronteira são satisfeitas se, e somente se, $c_2 = 0$ e $c_1 sen\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$.

Se $\lambda \neq \dfrac{n^2}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que a única solução de nosso problema (2.5) é a solução nula e, como consequência, o operador $L$ é injetivo. Se $\lambda = \dfrac{n^2}{4}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, temos soluções não triviais da forma:

$$\begin{aligned} x\,(t) &= c_1 cos\frac{n}{2}t,\; c_1 \in \mathbb{R} \\ x'\,(t) &= y\,(t) = -c_1\frac{n}{2} sen\left(\frac{n}{2}t\right). \end{aligned}$$

Assim, $Ker\,(L)$ é o espaço unidimensional linear gerado por:

$$\left( \begin{array}{c} cos\frac{n}{2}t \\ -\frac{n}{2} sen\frac{n}{2}t \end{array} \right).$$

Assim temos uma sequência de valores de $\lambda$ $\left(\lambda_n = \dfrac{n^2}{4},\; n = 0, 1, ...\right)$ para os quais o problema tem soluções não-triviais. Além disso, temos que o número real $\lambda_n$ e o espaço linear de dimensão um, gerado por $\left( \begin{array}{c} cos\frac{n}{2}t \\ -\frac{n}{2} sen\frac{n}{2}t \end{array} \right)$, consiste das soluções não triviais do problema considerado.

Este exemplo mostra que, ao contrário de um problema de valor inicial em geral, o problema (2.3) não tem solução única. Observemos que o problema (2.3) cobre o problema de valor inicial quando $B$ é a matriz identidade e $C \equiv 0$. A regularidade da função matricial $A$, pelo Teorema de Existência e Unicidade das EDO's, garante solução única do P.V.I. em todo o intervalo $J$.

**Teorema 2.2.** *$X$ é uma solução do problema* (2.1)-(2.2) *se, e somente se, $X = Y + P$, onde $Y$ é solução do problema homogêneo* (2.3) *e $P$ é uma solução particular do problema* (2.1)-(2.2).

**Demonstração:** Suponhamos que $Y$ e $P$ sejam soluções de (2.3) e (2.1)-(2.2) respectivamente, pelo qual, satisfazem $Y'(t) = A(t)Y(t)$ e $P'(t) = A(t)P(t) + f(t)$. Como consequência, temos que:

$$\begin{array}{rcl} Y'(t) + P'(t) & = & A(t)Y(t) + A(t)P(t) + f(t) \\ & = & A(t)(Y(t) + P(t)) + f(t) \end{array},$$

onde $X = Y+P$ satisfaz o sistema (2.1) em $J$. Além disso, $X$ satisfaz as condições de fronteira:

$$\begin{array}{rcl} B(Y+P)(a) + C(Y+P)(b) & = & BY(a) + Bp(a) + CY(b) + CP(b) \\ & = & BY(a) + CY(b) + BP(a) + CP(b) \\ & = & 0 + BP(a) + CP(b) \\ & = & h. \end{array}$$

Portanto, $X$ é solução de (2.1)-(2.2). Agora, consideremos $X_1$ e $X_2$, soluções do problema (2.1)-(2.2), ou seja,

$$X_1'(t) = A(t)X_1(t) + f(t) \ \ e \ X_2'(t) = A(t)X_2(t) + f(t).$$

Como consequência, a diferença de soluções também satisfaz a EDO linear homogênea:

$$\begin{array}{rcl} X_1'(t) - X_2'(t) & = & A(t)(X_1(t) - X_2(t)) + f(t) - f(t) \\ & = & A(t)(X_1(t) - X_2(t)) \, \forall t \in J. \end{array}$$

Além disso, satisfazem as condições de fronteira:

$$\begin{array}{rcl} B(X_1(a) - X_2(a)) + C(X_1(b) - X_2(b)) & = & BX_1(a) - BX_2(a) + CX_1(b) - \\ & & CX_2(b) \\ & = & BX_1(a) + CX_1(b) - \\ & & (BX_2(a) + CX_2(b)). \end{array}$$

Como $X_1$ e $X_2$ são soluções de (2.1)-(2.2), satisfazem as condições de fronteira, ou seja, $BX_1(a) + CX_1(b) = h$ e $BX_2(a) + CX_2(b) = h$. Daí, temos,

$$B(X_1(a) - X_2(a)) + C(X_1(b) - X_2(b)) = 0,$$

ou seja, a diferença de soluções do problema (2.1)-(2.2) é solução do problema homogêneo (2.3) ■

Seja $\phi : J \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}$ uma matriz fundamental associada ao sistema (2.3), isto é, $\phi$ é uma solução da equação matricial linear:

$$\phi'(t) = A(t)\,\phi(t)\,, t \in J. \tag{2.6}$$

Chegamos ao seguinte resultado de existência e unicidade para o problema (2.1)-(2.2)

**Teorema 2.3.** *O problema* (2.1)-(2.2) *tem solução única* $X \in \mathcal{AC}(J, \mathbb{R}^n)$ *se, e somente se:*

$$det\,(M_\phi) \neq 0, \tag{2.7}$$

*onde* $\phi$ *é uma matriz fundamental do sistema* (2.3) *e* $M_\phi \equiv B\phi(a) + C\phi(b)$.

**Demonstração:** Usando a fórmula de variação de parâmetros, temos $X \in \mathcal{AC}(J, \mathbb{R}^n)$ é solução do problema (2.1) se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$X(t) = \phi(t)\,\lambda + \phi(t)\int_a^t \phi^{-1}(s)\,f(s)\,ds, t \in J. \tag{2.8}$$

A função $X$ satisfaz as condições de valor na fronteira (2.2) se, e somente se:

$$\begin{aligned} h &= BX(a) + CX(b) \\ &= B(\phi(a)\,\lambda + \phi(a)) + C\left(\phi(b)\,\lambda + \phi(b)\int_a^b \phi^{-1}(s)\,f(s)\,ds\right) \\ &= B\phi(a)\,\lambda + C\phi(b)\,\lambda + C\phi(b)\int_a^b \phi^{-1}(s)\,f(s)\,ds \\ &= (B\phi(a) + C\phi(b))\,\lambda + C\phi(b)\int_a^b \phi^{-1}(s)\,f(s)\,ds. \end{aligned}$$

Como $M_\phi \equiv B\phi(a) + C\phi(b)$, finalmente, obtemos,

$$M_\phi\lambda = h - C\phi(b)\int_a^b \phi^{-1}(s)\,f(s)\,ds. \tag{2.9}$$

Concluímos que essa equação tem solução única se, e somente se, $M_\phi$ é invertível. ■

**Corolário 2.4.** *O problema* (2.3) *tem apenas a solução trivial se, e somente se, o problema* (2.1)-(2.2) *tem solução única.*

**Observação 2.5.** *Notemos que o problema de valor inicial e o problema de valor terminal têm uma solução única. Para perceber isto, é suficiente levar em conta que o problema de valor inicial corresponde em escolher* $B = I_n$ *e* $C = 0$ $(M_\phi = \phi(a))$ *e o problema terminal corresponde em escolher* $B = 0$ *e* $C = I_n$ $(M_\phi = \phi(b))$, *onde* $I_n$ *é a matriz identidade* $n-$*dimensional.*

**Observação 2.6.** *Dado 2 matrizes fundamentais $\phi$ e $\psi$ do problema* (2.3)*, existe uma matriz constante não singular $n \times n$ $D$, tal que, $\phi(t) = \psi(t) D$. Assim,*

$$M_\phi = B\phi(a) + C\phi(b) = (B\psi(a) + C\psi(b)) D = M_\psi D.$$

*Como consequência, a condição* (2.7) *é independente da matriz fundamental escolhida.*

**Observação 2.7.** *Notemos que, quando a condição* (2.7) *é satisfeita, a solução única do problema* (2.1)-(2.2) *é dada por:*

$$X(t) = \phi(t) M_\phi^{-1} \left( h - C\phi(b) \int_a^b \phi^{-1}(s) f(s)\, ds \right) + \phi(t) \int_a^t \phi^{-1}(s) f(s)\, ds. \tag{2.10}$$

De fato, como $M_\phi$ é invertível, de (2.9) temos:

$$\lambda = M_\phi^{-1} \left( h - C\phi(b) \int_a^b \phi^{-1}(s) f(s)\, ds \right).$$

Substituindo a igualdade acima em (2.8), obtemos:

$$X(t) = \phi(t) \left( M_\phi^{-1} \left( h - C\phi(b) \int_a^b \phi^{-1}(s) f(s)\, ds \right) \right) + \phi(t) \int_a^t \phi^{-1}(s) f(s)\, ds,$$

e a solução $X(t)$ também satisfaz as condições de fronteira (2.2).

Observe que a unicidade de soluções é garantida sem a influência da parte não homogénea $f$ e $h$.

Note que, é imediato verificar que a expressão em (2.10) é independente da matriz fundamental $\phi$ escolhida.

**Observação 2.8.** *Se* (2.7) *não se cumpre, o problema* (2.1)-(2.2)*, tem solução se, e somente se, o sistema algébrico* (2.9) *também tem solução. Isto é possível somente no caso em que o posto de $M_\phi$ coincide com o posto da matriz.*

$$\left( M_\phi \middle| h - C\phi(b) \int_a^b \phi^{-1}(s) f(s)\, ds \right).$$

Nesta situação, ao contrário do caso de unicidade de soluções, a existência (ou não) de soluções, depende da parte não homogênea do sistema $f$ e $h$. Além disso, se o conjunto de soluções é não vazio, esse consiste de um espaço vetorial afim de dimensão $n - posto(M_\phi)$. Da observação 2.6, esse posto é independente da escolha da matriz fundamental $\phi$.

**Observação 2.9.** *É importante observar que, para garantir a unicidade de soluções do problema* (2.1)-(2.2) *para qualquer* $x \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$ *e* $h \in \mathbb{R}^n$, *as condições de fronteira envolvidas em* (2.2) *devem definir* $n$ *condições linearmente independentes. Então obtemos a seguinte condição necessária:*

$$posto\,(B\,|C\,) = n. \tag{2.11}$$

Porém, devido ao fato de que (2.11) não impõe alguma restrição na função matricial $A(t)$, esta condição não é suficiente. Por exemplo, para olhar isso é suficiente pensar no problema homogêneo (2.3), com $A(t) = 0$, munido com condições de fronteira periódicas $B = -C = I_n$. É imediato verificar que neste caso a condição (2.11), é satisfeita. Porém, qualquer vetor constante em $\mathbb{R}^n$ é uma solução de (2.3).

Tendo em mente a observação 2.9, estamos interessados em obter uma caracterização da unicidade de soluções para o problema (2.1)-(2.2), que envolve a condição (2.11).

A solução geral do sistema diferencial (2.1) é dado por (2.8), ou alternativamente por:

$$X(t) = \phi(t)\,\lambda + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\, f(s)\, ds, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \tag{2.12}$$

onde $t_0 \in J$ pode ser escolhido arbitrariamente.

Para fins posteriores, será convenientemente fixamos $t_0 \in (a, b)$, daí a solução $X$ dada por (2.12) é solução de (2.1)-(2.2) se, e somente se, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ resolve o seguinte sistema algébrico

$$M_\phi \lambda = h - B\phi(a)\int_{t_0}^{a} \phi^{-1}(s)\, f(s)\, ds - C\phi(b)\int_{t_0}^{b} \phi^{-1}(s)\, f(s)\, ds, \tag{2.13}$$

onde $M_\phi$ é dado pelo Teorema 2.3.

Em seguida, apresentamos a seguinte caracterização da unicidade de soluções do problema (2.1)-(2.2) por meio das condições (2.11).

**Teorema 2.10.** *Seja* $L : W \to L^1(J, \mathbb{R}^n)$ *operador linear definido em* (2.4) *e seja* $\phi : J \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}$ *matriz fundamental do sistema homogêneo* (2.3). *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O problema* (2.1)-(2.2) *tem solução única* $x \in \mathcal{AC}(J, \mathbb{R}^n)$;
2. $det\,(M_\phi) \neq 0$;
3. *L é bijetiva;*
4. *L é injetiva;*

*5. $L$ é sobrejetiva e a condição posto $(B\,|C\,) = n$ é satisfeita.*

**Demonstração:** As afirmações 1, 2 e 3 são equivalentes pelo Teorema 2.3 e de fato é trivial que 3 implica 4.

Provemos que 4 implica 2. Primeiramente, notemos que 4 garante que $u = 0$ é a única solução de (2.3) e isso por sua vez é equivalente para dizer que $\lambda = 0 \in \mathbb{R}^n$ é a única solução do sistema algébrico $M_\phi \lambda = 0$, o qual é equivalente a dizer que $det\,(M_\phi) \neq 0$. Então nós temos que as quatro primeiras afirmações são equivalentes. Agora mostremos que elas são equivalentes à afirmação 5. Para ver isso, suponhamos a condição 3. Em particular, $L$ é sobrejetiva e a primeira parte de 5 é provada.

Provemos agora que 3 implica (2.11). Já mostramos que implica 2, então, para cada $w \in \mathbb{R}^n$ existe $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tal que $M_\phi \lambda = w$, isto é, $B\phi\,(a)\,\lambda + C\phi\,(b)\,\lambda = w$, isso implica que a aplicação linear

$$\begin{array}{rcccl} T: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \\ & (v_1, v_2) & \longmapsto & T\,(v_1, v_2) & = \; Bv_1 + Cv_2 \\ & & & & = \; (B\,|C\,) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

é sobrejetiva, ou seja, tem posto $n$, onde $B,\ C \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Finalmente, provemos que 5 implica 2. A condição (2.11) garante que para um $w \in \mathbb{R}^n$ fixado existem $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ tais que $Bv_1 + Cv_2 = -w$. Fixamos $t_0 \in (a, b)$, definimos a função integrável dada por:

$$f\,(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a - t_0}\phi^{-1}\,(a)\,v_1, & se\ a \leq t \leq t_0, \\ \dfrac{1}{b - t_0}\phi^{-1}\,(b)\,v_2, & se\ t_0 < t \leq b. \end{cases}$$

Note que 5 garante que o problema correspondente (2.1)-(2.2) com $h = 0$, tem pelo menos uma solução $X$ ou, equivalentemente, existe pelo menos um $\lambda \in \mathbb{R}^n$ o qual satisfaz (2.13) com $h = 0$. Substituindo a expressão de $f$ em (2.13) com $h = 0$ temos $M_\phi \lambda = -Bv_1 - Cv_2 = w$. Dado que $w$ é fixado arbitrariamente em $\mathbb{R}^n$, deduzimos que a matriz tem posto máximo o qual implica 2. ∎

**Exemplo 2.11.** *Dado $h_1,\ h_2 \in \mathbb{R}$, obtemos a expressão da solução do seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x'\,(t) = y\,(t)\,,\ t \in [0, 2\pi]\,, & x\,(0) = h_1, \\ y'\,(t) = -x\,(t)\,,\ t \in [0, 2\pi]\,, & y\,(2\pi) = h_2. \end{cases}$$

*O sistema satisfaz a forma* (2.1)-(2.2) *para:*

$A\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, *posto* $(B\,|C\,) = 2$.

Dado que $A$ é uma função constante, sabemos que $e^{At}$ é a matriz fundamental do sistema, ou seja,

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} cos\, t & sen\, t \\ -sen\, t & cos\, t \end{pmatrix},$$

$$M_\phi = B\phi(0) + C\phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

logo $M_\phi$ é invertível. A condição (2.7) é satisfeita e, como consequência, esse problema tem solução única para cada $h_1$, $h_2 \in \mathbb{R}$. Além disso, de (2.10) temos:

$$X(t) = \phi(t)\left(M_\phi^{-1}\left(h - C\phi(b)\int_a^b \phi^{-1}(s) f(s)\, ds\right)\right) + \phi(t)\int_a^t \phi^{-1}(s) f(s)\, ds,$$

$$X(t) = \phi(t) M_\phi^{-1} h,\ M_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } M_\phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Assim,}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} cos\, t & sen\, t \\ -sen\, t & cos\, t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} cos\, t & sen\, t \\ -sen\, t & cos\, t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 cos\, t + h_2 sen\, t \\ -h_1 sen\, t + h_2 cos\, t \end{pmatrix},$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 cos\, t + h_2 sen\, t \\ -h_1 sen\, t + h_2 cos\, t \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 2.12.** *Considere o seguinte problema:*

$$u''(t) + u(t) = 0,\ t \in [0, 2\pi],\ u(0) + u(2\pi) = 1.$$

Denotemos $x(t) = u(t)$ e $y(t) = u'(t)$. O sistema equivalente é dado por:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso $B\,|C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Então, $posto\,(B\,|C) = 1$, pelo que (2.11) não é satisfeita. O Teorema 2.10 garante que $L$ não é bijetiva em $W$. Além disso,

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} cos\, t & sen\, t \\ -sen\, t & cos\, t \end{pmatrix},\ \text{e } M_\phi = B\phi(0) + C\phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim , a condição (2.7) não é cumprida. Portanto nosso problema tem solução se, e somente se, o sistema algébrico (2.9) tem solução. Nete caso reescrevemos (2.9) como:

$M_\phi \lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou seja, $\begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *então* $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Neste caso, a solução é dada por, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ e, consequentemente, deducimos de (2.8) que:

$$X(t) = \begin{pmatrix} cos\,t & sen\,t \\ -sen\,t & cos\,t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}cos\,t & +\lambda_2 sen\,t \\ -\frac{1}{2}sen\,t & +\lambda_2 cos\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

$u(t) = x(t) = \frac{1}{2}cos\,t + \lambda_2 sen\,t,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$, o qual forma um espaço vetorial afim unidimensional $(2 - posto\,(M_\phi) = 1)$.

**Exemplo 2.13.** *Dados $h_1,\ h_2 \in \mathbb{R}$, considere o seguinte problema:*

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = 0, & t \in [0, 2\pi], \\ u(0) = u(2\pi) + h_1, \\ u'(2\pi) = u'(2\pi) + h_2. \end{cases}$$

Como nos exemplos anteriores, temos que este problema é equivalente ao sistema (2.1)-(2.2) com:

$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$. Além disso,

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} cos\,t & sen\,t \\ -sen\,t & cos\,t \end{pmatrix},\ e\ M_\phi = B\phi(0) + C\phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$M_\phi$ não é invertível, $M_\phi \lambda = h$. Portanto, este problema tem pelo menos uma solução se, e somente se, $h_1 = h_2 = 0$. Neste caso (2.9) tem solução $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Essas soluções são

$$X(t) = \phi(t)\lambda = \begin{pmatrix} cos\,t & sen\,t \\ -sen\,t & cos\,t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 cos\,t & +\lambda_2 sen\,t \\ -\lambda_1 sen\,t & +\lambda_2 cos\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

$u(t) = x(t) = \lambda_1 cos t + \lambda_2 sen t$. Neste caso temos um espaço linear 2-dimensional de soluções geradas por $cos\,t$, $sen\,t$ $(2 - posto\,(M_\phi) = 2)$.

Considerando a função caracteristica $\mathcal{X}_{(0,t)}$ em $(0,t)$, a igualdade (2.10) pode ser escrita como:

$$X(t) = \phi(t)\left(M_\phi^{-1}\left(h - C\phi(b)\int_a^b \phi^{-1}(s) f(s)\, ds\right)\right) + \phi(t)\int_a^t \phi^{-1}(s) f(s)\, ds,$$

$$X(t) = \phi(t) M_\phi^{-1}\left(h - C\phi(b)\int_a^b \phi^{-1}(s) f(s)\, ds\right) + \phi(t)\int_a^b \phi^{-1}(s)\mathcal{X}_{(0,t)}(s) f(s)\, ds,$$

$$X(t) = \phi(t) M_\phi^{-1} h - \phi(t) M_\phi^{-1} C \phi(b) \int_a^b \phi^{-1}(s) f(s)\, ds + \phi(t) \int_a^b \phi^{-1}(s) \mathcal{X}_{(0,t)}(s) f(s)\, ds,$$

$$X(t) = \phi(t) M_\phi^{-1} h - \int_a^b \Big( \phi(t) M_\phi^{-1} C \phi(b) \phi^{-1}(s) f(s) + \phi(t) \phi^{-1}(s) \mathcal{X}_{(0,t)}(s) f(s) \Big)\, ds,$$

$$X(t) = \phi(t) M_\phi^{-1} h - \int_a^b \Big( \phi(t) M_\phi^{-1} C \phi(b) \phi^{-1}(s) + \phi(t) \phi^{-1}(s) \mathcal{X}_{(0,t)}(s) \Big) f(s)\, ds,$$

onde,

$$\phi(t) \phi^{-1}(s) \mathcal{X}_{(0,t)}(s) = \begin{cases} \phi(t) \phi^{-1}(s) & se \quad a \leq s < t \leq b, \\ 0 & se \quad a \leq t < s \leq b. \end{cases}$$

Consideremos agora,

$G(t,s) = -\phi(t) M_\phi^{-1} C \phi(b) \phi^{-1}(s) + \phi(t) \phi^{-1}(s) \mathcal{X}_{(0,s)}(s)$, onde

$$G(t,s) = \begin{cases} -\phi(t) M_\phi^{-1} C \phi(b) \phi^{-1}(s) + \phi(t) \phi^{-1}(s) & se \quad a \leq s < t \leq b, \\ -\phi(t) M_\phi^{-1} C \phi(b) \phi^{-1}(s) & se \quad a \leq t < s \leq b. \end{cases} \tag{2.14}$$

Daí, reescrevemos $X(t)$ como:

$$X(t) = \int_a^b G(t,s) f(s)\, ds + \phi(t) M_\phi^{-1} h. \tag{2.15}$$

A função $G: (J \times J) | \{(t,t),\ t \in J\} \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}$ é chamada função de Green associada ao problema (2.3) conforme a definição 2.15. Note que, a função de Green $G \equiv (G_{i,j})$, $i,j \in \{1,...,n\}$ não esta definida na diagonal do quadrado $J \times J$, isto se deve ao fato que $\lim\limits_{s \to t^+} G_{i,i}(t,s) = G_{i,i}(t,t^+) \neq G_{i,i}(t,t^-) = \lim\limits_{s \to t^-} G_{i,i}(t,s)$, para todo $i \in \{1,...,n\}$.

Uma vez que $i \neq j$, a função $G_{i,j}$ pode ser continuamente estendida para a diagonal. Para evitar tediosas notações, em muitas das situações, a função $G$ é definida em todo o quadrado $J \times J$ sob as suposições que, quando $t = s$ e $i = j$, devemos definir $G_{i,i}(t,t)$ como $G_{i,i}(t,t^+)$ ou $G_{i,i}(t,t^-)$.

**Observação 2.14.** *Destacamos que, da expressão* (2.15), *é imediato verificar que*

$$Y(t) = \int_a^b G(t,s) f(s)\, ds$$

*é a única solução do problema*

$$\begin{cases} Y'(t) &= A(t)Y(t) + f(t),\ t \in J, \\ BY(a) + CY(b) &= 0. \end{cases}$$

Além disso, $Z(t) = \phi(t) M_\phi^{-1} h$ é a única solução do problema:

$$\begin{cases} Z'(t) = A(t)\, Z(t)\,, \ t \in J, \\ BZ(a) + CZ(b) = h. \end{cases}$$

Devido à regularidade da função matricial $A$, temos que a função $\phi$ é absolutamente contínua. Em consequência, $G$ é contínua nos triângulos $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2,\ a \le s < t \le b\}$ e $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2,\ a \le t < s \le b\}$. Além disso, ao longo da diagonal, temos que:

$G(t^+, t) = G(t, t^-) = -\phi(t)\, M_\phi^{-1} C\phi(b)\, \phi^{-1}(t) + I_n$ e

$G(t^-, t) = G(t, t^+) = -\phi(t)\, M_\phi^{-1} C\phi(b)\, \phi^{-1}(t)$. Portanto, os elementos da diagonal da função matricial: $G(t,s) \equiv (G_{i,j}(t,s))_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ dão um salto (o que é igual a matriz identidade) na diagonal de $J \times J$. Em outras palavras, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ as seguintes igualdades são satisfeitas:

$$\lim_{s \to t^+} G_{i,i}(s,t) = \lim_{s \to t^-} G_{i,i}(t,s) = 1 + \lim_{s \to t^+} G_{i,i}(t,s) = 1 + \lim_{s \to t^-} G_{i,i}(s,t)\,. \tag{2.16}$$

**Definição 2.15.** *Nós dizemos que $G$ é a função de Green para o problema* (2.3) *se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $G \equiv (G_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} : (J \times J) \,|\{(t,t)\,,\ t \in J\} \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}\,.$
2. *$G$ é absolutamente contínua nos triângulos $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2,\ a \le s < t \le b\}$ e $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2,\ a \le t < s \le b\}$.*
3. *Para todo $i \neq j$, as funções escalares $G_{i,j}$ têm uma extensão contínua para $J \times J$.*
4. *Para todo $s \in (a,b)$ a seguinte igualdade é satisfeita: $\dfrac{\partial}{\partial t} G(t,s) = A(t)\, G(t,s)$, para q.t.p. $t \in J \backslash \{s\}$.*
5. *Para todo $s \in (a,b)$ e $i \in \{1, ..., n\}$, as seguintes igualdades são satisfeitas:* $\lim\limits_{s \to t^+} G_{i,j}(s,t) = \lim\limits_{s \to t^-} G_{i,j}(t,s) = 1 + \lim\limits_{s \to t^+} G_{i,j}(t,s) = 1 + \lim\limits_{s \to t^-} G_{i,j}(s,t)\,.$
6. *Para cada $s \in (a,b)$ a função $t \longrightarrow G(t,s)$ satisfaz as condições de fronteira: $BG(a,s) + CG(b,s) = 0$.*

Agora, estamos em condições de provar o seguinte resultado de existência e unicidade de uma função de Green.

**Teorema 2.16.** *O problema* (2.3) *tem somente a solução trivial se, e somente se, existe uma única função de Green associada a este problema.*

**Demonstração:** Suponhamos que $u = 0$ é a única solução do problema homogêneo. Usando o Teorema 2.3 e o Corolario 2.4 sabemos que o problema (2.3) tem solução trivial única se, e somente se, $det\,(M_\phi) \neq 0$, ou seja, $M_\phi$ é invertível. Daí, temos que a função $G$ dada pela expressão (2.14) está bem definida e satisfaz as propriedades (1)-(6).

Para mostrar que a função de Green é única, definamos uma outra função. Seja $H \;:\; (J\times J)\,|\{(t,t)\,,\; t\in J\} \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}$ uma função que satisfaz as propriedades (1)-(6) e definamos $Y:\; J\longrightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$Y(t)=\int_a^b H(t,s)\,f(s)\,ds=\int_a^t H(t,s)\,f(s)\,ds+\int_t^b H(t,s)\,f(s)\,ds.$$

Das condições (4) e (5), deduzimos que:

$$\begin{aligned}
Y'(t) &= \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}H(t,s)\,f(s)\,ds+\\
&\quad \int_t^b \frac{\partial}{\partial t}H(t,s)\,f(s)\,ds+H\left(t,t^-\right)f(t)-H\left(t,t^+\right)f(t)\\
&= \int_a^t A(t)\,H(t,s)\,f(s)\,ds+\int_t^b A(t)\,H(t,s)\,f(s)\,ds+f(t)\\
&= A(t)\int_a^b H(t,s)\,f(s)\,ds+f(t)\\
&= A(t)\,y(t)+f(t)\,,\ \textit{para q.t.p.}\, t\in J.
\end{aligned}$$

Além disso, a condição (6) implica que:

$$\begin{aligned}
BY(a)+CY(b) &= B\int_a^b H(a,s)\,f(s)\,ds+C\int_a^b H(b,s)\,f(s)\,ds\\
&= \int_a^b (BH(a,s)+CH(b,s))\,f(s)\,ds\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a função $Y$ é solução do problema (2.1)-(2.2) e

$$(X-Y)(t)=\int_a^b (G(t,s)-H(t,s))\,f(s)\,ds$$

é solução do problema homogêneo (2.3). Dado que o sistema homogêneo tem solução trivial única, deduzimos que:

$$\int_a^b (G(t,s)-H(t,s))\,f(s)\,ds=0,\forall f\in L^1(J,\mathbb{R}^n)\,.$$

Então:

$$\int_a^b G(t,s)\,f(s)\,ds-\int_a^b H(t,s)\,f(s)\,ds=0,$$

$$\int_a^b G(t,s)\, f(s)\, ds = \int_a^b H(t,s)\, f(s)\, ds.$$

Isto implica que $G \equiv H$ em $(J \times J) \,|\{(t,t)\,,\ t \in J\}$.

Reciprocamente, seja $G$ a única função de Green associada ao problema (2.3). Suponhamos que existe $\phi \in \mathcal{AC}(J, \mathbb{R}^n)$ solução não trivial do problema homogêneo. Neste caso, é imediato verificar que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$H_\lambda(t,s) := G(t,s) + \phi(t)\,\lambda,\ t, s \in J,$$

que é uma família de funções de Green associadas ao problema homogêneo (2.3). Em consequência disso, pela unicidade da função de Green, concluímos que $\phi = 0$, ou seja, a solução trivial é a única solução do sistema homogêneo. ∎

**Teorema 2.17.** *O problema* (2.1)-(2.2) *tem solução única se, e somente se, posto* $(B\,|C) = n$ *e existe uma função de Green associada ao problema homogêneo.*

**Demonstração:** Se o problema (2.1)-(2.2) tem solução única então, pelo Teorema 2.10, a condição *posto* $(B\,|C) = n$ é satisfeita e além disso, pelo já visto, existe uma função de Green associada com o problema não homogêneo.

Reciprocamente, se *posto* $(B\,|C) = n$ e existe uma função de Green associada ao problema homogêneo, temos que o problema sempre tem solução para qualquer $f \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$, o que implica que o operador $L$ definido em (2.4) é sobrejetor. Como consequência disso, o Teorema 2.10 garante que o problema (2.1)-(2.2) tem solução única. ∎

Retornando à expressão (2.14), não é difícil verificar que se $A(t)$ e $\int_a^t A(s)\,ds$ comutam, então $\phi(t) = exp\left(\int_a^t A(s)\,ds\right)$ é uma matriz fundamental do sistema linear (2.3). Neste caso,

$$\phi^{-1}(t) = exp\left(-\int_a^t A(s)\,ds\right).$$

Assim, por esta propriedade comutativa, podemos rescrever a expressão (2.14) como segue:

$$G(t,s) = \begin{cases} exp\left(\int_a^t A(r)\,dr\right)\left(B + C\,exp\left(\int_a^b A(r)\,dr\right)\right)^{-1} B\,exp\left(-\int_a^s A(r)\,dr\right), \\ a \le s < t \le b, \\ -exp\left(\int_a^t A(r)\,dr\right)\left(B + C\,exp\left(\int_a^b A(r)\,dr\right)\right)^{-1} C\,exp\left(\int_s^b A(r)\,dr\right), \\ a \le t < s \le b. \end{cases}$$

Agora, se as matrizes de fronteira $B$ e $C$ comutam com $exp\left(\int_a^t A(s)\,ds\right)$, para todo $t \in J$, então a última expressão é dada por:

$$G(t,s) = \begin{cases} exp\left(\int_s^t A(r)\,dr\right)\left(B + C\,exp\left(\int_a^b A(r)\,dr\right)\right)^{-1} B, \\ a \le s < t \le b, \\ -exp\left(\int_s^t A(r)\,dr\right)\left(B + C\,exp\left(\int_a^b A(r)\,dr\right)\right)^{-1} C\,exp\left(\int_a^b A(r)\,dr\right), \\ a \le t < s \le b. \end{cases}$$

Além disso, continua a ser válida para o caso periódico $B = I_n$ e $C = -I_n$,

$$G(t,s) = \begin{cases} exp\left(\int_s^t A(r)\,dr\right)\left(I_n - \,exp\left(\int_a^b A(r)\,dr\right)\right)^{-1}, \\ a \le s < t \le b, \\ exp\left(\int_s^t A(r)\,dr\right)\left(I_n - \,exp\left(\int_a^b A(r)\,dr\right)\right)^{-1} exp\left(\int_a^b A(r)\,dr\right), \\ a \le t < s \le b. \end{cases}$$

## 2.2 CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO DE GREEN 1-dimensional

Nesta seção as principais referencias bibliográficas são: [6] e [1].

Usaremos a seguinte notação:

$$u(t) = exp\left(\int_t^{t_0} a(\xi)\,d\xi\right) = T(t_0, t),$$

com o objetivo de simplificar as expressões. Observe que para a função $T$ as seguintes propriedades são verdadeiras:

1. $T(t_0, t_0) = 1$;
2. $T(t_0, t) = (T(t, t_0))^{-1}$;
3. $T(t, t_0)\ T(t_0, s) = T(t, s)$;
4. $T'(t, t_0) = T(t, t_0)\,(a(t) - a(t_0))$.

Consideremos agora a Equação Diferencial de Riccati escalar:

$$x' = a(t)\,x + b(t)\,x^2 + f(t)\,. \tag{2.17}$$

Nosso interesse é estudar essa equação diferencial definida no intervalo $[0, \omega]$ e satisfazendo

$$x(0) = x(\omega).$$

Vamos começar estudando a parte linear não homogênea da equação (2.17),

$$x' = a(t)x + f(t), \tag{2.18}$$

definida no intervalo $[0, \omega]$ e satisfazendo $x(0) = x(\omega)$. Começamos encontrando a solução de

$$\begin{cases} x' - a(t)x &= f(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

A resolução do problema de valor inicial acima, no caso geral, é feita através do uso de um fator integrante $\mu(t)$. Para determiná-lo, multiplicamos a equação por $\mu(t)$

$$\mu(t)(x' - a(t)x) = \mu(t) f(t)$$

e buscamos $\mu(t)$ de tal modo que o primeiro membro seja a derivada do produto de $\mu$ por $x$, isto é,

$$\mu(x' - a(t)x) = (\mu x)' = \mu' x + \mu x'.$$

Portanto, temos formalmente que

$$\begin{aligned} \mu'(t)x = -\mu(t)a(t)x \quad &\Rightarrow \quad \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = -a(t) \\ &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(ln\mu) = -a(t) \\ &\Rightarrow \quad ln\mu = -\int a(t)\,dt. \end{aligned}$$

Determinamos, assim, um fator integrante $\mu(t)$ tomando uma particular primitiva de $a$:

$$\mu(t) = exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) = exp\left(\int_{t}^{t_0} a(s)\,ds\right) = T(t_0, t).$$

Logo

$$\frac{d}{dt}(T(t_0, t)\,x(t)) = T(t_0, t)\,f(t).$$

Daí, integrando essas expressões de $t_0$ a $t$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left(T\left(t_0,s\right)x\left(s\right)\right)ds &= \int_{t_0}^{t} T\left(t_0,s\right)f\left(s\right)ds, \\
T\left(t_0,t\right)x\left(t\right)\Big|_{t_0}^{t} &= \int_{t_0}^{t} T\left(t_0,s\right)f\left(s\right)ds, \\
T\left(t_0,t\right)x\left(t\right) - T\left(t_0,t_0\right)x\left(t_0\right) &= \int_{t_0}^{t} T\left(t_0,s\right)f\left(s\right)ds, \\
T\left(t_0,t\right)x\left(t\right) &= x\left(t_0\right) + \int_{t_0}^{t} T\left(t_0,s\right)f\left(s\right)ds, \\
x\left(t\right) &= T\left(t_0,t\right)^{-1}x_0 + T\left(t_0,t\right)^{-1}\int_{t_0}^{t} T\left(t_0,s\right)f\left(s\right)ds, \\
&= T\left(t,t_0\right)x_0 + \int_{t_0}^{t} T\left(t,t_0\right)T\left(t_0,s\right)f\left(s\right)ds, \\
&= T\left(t,t_0\right)x_0 + \int_{t_0}^{t} T\left(t,s\right)f\left(s\right)ds, \\
&= exp\left(\int_{t_0}^{t} a\left(s\right)ds\right)x_0 + \\
&\quad \int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{s}^{t} a\left(\xi\right)d\xi\right)f\left(s\right)ds.
\end{aligned}$$

Como $t_0 = 0$ e $x\left(t_0\right) = x_0 = c$, temos,

$$x\left(t\right) = T\left(t,0\right)c + \int_{0}^{t} T\left(t,s\right)f\left(s\right)ds \tag{2.19}$$

que é solução de (2.18). Agora,

$$\begin{aligned}
x\left(0\right) &= T\left(0,0\right)c + \int_{0}^{0} T\left(0,s\right)f\left(s\right)ds = c, \\
x\left(\omega\right) &= T\left(\omega,0\right)c + \int_{0}^{\omega} T\left(\omega,s\right)f\left(s\right)ds.
\end{aligned}$$

Como $x\left(0\right) = x\left(\omega\right)$, temos:

$$\begin{aligned}
c &= T\left(\omega,0\right)c + \int_{0}^{\omega} T\left(\omega,s\right)f\left(s\right)ds, \\
c\left(1 - T\left(\omega,0\right)\right) &= \int_{0}^{\omega} T\left(\omega,s\right)f\left(s\right)ds, \\
c &= \frac{1}{\left(1 - T\left(\omega,0\right)\right)}\int_{0}^{\omega} T\left(\omega,s\right)f\left(s\right)ds.
\end{aligned}$$

Substituímos o valor de $c$ em (2.19), obtemos,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= T(t,0)\frac{1}{(1-T(\omega,0))}\int_0^{\omega} T(\omega,s)\, f(s)\, ds + \int_0^{t} T(t,s)\, f(s)\, ds,\\
x(t) &= \frac{T(t,0)}{(1-T(\omega,0))}\int_0^{\omega} T(\omega,s) f(s)\, ds + \int_0^{\omega} T(t,s)\, \chi_{(0,t)}(s) f(s)\, ds,\\
x(t) &= \int_0^{\omega}\left(\frac{T(t,0)}{(1-T(\omega,0))}T(\omega,s) + T(t,s)\, \chi_{(0,t)}(s)\right) f(s) ds.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{T(t,0)}{(1-T(\omega,0))}T(\omega,s) + T(t,s) & \text{se} \quad 0 \leq s < t \leq \omega,\\ \dfrac{T(t,0)}{(1-T(\omega,0))}T(\omega,s) & \text{se} \quad 0 \leq t < s \leq \omega, \end{cases}
$$

é a função de Green associada ao problema homogêneo. Agora,

$$
\begin{aligned}
\frac{T(t,0)\, T(\omega,s)}{(1-T(\omega,0))} + T(t,s) &= \frac{T(t,0)\, T(\omega,s) + T(t,s)\,(1-T(\omega,0))}{(1-T(\omega,0))}\\
&= \frac{T(t,0)\, T(\omega,s) + T(t,s) - T(t,s)\, T(\omega,0)}{(1-T(\omega,0))}\\
&= \frac{T(t,0)\, T(\omega,0)\, T(0,s) + T(t,s) - T(t,s)\, T(\omega,0)}{(1-T(\omega,0))}\\
&= \frac{T(t,s)\, T(\omega,0) + T(t,s) - T(t,s)\, T(\omega,0)}{(1-T(\omega,0))}\\
&= \frac{T(t,s)}{(1-T(\omega,0))}\\
&= \frac{exp\left(\int_s^t a(\xi)\, d\xi\right)}{1-exp\left(\int_0^{\omega} a(\xi)\, d\xi\right)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{T(t,0)}{(1-T(\omega,0))}T(\omega,s) &= \frac{T(t,0)\, T(\omega,0)\, T(0,s)}{(1-T(\omega,0))}\\
&= \frac{T(\omega,0)\, T(t,s)}{(1-T(\omega,0))}\\
&= \frac{exp\left(\int_0^{\omega} a(\xi)\, d\xi\right)}{1-exp\left(\int_0^{\omega} a(\xi)\, d\xi\right)} exp\left(\int_s^t a(\xi)\, d\xi\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente, reescrevemos a função de Green como

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{exp\left(\int_s^t a(\xi)\, d\xi\right)}{1 - exp\left(\displaystyle\int_0^\omega a(\xi)\, d\xi\right)} & \text{se} \quad 0 \leq s < t \leq \omega, \\ \\ \dfrac{exp\left(\displaystyle\int_0^\omega a(\xi)\, d\xi\right)}{1 - exp\left(\displaystyle\int_0^\omega a(\xi)\, d\xi\right)} exp\left(\int_s^t a(\xi)\, d\xi\right) & \text{se} \quad 0 \leq t < s \leq \omega, \end{cases} \tag{2.20}$$

onde $\displaystyle\int_0^\omega a(\xi)\, d\xi \neq 0$ e $x(t) = \displaystyle\int_0^\omega G(t,s) f(s)\, ds$.

Como $\displaystyle\int_0^\omega a(\xi)\, d\xi \neq 0$, o sistema

$$\begin{cases} x' &= a(t)x + f(t) \\ x(0) &= x(\omega) \end{cases} \tag{2.21}$$

possui solução única.

## 2.3 SOLUÇÃO PERIÓDICA DA EQUAÇÃO DE RICCATI

Nesta seção, nosso objetivo é estudar os critérios que foram obtidos em [13] para mostrar que, sob certas hipóteses, a equação diferencial de Riccati escalar, com coeficientes periódicos, admite pelo menos uma solução periódica.

Primeiramente, incluímos aqui o Teorema de Ascoli-Arzelá e o Teorema de ponto fixo de Schauder, os quais serão usados na prova do Teorema 2.21.

**Teorema 2.18.** ***(Ascoli-Arzelá)***. *Seja $\{\varphi_n(t)\}$ uma sequência de funções de $[a,b]$ para $\mathbb{R}$. Se a sequência é uniformemente limitada e equicontínua, então $\{\varphi_n(t)\}$ tem subsequência uniformemente convergente.*

**Demonstração:** Ver [2].

**Teorema 2.19.** ***(Schauder)***. *Seja $X$ um espaço de Banach e $\Omega \subset X$ é fechado, limitado e convexo. Se $S : \Omega \longrightarrow \Omega$ é um operador compacto, então, $S$ tem pelo menos um ponto fixo em $\Omega$.*

**Demonstração:** Ver [2].

O seguinte teorema é útil para provar o Teorema 2.21.

**Teorema 2.20.** *Sejam $a$, $b$ e $c$ funções reais contínuas e $\omega$-periódicas em $\mathbb{R}$. Dado $a$ tal que $\displaystyle\int_0^\omega a(\xi)\, d\xi \neq 0$. Suponha que $x$ é uma função real e contínua em*

$\mathbb{R}$. *Se $x$ é uma solução da equação integral*

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,s)\big(b(s)x^2(s) + c(s)\big)\,ds, \tag{2.22}$$

*então, $x$ é uma solução de* (2.17).

**Demonstração:** Pela hipótese de que $x$ é uma solução da equação integral (2.22) e usando (2.20), temos

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^\omega G(t,s)(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds \\
&= \int_0^t G(t,s)(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds + \int_t^\omega G(t,s)(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds \\
&= \int_0^t \frac{T(t,s)}{1-T(\omega,0)}(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds + \\
&\quad \int_t^\omega \frac{T(\omega,0)}{1-T(\omega,0)} T(t,s)(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds \\
&= \frac{1}{1-T(\omega,0)}\int_0^t T(t,s)(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds - \\
&\quad \frac{T(\omega,0)}{1-T(\omega,0)}\int_\omega^t T(t,s)(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds \\
&= \frac{1}{1-T(\omega,0)}\int_0^t T(t,0)T(0,s)(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds - \\
&\quad \frac{T(\omega,0)}{1-T(\omega,0)}\int_\omega^t T(t,0)T(0,s)(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds \\
&= \frac{1}{1-T(\omega,0)}\int_0^t T(t,0)(T(s,0))^{-1}(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds - \\
&\quad \frac{T(\omega,0)}{1-T(\omega,0)}\int_\omega^t T(t,0)(T(s,0))^{-1}(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds \\
&= \frac{T(t,0)}{1-T(\omega,0)}\int_0^t \frac{1}{T(s,0)}(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds - \\
&\quad \frac{T(\omega,0)T(t,0)}{1-T(\omega,0)}\int_\omega^t \frac{1}{T(s,0)}(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds.
\end{aligned}$$

Escrevendo $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, sua derivada é $x'(t) = x_1'(t) - x_2'(t)$, daí,

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{T(t,0)}{1-T(\omega,0)}\int_0^t \frac{1}{T(s,0)}\big(b(s)x^2(s)+c(s)\big)\,ds, \\
x_2(t) &= \frac{T(\omega,0)T(t,0)}{1-T(\omega,0)}\int_\omega^t \frac{1}{T(s,0)}\big(b(s)x^2(s)+c(s)\big)\,ds.
\end{aligned}$$

Derivando $x_1(t)$,

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= \frac{1}{1-T(\omega,0)}\Bigg[T'(t,0)\int_0^t \frac{1}{T(t,0)}(b(s)x^2(s)+c(s))\,ds + \\
&\quad T(t,0)\left[\frac{1}{T(s,0)}(b(s)x^2(s)+c(s))\right]\Bigg|_0^t\Bigg],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= \frac{1}{1-T(\omega,0)}\left[T'(t,0)\int_0^t \frac{1}{T(t,0)}\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)ds + \right. \\
&\left. \left(b(t)x^2(t)+c(t)\right) - T(t,0)\left(b(0)x^2(0)+c(0)\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= \frac{T(t,0)\left(a(t)-a(0)\right)}{1-T(\omega,0)}\int_0^t \frac{1}{T(s,0)}\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)ds + \\
&\frac{1}{1-T(\omega,0)}\left(b(t)x^2(t)+c(t)\right) - \frac{T(t,0)}{1-T(\omega,0)}\left(b(0)x^2(0)+c(0)\right).
\end{aligned}$$

Derivando $x_2(t)$,

$$\begin{aligned}
x_2'(t) &= \frac{T(\omega,0)}{1-T(\omega,0)}\left[T'(t,0)\int_\omega^t \frac{1}{T(s,0)}\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)ds + \right. \\
&\left. T(t,0)\left[\frac{1}{T(s,0)}\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)\right]\Bigg|_\omega^t\right],
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
x_2'(t) &= \frac{T(\omega,0)}{1-T(\omega,0)}\left[T(t,0)\left(a(t)-a(0)\right)\int_\omega^t \frac{1}{T(s,0)}\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)ds + \right. \\
&\left. \frac{T(t,0)}{T(t,0)}\left(b(t)x^2(t)+c(t)\right) - \frac{T(t,0)}{T(\omega,0)}\left(b(\omega)x^2(\omega)+c(\omega)\right)\right],
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
x_2'(t) &= \frac{T(\omega,0)T(t,0)}{1-T(\omega,0)}\left(a(t)-a(0)\right)\int_\omega^t \frac{1}{T(s,0)}\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)ds + \\
&\frac{T(\omega,0)}{1-T(\omega,0)}\left(b(t)x^2(t)+c(t)\right) - \frac{T(\omega,0)T(t,\omega)}{1-T(\omega,0)}\left(b(\omega)x^2(\omega)+c(\omega)\right).
\end{aligned}$$

Substituindo $x_1'(t)$ e $x_2'(t)$ em $x'(t)$, temos:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{a(t)T(t,0)}{1-T(\omega,0)}\int_0^t \frac{\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)}{T(s,0)}ds + \frac{\left(b(t)x^2(t)+c(t)\right)}{1-T(\omega,0)} - \\
&\frac{a(t)T(\omega,0)T(t,0)}{1-T(\omega,0)}\int_\omega^t \frac{\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)}{T(s,0)}ds \frac{T(\omega,0)}{1-T(\omega,0)}\left(b(t)x^2(t)+c(t)\right),
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
x'(t) &= a(t)\int_0^t \frac{T(t,s)}{1-T(\omega,0)}\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)ds + \\
&a(t)\int_t^\omega \frac{T(\omega,0)T(t,s)}{1-T(\omega,0)}\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)ds + \\
&\left(\frac{1-T(\omega,0)}{1-T(\omega,0)}\right)\left(b(t)x^2(t)+c(t)\right),
\end{aligned}$$

assim

$$x'(t) = a(t)\int_0^\omega G(t,s)\left(b(s)x^2(s)+c(s)\right)ds + b(t)x^2(t)+c(t), \text{ ou seja,}$$

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t) \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.21.** *Sejam $a$, $b$ e $c$ funções reais contínuas $\omega$-periódicas sobre $\mathbb{R}$, sendo $a$ tal que $\int_0^\omega a(\xi)\,d\xi \neq 0$. Considere,*

$$M = \sup_{0\le t,s\le\omega}|G(t,s)|, \quad N = \sup_{0\le t\le\omega}\left|\int_0^\omega G(t,s)c(s)\,ds\right|$$

*e suponhamos que* $\int_0^{\omega} |b(\xi)|\, d\xi \leq \frac{1}{4MN}$. *Então,* $x' = a(t)\,x + b(t)\,x^2 + c(t)$ *admite, pelo menos, uma solução* $\omega$*-periódica.*

**Demonstração:**

Seja
$X = \{\varphi;\ \varphi$ é uma função real e contínua e $\omega$-periódica sobre $\mathbb{R}$ $\}$. Definimos a norma $\|\varphi\| = \sup\limits_{0\leq t\leq\omega} |\varphi(t)|$ sobre $X$.

**Afirmação 2.22.** $(X,\ \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach.*

De fato, $\varphi$ é uma função real, contínua e $\omega$-periódica. Como $\varphi$ é periódica, $\exists\omega$ tal que $\varphi(t+\omega) = \varphi(t)\,, \forall t \in \mathbb{R}$, pelo qual basta conhecer os valores de $\varphi(t)$ sobre $[0,\omega]$. $\varphi$ é contínua, em particular é contínua em $[0,\omega]$, daí toda função definida num intervalo fechado é limitada e alcança seus valores máximo e mínimo. Como $\varphi(x)$ é periódica, isso implica que $\varphi$ é limitada em toda a reta. Portanto, provar que $(X,\ \|\cdot\|)$ é Banach é o mesmo do que provar que $(B[0,\omega]\,, \|\cdot\|)$ é Banach. Temos que provar que toda sequência de cauchy em $(B[0,\omega]\,, \|\cdot\|)$ é convergente. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $X$. Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente. Fazendo $m \longrightarrow \infty$, temos que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon,\ \forall x \in [0,\omega]$. Aplicando desigualdade triangular:

$$|f(x)| - |f_n(x)| \leq ||f(x)| - |f_n(x)|| \leq |f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |f(x)| - |f_n(x)| &\leq \epsilon \\ |f(x)| &\leq |f_n(x)| + \epsilon \leq \|f_n\| + \epsilon \leq M + \epsilon \\ |f(x)| &\leq M + \epsilon. \end{aligned}$$

Tomando supremos temos:

$$\begin{aligned} sup\,|f(x)| &\leq M + \epsilon,\ \forall x \in [0,\omega] \\ \|f\| &\leq M + \epsilon. \end{aligned}$$

Então, $f \in B([0,\omega])$. Daí, se segue

$$\begin{aligned} \forall\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n \geq n_0 &\Rightarrow |f_n(x) - f| < \epsilon \\ &\Rightarrow sup\,|f_n(x) - f| < \epsilon \\ &\Rightarrow \|f_n - f\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto $f_n$ converge para $f$. $\square$

Considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} \psi :\ [0,\omega] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \psi(t) = \int_0^{\omega} G(t,s)\,c(s)\,ds \end{aligned}$$

e consideremos: $\Omega = \{\varphi \in X;\ \|\varphi - \psi\| \leq N\}$, que é a bola de dimensão infinita. Observe que $\Omega$ é fechado, limitado e convexo. Evidentemente a bola é fechada e limitada. Provemos que é convexo. Definimos a função,

$$\phi = (1-\alpha)\,\varphi_1 + \alpha\varphi_2 \in \Omega.$$

De fato, dados $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \Omega$, temos $\|\varphi_1 - \psi\| \leq N$ e $\|\varphi_2 - \psi\| \leq N$. Então,

$$\begin{aligned}
\|\phi - \psi\| &= \|(1-\alpha)\,\varphi_1 + \alpha\varphi_2 - \psi\| \\
&= \|(1-\alpha)\,\varphi_1 + \alpha\varphi_2 - (1-\alpha)\,\psi - \alpha\psi\| \\
&= \|(1-\alpha)\,(\varphi_1 - \psi) + \alpha\,(\varphi_2 - \psi)\| \\
&\leq (1-\alpha)\,\|\varphi_1 - \psi\| + \alpha\,\|\varphi_2 - \psi\|\,.
\end{aligned}$$

onde

$$(1-\alpha)\,\|\varphi_1 - \psi\| + \alpha\,\|\varphi_2 - \psi\| \leq (1-\alpha)\,N + \alpha N = N.$$

Portanto $\|\phi - \psi\| \leq N$ e $\phi \in \Omega$. Segue que $\Omega$ é convexo.

Agora, definamos o operador,

$$\begin{array}{rcccl}
S:\ \Omega & \longrightarrow & X & & \\
\varphi & \longmapsto & S(\varphi):\ [0,\omega] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & t & \longmapsto & S(\varphi)(t)\,,
\end{array}$$

$$S(\varphi)(t) = \int_0^\omega G(t,s)\,\big(b(s)\,\varphi^2(s) + c(s)\big)\,ds.$$

**Afirmação 2.23.** $S:\ \Omega \longrightarrow \Omega.$

De fato, temos que mostrar que $\|S(\varphi)(t) - \psi\| \leq N$. Note que

$$\begin{aligned}
\|\varphi - \psi\| &\leq N, \\
\|\varphi\| - \|\psi\| &\leq \|\varphi - \psi\| \leq N, \\
\|\varphi\| &\leq \|\psi\| + N, \\
|\varphi(t)| &\leq |\psi(t)| + N \leq \|\psi\| + N.
\end{aligned}$$

Como $\psi(t) = \displaystyle\int_0^\omega G(t,s)\,c(s)\,ds$, temos

$$\begin{aligned}
\|\psi\| &= sup\,|\psi(t)| = sup\left|\int_0^\omega G(t,s)\,c(s)\,ds\right|, \\
\|\psi\| &= N,
\end{aligned}$$

$$|\varphi(t)| \leq N + N = 2N,\ \forall\varphi \in \Omega,\ \forall t \in [0,\omega]\,.$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
|S(\varphi)(t)-\psi(t)| &= \left|\int_0^\omega G(t,s)\left(b(s)\varphi^2(s)+c(s)\right)ds-\int_0^\omega G(t,s)\,c(s)\,ds\right| \\
&= \left|\int_0^\omega G(t,s)\,b(s)\,\varphi^2(s)\,ds\right| \\
&\leq \left|\int_0^\omega Mb(s)\,4N^2ds\right| \\
&\leq 4MN^2\int_0^\omega |b(s)|\,ds \\
&\leq 4MN^2\frac{1}{4MN}=N,
\end{aligned}
$$

$$|S(\varphi)(t)-\psi(t)|\leq N,\ \forall\varphi\in\Omega,\ \forall t\in[0,\omega].$$

$$
\begin{aligned}
sup\,|S(\varphi)(t)-\psi(t)| &\leq N \\
\|S(\varphi)-\psi\| &\leq N,\ \forall\varphi\in\Omega
\end{aligned}.
$$

Portanto $S(\varphi)\in\Omega$, que prova nossa afirmação. □

**Afirmação 2.24.** *O operador $S$ é compacto.*

Para mostrar isso, suponhamos que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\Omega$, ou seja,

$$\exists L>0;\ |\varphi_n(t)|\leq L,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,\omega].$$

Temos que mostrar que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência $\{\varphi_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que $\{S(\varphi_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\Omega$. Notemos que, pelo Teorema 2.20, para todo $n\in\mathbb{N}$, a função $S(\varphi_n)$ é diferenciável e

$$S(\varphi_n)'(t)=a(t)\,\varphi_n(t)+b(t)\,\varphi_n^2(t)+c(t),\ \forall t\in[0,\omega].$$

Temos,

$$
\begin{aligned}
\left|S(\varphi_n)'(t)\right| &= |a(t)\,\varphi_n(t)+b(t)\,\varphi_n^2(t)+c(t)| \\
&\leq |a(t)|\,|\varphi_n(t)|+|b(t)|\,|\varphi_n^2(t)|+|c(t)| \\
&\leq AL+BL^2+C.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\left|S(\varphi_n)'(t)\right|\leq AL+BL^2+C,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,\omega]$$

onde $A$, $B$ e $C$ são os valores máximos de $|a(t)|$, $|b(t)|$ e $|c(t)|$ sobre $[0,\omega]$. Agora provemos que é equicontínua. De fato, temos que mostrar que

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta(\epsilon);\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall t_1,t_2\in[0,\omega],\ |S(\varphi_n)(t_1)-S(\varphi_n)(t_2)|<\epsilon\ se\ \ |t_1-t_2|<\delta.$$

Como $S(\varphi_n)$ é diferenciável no aberto $(0,\omega)$ e existe $(AL+BL^2+C)>0$ tal que $\left|S(\varphi_n)'(t)\right|\leq AL+BL^2+C$, $\forall t\in(0,\omega)$, então $|S(\varphi_n)(t_1)-S(\varphi_n)(t_2)|\leq (AL+BL^2+C)\,|t_1-t_2|$.

Como

$$\begin{aligned} |t_1 - t_2| &< \delta \\ (AL + BL^2 + C)\,|t_1 - t_2| &< (AL + BL^2 + C)\,\delta. \end{aligned}$$

Daí,

$$|S(\varphi_n)(t_1) - S(\varphi_n)(t_2)| \leq \left(AL + BL^2 + C\right)|t_1 - t_2| < \left(AL + BL^2 + C\right)\delta,$$

onde $\epsilon = (AL + BL^2 + C)\,\delta$ e $\delta = \dfrac{\epsilon}{AL + BL^2 + C} = \delta(\epsilon)$. Assim, $\{S(\varphi_n(t))\}$ é uma sequência de funções equicontínua.

Pelo Teorema de Ascoli-Arzela, existe uma subsequência de $\{S(\varphi_n(t))\}$, $\{S(\varphi_{n_i}(t))\}$, que converge uniformemente sobre $[0, \omega]$, o que significa que $\{S(\varphi_{n_i})\}$ é convergente sobre $\Omega$. Portanto $S$ é compacto. □

Finalmente, como $S$ é um operador que vai de $\Omega$ em $\Omega$, onde $\Omega \subset X$ é fechado limitado e convexo, então, pelo teorema do ponto fixo de Schauder, existe $x \in \Omega$ tal que $S(x) = x$.

$$S(x)(t) = x(t) = \int_0^{\omega} G(t, s)\left(b(s)\,x^2(s) + c(s)\right) ds, \ \forall t \in [0, \omega].$$

Desde que $x \in \Omega$, $x$ é função real, contínua e $\omega$-periódica em $\mathbb{R}$. $x$ é solução da equação de Riccati, isto segue do Teorema 2.20.

Portanto, $x' = a(t)\,x + b(t)\,x^2 + c(t)$ tem pelo menos uma solução periódica ■

# Capítulo 3

# EQUAÇÃO GENERALIZADA DE ABEL

## 3.1 SOLUÇÕES FECHADAS PARA A EQUAÇÃO DE ABEL

Nesta seção nosso objetivo é estudar os critérios que foram obtidos em [19] para a existência de soluções fechadas da equação generalizada de Abel, ou seja, soluções tal que $x(0) = x(2\pi)$. O interesse desta equação baseia-se na sua relação com a existência de ciclos limite de um sistema polinomial planar e o $16th$ problema de Hilbert. Em algumas condições, um sistema polinomial planar pode ser escrito em coordenadas polares como uma equação generalizada de Abel. Então, uma solução fechada isolada da equação de Abel corresponde a um ciclo limite de um sistema planar.

Primeiramente, incluímos aqui alguns resultados conhecidos, usados nas demonstrações dos Teoremas 3.4, 3.7, 3.9, 3.10.

Considere a equação diferencial de primeira ordem

$$x' = f(t, x),$$

onde $f : [0, 2\pi] \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

**Definição 3.1.** *Uma função $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$ é chamada de solução inferior estrita do problema*

$$\begin{cases} x' &= f(t, x), \\ x(0) &= x(2\pi), \end{cases} \tag{3.1}$$

*se $\alpha' < f(t, \alpha(t))$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ e $\alpha(0) \leq \alpha(2\pi)$. Uma função $\beta \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$ é chamada de solução superior estrita do problema (3.1) se $\beta' > f(t, \beta(t))$, $\forall t \in [0, 2\pi]$ e $\beta(0) \geq \beta(2\pi)$.*

**Lema 3.2.** *Suponhamos que $f$ é contínua em $t$ e analítica em $x$. Se existe um par de soluções inferior e superior estritas $\alpha$, $\beta$ tal que $\alpha(t) \leq \beta(t)$*

*(respetivamente $\alpha(t) \geq \beta(t)$) para todo $t$, então a equação $x' = f(t,x)$ tem pelo menos uma solução fechada isolada $x$ tal que $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ (respetivamente $\alpha(t) \geq x(t) \geq \beta(t)$ ) para todo $t$.*

**Demonstração:** Ver [9], [14] ou [15].

**Lema 3.3.** *Consideremos a equação diferencial*

$$x' + a(t)\,x = b(t) + \epsilon c(t,x,\epsilon)\,, \tag{3.2}$$

*onde $a, b : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e $c : [0,2\pi] \times I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com derivadas contínuas em $x$ e $\epsilon$ ($I$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$). Suponhamos que $\displaystyle\int_0^{2\pi} a(t)\,dt \neq 0$ e a única solução $x_0$ da equação não perturbada $x' + a(t) = b(t)$ é tal que $x_0(t) \in I$ $\forall t \in [0,2\pi]$. Então, existe $\epsilon_0$, $\rho > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$ existe uma única solução fechada $x_\epsilon$ da equação (3.2) na bola $B[x_0,\rho]$ em $\mathcal{C}([0,2\pi])$. Além disso, $x_\epsilon$ depende continuamente de $\epsilon$ e converge para $x_0$ uniformemente em $t$.*

**Demonstração:** Ver [17]

Nos seguintes teoremas provaremos a existência de pelo menos uma solução fechada isolada positiva para a equação generalizada de Abel. Nos três primeiros teoremas desta seção, focalizamos a nossa atenção no caso $a_0(t) = 0$ para todo $t$, e no último teorema desta seção, concentraremos nossa atenção no caso geral.

**Teorema 3.4.** *Seja $\int_0^{2\pi} a_1(t)\,dt < 0$, suponhamos que existe algum $j = 2, 3, ..., n$, tal que, $a_k(t) \geq 0$ para todo $k = j, ..., n$ e $\displaystyle\sum_{k=j}^{n} a_k(t) > 0$ para todo $t \in [0,2\pi]$. Então, existe uma solução fechada isolada positiva da equação:*

$$x' = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,x^k. \tag{3.3}$$

**Demonstração:**

Primeiramente, notemos que as condições sobre os coeficientes implicam que $n \geq 3$. Fazemos a seguinte mudança de variável:

$$\omega(t) = \frac{1}{x(t)},$$

onde sua derivada é:

$$\omega'(t) = -\frac{x'(t)}{x(t)^2}.$$

Dividindo a equação de Abel (3.3) por $-\dfrac{1}{x^2}$ obtemos

$$-\frac{x'}{x^2} = -a_1(t)\left(\frac{1}{x}\right) - a_2(t) - \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\left(\frac{1}{x}\right)^{-k+2},$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\omega'(t) &= -a_1(t)\,\omega - a_2(t) - \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\,\omega^{-k+2},\\
\omega'(t) + a_1(t)\,\omega &= -a_2(t) - \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\,\omega^{-k+2}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Notemos que para o caso $n = 3$, temos a seguinte equação:

$$\begin{array}{rcl}
\omega'(t) + a_1(t)\,\omega &=& -a_2(t) - a_3(t)\,\dfrac{1}{\omega},\\
\omega\omega'(t) &=& -a_1(t)\,\omega^2 - a_2(t)\,\omega - a_3(t)\,.
\end{array}.$$

Esta equação é conhecida como a Equação Diferencial de Abel do segundo tipo. Essa equação tem uma singularidade em 0. Uma solução fechada positiva de (3.4) é equivalente a uma solução fechada positiva de (3.3). Consideremos, agora o seguinte operador com condições de fronteira periódica:

$$\begin{cases} L[x] &= x' + a_1(t)\,x,\\ x(0) &= x(2\pi)\,. \end{cases}$$

A função de Green associada a esse operador é:

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\sigma} exp\left(-\displaystyle\int_s^t a_1(\tau)\,d\tau\right) & \text{se} \quad 0 \le s < t \le 2\pi,\\[2ex] \dfrac{\sigma}{1-\sigma} exp\left(-\displaystyle\int_s^t a_1(\tau)\,d\tau\right) & \text{se} \quad 0 \le t < s \le 2\pi, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $\sigma = exp\left(-\int_0^{2\pi} a_1(\tau)\,d\tau\right)$. Esta função é negativa para todo $(t,s)$, pois $\sigma > 1$.

**Afirmação 3.5.** *$\alpha(t) = -\mu \int_0^{2\pi} G(t,s)\,ds$ é uma solução inferior estrita do problema:*

$$\begin{cases} \omega' = f(t,\omega) = -a_1(t)\,\omega - a_2(t) - \displaystyle\sum_{k=3}^{n} a_k(t)\,\omega^{-k+2},\\[2ex] \omega(0) = \omega(2\pi)\,, \end{cases} \tag{3.6}$$

*para $\mu$ positivo e suficientemente grande.*

De fato, primeiramente calculemos a derivada de $\alpha(t)$,

$$
\begin{aligned}
\alpha(t) &= -\mu\int_0^{2\pi} G(t,s)\,ds \\
&= -\mu\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-\sigma}exp\left(-\int_s^t a_1(\tau)\,d\tau\right)ds & ,\ se\ 0\le s<t\le 2\pi\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sigma}{1-\sigma}exp\left(-\int_s^t a_1(\tau)\,d\tau\right)ds & ,\ se\ 0\le t<s\le 2\pi\end{cases} \\
&= -\frac{\mu}{1-\sigma}\int_0^t exp\left(-\int_s^t a_1(\tau)\,d\tau\right)ds-\frac{\mu\sigma}{1-\sigma}\int_t^{2\pi} exp\left(-\int_s^t a_1(\tau)\,d\tau\right)ds \\
&= -\frac{\mu}{1-\sigma}\int_0^t exp\left(-A_1(t)+A_1(s)\right)ds-\frac{\mu\sigma}{1-\sigma}\int_t^{2\pi} exp\left(-A_1(t)+A_1(s)\right)ds \\
&= \frac{\mu}{\sigma-1}exp\left(-A_1(t)\right)\int_0^t exp\left(A_1(s)\right)ds+ \\
&\quad \frac{\mu\sigma}{\sigma-1}exp\left(-A_1(t)\right)\int_t^{2\pi} exp\left(A_1(s)\right)ds \quad (1)
\end{aligned}
$$

Derivando (1) em relação a $t$,

$$
\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \frac{\mu}{\sigma-1}exp\left(-A_1(t)\right)\left(-a_1(t)\right)\int_0^t exp\left(A_1(s)\right)ds+\frac{\mu}{\sigma-1}+ \\
&\quad \frac{\mu\sigma}{\sigma-1}exp\left(-A_1(t)\right)\left(-a_1(t)\right)\int_t^{2\pi} exp\left(A_1(s)\right)ds+\frac{\mu\sigma}{\sigma-1} \\
&= -\frac{\mu}{\sigma-1}exp\left(-A_1(t)\right)a_1(t)\int_0^t exp\left(A_1(s)\right)ds+\frac{\mu}{\sigma-1}- \\
&\quad \frac{\mu\sigma}{\sigma-1}exp\left(-A_1(t)\right)a_1(t)\int_t^{2\pi} exp\left(A_1(s)\right)ds-\frac{\mu\sigma}{\sigma-1} \\
\alpha'(t) &= -\frac{\mu}{\sigma-1}exp\left(-A_1(t)\right)a_1(t)\left[\int_0^t exp\left(A_1(s)\right)ds+\right. \\
&\quad \left.\sigma\int_t^{2\pi} exp\left(A_1(s)\right)ds\right]-\mu \quad (2)
\end{aligned}
$$

Agora subtituimos o valor de $\alpha(t)$ em $f(t,x)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
f\left(t,\alpha\left(t\right)\right) &= -a_1\left(t\right)\left(-\mu\int_0^{2\pi}G\left(t,s\right)ds\right)-a_2\left(t\right)-\sum_{k=3}^{n}\frac{a_k\left(t\right)}{\left(-\mu\displaystyle\int_0^{2\pi}G\left(t,s\right)ds\right)^{k-2}}\\
&= -a_1\left(t\right)\frac{\mu}{\sigma-1}exp\left(-A_1\left(t\right)\right)\left(\int_0^{t}exp\left(A_1\left(s\right)\right)ds+\sigma\int_t^{2\pi}exp\left(A_1\left(s\right)\right)ds\right)-\\
&\quad a_2\left(t\right)-\sum_{k=3}^{n}\frac{a_k\left(t\right)}{\left(-\mu\displaystyle\int_0^{2\pi}G\left(t,s\right)ds\right)^{k-2}}\quad(3)
\end{aligned}
$$

Consideremos a seguinte função

$$
\widetilde{F\left(t\right)}=\frac{\mu}{\sigma-1}exp\left(-A_1\left(t\right)\right)a_1\left(t\right)\left[\int_0^{t}exp\left(A_1\left(s\right)\right)ds+\sigma\int_t^{2\pi}exp\left(A_1\left(s\right)\right)ds\right].
$$

Daí, usando $\widetilde{F\left(t\right)}$ em (2) e (3), obtemos

$$
\begin{aligned}
\alpha'\left(t\right) &= -\widetilde{F\left(t\right)}-\mu,\ \ e\\
f\left(t,\alpha\left(t\right)\right) &= -\widetilde{F\left(t\right)}-a_2\left(t\right)-\sum_{k=3}^{n}\frac{a_k\left(t\right)}{\left(-\mu\displaystyle\int_0^{2\pi}G\left(t,s\right)ds\right)^{k-2}}.
\end{aligned}
$$

Segue que, para $\mu$ suficientemente grande, temos $\alpha'\left(t\right)<f\left(t,\alpha\left(t\right)\right)$. Agora, verifiquemos $\alpha\left(0\right)\leq\alpha\left(2\pi\right)$.

$$
\begin{aligned}
\alpha\left(0\right) &= -\mu\int_0^{2\pi}\frac{\sigma}{1-\sigma}exp\left(-\int_s^{0}a_1\left(\tau\right)d\tau\right)ds\\
&= \mu\frac{\sigma}{\sigma-1}\int_0^{2\pi}exp\left(\int_0^{s}a_1\left(\tau\right)d\tau\right)ds,\\
\alpha\left(2\pi\right) &= -\mu\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-\sigma}exp\left(-\int_s^{2\pi}a_1\left(\tau\right)d\tau\right)\\
&= \mu\frac{1}{\sigma-1}\int_0^{2\pi}exp\left(-\int_s^{2\pi}a_1\left(\tau\right)d\tau\right)ds\\
&= \mu\frac{1}{\sigma-1}\int_0^{2\pi}exp\left(-\int_0^{2\pi}a_1\left(\tau\right)d\tau\right)exp\left(\int_0^{s}a_1\left(\tau\right)d\tau\right)ds\\
&= \mu\frac{\sigma}{\sigma-1}\int_0^{2\pi}exp\left(\int_0^{s}a_1\left(\tau\right)d\tau\right)ds.
\end{aligned}
$$

Segue que $\alpha\left(0\right)\leq\alpha\left(2\pi\right)$. Portanto $\alpha$ é solução inferior estrita do problema (3.6).

**Afirmação 3.6.** *$\beta\left(t\right)=\epsilon>0$ é solução superior estrita do problema (3.6) para*

*$\epsilon$ suficientemente pequeno.*

De fato, seja $\beta(t) = \epsilon > 0$. Sua derivada $\beta'(t) = 0$ e

$$f(t, \beta(t)) = f(t, \epsilon) = -a_1(t)\epsilon - a_2(t) - \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\epsilon^{-k+2}.$$

Devemos mostrar a seguinte desigualdade;

$$f(t, \epsilon) = -a_1(t)\epsilon - a_2(t) - \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\epsilon^{-k+2} < 0,$$

o que é o mesmo que mostrar

$$a_1(t)\epsilon + a_2(t) + \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\epsilon^{-k+2} > 0.$$

De fato, a esquerda da desigualdade acima multiplicando por $\epsilon^{n-2}$, obtemos:

$$a_1(t)\epsilon^{n-1} + a_2(t)\epsilon^{n-2} + \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\epsilon^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\epsilon^{n-k},$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\epsilon^{n-k} = \sum_{k=1}^{j-1} a_k(t)\epsilon^{n-k} + \sum_{k=j}^{n} a_k(t)\epsilon^{n-k}. \tag{3.7}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j}^{n} a_k(t)\epsilon^{n-k} &= a_j(t)\epsilon^{n-j} + a_{j+1}(t)\epsilon^{n-(j+1)} + a_{j+2}(t)\epsilon^{n-(j+2)} + \dots \\
&\quad + a_n(t)\epsilon^{n-(j+n-j)} \\
&= a_j(t)\epsilon^{n-j} + a_{j+1}(t)\epsilon^{n-j}\epsilon^{-1} + a_{j+2}(t)\epsilon^{n-j}\epsilon^{-2} + \dots \\
&\quad + a_n(t)\epsilon^{n-j}\epsilon^{-(n-j)} \\
&= \epsilon^{n-j}\left(a_j(t) + a_{j+1}(t)\epsilon^{-1} + a_{j+2}(t)\epsilon^{-2} + \dots + a_n(t)\epsilon^{-(n-j)}\right) \\
&= \epsilon^{n-j}\left(a_j(t) + a_{j+1}(t)\epsilon^{-1} + a_{j+2}(t)\epsilon^{-2} + \dots + a_n(t)\epsilon^{j-n}\right) \\
&= \epsilon^{n-j}\sum_{k=j}^{n} a_k(t)\epsilon^{j-k}.
\end{aligned}$$

Como assumimos $\epsilon$ suficientemente pequeno, temos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
a_j(t)\frac{1}{\epsilon^0} + a_{j+1}(t)\frac{1}{\epsilon^1} + \dots + a_n(t)\frac{1}{\epsilon^{n-j}} &> a_j(t) + a_{j+1}(t) + \dots + a_n(t) \\
\sum_{k=j}^{n} a_k(t)\epsilon^{j-k} &> \sum_{k=j}^{n} a_k(t).
\end{aligned}$$

Agora, multiplicando por $\epsilon^{n-j}$, obtemos:

$$\epsilon^{n-j}\sum_{k=j}^{n} a_k(t)\,\epsilon^{j-k} > \epsilon^{n-j}\sum_{k=j}^{n} a_k(t) > 0.$$

Somando os primeiros termos de (3.7), obtemos:

$$\sum_{k=1}^{j-1} a_k(t)\,\epsilon^{n-k} + \epsilon^{n-j}\sum_{k=j}^{n} a_k(t)\,\epsilon^{j-k} > \sum_{k=1}^{j-1} a_k(t)\,\epsilon^{n-k} + \epsilon^{n-j}\sum_{k=j}^{n} a_k(t)$$

Daí, para $\epsilon$ suficientemente pequeno temos,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,\epsilon^{n-k} > \sum_{k=1}^{j-1} a_k(t)\,\epsilon^{n-k} + \epsilon^{n-j}\sum_{k=j}^{n} a_k(t) > 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,\epsilon^{n-k} &> 0, \\
a_1(t)\,\epsilon^{n-1} + a_2(t)\,\epsilon^{n-2} + \ldots + a_n(t)\,\epsilon^{n-n} &> 0, \\
\epsilon^{n-2}\left(a_1(t)\,\epsilon + a_2(t) + \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\,\epsilon^{n-k}\right) &> 0, \\
a_1(t)\,\epsilon + a_2(t) + \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\,\epsilon^{n-k} &> 0.
\end{aligned}$$

Evidentemente $\beta(0) = \epsilon \geq \beta(2\pi)$. Além disso, essas soluções inferior e superior, podem ser escolhidas tais que $\beta < \alpha$. Portanto pelo Lema (3.2), a equação (3.3) tem pelo menos uma solução fechada isolada positiva $x$, tal que $0 < \epsilon = \beta(t) < x(t) < \alpha(t), \forall t$. ■

**Teorema 3.7.** *Considerando $a_2(t) = \lambda p(t)$, onde $p$ é uma função contínua fixa e assumimos que $\int_0^{2\pi} a_1(t)\,dt \neq 0$ e que a única solução fechada da equação linear $x' + a_1(t)\,x = -p(t)$ é positiva. Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $\lambda > \lambda_0$, existe ao menos uma solução fechada isolada positiva da equação:*

$$x' = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,x^k.$$

**Demonstração:**

Usemos novamente a mudança de variável

$$\omega(t) = \frac{1}{x(t)}.$$

Substituindo o valor de $a_2(t)$ na equação (3.4), obtemos:

$$\omega'(t) + a_1(t)\,\omega = -\lambda p(t) - \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\,\omega^{-k+2}.$$

Considere a equação perturbada

$$y' + a_1(t)\,y = -p(t) - \sum_{k=3}^{n} \epsilon^{k-1} a_k(t)\,y^{-k+2},$$

$$y' + a_1(t)\,y = -p(t) - \epsilon \sum_{k=3}^{n} \epsilon^{k-2} a_k(t)\,y^{-k+2}, \tag{3.8}$$

onde $a_1,\, p:\ [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e

$$\begin{array}{rcccl} c: & [0,2\pi] \times I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & (t, y, \epsilon) & \longmapsto & c(t, y, \epsilon) & = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \epsilon^{k-2} a_k(t)\,y^{-k+2} \end{array}$$

é uma função contínua com derivadas contínuas em $y\,e\,\epsilon$. $\int_0^{2\pi} a_1(t)\,dt \neq 0$ e a única solução $y_0$ da equação $y' + a_1(t)\,y = -p(t)$ é positiva, para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pelo Lema 3.3, existe $\epsilon_0$ tal que (3.8) tem uma solução fechada isolada $y_\epsilon$ para qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Além disso, $y_\epsilon$ depende continuamente de $\epsilon$ e $y_\epsilon \to y_0$ uniformemente em $t$. Como $y_0$ é positivo, segue que $y_\epsilon$ é positivo para $\epsilon$ suficientemente pequeno.

**Afirmação 3.8.** *$\omega(t) = \epsilon y_\epsilon$ é uma solução fechada positiva de*

$$\omega'(t) + a_1(t)\,\omega = -\lambda p(t) - \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\,\omega^{-k+2}, \tag{3.9}$$

*com* $\lambda = \dfrac{1}{\epsilon}$.

De fato, provemos que $\omega$ é solução de (3.9).

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= \epsilon y_\epsilon(t)\\
\omega'(t) &= \epsilon y'_\epsilon(t)\\
&= \epsilon\left(-a_1(t)\,y_\epsilon - p(t) - \sum_{k=3}^{n}\epsilon^{k-1}a_k(t)\,y_\epsilon^{-k+2}\right)\\
&= -a_1(t)(\epsilon y_\epsilon) - \epsilon p(t) - \sum_{k=3}^{n}\epsilon^{k}a_k(t)\,y_\epsilon^{-k+2}\\
&= -a_1(t)(\epsilon y_\epsilon) - \epsilon p(t) - (\epsilon^3 a_3(t)\,y_\epsilon^{-1} + \epsilon^4 a_4(t)\,y_\epsilon^{-2} + \epsilon^5 a_5(t)\,y_\epsilon^{-3} + \ldots\\
&\quad +\epsilon^n a_n(t)\,y_\epsilon^{-n+2})\\
&= -a_1(t)(\epsilon y_\epsilon) - \epsilon p(t) - \left(\epsilon^4 a_3(t)(\epsilon y_\epsilon)^{-1} + \epsilon^6 a_4(t)(\epsilon y_\epsilon)^{-2} + \ldots\right.\\
&\quad \left.+\epsilon^{2n-2}a_n(t)(\epsilon y_\epsilon)^{-n+2}\right)\\
&= -a_1(t)\,\omega - \epsilon p(t) - (\epsilon^4 a_3(t)\,\omega^{-1} + \epsilon^6 a_4(t)\,\omega^{-2} + \ldots\\
&\quad +\epsilon^{2n-2}a_n(t)\,\omega^{-n+2})\\
&= -a_1(t)\,\omega - \epsilon p(t) - \sum_{k=3}^{n}\epsilon^{2k-2}a_k(t)\,\omega^{-k+2}.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{\epsilon^2}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\omega'(t)}{\epsilon^2} &= -\frac{a_1(t)\,\omega}{\epsilon^2} - \frac{\epsilon}{\epsilon^2}p(t) - \sum_{k=3}^{n}\frac{\epsilon^{2k-2}}{\epsilon^2}a_k(t)\,\omega^{-k+2},\\
\frac{\omega'(t)}{\epsilon^2} &= -\frac{a_1(t)\,\omega}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon}p(t) - \sum_{k=3}^{n}\epsilon^{2k-4}a_k(t)\,\omega^{-k+2},\\
\omega'(t) &= \epsilon^2\left(-\frac{a_1(t)\,\omega}{\epsilon^2} - \lambda p(t) - \sum_{k=3}^{n}\epsilon^{2k-4}a_k(t)\,\omega^{-k+2}\right),\\
\omega'(t) &= -a_1(t)\,\omega - \epsilon^2\lambda p(t) - \sum_{k=3}^{n}\epsilon^{2k-2}a_k(t)\,\omega^{-k+2}.
\end{aligned}$$

Daí, $\omega(t)$ é solução de (3.9). Agora, mostremos que $\omega(t)$ é solução fechada. Temos $\omega(t) = \epsilon y_\epsilon(t)$, sabemos que $y_\epsilon(t)$ é solução fechada positiva para a equação perturbada, isto é, $y_\epsilon(0) = y_\epsilon(2\pi)$. Multiplicando por $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\epsilon y_\epsilon(0) &= \epsilon y_\epsilon(2\pi)\\
\omega(0) &= \omega(2\pi),
\end{aligned}$$

Assim, $\omega(t)$ é uma solução positiva e fechada da equação (3.9). Daí, para $\lambda_0 = \dfrac{1}{\epsilon_0}$ concluímos que $\omega(t)$ é uma solução fechada isolada positiva. ∎

**Teorema 3.9.** *Considere $a_2(t) = \lambda + p(t)$. Se $\int_0^{2\pi} a_1(t)\,dt < 0$, então existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $\lambda > \lambda_0$, existe ao menos uma solução fechada isolada positiva da equação*

$$x' = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,x^k.$$

**Demonstração:** Novamente, considerando a mudança de variável $\omega(t) = \dfrac{1}{x(t)}$ na equação (3.4) e substituindo $a_2(t) = \lambda + p(t)$, obtemos

$$\omega'(t) + a_1(t)\,\omega = -\lambda - p(t) - \sum_{k=3}^{n} a_k(t)\,\omega^{-k+2}.$$

Considere sua equação perturbada

$$y' + a_1(t)\,y = -1 - \epsilon p(t) - \sum_{k=3}^{n} \epsilon^{k-2} a_k(t)\,y^{-k+2},$$

$$y' + a_1(t)\,y = -1 - \epsilon\left(p(t) - \sum_{k=3}^{n} \epsilon^{k-3} a_k(t)\,y^{-k+2}\right),$$

onde $a_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $b(t) = -1$ e

$$\begin{array}{rccl} c: & [0,2\pi]\times I\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x,\epsilon) & \longmapsto & c(t,x,\epsilon) = p(t) - \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \epsilon^{k-3} a_k(t)\,y^{-k+2} \end{array}$$

é uma função contínua com derivadas contínuas em $x$, $\epsilon$. Por hipótese, temos $\int_0^{2\pi} a_1(t)\,dt \neq 0$ e $y_0$ é a única solução da equação não perturbada $y' + a_1(t)\,y = -p(t)$, a qual é positiva para todo $t \in [0, 2\pi]$. Então, pelo Lema 3.3 existem $\epsilon_0$, $\delta > 0$ tais que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, existe uma única $y_\epsilon$ solução fechada da equação perturbada na bola $B[y_0, \delta_0]$, a saber $y_\epsilon \in C^0([0, 2\pi])$. Além disso, $y_\epsilon$ depende continuamente de $\epsilon$ e $y_\epsilon \to y_0$ uniformemente em $t$, para $\epsilon_0$ suficientemente pequeno, portanto, $y_\epsilon$ é positivo. Como na demonstração anterior, $w(t) = \varepsilon y_\varepsilon$ é solução fechada isolada positiva. ■

**Teorema 3.10.** *Suponha que $\int_0^{2\pi} a_1(t)\,dt \neq 0$ e escreva $a_0(t) = \lambda p(t)$. Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $0 < \lambda < \lambda_0$ existe ao menos uma solução fechada isolada da equação:*

$$x' = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\,x^k. \tag{3.10}$$

**Demonstração:**

Primeiramente escrevemos a equação diferencial:

$$x' = a_0(t) + a_1(t)\,x + \sum_{k=2}^{n} a_k(t)\,x^k.$$

Substituímos o valor de $a_0(t)$ por $\lambda p(t)$

$$x' = \lambda p(t) + a_1(t)\,x + \sum_{k=2}^{n} a_k(t)\,x^k$$

e consideremos a seguinte equação perturbada

$$y' = p(t) + a_1(t)\,y + \sum_{k=2}^{n} a_k(t)\,\lambda^{k-1} y^k. \tag{3.11}$$

Sobre as hipóteses do lema 3.3, existe $\lambda_0 > 0$ tal que (3.11) tem solução fechada $y_\lambda$ para todo $0 < \lambda < \lambda_0$. Então, $x(t) = \lambda y_\lambda$ é solução fechada da equação (3.11), com $a_0(t) = \lambda p(t)$ ■

## 3.2 CICLOS LIMITES PARA A EQUAÇÃO DE ABEL

Nesta seção, nosso objetivo é estudar os critérios que foram obtidos em [5] para garantir uma cota superior ao número de ciclos limite das seguintes famílias:

$$\frac{dx}{dt} = a_n(t)\,x^n + a_m(t)\,x^m + a_1(t)\,, \tag{3.12}$$

onde $n > m > 1$, e pelo menos uma das funções $a_n$ ou $a_m$ não muda de sinal; E

$$\frac{dx}{dt} = a_n(t)\,x^n + a_2(t)\,x^2 + a_1(t)\,x + a_0(t)\,,\ n > 2 \tag{3.13}$$

onde a função $a_n$ não muda de sinal. Os resultados que obtemos na equação (3.12) imitam o seguinte corolário do teorema de Budan-Fourier:

**Lema 3.11.** *Para qualquer $a_n$, $a_m$, $a_1 \in \mathbb{R}$ e $n > m > 1$, a equação polinomial*

$$a_n x^n + a_m x^m + a_1 x = 0$$

*tem pelo menos 5 soluções reais se $n$ é ímpar e tem pelo menos 4 soluções reais se $n$ é par. Além disso, exceto para $n = 3$, as cotas superiores acima não podem ser melhoradas.*

Sejam $a_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$ funções de classe $\mathcal{C}^1$. Considere a equação diferencial,

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\,x^k = S(t,x) \tag{3.14}$$

onde $0 \le t \le 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Uma solução de (3.14) é uma função $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a equação (3.14). Utilizaremos a notação $x = \overline{x}(t,y)$ para designar a solução do problema de Cauchy formado pela equação (3.14) e a condição inicial $\overline{x}(0,y) = y$. Dizemos que uma solução de (3.14) é fechada ou periódica se $\overline{x}(1,y) = y$. A principal motivação para estudar as soluções periódicas é que, se $a_k : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$, forem funções periódicas de período 1, a equação

(3.14) é equivalente ao campo de vetores $X(t,x) = \left(1, \sum_{k=0}^{n} a_k(t) x^k\right)$ no cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ e as soluções fechadas de (3.14) são equivalentes a órbitas fechadas do campo de vetores no cilindro. Uma solução periódica isolada no conjunto de todas as soluções periódicas de (3.14) é chamada de ciclo limite.

**Definição 3.12.** *Sejam* $\sum_0 = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ t = 0\}$, $\sum_1 = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ t = 1\}$ *e* $U$ *o subconjunto aberto de* $\sum_0$ *tal que,* $(0,y) \in U$ *se, e somente se,* $\overline{x}(t,y) \cap \sum_1 \neq \phi$. *Definimos a aplicação de retorno associada a equação* (3.14),

$$\begin{array}{rccl} h: & U \subset \sum_0 & \longrightarrow & \sum_1 \\ & y & \longmapsto & h(y) = \overline{x}(1,y). \end{array} \tag{3.15}$$

**Observação 3.13.** *se* $\overline{x}(t,y)$ *é uma solução periódica de* (3.14), *então* $h(y) = y$.

**Definição 3.14.** *Dizemos que um ciclo limite* $\overline{x}(t, y*)$ *de* (3.14) *é;*

1. *Estável se existe* $\epsilon > 0$, *tal que,* $|h(y) - y*| < |y - y*|$ *para todo* $y \in (y* - \epsilon, y*) \cup (y*, y* + \epsilon)$,
2. *Instável se existe* $\epsilon > 0$, *tal que,* $|h(y) - y*| > |y - y*|$ *para todo* $y \in (y* - \epsilon, y*) \cup (y*, y* + \epsilon)$,
3. *Semi-Estável se existe* $\epsilon > 0$, *tal que,* $|h(y) - y*| > |y - y*|$ *para todo* $y \in (y* - \epsilon, y*)$ *e* $|h(y) - y*| < |y - y*|$ *para todo* $y \in (y*, y* + \epsilon)$ *ou o contrario.*

**Definição 3.15.** *A multiplicidade de um ciclo limite* $\overline{x}(t,y)$ *é a multiplicidade algébrica de* $y$ *como zero da função* $D(y) = h(y) - y$.

**Definição 3.16.** *Um ciclo limite* $\overline{x}(t, y*)$ *de* (3.14) *é dito Hiperbólico se* $\frac{d}{dy} h(y*) \neq 1$.

**Observação 3.17.** *Se* $\frac{d}{dy} h(y*) < 1$ *e aplicando o Teorema de Valor Médio temos,*

$$\frac{dh}{dy}(y*) = \frac{h(y_2) - h(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\overline{x}(1,y_2) - \overline{x}(1,y_1)}{y_2 - y_1} < 1,$$

*daí concluímos que* $x(t, y*)$ *é ciclo limite estável. Por outro lado, se* $\frac{d}{dy} h(y*) > 1$ *e, da mesma forma, aplicando o Teorema de Valor Médio concluímos que* $x(t, y*)$ *é ciclo limite instável. Essas condições são equivalentes a dizer que, se* $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} S(t, \overline{x}(t, y*))\, dt < 0$, *então* $\overline{x}(t, y*)$ *é ciclo limite estável e se* $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} S(t, \overline{x}(t, y*))\, dt > 0$ , *então* $\overline{x}(t, y*)$ *é ciclo limite instável. Além disso, um ciclo limite é hiperbólico se* $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} S(t, \overline{x}(t, y*))\, dt \neq 0$.

As Proposições 3.18, 3.22 e os Lemas 3.19, 3.20 a seguir serão usados para provar os Teoremas 3.21 e 3.23. A demonstração apresentada aqui, da proposição 3.18, pode ser encontrada em [7] e [8]. O resto das demonstrações apresentadas aqui podem ser encontradas em [5].

**Proposição 3.18.** *Seja $h(y)$ a aplicação de retorno associada à equação:*

$$\frac{dx}{dt} = S(t,x),$$

*onde $S \in \mathcal{C}^3$ é de período 1 em relação a $t \in [0,1]$. Temos:*

1. $\displaystyle \frac{d}{dy}h(y) = exp\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} S(t,\overline{x}(t,y))\,dt\right)$;

2. $\displaystyle \frac{d^2}{dy^2}h(y) = \frac{d}{dy}h(y)\left[\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(t,\overline{x}(t,y))\,exp\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}S(s,\overline{x}(s,y))\,ds\right)dt\right]$;

3. $\displaystyle \frac{d^3}{dy^3}h(y) = \frac{d}{dy}h(y)\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2}{dy^2}h(y)}{\frac{d}{dy}h(y)}\right)^2 + \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial x^3}S(t,\overline{x}(t,y))\,exp\left(2\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}S(s,\overline{x}(s,y))\,ds\right)dt\right]$.

**Demonstração:**

Pela definição da aplicação do retorno temos $h(y) = \overline{x}(1,y)$, daí $\frac{d}{dy}h(y) = \frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(1,y)$, $\frac{d^2}{dy^2}h(y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{x}(1,y)$ e $\frac{d^3}{dy^3}h(y) = \frac{\partial^3}{\partial y^3}\overline{x}(1,y)$. Consideremos o seguinte problema do valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= S(t,x) \\ \overline{x}(0,y) &= y, \end{cases}$$

onde a solução é:

$$\overline{x}(t,y) = y + \int_0^t S(s,\overline{x}(s,y))\,ds$$

Agora, derivando em relação a $y$ e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(t,y) = 1 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}S(s,\overline{x}(s,y))\,\frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(s,y)\,ds. \quad (1)$$

Nesta última equação, fazendo $z(t) = \frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(t,y)$, obtemos:

$$z(t) = 1 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}S(s,\overline{x}(s,y))\,z(s)\,ds.$$

Se $t = 0$, então $z(0) = 1$. Derivando $z(t)$ em relação a $t$ obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} &= \dfrac{\partial}{\partial x}S(s,\overline{x}(s,y))\,z(t), \\ z(0) &= 1. \end{cases}$$

Através da separação de variáveis, podemos calcular que a solução desta equação é

$$z(t) = exp\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} S(s, \overline{x}(s,y))\, ds\right).$$

Se $t = 1$, então $z(1) = \frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(1,y)$. Portanto,

$$\frac{d}{dy}h(y) = \frac{\partial}{\partial y}\overline{x}(1,y) = z(1) = exp\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} S(t, \overline{x}(t,y))\, dt\right),$$

o que prova 1.

Derivando (1) em relação a $y$ e usando a regra de cadeia, obtemos:

$$\frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial y^2}(t,y) = \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, \overline{x}(s,y))\right)\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial y}(s,y)\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x}(s, \overline{x}(s,y))\frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial y^2}(s,y)\right) ds. \, (2)$$

Fazendo $w(t) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{x}(t,y)$ na equação acima, temos:

$$w(t) = \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} S(s, \overline{x}(s,y))\right)(z(s))^2 + \frac{\partial}{\partial x} S(s, \overline{x}(s,y))\, w(s)\right) ds,$$

onde se $t = 0$, então $w(0) = 0$. Derivando $w(t)$ em relação a $t$, obtemos o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} S(t, \overline{x}(t,y))\, w(t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(t, \overline{x}(t,y))\,(z(t))^2, \\ w(0) &= 0, \end{cases}$$

onde através do método de variação de parâmetros podemos calcular que a solução desta equação é:

$$w(t) = z(t)\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(s, \overline{x}(s,y))\, z(s)\, ds,$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dy^2}h\left(y\right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{x}\left(1,y\right)\\
&= w\left(1\right)\\
&= z\left(1\right)\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}S\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)z\left(s\right)ds\\
&= \frac{d}{dy}h\left(y\right)\left[\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}S\left(t,\overline{x}\left(t,y\right)\right)exp\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}S\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)ds\right)dt\right]\\
&= \frac{d}{dy}h\left(y\right)\left[\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}S\left(t,\overline{x}\left(t,y\right)\right)exp\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}S\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)ds\right)dt\right],
\end{aligned}$$

o que prova 2.

Derivando (2) em relação a $y$ e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3}\overline{x}\left(t,y\right) = \int_0^t \left(\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3 + 3\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}\right)ds.$$

Fazendo $u\left(t\right) = \frac{\partial^3}{\partial y^3}x\left(t,y\right)$ na equação acima, temos:

$$u\left(t\right) = \int_0^t \left(\left(z\left(s\right)\right)^3\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + 3z\left(s\right)w\left(s\right)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + u\left(s\right)\frac{\partial S}{\partial x}\right)ds,$$

onde, se $t=0$, então $u\left(0\right)=0$. Derivando $u\left(t\right)$ em relação a $t$ obtemos o problema de valor inicial.

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x}S\left(t,\overline{x}\left(t,y\right)\right)u\left(t\right) + \left(3\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\left(t,\overline{x}\left(t,y\right)\right)z\left(t\right)w\left(t\right) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}S\left(t,\overline{x}\left(t,y\right)\right)\left(z\left(t\right)\right)^3\right),\\
u\left(0\right) &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Através do método de variação de parâmetros podemos calcular que a solução desta equação é:

$$u\left(t\right) = z\left(t\right)\left[3\int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)w\left(s\right)ds + \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3}S\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)\left(z\left(s\right)\right)^2 ds\right].(3)$$

Considerando a função $N\left(t\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{w\left(t\right)}{z\left(t\right)}\right]^2$, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= 3\left[\int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)z\left(s\right)ds\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2}S\left(t,\overline{x}\left(t,y\right)\right)z\left(t\right)\\
&= 3\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\left[z\left(t\right)\int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)z\left(s\right)ds\right]\\
&= 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}S\left(t,\overline{x}\left(t,y\right)\right)w\left(t\right).
\end{aligned}$$

Agora, integrando, temos:

$$N\left(t\right) = 3\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}S\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)w\left(s\right)ds.$$

Substituindo em (3), obtemos:

$$u\left(t\right) = z\left(t\right)\left[N\left(t\right) + \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3}S\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)\left(z\left(s\right)\right)^2 ds\right].$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dy^3}h\left(y\right) &= \frac{\partial^3}{\partial y^3}\overline{x}\left(1,y\right)\\
&= u\left(1\right)\\
&= z\left(1\right)\left[N\left(1\right) + \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial x^3}S\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)\left(z\left(s\right)\right)^2 ds\right]\\
&= \frac{d}{dy}h\left(y\right)\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2}{dy^2}h\left(y\right)}{\frac{d}{dy}h\left(y\right)}\right)^2 + \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial x^3}S\left(t,\overline{x}\left(t,y\right)\right)exp\left(2\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}S\left(s,\overline{x}\left(s,y\right)\right)ds\right)dt\right],
\end{aligned}$$

que prova 3. ∎

**Lema 3.19.** *Consideremos as funções* $\Phi$, $\psi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *definidas como:*

$$\Phi\left(y\right) = \left(n-m\right)\int_0^1 a_n\left(t\right)\overline{x}^{n-1}\left(t,y\right)dt + \left(1-m\right)\int_0^1 a_1\left(t\right)dt, \tag{3.16}$$

$$\psi\left(y\right) = \left(m-n\right)\int_0^1 a_m\left(t\right)\overline{x}^{m-1}\left(t,y\right)dt + \left(1-n\right)\int_0^1 a_1\left(t\right)dt, \tag{3.17}$$

*onde* $\overline{x}\left(t,y\right)$ *denota a solução da equação diferencial* (3.12) *tal que* $\overline{x}\left(0,y\right) = y$. *Então:*

$$h'\left(y\right) = \begin{cases} exp\left(\Phi\left(y\right)\right) = exp\left(\psi\left(y\right)\right), & se\ y \neq 0,\\ exp\left(\int_0^1 a_1\left(t\right)dt\right) = exp\left(\frac{\Phi(0)}{(1-m)}\right) & \\ \qquad = exp\left(\frac{\psi(0)}{(1-n)}\right), & se\ y = 0, \end{cases}$$

*onde h é a aplicação de retorno dado em* (3.15).

**Demonstração:**

Para a equação $\frac{dx}{dt} = S(t,x)$ pela Proposição 3.18, sabemos que:

$$h'(y) = exp \int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, \overline{x}(t,y))\, dt,$$

onde $\overline{x}(t,y)$ denota a solução do problema do valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= S(t,x) \\ \overline{x}(0,y) &= y. \end{cases}$$

Para nosso caso, temos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= a_n(t)x^n + a_m(t)x^m + a_1(t)x, \\ \overline{x}(0,y) &= y. \end{cases} \tag{3.18}$$

Como $S(t,x) = a_n(t)x^n + a_m(t)x^m + a_1(t)x$, sua derivada em relação a $x$ é,

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial x} = na_n(t)x^{n-1} + ma_m(t)x^{m-1} + a_1(t)$$

Daí, calculando $h'(y)$:

$$h'(y) = exp \int_0^1 \left(na_n(t)\overline{x}^{n-1}(t,y) + ma_m(t)\overline{x}^{m-1}(t,y) + a_1(t)\right) dt$$

$$h'(y) = exp \left\{ \int_0^1 na_n(t)\overline{x}^{n-1}(t,y)\, dt + \int_0^1 ma_m(t)\overline{x}^{m-1}(t,y)\, dt + \int_0^1 a_1(t)\, dt \right\},$$

onde $\overline{x}(t,y)$ é solução do problema (3.18). Notemos que, se $y = 0$, então:

$$h'(0) = exp \left\{ \int_0^1 na_n(t)\overline{x}^{n-1}(t,0)\, dt + \int_0^1 ma_m(t)\overline{x}^{m-1}(t,0)\, dt + \int_0^1 a_1(t)\, dt \right\}$$

$$h'(0) = exp \left\{ \int_0^1 a_1(t)\, dt \right\},$$

pois, $\overline{x}(t,0) = 0$. Agora,

$$
\begin{aligned}
(1) \quad \Phi(0) &= (n-m)\int_0^1 a_n(t)\,\overline{x}^{n-1}(t,0)\,dt + (1-m)\int_0^1 a_1(t)\,dt \\
&= (1-m)\int_0^1 a_1(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

e segue

$$\int_0^1 a_1(t)\,dt = \frac{\Phi(0)}{(1-m)}.$$

$$
\begin{aligned}
(2) \quad \psi(0) &= (m-n)\int_0^1 a_m(t)\,\overline{x}^{m-1}(t,0)\,dt + (1-n)\int_0^1 a_1(t)\,dt \\
&= (1-n)\int_0^1 a_1(t)\,dt
\end{aligned}
$$

e segue

$$\int_0^1 a_1(t)\,dt = \frac{\psi(0)}{(1-n)}.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
h'(0) = exp\left\{\int_0^1 a_1(t)\,dt\right\} &= exp\left(\tfrac{\Phi(0)}{(1-m)}\right) \\
&= exp\left(\tfrac{\psi(0)}{(1-n)}\right).
\end{aligned}
$$

Usando as definições (3.16) e (3.17), $h'(y)$ pode ser escrita como:

$$h'(y) = exp\{\Phi(y) + mZ(y)\} = exp\{\psi(y) + nZ(y)\},$$

onde:

$$Z(y) := \int_0^1 a_n(t)\,\overline{x}^{n-1}(t,y)\,dt + \int_0^1 a_m(t)\,\overline{x}^{m-1}(t,y)\,dt + \int_0^1 a_1(t)\,dt.$$

Por outro lado, se $x = \overline{x}(t,y)$ é uma solução periódica não nula de (3.12), temos:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial \overline{x}(t,y)}{\partial t} &= a_n(t)\,\overline{x}^{n}(t,y) + a_m(t)\,\overline{x}^{m}(t,y) + a_1(t)\,\overline{x}(t,y) \\
&= \overline{x}(t,y)\left(a_n(t)\,\overline{x}^{n-1}(t,y) + a_m(t)\,\overline{x}^{m-1}(t,y) + a_1(t)\right) \\
\tfrac{1}{\overline{x}(t,y)}\left(\tfrac{\partial \overline{x}(t,y)}{\partial t}\right) &= a_n(t)\,\overline{x}^{n-1}(t,y) + a_m(t)\,\overline{x}^{m-1}(t,y) + a_1(t).
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 a 1, obtemos:

$$Z(y) = \int_0^1 a_n(t)\,\overline{x}^{n-1}(t,y)\,dt + \int_0^1 a_m(t)\,\overline{x}^{m-1}(t,y)\,dt + \int_0^1 a_1(t)\,dt = 0.$$

Por tanto,

$$h'(y) = exp\{\Phi(y) + m(0)\} = exp\{\psi(y) + n(0)\},$$

ou seja,

$$h'(y) = exp\{\Phi(y)\} = exp\{\psi(y)\}_{\blacksquare}$$

**Lema 3.20.** *Consideremos a família paramétrica de equações diferenciais não autônomas de período 1,*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \epsilon x, \tag{3.19}$$

*onde* $f(t,0) \equiv 0$. *Suponha que para* $\epsilon = 0$ *em* (3.19)*, tem-se um ciclo limite não nulo semi-estável* $x = \overline{x}(t, y*)$. *Então, para* $|\epsilon|$ *suficientemente pequeno, com sinal adequado, a equação* (3.19) *tem pelo menos dois ciclos limite em uma vizinhança pequena de* $x = \overline{x}(t, y*)$.

**Demonstração:**

Consideremos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= f(t,x) + \epsilon x, \\ \overline{x}_\epsilon(0,y) &= y, \end{cases}$$

onde a solução desse problema é $\overline{x}_\epsilon(t,y)$. Agora, definamos a aplicação deslocamento para esse problema:

$$D_\epsilon(y) = h_\epsilon(y) - y.$$

Suponha que $x = \overline{x}_0(t, y*) > 0$ é um ciclo limite semi-estável, estável na região $\{(t,x) \in S;\ x < \overline{x}(t,y^*)\}$ e instável na região $\{(t,x) \in S;\ x > \overline{x}(t,y^*)\}$. Daí $D_0(y) = h_0(y) - y > 0$ numa vizinhança perfurada de $y*$. Tomamos $y_1$ e $y_2$ muito próximo de $y*$ e denotamos isso como $y_1 \lesssim y* \lesssim y_2$ tal que $D_0(y_i) > 0$ para $i = 1, 2$. Pelo Teorema da dependência contínua com relação a parâmetros da equação (3.19), para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, temos que $D_\epsilon(y_i) > 0$ para $i = 1, 2$. Se $\epsilon = 0$, temos $x = \overline{x}_0(t, y*)$ é solução da equação diferencial, agora quando consideramos o fluxo de (3.19), para $\epsilon < 0$, teremos $D_\epsilon(y^*) < 0$, pois $\overline{x}(t,y^*) > 0$ o que implica em $\epsilon\overline{x}(t,y^*) < 0$. Pelo teorema de Bolzano a função $D_\epsilon$ possui duas zeros perto de $y^*$, ou seja, a equação diferencial (3.19) tem pelo menos dois ciclos limite próximo do ciclo limite $x = \overline{x}(t,y^*)$.

Supondo que $x = \overline{x}_0(t, y*) > 0$ é um ciclo limite semi-estável, instável na região $\{(t,x) \in S;\ x < \overline{x}(t,y^*)\}$ e estável na região $\{(t,x) \in S;\ x > \overline{x}(t,y^*)\}$. Daí $D_0(y) = h_0(y) - y < 0$ numa vizinhança perfurado de $y*$. Tomamos $y_1$ e $y_2$ muito próximo de $y*$ e denotamos isso como $y_1 \lesssim y* \lesssim y_2$ tal que $D_0(y_i) < 0$ para $i = 1, 2$. Pelo Teorema da dependência contínua com relação a parâmetros da equação (3.19), para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, temos que $D_\epsilon(y_i) < 0$ para $i = 1, 2$. Considerando o fluxo de (3.19), para $\epsilon > 0$, teremos $D_\epsilon(y^*) > 0$, pois

$\overline{x}(t, y^*) > 0$, o que implica em $\epsilon\overline{x}(t, y^*) > 0$. Pelo teorema de Bolzano a função $D_\epsilon$ possui dois zeros perto de $y^*$, ou seja, a equação diferencial (3.19) tem pelo menos dois ciclos limite próximo do ciclo limite $x = \overline{x}(t, y^*)$.■

**Teorema 3.21.** *Consideremos a equação de Abel generalizada de período 1,*

$$\frac{dx}{dt} = a_n(t)\, x^n + a_m(t)\, x^m + a_1(t)\, x, \tag{3.20}$$

*com $n > m > 1$ e $a_n$, $a_m$ e $a_1 \in \mathcal{C}^1$. Suponhamos que $a_n(t)$ ou $a_m(t)$ não muda de sinal. Então:*

1. *Se $n$ é ímpar, a equação (3.20) tem no máximo 5 ciclos limite. Além disso, além do ciclo limite $x = x(t) \equiv 0$, em cada região $\mathcal{D}^+ := \{x > 0\}$ ou $\mathcal{D}^- := \{x < 0\}$ uma e apenas uma das seguintes possibilidades acontece:*

   *(a) A equação diferencial não tem ciclos limite.*

   *(b) A equação diferencial tem um único ciclo limite hiperbólico.*

   *(c) A equação diferencial tem um único ciclo limite semi-estável.*

   *(d) A equação diferencial tem exatamente dois ciclos limite hiperbólicos,*

   *e todos elas são possíveis se $n \geq 5$.*

2. *Se $n$ é par, a equação (3.20) tem no máximo 4 ciclos limite. Adicionalmente, além do ciclo limite $x = x(t) \equiv 0$, em cada região definida acima $\mathcal{D}^\pm$, só uma das possibilidades acima acontece, levando em conta que nunca pode coexistir mais de 4 ciclos limite e que um ciclo limite semi-estável conta como dois ciclos limites.*

**Demonstração:**

Consideremos primeiro o caso quando $n$ é ímpar e restringimos nosso caso para a região $\mathcal{D}^+ := \{(t, x)\,; 0 \leq t \leq 1,\ x > 0\}$ e para o caso $a_n(t) \geq 0$. Essa restrição pode ser atingida por meio da mudança de variáveis: $(t, x) \longmapsto (t, -x)$, $(t, x) \longmapsto (1 - t, x)$ ou $(t, x) \longmapsto (1 - t, -x)$. Provaremos que $\Phi(y)$ é uma função crescente para $y > 0$ e vamos ver como esse fato exclui a possibilidade de ter três ciclos limite em $\mathcal{D}^+$. Para provar que $\Phi(y)$ é crescente com $y > 0$, tomemos $0 < y_1 < y_2$. As soluções de (3.20), com essas condições iniciais, irão satisfazer $0 < \overline{x}(t, y_1) < \overline{x}(t, y_2)$ e como consequência obtemos:

$$\int_0^1 a_n(t)\, \overline{x}^{n-1}(t, y_1)\, dt < \int_0^1 a_n(t)\, \overline{x}^{n-1}(t, y_2)\, dt$$

$n > m > 1$ então $n - m > 0$ e $1 - m < 0$. Multiplicando por $n - m$ a nossa última expressão, obtemos

$$(n - m) \int_0^1 a_n(t)\, \overline{x}^{n-1}(t, y_1)\, dt < (n - m) \int_0^1 a_n(t)\, \overline{x}^{n-1}(t, y_2)\, dt.$$

Somando $(1-m)\int_0^1 a_1(t)\,dt$ a ambos os lados da desigualdade acima, temos:

$$\begin{aligned}(n-m)\int_0^1 a_n(t)\,\overline{x}^{n-1}(t,y_1)\,dt &< (n-m)\int_0^1 a_n(t)\,\overline{x}^{n-1}(t,y_2)\,dt\\ +(1-m)\int_0^1 a_1(t)\,dt & \quad +(1-m)\int_0^1 a_1(t)\,dt.\end{aligned}$$

Finalmente, $\Phi(y_1) < \Phi(y_2)$, o que prova que $\Phi$ é uma função crescente. Usando $h'(y) = exp(\Phi(y))$ do Lema 3.19 e o fato de que dois ciclos limite hiperbólicos consecutivos têm diferente estabilidade, poderíamos ter três ciclos limite começando nos pontos $y_1$, $y_2$ e $y_3$, com $0 < y_1 < y_2 < y_3$, somente se $\Phi(y_1) < \Phi(y_2) = 0 < \Phi(y_3)$. Assim, no caso de existir três ciclos limite, o do meio é semi-estável. Neste ponto, podemos alterar nossa equação adicionando o parâmetro $\epsilon$ como em (3.19).

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_n(t)\,x^n + a_m(t)\,x^m + a_1(t)\,x + \epsilon x\\ &= a_n(t)\,x^n + a_m(t)\,x^m + (a_1(t)+\epsilon)\,x.\end{aligned}$$

Do Lema 3.20, a nova equação, que é novamente da forma (3.20) com o mesmo $a_n(t)$, tem quatro ciclos limite. Este fato é uma contradição com a cota superior provada acima, onde fala que a cota superior é três, pois se assumimos, por exemplo, $y^* < y_1$, então como $\mathit{\Phi}$ é crescente e temos $\mathit{\Phi}(y^*) < \mathit{\Phi}(y_1) < 0$, daí $h'(y^*) = exp(\mathit{\Phi}(y^*)) < 1$, ou seja, $\overline{x}(t,y^*)$ seria um ciclo limite estável mais isto não pode acontecer, pois ciclos limites consecutivos têm diferente estabilidade. Daí que a cota superior é dois ciclos limite, sendo o mais próximo da origem estável e o outro instável. Consequentemente, a cota superior dada no Teorema segue quando $n$ é ímpar.

Provemos agora o caso quando $n$ é par. A principal mudança na prova é que quando, $a_n(t) \geq 0$, a função $\Phi$ é crescente para todo $y \in \mathbb{R}$ em qual $h(y)$ é definido. De fato, $n$ é par, então $n-1$ é impar. Tomemos $y_1 < y_2$ onde as soluções de (3.20) com essas condições iniciais irão satisfazer $\overline{x}(t,y_1) < \overline{x}(t,y_2)$ e como consequência obtemos,

$$\begin{aligned}(n-m)\int_0^1 a_n(t)\,\overline{x}^{n-1}(t,y_1)\,dt &< (n-m)\int_0^1 a_n(t)\,\overline{x}^{n-1}(t,y_2)\,dt\\ +(1-m)\int_0^1 a_1(t)\,dt & \quad +(1-m)\int_0^1 a_1(t)\,dt\\ \mathit{\Phi}(y_1) &< \mathit{\Phi}(y_2).\end{aligned}$$

O que prova que $\mathit{\Phi}$ é crescente para todo $y \in \mathbb{R}$. Essa diferença força a existência de no máximo quatro ciclos limite começando nos pontos $y_1 < 0 < y_2 < y_3$. De fato, primeiramente afirmamos que $\Phi$ é negativo nos pontos $y_1$, $0$ e $y_2$, isto implica que $h'(y_2) = exp(\mathit{\Phi}(y_2)) < 1$, ou seja, $\overline{x}(t,y_2)$ é um ciclo limite estável. Se $\mathit{\Phi}(y_3) < 0$, então $h'(y_3) = exp(\mathit{\Phi}(y_3)) < 1$, ou seja, $\overline{x}(t,y_3)$ é um ciclo limite estável, como $\mathit{\Phi}$ é crescente, temos $\mathit{\Phi}(y_2) < \mathit{\Phi}(y_3) < 0$, daí $h'(y_2) = exp(\mathit{\Phi}(y_2)) < 1$, onde $\overline{x}(t,y_2)$ também seria ciclo limite estável, mais dois ciclos limites hiperbólicos consecutivos têm diferente estabilidade. Daí,

$\overline{x}(t, y_3)$ é instável e $\overline{x}(t, y_2)$ é estável. Pelo Lema 3.19, a estabilidade da origem é dado pela sinal de $-\Phi(0)$, que fornece a possibilidade de alternância de sinal e assim a existência de alternar ciclos limite estáveis e instáveis. Como $\mathit{\Phi}(y_1) < 0$ segue imediatamente que $\overline{x}(t, y_1)$ é ciclo limite estável e se tivéramos $y^* < y_1$, o ciclo limite $\overline{x}(t, y^*)$ seria também estável, mais isso não pode acontecer. Daí, só temos no máximo 4 ciclos limites ∎

**Proposição 3.22.** *Dado qualquer numero natural $l$ e números naturais fixos $p > n > m \geq 2$, existe uma equação da forma:*

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{\epsilon}x^p + \epsilon f(t)\, x^n + a(t)\, x^m + \delta x, \tag{3.21}$$

*com $f$ e $a$ polinômios trigonométricos; $|\tilde{\epsilon}|$ é suficientemente pequeno ou $\tilde{\epsilon} = 0$, e $|\delta|$ também suficientemente pequeno ou $\delta = 0$, que tem pelo menos $l$ ciclos limite.*

**Demonstração:**

A demonstração desta Proposição, feita em [5], é uma adaptação do que fizeram em [10] para o caso $n = 3$, $m = 2$. Consideremos a equação:

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon f(t)\, x^n + a(t)\, x^m,\ t \in [0,1]. \tag{3.22}$$

Defina $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)\, ds$ e tome $a(t)$ tal que $A(1) = 0$, Coloque $\overline{A} = \max_{t\in[0,1]} |A(t)|$. Denotando por $\varphi(t, x, \epsilon)$ a solução de (3.22), para $\tilde{\epsilon} = 0$ e $|x| \leq \left((m-1)\overline{A}\right)^{\frac{1}{(1-m)}}$, obtemos:

$$\varphi_0(t, x) = x\left(\frac{1}{1-(m-1)\, A(t)\, x^{m-1}}\right)^{\frac{1}{(1-m)}}. \tag{3.23}$$

Agora, escrevemos $\varphi_\epsilon(t, x, \epsilon)$ em potências de $\epsilon$ como:

$$\varphi_\epsilon(t, x, \epsilon) = \varphi_0(t, x) + \epsilon W(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon),$$

onde $W(t, x) = \frac{\partial\varphi(t,x,0)}{\partial\epsilon}$, $W(0, x) = 0$. Seguindo argumentos típicos de perturbação, podemos ver que se $W(x) := W(1, x)$ tem um zero simples em $x_0$ então, para valores pequenos de $\epsilon$, a função $\varphi_\epsilon(1, x, \epsilon) - x$ tem também um zero simples próximo para $x_0$. A questão agora é escolher $f(t)$ e $a(t)$ tal que $W$ tenha um numero arbitrário de soluções simples e distintas. Desejamos calcular $W$ em termos de $f$ e $a$; pela equação (3.22), dado que $\varphi$ é solução, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\epsilon}\right) &= \frac{\partial\varphi'}{\partial\epsilon} = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\epsilon f(t)\varphi^n + a(t)\varphi^m\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\epsilon f(t)\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^n + a(t)\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^m\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\epsilon f(t)\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^n\right) + \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(a(t)\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^m\right)\\
&= f(t)\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left[\epsilon\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^n\right] + a(t)\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^m\\
&= f(t)\left[\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^n + \epsilon n\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^{n-1}(W+2\epsilon R)\right]\\
&\quad + a(t)\,m\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^m(W+2\epsilon R)\\
&= f(t)\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^n + \epsilon f(t)\,n\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^{n-1}(W+2\epsilon R)\\
&\quad + a(t)\,m\left(\varphi_0+\epsilon W+\epsilon^2 R\right)^m(W+2\epsilon R)\\
&= f(t)\varphi_0^n + a(t)\,m\varphi_0^{m-1}W + \mathcal{O}(\epsilon)\\
&= f(t)\varphi_0^n + a(t)\,m\varphi_0^{m-1}W + \mathcal{O}(\epsilon).
\end{aligned}
$$

Restringindo para $\epsilon = 0$ e usando (3.22) temos:

$$\frac{d}{dt}W(t,x) = f(t)\varphi_0^n + m\frac{\varphi_0'}{\varphi_0^m}\varphi_0^{m-1}W.$$

Daí:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{W}{\varphi_0^m}\right) &= \frac{\varphi_0^m\dfrac{dW}{dt} - W\dfrac{d\varphi_0^m}{dt}}{\varphi_0^{2m}}\\
&= \frac{1}{\varphi_0^m}\frac{dW}{dt} - mW\frac{\varphi_0^{m-1}}{\varphi_0^{2m}}\frac{d\varphi_0}{dt}\\
&= \frac{1}{\varphi_0^m}\left(f(t)\varphi_0^n + m\frac{\varphi_0'}{\varphi_0^m}\varphi_0^{m-1}W\right) - \frac{m\varphi_0'\varphi_0^{m-1}W}{\varphi_0^{2m}}\\
&= f(t)\frac{\varphi_0^n}{\varphi_0^m} + \frac{m\varphi_0'\varphi_0^{m-1}W}{\varphi_0^{2m}} - \frac{m\varphi_0'\varphi_0^{m-1}W}{\varphi_0^{2m}}\\
&= f(t)\varphi_0^{n-m}.
\end{aligned}
$$

Integrando a ambos lados da equação acima temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{W}{\varphi_0^m}\right)dt &= \int_0^1 f(t)\varphi_0^{n-m}dt\\
\left.\frac{W(t,x)}{(\varphi_0(t,x))^m}\right|_0^1 &= \int_0^1 f(t)\left[x\left(\frac{1}{1-(m-1)A(t)x^{m-1}}\right)^{\frac{1}{(m-1)}}\right]^{n-m}dt\\
\frac{W(1,x)}{(\varphi_0(1,x))^m} - \frac{W(0,x)}{(\varphi_0(0,x))^m} &= \int_0^1 \frac{f(t)\,x^{n-m}}{\left(1-(m-1)A(t)x^{m-1}\right)^{\frac{n-m}{(m-1)}}}dt\\
\frac{W(x)}{x^m} &= x^{n-m}\int_0^1 \frac{f(t)}{\left(1-(m-1)A(t)x^{m-1}\right)^{\frac{n-m}{(m-1)}}}dt\\
W(x) &= x^n\int_0^1 \frac{f(t)}{\left(1-(m-1)A(t)x^{m-1}\right)^{\frac{n-m}{(m-1)}}}dt.
\end{aligned}
$$

Coloque $y = x^{m-1}$, $\alpha := \dfrac{n-m}{(m-1)}$ e $a(t) = \frac{2\pi}{m-1}cos(2\pi t)$. Em vez de estudar os zeros de $W(x)$ consideremos a função:

$$H_f(y) := \int_0^1 \frac{f(t)}{(1-(m-1)A(t)y)^\alpha}dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{(1-sen(2\pi t)y)^\alpha}dt.$$

Fixando $l \in \mathbb{N}$ e um polinômio arbitrário de grau $l$, $p(y)$, provaremos que existe $f(t)$ da forma: $f(t) = \sum_{j=0}^{l} \beta_j f_j(t)$, onde $f_j(t) = sen^j(2\pi t)$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, tal que:

$$H_f(y) = p(y) + O\left(y^{l+1}\right). \tag{3.24}$$

Do resultado acima, $H_f(y)$ tem pelo menos $l$ zeros simples numa vizinhança pequena da origem, que segue como consequência direta dos Lemas 1 e 2 de [10]. Da definição de $H_f(y)$, o mesmo resultado é valido para $W(x)$.

Resta provar (3.24). Aqui usamos fortemente que $H_f$ é linear com relação a $f$. Note que:

$$\begin{aligned}
H_{f_j}(y) &= \int_0^1 \frac{f_j(t)}{(1-sen(2\pi t))^\alpha}dt \\
&= \int_0^1 sen^j(2\pi t)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha+k-1\\ k\end{array}\right) sen^k(2\pi t)\, y^k dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha+k-1\\ k\end{array}\right) sen^{j+k}(2\pi t)\, y^k dt \\
&= \int_0^1 \left\{\sum_{k=0}^{l}\left(\begin{array}{c}\alpha+k-1\\ k\end{array}\right) sen^{j+k}(2\pi t)\, y^k dt + \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha+k-1\\ k\end{array}\right) sen^{j+k}(2\pi t)\, y^k dt\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{l}\int_0^1 \left(\begin{array}{c}\alpha+k-1\\ k\end{array}\right) sen^{j+k}(2\pi t)\, y^k dt + \\
&\quad \int_0^1 \sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha+k-1\\ k\end{array}\right) sen^{j+k}(2\pi t)\, y^k dt \\
&= \sum_{k=0}^{l}\left[\int_0^1 \left(\begin{array}{c}\alpha+k-1\\ k\end{array}\right) sen^{j+k}(2\pi t)\, dt\right] y^k + \mathcal{O}\left(y^{l+1}\right),
\end{aligned}$$

onde,

$$\mathcal{O}\left(y^{l+1}\right) = \int_0^1 \sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha+k-1\\ k\end{array}\right) sen^{j+k}(2\pi t)\, y^k dt.$$

Coloque

$$C_{j,k} := \begin{pmatrix} \alpha + k - 1 \\ k \end{pmatrix} \int_0^1 sen^{j+k} (2\pi t) \, dt, \ asim \ H_{f_j}(y) = \sum_{k=0}^{l} C_{j,k} y^k + O\left(y^{l+1}\right).$$

Observe também que se definimos a matriz $C = (C_{j,k})_{j,k=0}^{l}$, então:

$$det\, C = \prod_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} \alpha + k - 1 \\ k \end{pmatrix} det\, G$$

onde $G = (g_{j,k})_{j,k=0}^{l}$ é uma nova matriz, com $g_{j,k} = \displaystyle\int_0^1 sen^{j+k}(2\pi t) \, dt$. Como a matriz $G$ é a matriz do produto interno em $\langle f_0, f_1, ..., f_l \rangle$, dado por $f.g = \displaystyle\int_0^1 f(t) \, g(t) \, dt$, temos que $det\, G \neq 0$. Portanto, da linearidade de $H_f$ se segue que dado qualquer polinômio $p(y)$, existem valores únicos $\beta_0, ..., \beta_l$ de modo que o $f$ associado satisfaça (3.24) como queríamos provar. Para finalizar a prova da proposição 3.22, basta considerar a seguinte perturbação de (3.22).

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{\epsilon} x^p + \epsilon f(t) \, x^n + a(t) \, x^m + \delta x.$$

Então, tomemos um sistema com $\tilde{\epsilon} = \delta = 0$ e $l$ ciclos limite simples. Para $|\tilde{\epsilon}|$ e $|\delta|$ suficientemente pequenos, podemos garantir que todos eles persistam. ■

**Teorema 3.23.** *Consideremos a equação de Abel generalizada de período 1,*

$$\frac{dx}{dt} = a_n(t) \, x^n + a_2(t) \, x^2 + a_1(t) \, x + a_0(t), \tag{3.25}$$

*com $a_n, a_2, a_1, a_0 \in \mathcal{C}^1$. Suponhamos que $a_n(t)$ não muda de sinal. Então:*

1. *Se $n \geq 3$ é ímpar, a equação (3.25) tem no máximo 3 ciclos limite tendo em conta as suas multiplicidades.*

2. *Se $n \geq 4$ é par, para qualquer $l \in \mathbb{N}$, existe uma equação do tipo (3.25) tendo pelo menos $l$ ciclos limite.*

**Demonstração:**

Seguindo os mesmos argumentos da prova do Teorema 3.21, neste caso suponha que $a_n(t) \geq 0$.

Para provar o item (1) usamos o fato que a terceira derivada da aplicação de retorno $h$, da equação diferencial $\dfrac{dx}{dt} = S(t, x)$, satisfaz

$$\begin{aligned} h'''(y) &= h'(y) \left[ \tfrac{3}{2} \left( \tfrac{h''(y)}{h'(y)} \right)^2 + \int_0^1 \tfrac{\partial^3 S(t, \overline{x}(t,y))}{\partial x^3} exp \left\{ 2 \int_0^t \tfrac{\partial S(s, \overline{x}(s,y))}{\partial x} ds \right\} dt \right] \\ &= n(n-1)(n-2) \int_0^1 a_n(t) \, x^{n-3}(t, y) \, dt > 0, \end{aligned}$$

(Ver [11]). Note que as soluções satisfazendo $x(0) = x(1)$ correspondem a zeros de $\mathcal{D}(y) = h(y) - y$. Suponha que $h(y) - y$ tem 4 zeros (levando em conta multiplicidades). Aplicando o Teorema de Rolle sucessivamente para $\mathcal{D}(y) = h(y) - y$, $\mathcal{D}'(y) = h'(y) - 1$ e $\mathcal{D}''(y) = h''(y)$, podemos inferir que $h'''(y)$ se anula, o que seria uma contradição, pois $h'''(y) > 0$. Portanto, a equação (3.25), com $n$ ímpar, tem no máximo 3 ciclos limite satisfazendo $x(0) = x(1)$, levando em conta suas multiplicidades.

Observemos a importância da potência par em $x^{n-3}$ a qual é a diferencia entre a parte (1) e a parte (2). Para iniciar a prova da parte (2), consideremos uma equação da forma:

$$z' = \tilde{f}(t) z^3 + \tilde{a}(t) z^2. \tag{3.26}$$

com $\tilde{f}(t)$ e $\tilde{a}(t)$ polinômios trigonométricos e tendo pelo menos $l$ ciclos limite hiperbólicos. A existência desta equação é provada em [10], ver também a Proposição 3.22, com $\tilde{\epsilon} = \delta = 0$, $m = 3$ e $n = 2$. Agora afirmamos que, para qualquer numero par $n$, podemos construir uma outra equação da forma:

$$z' = \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} f(t)^{n-3} z^3 + a(t) z^2, \tag{3.27}$$

tendo também, pelo menos, $l$ ciclos limite hiperbólicos e tendo as funções $f(t)$ e $a(t)$ de classe $\mathcal{C}^M$, para qualquer $M \in \mathbb{N}$. De fato, se exigimos somente continuidade da função $f$, o resultado é trivial, porque é suficiente tomar:

$$f(t) = \sqrt[n-3]{\frac{\tilde{f}(t)}{\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}}}.$$

A regularidade da função $f$ será alcançada através de uma escala de tempo que aumenta a ordem dos zeros de $\tilde{f}$. Denotemos por $t_1, t_2, ..., t_r$ os zeros de $\tilde{f}(t)$. Fixemos qualquer número natural ímpar $N \geq 3$ e um inteiro $k \geq N$. Consideremos também uma função crescente de classe $\mathcal{C}^k$, $\psi$ em $[0,1]$, satisfazendo $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, $\psi(t_j) = t_j$ e $\psi^{(d)}(t_j) = 0$ para todo $j = 1, ..., r$ e para todo $d = 1, ..., N-1$. Suponha também que $\psi'$ só se anula em $[0,1]$ nos valores $t_1, t_2, ..., t_r$. Se aplicamos a mudança de variável $t = \psi(\tau)$, a equação (3.26) pode-se escrever como:

$$z' = \tilde{f}(\psi(\tau)) \psi'(\tau) z^3 + \tilde{a}(\psi(\tau)) \psi'(\tau) z^2,$$

Notemos que os zeros de $\hat{f}(\tau) := \tilde{f}(\psi(\tau)) \psi'(\tau)$ são também $\tau = t_j$, $j = 1, 2, ..., r$. Além disso, para cada $j, \tau = t_j$, tem pelo menos multiplicidade $2N-1$ para $\hat{f}(\tau)$. A função definida por:

$$f(\tau) := \sqrt[n-3]{\frac{\widehat{f}(\tau)}{\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

possui regularidade, pelo menos, de classe $\mathcal{C}^M$, sendo $M$ a parte inteira de $\frac{2N-1}{n-3}$. Notemos que, já que $N$ é arbitrário, $M$ pode ser escolhido arbitrariamente. Finalmente consideremos a seguinte perturbação da equação (3.27), ou seja,

$$z' = \sum_{k=4}^{n} \epsilon^{k-3} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f(t)^{n-k} z^k + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} f(t)^{n-3} z^3 + a(t) z^2. \tag{3.28}$$

A equação (3.28) mantém os $l$ ciclos limite para o $|\epsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno. Além disso, fazendo a mudança de variáveis:

$$x(t) = z(t) + \frac{f(t)}{\epsilon}$$

(3.28) é transformado em:

$$x' = \epsilon^{n-3} x^n + C_{n,2}(\epsilon, t) x^2 + C_{n,1}(\epsilon, t) x + C_{n,0}(\epsilon, t), \tag{3.29}$$

com $C_{n,j}(\epsilon, t)$, $j = 0, 1, 2$, sendo expressões polinomiais em $f(t)$, $f'(t)$ e $\frac{1}{\epsilon}$. De fato,

$$z(t) = x(t) - \frac{f(t)}{\epsilon},$$

$$z'(t) = x'(t) - \frac{f'(t)}{\epsilon},$$

$$\begin{aligned} x'(t) - \tfrac{f'(t)}{\epsilon} = & \sum_{k=4}^{n} \epsilon^{k-3} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f(t)^{n-k} \left(x(t) - \tfrac{f(t)}{\epsilon}\right)^k + \\ & \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} f(t)^{n-3} \left(x(t) - \tfrac{f(t)}{\epsilon}\right)^3 + a(t) \left(x(t) - \tfrac{f(t)}{\epsilon}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left(x(t) - \tfrac{f(t)}{\epsilon}\right)^k &= \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} x^{k-j} \left(-\tfrac{f(t)}{\epsilon}\right)^j = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{k-j} f(t)^j, \\ \left(x(t) - \tfrac{f(t)}{\epsilon}\right)^3 &= \sum_{j=0}^{3} \begin{pmatrix} 3 \\ j \end{pmatrix} x^{3-j} \left(-\tfrac{f(t)}{\epsilon}\right)^j = \sum_{j=0}^{3} \begin{pmatrix} 3 \\ j \end{pmatrix} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{3-j} f(t)^j, \\ \left(x(t) - \tfrac{f(t)}{\epsilon}\right)^2 &= \sum_{j=0}^{2} \begin{pmatrix} 2 \\ j \end{pmatrix} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{2-j} f(t)^j. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.30), temos

$$\begin{aligned}
x'(t) - \tfrac{f'(t)}{\epsilon} &= \sum_{k=4}^{n} \epsilon^{k-3} \binom{n}{k} f(t)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{k-j} f(t)^j + \\
&\binom{n}{3} f(t)^{n-3} \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{3-j} f(t)^j \\
&+ a(t) \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{2-j} f(t)^j .
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o primeiro termo do lado esquerdo da igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=4}^{n} \epsilon^{k-3} \binom{n}{k} f(t)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{k-j} f(t)^j = \\
&= \epsilon^{n-3} \binom{n}{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{n-j} f(t)^j + \\
&\quad \sum_{k=4}^{n-1} \epsilon^{k-3} \binom{n-1}{k} f(t)^{n-1-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{k-j} f(t)^j \\
&= \epsilon^{n-3} \binom{n}{0} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^0 x^n + \epsilon^{n-3} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{n-j} f(t)^j + \\
&\quad \sum_{k=4}^{n-1} \epsilon^{k-3} \binom{n-1}{k} f(t)^{n-1-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{0} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^j x^{k-j} f(t)^j ,
\end{aligned}$$

onde $\epsilon^{n-3} \binom{n}{0} \left(-\tfrac{1}{\epsilon}\right)^0 x^n = \epsilon^{n-3} x^n$. Assim, simplificando, obtemos a equação (3.29) que é da forma:

$$x' = a_n(t)\, x^n + a_2(t)\, x^2 + a_1(t)\, x + a_0(t),$$

com $n$ par e $a_n(t) \neq 0$ para todo $t$.■

**Observação 3.24.** *Os coeficientes de* (3.29) *são:*

$$C_{n,0}(\varepsilon, t) = \varepsilon^{n-3} \left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)^n f(t)^n + \sum_{k=4}^{n-1} \varepsilon^{k-3} \binom{n-1}{k} f(t)^{n-1} \left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)^k + \frac{f'(t)}{\varepsilon},$$

$$\begin{aligned}
C_{n,1}(\varepsilon, t) &= \varepsilon^{n-3} \left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)^{n-1} \binom{n}{n-1} f(t)^{n-1} + \\
&\sum_{k=4}^{n-1} \varepsilon^{k-3} \binom{n-1}{k} f(t)^{n-2} \left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)^{k-1} \binom{k}{k-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{n,2}(\varepsilon,t) &= \varepsilon^{n-3}\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)^{n-2}\begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix} f(t)^{n-2} + \\ &\sum_{k=4}^{n-1}\varepsilon^{k-3}\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} f(t)^{n-3}\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)^{k-2}\begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# Capítulo 4

# ALGUMAS APLICAÇÕES PARA O SISTEMA POLINOMIAL PLANAR

Nesta seção, nosso objetivo é apresentar algumas aplicações dos teoremas estudados na seção 3, as principais referencias são [19] e [5]. A principal motivação para o análise das Equações Diferenciais polinomiais da primeira ordem é o estudo da existência e multiplicidade do ciclos limite de campos vetoriais polinomiais no plano. Um ramo interessante e complicado na teoria qualitativa de Equações diferenciais, que em particular, contém a segunda parte do 16 problema de Hilbert, proposto por Hilbert em 1900.

Consideremos o seguinte sistema planar:

$$\begin{cases} x' = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k(x,y), \\ y' = \sum\limits_{k=1}^{n} Q_k(x,y), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $P_k$ e $Q_k$ são polinómios homogêneos de grau $k$. Uma órbita periódica isolada do sistema (4.1) é chamado um ciclo limite. Mudaremos o sistema (4.1) em coordenadas polares. Primeiramente consideremos um sistema homogéneo

$$\begin{cases} x' = \sum\limits_{v=0}^{k} p_{k-v,v} x^{k-v} y^{v} = P_k(x,y), \\ y' = \sum\limits_{v=0}^{k} q_{k-v,v} x^{k-v} y^{v} = Q_k(x,y). \end{cases} \tag{4.2}$$

Fazendo a mudança de coordenadas, para $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$ e derivando $x$ e $y$, temos, $x' = r'cos\theta - rsen\theta\theta'$ e $y' = r'sen\theta + rcos\theta\theta'$. Substituindo em (4.2), obtemos

$$\begin{cases} r'cos\theta - rsen\theta\theta' = \displaystyle\sum_{v=0}^{k} p_{k-v,v}\,(rcos\theta)^{k-v}\,(rsen\theta)^{v}\,, \\ r'sen\theta + rcos\theta\theta' = \displaystyle\sum_{v=0}^{k} q_{k-v,v}\,(rcos\theta)^{k-v}\,(rsen\theta)^{v}\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

A partir de (4.3), obtemos $r'$ e $\theta'$:

$$r' = \frac{\begin{vmatrix} \displaystyle\sum_{v=0}^{k} p_{k-v,v}\,(rcos\theta)^{k-v}\,(rsen\theta)^{v} & -rsen\theta \\ \displaystyle\sum_{v=0}^{k} q_{k-v,v}\,(rcos\theta)^{k-v}\,(rsen\theta)^{v} & rcos\theta \end{vmatrix}}{r}$$

$$r' = \frac{rcos\theta\displaystyle\sum_{v=0}^{k} p_{k-v,v}\,(rcos\theta)^{k-v}\,(rsen\theta)^{v} + rsen\theta\displaystyle\sum_{v=0}^{k} q_{k-v,v}\,(rcos\theta)^{k-v}\,(rsen\theta)^{v}}{r}$$

$$r' = \sum_{v=0}^{k} p_{k-v,v} r^{k} cos^{k-v+1}\theta sen^{v}\theta + \sum_{v=0}^{k} q_{k-v,v} r^{k} cos^{k-v}\theta sen^{v+1}\theta$$

$$\theta' = \frac{\begin{vmatrix} cos\theta & \displaystyle\sum_{v=0}^{k} p_{k-v,v}\,(rcos\theta)^{k-v}\,(rsen\theta)^{v} \\ sen\theta & \displaystyle\sum_{v=0}^{k} q_{k-v,v}\,(rcos\theta)^{k-v}\,(rsen\theta)^{v} \end{vmatrix}}{r}$$

$$\theta' = \frac{cos\theta\displaystyle\sum_{v=0}^{k} q_{k-v,v}\,(rcos\theta)^{k-v}\,(rsen\theta)^{v} - sen\theta\displaystyle\sum_{v=0}^{k} p_{k-v,v}\,(rcos\theta)^{k-v}\,(rsen\theta)^{v}}{r}$$

$$\theta' = \frac{1}{r}\left(\sum_{v=0}^{k} q_{k-v,v} r^{k} cos^{k-v+1}\theta sen^{v}\theta - \sum_{v=0}^{k} p_{k-v,v} r^{k} cos^{k-v}\theta sen^{v+1}\theta\right)$$

$$\theta' = \sum_{v=0}^{k} q_{k-v,v} r^{k-1} cos^{k-v+1}\theta sen^{v}\theta - \sum_{v=0}^{k} p_{k-v,v} r^{k-1} cos^{k-v}\theta sen^{v+1}\theta.$$

Assim, o sistema em coordenadas polares é

$$\begin{cases} r' = r^{k}\displaystyle\sum_{v=0}^{k} \left(cos\theta p_{k-v,v} cos^{k-v}\theta sen^{v}\theta + sen\theta q_{k-v,v} cos^{k-v}\theta sen^{v}\theta\right) \\ \theta' = r^{k-1}\displaystyle\sum_{v=0}^{k} \left(cos\theta q_{k-v,v} cos^{k-v}\theta sen^{v}\theta - sen\theta p_{k-v,v} cos^{k-v}\theta sen^{v}\theta\right), \end{cases}$$

o qual podemos escrever como:

$$\begin{cases} r' = r^k f_k(\theta), \\ \theta' = r^{k-1} g_k(\theta), \end{cases} \tag{4.4}$$

onde

$$\begin{cases} f_k(\theta) & = cos\theta P_k(cos\theta, sen\theta) + sen\theta Q_k(cos\theta, sen\theta), \\ g_k(\theta) & = cos\theta Q_k(cos\theta, sen\theta) + sen\theta P_k(cos\theta, sen\theta). \end{cases} \tag{4.5}$$

De (4.5), segue que o sistema (4.1) pode ser escrito em coordenadas polares como:

$$\begin{cases} r' = \sum_{k=1}^{n} f_k(\theta) r^k, \\ \theta' = \sum_{k=1}^{n} g_k(\theta) r^{k-1}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Em alguns casos particulares, pode-se escrever o sistema (4.6) como uma só equação do tipo (3.10) com variável independente $\theta$. Então, as soluções fechadas isoladas de (3.10) corresponderam para os ciclos limites da equação (4.1).

Os resultados obtidos nas seções anteriores serão usados para o estudo de alguns exemplos particulares. O primeiro exemplo pertence aos sistemas rígidos, isto é, sistemas tendo ao origem do tipo foco ou de tipo centro.

**Proposição 4.1.** *Consideremos o sistema:*

$$\begin{cases} x' = ax - cy + \sum_{k=1}^{n-1} xF_k(x,y), \\ y' = cx + ay + \sum_{k=1}^{n-1} yF_k(x,y), \end{cases} \tag{4.7}$$

*onde* $a < 0 < c$ *e* $F_k$ *são polinómios homogêneos de grau* $k$. *Suponha que existem alguns* $j = 2, ..., n-1$ *tais que,* $F_k(cos\theta, sen\theta) \geq 0$ *para todo* $k = j, ..., n$ *e* $\theta \in [0, 2\pi]$, *e além disso* $\sum_{k=j}^{n-1} F_k(cos\theta, sen\theta) > 0$ *para todo* $\theta \in [0, 2\pi]$. *Então, o sistema* (4.7) *tem pelo menos um ciclo limite.*

**Demonstração:**

Primeiramente mudamos o sistema (4.7) para coordenadas polares $x = rcos\theta$,

$y = rsen\theta$ e as derivadas $x' = r'cos\theta - rsen\theta\theta'$ e $y' = r'sen\theta + rcos\theta\theta'$.

$$\begin{cases} r'cos\theta - rsen\theta\theta' = arcos\theta - crsen\theta + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} rcos\theta F_k\left(rcos\theta, rsen\theta\right), \\ r'sen\theta + rcos\theta\theta' = crcos\theta + arsen\theta + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} rsen\theta F_k\left(rcos\theta, rsen\theta\right). \end{cases} \tag{4.8}$$

A partir de (4.8) obtemos $r'$ $e$ $\theta'$.

$$\begin{aligned} r' &= \frac{\begin{vmatrix} arcos\theta - crsen\theta + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} rcos\theta F_k r^k & -rsen\theta \\ crcos\theta + arsen\theta + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} rsen\theta F_k r^k & rcos\theta \end{vmatrix}}{r} \\ &= \frac{1}{r}\left(ar^2 + \sum_{k=1}^{n-1} r^2 F_k r^k\right) \\ &= ar + \sum_{k=1}^{n-1} F_k\left(cos\theta, sen\theta\right) r^{k+1} \\ &= ar + \sum_{k=2}^{n} F_{k-1}\left(cos\theta, sen\theta\right) r^k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{\begin{vmatrix} cos\theta & arcos\theta - crsen\theta + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} rcos\theta F_k r^k \\ sen\theta & crcos\theta + arsen\theta + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} rsen\theta F_k r^k \end{vmatrix}}{r} \\ &= \frac{cr\left(sen^2\theta + cos^2\theta\right)}{r} \\ &= c. \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} r' = ar + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} F_{k-1}\left(cos\theta, sen\theta\right) r^k, \\ \theta' = c. \end{cases} \tag{4.9}$$

Tomando $r$ em função de $\theta$, temos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a}{c} r + \frac{1}{c}\sum_{k=2}^{n} F_{k-1}\left(cos\theta, sen\theta\right) r^k. \tag{4.10}$$

A equação (4.10) é a equação diferencial de Abel no caso quando $a_0 \equiv 0$. Vejamos se satisfaz as condições do Teorema 3.4. Por hipótese, temos que: $a < 0 < c$, então $\frac{a}{c} < 0$. Daí:

$$\int_0^{2\pi} \frac{a}{c} dt = \frac{a}{c} \int_0^{2\pi} dt = \frac{a}{c} t \mid_0^{2\pi} = \frac{2\pi a}{c} < 0.$$

Portanto, $\int_0^{2\pi} a_1(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{a}{c} dt < 0$. Pelo Teorema 3.4, temos que nossa equação diferencial de primeira ordem (Equação de Abel), tem pelo menos uma solução fechada, isolada e positiva. Então o sistema considerado tem pelo menos um ciclo limite.■

**Proposição 4.2.** *Considere o sistema:*

$$\begin{cases} x' = \lambda x + P_{m+1}(x,y) + \sum_{k=2}^{n} x F_{mk}(x,y), \\ y' = \lambda x + Q_{m+1}(x,y) + \sum_{k=2}^{n} y F_{mk}(x,y), \end{cases} \tag{4.11}$$

*onde $m \in \mathbb{N}$ e $F_{mk}$ são polinômios de grau $mk$. Se $g_{m+1}(\theta) > 0$ ($< 0$ respetivamente) para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\int_0^{2\pi} \frac{f_{m+1}(\theta)}{g_{m+1}(\theta)} d\theta \neq 0$, então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que,* (4.11) *tem pelo menos um ciclo limite para todo $0 < \lambda < \lambda_0$.*

**Demonstração:**

Mudando o sistema para as coordenadas polares, onde $x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$ e as derivadas $x' = r'cos\theta - rsen\theta\theta'$ e $y' = r'sen\theta + rcos\theta\theta'$, obtemos

$$\begin{cases} r'cos\theta - rsen\theta\theta' = \lambda rcos\theta + P_{m+1}(rcos\theta, rsen\theta) + \sum_{k=2}^{n} rcos\theta F_{mk}(rcos\theta, rsen\theta), \\ r'sen\theta + rcos\theta\theta' = \lambda rcos\theta + Q_{m+1}(rcos\theta, rsen\theta) + \sum_{k=2}^{n} rsen\theta F_{mk}(rcos\theta, rsen\theta). \end{cases}$$

A partir deste sistema obtemos $r'$ e $\theta'$,

$$\begin{aligned} r' &= \frac{\begin{vmatrix} \lambda rcos\theta + r^{m+1}P_{m+1} + rcos\theta\sum_{k=2}^{n} F_{mk}r^{mk} & -rsen\theta \\ \lambda rsen\theta + r^{m+1}Q_{m+1} + rsen\theta\sum_{k=2}^{n} F_{mk}r^{mk} & rcos\theta \end{vmatrix}}{r} \\ &= \frac{r}{r}\left(\lambda r + r^{m+1}cos\theta P_{m+1} + r^{m+1}sen\theta Q_{m+1} + r\sum_{k=2}^{n} F_{mk}r^{mk}\right) \\ &= \left(\lambda r + r^{m+1}cos\theta P_{m+1} + r^{m+1}sen\theta Q_{m+1} + r\sum_{k=2}^{n} F_{mk}r^{mk}\right). \end{aligned}$$

Agora obtemos também $\theta'$.

$$\begin{aligned}
\theta' &= \frac{\begin{vmatrix} cos\theta & \lambda r cos\theta + r^{m+1}P_{m+1} + r cos\theta \displaystyle\sum_{k=2}^{n} F_{mk} r^{mk} \\ sen\theta & \lambda r sen\theta + r^{m+1}Q_{m+1} + r sen\theta \displaystyle\sum_{k=2}^{n} F_{mk} r^{mk} \end{vmatrix}}{r} \\
&= \frac{r^{m+1}}{r} cos\theta Q_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right) - \frac{r^{m+1}}{r} sen\theta P_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right) \\
&= \theta' = r^{m}\left(cos\theta Q_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right) - sen\theta P_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right)\right).
\end{aligned}$$

Assim, com $r'$ e $\theta'$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} r' = & \lambda r + r^{m+1} cos\theta P_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right) + r^{m+1} sen\theta Q_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right) + \\ & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} F_{mk}\left(cos\theta, sen\theta\right) r^{mk+1} \\ \theta' = & r^{m}\left(cos\theta Q_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right) - sen\theta P_{mk}\left(cos\theta, sen\theta\right)\right) \end{cases}$$

Fazendo:

$$f_{m+1}\left(\theta\right) = cos\theta P_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right) + sen\theta Q_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right)$$

$$g_{m+1}\left(\theta\right) = cos\theta Q_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right) - sen\theta P_{m+1}\left(cos\theta, sen\theta\right),$$

nosso sistema em coordenadas polares é

$$\begin{cases} r' = \lambda r + f_{m+1}\left(\theta\right) r^{m+1} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} F_{mk}\left(cos\theta, sen\theta\right) r^{mk+1}, \\ \theta' = g_{m+1}\left(\theta\right) r^{m}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Agora, consideremos também a seguinte mudança: $R = r^m$. Derivando, obtemos

$$\frac{dR}{dt} = mr^{m-1}\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{dR}{dt} = m\lambda R + mR^2 f_{m+1}\left(\theta\right) + \sum_{k=2}^{n} F_k\left(cos\theta, sen\theta\right) mR^{k+1}.$$

Tomando $R$ em função de $\theta$.

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{mR}{g_{m+1}\left(\theta\right) R}\left(\lambda + R f_{m+1}\left(\theta\right) + \sum_{k=2}^{n} F_k\left(cos\theta, sen\theta\right) R^k\right)$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{m}{g_{m+1}\left(\theta\right)}\left(\lambda + R f_{m+1}\left(\theta\right) + \sum_{k=2}^{n} F_k\left(cos\theta, sen\theta\right) R^k\right)$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{m}{g_{m+1}\left(\theta\right)}\lambda R^0 + \frac{f_{m+1}\left(\theta\right)}{g_{m+1}\left(\theta\right)} R + \sum_{k=2}^{n} F_k\left(cos\theta, sen\theta\right) R^k. \tag{4.13}$$

(4.13) é uma equação diferencial de Abel do tipo (3.10). Vejamos que essa equação diferencial satisfaz as hipóteses do Teorema 3.10. De fato,

$$\int_0^{2\pi} a_1(t)\,dt = \int_0^{2\pi} m\frac{f_{m+1}(\theta)}{g_{m+1}(\theta)}d\theta = m\int_0^{2\pi}\frac{f_{m+1}(\theta)}{g_{m+1}(\theta)}d\theta \neq 0$$

$$a_0(t) = \lambda P(t) = \lambda\left(\frac{m}{g_{m+1}(\theta)}\right).$$

Pelo Teorema 3.10, existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$ existe, ao menos, uma solução fechada isolada da equação $\dfrac{dR}{d\theta} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j(\theta) R^j$, onde:

$$a_0(\theta) = \frac{m}{g_{m+1}(\theta)},\ a_1(\theta) = \frac{m f_{m+1}(\theta)}{g_{m+1}(\theta)},$$

$$a_j(\theta) = \frac{m}{g_{m+1}(\theta)} F_j(cos\theta, sen\theta),\ \forall j \geq 2.$$

Então, o sistema considerado tem pelo menos um ciclo limite. ∎

**Proposição 4.3.** *Considere o sistema:*

$$\begin{cases} x' = & -y + x\left[f_0 + f_{m-1}(x,y) + f_{n-1}(x,y)\right] \\ y' = & x + y\left[f_0 + f_{m-1}(x,y) + f_{n-1}(x,y)\right] \end{cases} \tag{4.14}$$

*sendo $f_i(x,y)$ polinômios homogêneos de grau $i$ e $0 < m < n$. Suponhamos que $f_{n-1}(cos\theta, sen\theta)$ ou $f_{m-1}(cos\theta, sen\theta)$ não mudam de sinal. Então o sistema tem no máximo dois ciclos limite.*

**Demonstração:**

Mudando o sistema para as coordenadas polares, onde $x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$ e as derivadas $x' = r'cos\theta - rsen\theta\theta'$, $y' = r'sen\theta - rcos\theta\theta'$:

$$\begin{cases} r'cos\theta - rsen\theta\theta' = & -rsen\theta + rcos\theta\left[f_0 + r^{m-1}f_{m-1}(cos\theta, sen\theta) + \right. \\ & \left. r^{n-1}f_{n-1}(cos\theta, sen\theta)\right], \\ r'sen\theta - rcos\theta\theta' = & rcos\theta + rsen\theta\left[f_0 + r^{m-1}f_{m-1}(cos\theta, sen\theta) + \right. \\ & \left. r^{n-1}f_{n-1}(cos\theta, sen\theta)\right]. \end{cases} \tag{4.15}$$

Consideremos

$$F(r,\theta) = f_0 + r^{m-1}f_{m-1}(cos\theta, sen\theta) + r^{n-1}f_{n-1}(cos\theta, sen\theta).$$

A partir do sistema (4.15), obtemos $r'$ e $\theta'$:

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{\begin{vmatrix} -rsen\theta + rcos\theta F(r,\theta) & -rsen\theta \\ rcos\theta + rsen\theta F(r,\theta) & rcos\theta \end{vmatrix}}{r} \\
&= \frac{-r^2cos\theta sen\theta + r^2cos^2\theta F(r,\theta) + r^2cos\theta sen\theta + r^2sen^2\theta F(r,\theta)}{r} \\
&= \frac{r^2F(r,\theta)}{r} = rF(r,\theta)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta' &= \frac{\begin{vmatrix} cos\theta & -rsen\theta + rcos\theta F(r,\theta) \\ sen\theta & rcos\theta + rsen\theta F(r,\theta) \end{vmatrix}}{r} \\
&= \frac{rcos^2\theta + rcos\theta sen\theta F(r,\theta) + rsen^2\theta - rcos\theta sen\theta F(r,\theta)}{r} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Tomando $r$ em função de $\theta$ e substituindo $F(r,\theta)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= r\left[f_0 + r^{m-1}f_{m-1}(cos\theta, sen\theta) + r^{n-1}f_{n-1}(cos\theta, sen\theta)\right] \\
\frac{dr}{d\theta} &= rf_0 + r^mf_{m-1}(cos\theta, sen\theta) + r^nf_{n-1}(cos\theta, sen\theta)
\end{aligned}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = f_{n-1}(cos\theta, sen\theta)\, r^n + f_{m-1}(cos\theta, sen\theta)\, r^m + f_0r, \tag{4.16}$$

onde (4.16) é uma equação diferencial da forma (3.20). Além disso, como $0 < m < n$ então $-1 < m-1 < n-1$ onde $m-1$ e $n-1$ são números naturais, temos $0 < m-1 < n-1$ daí $1 < m < n$. Portanto, nosso sistema tem no máximo dois ciclos limite.■

Finalmente, consideremos um sistema sem parte linear.

**Proposição 4.4.** *Considere o sistema:*

$$\begin{cases} x' = P_{m+1}(x,y) + \lambda xF_{2m}(x,y) + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} xF_{mk}(x,y), \\ y' = Q_{m+1}(x,y) + \lambda yF_{2m}(x,y) + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} yF_{mk}(x,y), \end{cases} \tag{4.17}$$

*onde $m \in \mathbb{N}$ e $F_{mk}$ são polinómios homogéneos de grau $mk$. Suponhamos as seguintes condições:*

1. *$g_{m+1}(\theta) > 0$ ($< 0$) para todo $\theta \in [0, 2\pi]$;*
2. *$\int_0^{2\pi} a_1(\theta)\, d\theta \neq 0$, sendo $a_1(\theta) = \dfrac{mf_{m+1}(\theta)}{g_{m+1}(\theta)}$;*
3. *A função $M(\theta) = -\displaystyle\int_0^{2\pi} G(\theta,s)\frac{F_{2m}(cos(s), sen(s))}{g_{m+1}(s)}ds$ é positiva para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, onde $G(\theta,s)$ é a função de Green do operador $L[x] = x' + a_1(\theta)x$, com condições periódicas dadas por (3.5).*

*Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que o sistema* (4.17), *tem pelo menos um ciclo limite para todo $\lambda > \lambda_0$.*

**Demonstração:**

Primeiramente mudamos o sistema (4.17) para outro sistema em coordenadas polares $x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$ e suas derivadas $x' = r'cos\theta - rsen\theta\theta'$ e $y' = r'sen\theta + rcos\theta\theta'$:

$$\begin{cases} r'cos\theta - rsen\theta\theta' = & P_{m+1}\left(rcos\theta, rsen\theta\right) + \lambda rcos\theta F_{2m}\left(rcos\theta, rsen\theta\right) + \\ & \displaystyle\sum_{k=3}^{n} rcos\theta F_{mk}\left(rcos\theta, rsen\theta\right), \\ r'sen\theta + rcos\theta\theta' = & Q_{m+1}\left(rcos\theta, rsen\theta\right) + \lambda rsen\theta F_{2m}\left(rcos\theta, rsen\theta\right) + \\ & \displaystyle\sum_{k=3}^{n} rsen\theta F_{mk}\left(rcos\theta, rsen\theta\right). \end{cases} \tag{4.18}$$

A partir de (4.18), obtemos $r'$ e $\theta'$,

$$\begin{aligned} r' &= \frac{\begin{vmatrix} r^{m+1}P_{m+1} + \lambda r r^{2m} cos\theta F_{2m} + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} rcos\theta F_{mk} r^{mk} & -rsen\theta \\ r^{m+1}Q_{m+1} + \lambda r r^{2m} sen\theta F_{2m} + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} rsen\theta F_{mk} r^{mk} & rcos\theta \end{vmatrix}}{r} \\ &= r^{m+1}cos\theta P_{m+1} + r^{m+1}sen\theta Q_{m+1} + \lambda r r^{2m} F_{2m} + r\sum_{k=3}^{n} F_{mk} r^{mk} \\ &= r^{m+1}\left(cos\theta P_{m+1} + sen\theta Q_{m+1}\right) + \lambda r r^{2m} F_{2m} + r\sum_{k=3}^{n} F_{mk} r^{mk} \\ &= r^{m+1} f_{m+1}\left(\theta\right) + \lambda r^{2m+1} F_{2m} + \sum_{k=3}^{n} F_{mk} r^{mk+1}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{\begin{vmatrix} cos\theta & r^{m+1}P_{m+1} + \lambda r r^{2m} cos\theta F_{2m} + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} rcos\theta F_{mk} r^{mk} \\ sen\theta & r^{m+1}Q_{m+1} + \lambda r r^{2m} sen\theta F_{2m} + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} rsen\theta F_{mk} r^{mk} \end{vmatrix}}{r} \\ &= \frac{r^{m+1}}{r}\left(cos\theta Q_{m+1} - sen\theta P_{m+1}\right) \\ &= r^{m} g_{m+1}\left(\theta\right). \end{aligned}$$

Considerando a mudança para $r$, $R = r^m$ e sua derivada é

$$
\begin{aligned}
\frac{dR}{dt} &= mr^{m-1}\frac{dr}{dt} \\
&= mr^{m-1}\left(r^{m+1}f_{m+1}(\theta)+\lambda r^{2m+1}F_{2m}(cos\theta,sen\theta)+\sum_{k=3}^{n}F_{mk}(cos\theta,sen\theta)\,r^{mk+1}\right) \\
&= mr^{2m}f_{m+1}(\theta)+\lambda mr^{3m}F_{2m}(cos\theta,sen\theta)+\sum_{k=3}^{n}F_{mk}(cos\theta,sen\theta)\,mr^{m(k+1)} \\
&= m(r^m)^2 f_{m+1}(\theta)+\lambda m(r^m)^3F_{2m}(cos\theta,sen\theta)+\sum_{k=3}^{n}F_{mk}(cos\theta,sen\theta)\,m(r^m)^{k+1} \\
&= R' = mR^2 f_{m+1}(\theta)+\lambda mR^3F_{2m}(cos\theta,sen\theta)+m\sum_{k=3}^{n}F_{mk}(cos\theta,sen\theta)\,R^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Tomando $R$ em função de $\theta$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{dR}{d\theta} &= \frac{mR}{g_{m+1}(\theta)R}\left(Rf_{m+1}(\theta)+\lambda F_{2m}(cos\theta,sen\theta)R^2+\sum_{k=3}^{n}F_{mk}(cos\theta,sen\theta)R^k\right) \\
&= \frac{m}{g_{m+1}(\theta)}\left(Rf_{m+1}(\theta)+\lambda F_{2m}(cos\theta,sen\theta)R^2+\sum_{k=3}^{n}F_{mk}(cos\theta,sen\theta)R^k\right) \\
&= \frac{mf_{m+1}(\theta)}{g_{m+1}(\theta)}R+\lambda\frac{mF_{2m}(cos\theta,sen\theta)}{g_{m+1}(\theta)}R^2+\sum_{k=3}^{n}\frac{mF_{mk}(cos\theta,sen\theta)}{g_{m+1}(\theta)}R^k,
\end{aligned}
$$

a qual é a Equação de Abel, onde $a_0(\theta)=0$. Agora

$$
\frac{dR}{d\theta}=a_1(\theta)R+\lambda P(\theta)R^2+\sum_{k=3}^{n}a_k(\theta)R^k,
$$

onde $a_1(\theta)=\dfrac{mf_{m+1}(\theta)}{g_{m+1}(\theta)}$, $a_2(\theta)=\lambda\dfrac{mF_{2m}(cos\theta,sen\theta)}{g_{m+1}(\theta)}$

e $a_k(\theta)=\dfrac{mF_{mk}(cos\theta,sen\theta)}{g_{m+1}(\theta)}$, $\forall k\geq 3$.

$$
\frac{dR}{d\theta}=a_1(\theta)R+a_2(\theta)R^2+\sum_{k=3}^{n}a_k(\theta)R^k=\sum_{k=1}^{n}a_k(\theta)R^k.
$$

Fazendo a mudança $\omega(\theta)=\dfrac{1}{R(\theta)}$ e derivando $\omega'(\theta)=-\dfrac{R'(\theta)}{R(\theta)^2}$, temos

$$
-\frac{R'}{R^2}=-a_1(\theta)\frac{R}{R^2}-a_2(\theta)\frac{R^2}{R^2}-\frac{1}{R^2}\sum_{k=3}^{n}a_k(\theta)R^k
$$

$$
-\frac{R'}{R^2}=-a_1(\theta)\frac{1}{R}-a_2(\theta)-\sum_{k=3}^{n}a_k(\theta)\left(\frac{1}{R}\right)^{-k+2}
$$

$$
\omega'=-a_1(\theta)\omega-a_2(\theta)-\sum_{k=3}^{n}a_k(\theta)\omega^{-k+2},
$$

e portanto

$$
\omega'+a_1(\theta)\omega=-\lambda P(\theta)-\sum_{k=3}^{n}a_k(\theta)\omega^{-k+2}.
$$

Consideremos a seguinte equação perturbada:

$$y' + a_1(\theta)\, y = -P(\theta) - \sum_{k=3}^{n} \epsilon^{k-1} a_k(\theta)\, y^{-k+2},$$

onde $a_1,\ P:\ [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e

$$\begin{array}{rcccl} c: & [0,2\pi]\times I\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & (t,y,\epsilon) & \longmapsto & c(t,y,\epsilon) & = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \epsilon^{k-2} a_k(\theta)\, y^{-k+2} \end{array}$$

é uma função contínua, com derivadas contínuas em $y$ e $\epsilon$. Agora, consideremos a parte linear desta equação diferencial:

$$y' + a_1(\theta)\, y = -\frac{mF_{2m}(cos\theta, sen\theta)}{g_{m+1}(\theta)} = -P(\theta)\,, \tag{4.19}$$

onde a única solução desta equação, $M(\theta)$ é positiva para todo $\theta \in [0,2\pi]$. Então, pelo Teorema 3.7 existe $\lambda_0 > \lambda$ tal que para todo $\lambda > \lambda_0$ existe pelo menos uma solução fechada isolada positiva da equação,

$$R' = \sum_{k=1}^{n} a_k(\theta)\, R^k.$$

Então, (4.17) possui pelo menos um ciclo limite. ■

# Referências Bibliográficas


[1] CABADA, A. **Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations**. SpringerBriefs in mathematics (2014).

[2] CONWAY, J.B. **A course in Functional Analysis**. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg Tokyo, (1985)

[3] CHICONE, C. **Ordinary Differential Equations With Applications**. Texts in Applied Mathematics 34, Springer-Verlag, (1999)

[4] DUMORTIER, F., LLIBRE, J. & ARTÉS, J.C. **Qualitative Theory of Planar Difeerential Systems**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2006)

[5] GASULL, A. & GUILLAMON, A. **limit cycles for generalized Abel equations** . Partially supported by the the DGES grant number BFM2002-04236-C02-2 and CONACIT grant number 2001SGR00173.

[6] GUEDES DE FIGUEIREDO, D. & FREIRIA NEVES, A. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro, IMPA, (2007)

[7] HALE, J. K. A. & KOÇAK, H. **Dynamics and Bifurcations** . Springer-Verlag (1991).

[8] HIRSCH, M. W.; SMALE, S. & DEVANEY, R. L. **Differential equations, Dynamical systems and an Introduction to chaos**. 3rd ed. Elseiver. (2013).

[9] LAKSHMIKANTHAM, V. & LEELA, S. **Existence and monotone methods for periodic solutions of first-order differential equations,**. J. Math. Anal. Appl. 91(1983)237-243.

[10] LINS NETO, A. **On the number of solutions of the equation** $dx/dt = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, x^j,\ 0 \leq t \leq 1,$ **for which** $x(0) = x(1)$. Inventiones Matematicae 59, 67-76 (1980).

[11] LLOYD N. G. **A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems**. J. Lond. Math. Soc. 20, 277-286 (1979).

[12] MELNIKOV, Y. A. & MELNIKOV M. Y. **Green's Functions**. De Gruyter studies in mathematics QC174.17.G68M45 2011

[13] MOKHTARZADEH M.R. ,POURNAKI M.R. & RAZANI A. **A note on periodic solutions of Riccati equations,**. Nonlinear Dyn (2010) 62: 119-125.

[14] NKASHAMA, M.N. **A generalized upper and lower solutions method and multiplicity results for nonlinear first-order ordinary differential equations,**. J. Math. Anal. Appl. 140(1989)381-395.

[15] OBERSNEL, F. & OMARI, P. **Old and new results for first order periodic ODEs without uniqueness: A comprehensive study by lower and upper solutions,**. Adv. Nonlinear Stud. 4(2004) 323-376.

[16] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, (1991)

[17] ROUCHE, N. & MAWHIN, J. **Équations différentielles ordinaries, Tome II: Stabilité et solutions périodiques,**. Masson et Cie, (1973).

[18] SOTOMAYOR, J. **lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, (1979).

[19] TORRES, P. J. **Existence of closed solutions for a polynomial first order diferential equation,**. J. Math. Appl. 328 (2007) 1108-1116.

# Índice Remissivo