

VANESSA DA CONCEIÇÃO GUILHERME ANTUNES

O CONJUNTO DE ROTAÇÃO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2018

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

P324c  
2018 da Conceição Guilherme Antunes, Vanessa, 1994-  
O conjunto de rotação : . / Vanessa da Conceição  
Guilherme Antunes. – Viçosa, MG, 2018.  
vii, 58f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Bernardo Melo de Carvalho.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.58.

1. conjunto de rotação. 2. endomorfismos.  
3. homeomorfismos. 4. círculo. 5. toro. I. Universidade Federal  
de Viçosa. Departamento de Matemática. Mestrado em  
Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 510

VANESSA DA CONCEIÇÃO GUILHERME ANTUNES

## O CONJUNTO DE ROTAÇÃO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

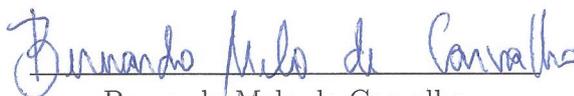
APROVADA: 22 de fevereiro de 2018.



Bulmer Mejía García



Pablo Daniel Carrasco Correa



Bernardo Melo de Carvalho  
(Orientador)

*Dedico este trabalho aos meus pais,  
Marcelino e Maria José.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois hoje, mais do que nunca, compreendo a existência de uma força maior e sei que será essa mesma força que me fará seguir sempre em frente, por qualquer caminho.

Agradeço ao meu pai Marcelino e a minha mãe Maria José, que mesmo não estando aqui para me acompanhar durante esses dois anos, nunca me abandonou e se tornou meu maior estímulo. Sei que de onde ela está, sempre estará comigo, com sua presença linda e feliz. Vocês serão sempre meus melhores professores e exemplos de humildade.

Agradeço à minha avó, pelos momentos de aconchego e carinho de sempre.

Agradeço ao meu orientador, Bernardo, pela paciência nos ensinamentos e pelo estímulo para que eu me tornasse cada vez melhor. Obrigada por me incentivar tanto a acreditar mais no meu potencial. Sem você não teríamos chegado até aqui.

Agradeço também ao meu coorientador, Walter, pela amizade e ensinamentos. Sua presença foi muito importante para a conclusão desse trabalho.

Agradeço as minhas colegas de república, por fazerem meus dias mais felizes e por compartilharem tantos momentos comigo.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês foram muito importantes para minha formação e vão continuar presentes em minha vida.

Agradeço também ao secretário do DMA-UFV, João, aos professores e demais funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

O pensamento é apenas um  
lampejo entre duas longas noites,  
mas esse lampejo é tudo.

---

Henri Poincaré

# Resumo

ANTUNES, Vanessa da Conceição Guilherme, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2018. **O conjunto de rotação**. Orientador: Bernardo Melo de Carvalho. Coorientador: Walter Teófilo Huaraca Vargas.

A noção de número de rotação foi introduzida por *H. Poincaré* (1952, referência [9]) para homeomorfismos que preservam orientação no círculo  $\mathbb{S}^1$ . Desde então vários matemáticos tentam generalizar essa noção para outras situações. Neste trabalho estudaremos a geometria do conjunto de rotação para endomorfismos no círculo  $\mathbb{S}^1$  e para homeomorfismos no toro  $m$ -dimensional  $\mathbb{T}^m$ .

# Abstract

ANTUNES, Vanessa da Conceição Guilherme, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2018. **The rotation set.** Adviser: Bernardo Melo de Carvalho. Co-adviser: Walter Teófilo Huaraca Vargas.

The notion of rotation number was introduced by *H. Poincaré* (1952, reference [9]) for homeomorphisms that preserve orientation in the circle  $\mathbb{S}^1$ . Since then several mathematicians tried to generalize this notion to other situations. In this work we will study the geometry of the rotation set for endomorphisms in the circle  $\mathbb{S}^1$  and for homeomorphisms in the  $m$ -dimensional torus  $\mathbb{T}^m$ .

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Conjunto de rotação para endomorfismos no círculo</b>	<b>5</b>
1.1 Levantamento e conjunto de rotação . . . . .	5
1.2 Propriedades do conjunto de rotação . . . . .	8
1.3 A família Arnold Tongue . . . . .	14
<b>2 Conjunto de rotação para aplicações no toro</b>	<b>21</b>
2.1 Conjunto de rotação para aplicações no toro . . . . .	21
2.2 Conjunto de rotação para medida . . . . .	24
2.3 Propriedades gerais do conjunto de rotação . . . . .	25
2.4 Propriedades do conjunto de rotação para aplicações no toro 2- dimensional . . . . .	36
2.5 Exemplos de conjuntos de rotação para homeomorfismos no toro .	42
<b>Apêndice A - Teorema de Classificação de Poincaré</b>	<b>46</b>
<b>Apêndice B - Teoria de Medida, Teoria Ergódica e Entropia     Topológica</b>	<b>53</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>58</b>

# Introdução

O objetivo da teoria de Sistemas Dinâmicos é estudar, principalmente em longo prazo, a evolução de um sistema. Uma vez conhecidas as regras de evolução de um determinado sistema, pode ser impossível, ainda assim, conhecer com boa segurança, sua evolução ao longo do tempo. É nessa perspectiva que se desenvolveu o campo dos Sistemas dinâmicos.

Diversos são os ramos de pesquisa que influenciaram o surgimento da teoria dos Sistemas dinâmicos, como por exemplo, a Física e a Biologia. Tal teoria teve contribuições de vários cientistas, como a do matemático francês *Henri Poincaré* considerado um dos criadores da moderna teoria dos Sistemas dinâmicos. As primeiras contribuições de *Poincaré* se deram com os trabalhos relacionados à Mecânica Celeste no final do século XIX.

Um sistema dinâmico pode ser definido de várias maneiras, neste trabalho vamos considerar a seguinte noção de sistema dinâmico: Seja  $X$  um conjunto não-vazio e  $f$  uma aplicação qualquer de  $X$  nele mesmo, então o par  $(X, f)$  é um *sistema dinâmico* e  $X$  é dito *espaço de fase*. As órbitas são os exemplos mais simples de sistemas dinâmicos. Dada uma aplicação  $f : X \rightarrow X$ , a órbita de um ponto  $x \in X$  é o conjunto de todos os iterados  $f^t(x)$ ,  $t \in \mathbb{N}$ . Neste cenário queremos descrever a estrutura de órbitas do sistema dinâmico, isto é, descobrir para onde converge a sequência  $(f^t(x))_{t \geq 0}$ .

Utilizando um invariante dinâmico, conhecido como número de rotação, Poincaré obteve uma classificação para os homeomorfismos que preservam orientação no círculo que ficou conhecida como *Teorema de Classificação de Poincaré* e que pode ser consultada na referência [4] ou no Apêndice A deste trabalho. Esse teorema afirma que dado um homeomorfismo  $f$  que preserva orientação no círculo, com número de rotação irracional  $\rho$ , então se  $f$  é transitivo,  $f$  é conjugado a uma rotação de ângulo  $\rho$  e se  $f$  não é transitivo,  $f$  é semi-conjugado a uma rotação de ângulo  $\rho$ .

No caso dos endomorfismos no círculo e das aplicações no toro, veremos que aparece, não mais um número de rotação, mas um *conjunto de rotação*, que é o principal objeto de estudo deste trabalho. A pergunta que pretendemos responder e que originou todo esse trabalho é a seguinte:

**Pergunta.** *Quais subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  são conjuntos de rotação de algum sistema dinâmico?*

Neste trabalho pretendemos discutir a geometria do conjunto de rotação em dois contextos diferentes:

- (1) Endomorfismos no círculo;

(2) Homeomorfismos no toro.

O caso (1) foi introduzido por *Newhouse, Palis e Takens* e pode ser encontrado na referência [1]. Dado um endomorfismo no círculo  $f_0$ , um levantamento  $f$  de  $f_0$  e um ponto  $x \in \mathbb{R}$ , o número de rotação de  $f_0$  no ponto  $x$  é dado de maneira parecida como definiu Poincaré. Consideremos a sequência  $(\frac{f^n(x)-x}{n})$  e analisemos seu maior ponto de acumulação. Para o caso de homeomorfismos que preservam orientação no círculo essa sequência sempre converge, mas para endomorfismos no círculo essa sequência pode não convergir. Veremos que na verdade só podemos garantir que essa sequência seja limitada. Desse modo, obtemos um conjunto de rotação que será dado pelo fecho do conjunto de todos os números de rotação. Uma das principais propriedades desse conjunto, obtida por *Newhouse, Palis e Takens* é

**Teorema A.** *O conjunto de rotação para endomorfismos no círculo é um intervalo fechado e limitado da reta  $\mathbb{R}$ .*

Um exemplo que ilustra esse teorema é dado pela aplicação

$$f(x) = x + \text{sen}(2\pi x).$$

Veremos que o conjunto de rotação dessa aplicação é o intervalo  $[-1, 1]$ . No caso de homeomorfismos que preservam orientação no círculo o intervalo é trivial, de modo que o conjunto de rotação na verdade é um número de rotação. Além disso, neste trabalho mostraremos o seguinte resultado

**Teorema B.** *Todo intervalo compacto da reta é conjunto de rotação de algum endomorfismo no círculo.*

De fato, a prova desse fato é baseado na família de endomorfismos conhecida como *Arnold Tongue*. Essa família é definida por

$$f(x) = x + b + a \text{sen}(2\pi x),$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Mostraremos que percorrendo os parâmetros  $a$  e  $b$ , os respectivos conjuntos de rotação percorrem todos os intervalos da reta.

O caso (2) é abordado por *Misiurewicz e Ziemman* (referência [2]) e será estudado no capítulo 2. Neste caso, temos algumas noções diferentes de conjuntos de rotação. Dado  $f$  um levantamento de alguma aplicação  $f_0 : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  contínua e homotópica à identidade e  $x \in \mathbb{R}^m$ , consideremos o conjunto  $\rho(f, x)$  de todos os limites das subsequências convergentes da sequência  $(\frac{f^n(x)-x}{n})_{n \geq 1}$ . O conjunto

$$\rho_p(f) = \cup_{x \in \mathbb{R}^m} \rho(f, x)$$

é dito *conjunto de rotação pontual* de  $f$ .

Na definição de conjunto de rotação, não há porque fixar um ponto, assim vamos tomar o limite de todas as sequências convergentes

$$\left( \frac{f^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right)_{i \geq 1}; x_i \in \mathbb{R}^m, n_i \rightarrow \infty.$$

Ao conjunto obtido chamaremos de *conjunto de rotação de  $f$* . O fato de  $f$  ser homotópica à identidade, implica que  $0 \in \rho(f)$  e portanto este conjunto é não vazio. Desse modo, restringiremos nosso estudo à aplicações que satisfaçam essa propriedade.

As principais propriedades do conjunto de rotação para este caso são

**Teorema C.** *O conjunto de rotação é um subconjunto compacto e conexo de  $\mathbb{R}^m$ . Além disso, se  $m = 2$  e a aplicação é um homeomorfismo, então o conjunto de rotação é também convexo.*

Note que o fato do conjunto de rotação ser um subconjunto compacto e convexo de  $\mathbb{R}^2$ , para homeomorfismos de  $\mathbb{T}^2$ , implica que as possibilidades do conjunto de rotação se reduzem aos seguintes casos:

- (1) um único vetor;
- (2) um segmento de reta com comprimento positivo;
- (3) um conjunto com interior não-vazio.

Exibiremos exemplos de homeomorfismos no toro  $\mathbb{T}^2$  cujos conjuntos de rotação tem exatamente cada uma destas formas acima. O caso (1) é dado por uma rotação no toro  $\mathbb{T}^2$ , onde o ângulo de rotação é um vetor de  $\mathbb{R}^2$ . Para exemplificar o caso (2) usaremos uma aplicação que dá origem a um fluxo conhecido como *Fluxo de Reeb*, o qual é construído na faixa  $(-\infty, \infty) \times [0, 1]$ . Já o caso (3) é exemplificado com um caso particular do artigo de *Kwapisz* (referência [3]). Ele mostra que cada polígono convexo com vértices racionais é conjunto de rotação de algum homeomorfismo do toro  $\mathbb{T}^2$ , homotópico à identidade.

O conjunto de rotação pode ser útil para conhecer propriedades dinâmicas do sistema, como por exemplo

**Teorema.** *Se  $\rho(F)$  tem interior não vazio, então  $f$  tem entropia positiva.*

No apêndice B definimos a noção de Entropia topológica. O teorema acima implica que  $f$  possui um comportamento dinâmico caótico.

Caso o conjunto de rotação seja um segmento de reta com comprimento positivo podem ser construídos exemplos onde o conjunto de rotação é (a) um segmento com inclinação racional e portanto, com infinitos pontos racionais ou; (b) um segmento com inclinação irracional e um ponto final racional. Já existem exemplos de homeomorfismos no toro com esse tipo de segmento de rotação que indicam que esses exemplos podem ser vistos como bons modelos para o caso geral. Além disso, já existem resultados com mais informações sobre cada um dos três casos acima. Esses avanços indicam a possibilidade de alguma classificação. No entanto, ainda não se sabe se qualquer segmento de rotação, diferente dos casos (a) e (b) acima podem ocorrer e, em caso afirmativo, quase nada se sabe sobre

as consequências dinâmicas de segmentos de rotação de tal tipo.

Na verdade, foi conjecturado por *Franks e Misiurewicz* (ver referência [6]) que estes não podem ocorrer. Essa conjectura vem desafiando muitos especialistas por mais de duas décadas e ainda existem muitos resultados parciais sobre o problema. *Artur Ávila* provou que qualquer segmento de reta com inclinação irracional é conjunto de rotação de algum homeomorfismo no toro, mas a prova desse fato ainda não foi publicada.

Em geral, uma órbita periódica sempre tem um vetor de rotação racional, mas nesse caso estamos referindo à uma dinâmica sem pontos periódicos, em particular no caso em que os segmentos de rotação não contenham nenhum ponto racional. Isso faz com que muitas técnicas da dinâmica topológica com base na existência de órbitas periódicas falhem ao aplicar. Esse fato destaca a necessidade de uma melhor compreensão da dinâmica livre dos pontos periódicos. A conjectura *Franks - Misiurewicz* foi confirmada para algumas subclasses particulares (ver referência [6] para mais detalhes), que são certamente muito restritivas em comparação com os homeomorfismos do toro geral. Mas como esses são os únicos resultados parciais existentes sobre o problema, eles se tornam o único ponto de partida óbvio para novas investigações. Na referência [6] *Jager e Passeggi* dão um primeiro passo nessa direção. Eles estudam os homeomorfismos do toro que são semi-conjugados a uma rotação irracional unidimensional.

O texto está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1 trabalhamos com os endomorfismo no círculo, onde provamos os Teoremas A e B; no capítulo 2 estudamos o conjunto de rotação de aplicações no toro e provamos o Teorema C; no apêndice A encontramos algumas propriedades relacionadas à definição de levantamento e a prova do *Teorema de Classificação de Poincaré*; o apêndice B consta de alguns conceitos e resultados relacionados à Teoria de Medida e integração, os quais serão necessárias no capítulo 2.

# Capítulo 1

## Conjunto de rotação para endomorfismos no círculo

Neste capítulo provaremos os Teoremas A e B, citados na introdução. Para isso, inicialmente veremos alguns conceitos e resultados preliminares.

### 1.1 Levantamento e conjunto de rotação

Considere  $\mathbb{R}$  munido com a seguinte relação de equivalência: Dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Dessa maneira, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , podemos definir a classe de equivalência de  $x$  por

$$[x] = \{y \in \mathbb{R}; x \sim y\}.$$

O conjunto de todas as classes de equivalência

$$\mathbb{R}/\sim = \{[x]; x \in \mathbb{R}\}$$

é dito quociente de  $\mathbb{R}$  pela relação de equivalência  $\sim$  e denotado por

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \{[x]; x \in \mathbb{R}\}.$$

Dizemos que  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  é o *círculo unitário*.

Existe uma aplicação natural, que projeta cada ponto  $x \in \mathbb{R}$  no círculo  $\mathbb{S}^1$ . Essa aplicação é conhecida como *aplicação de recobrimento* ou *aplicação projeção* e é dada por,

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ \pi(x) &= [x].\end{aligned}$$

A aplicação de recobrimento acima possui as seguintes propriedades

- 1)  $\pi(x) = \pi(x + k)$  ;  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ;  
De fato,  $\pi(x + k) = [x + k] = [x] = \pi(x)$ .
- 2)  $\pi$  é sobrejetiva, mas não é injetiva. Note que, dado  $x \in \mathbb{R}$ , temos que  $\pi^{-1}(x)$  é infinito e dado por

$$\pi^{-1}(x) = \{x + k; k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Definição 1.1.** Uma aplicação contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um levantamento da aplicação contínua  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  se

$$\pi \circ f = f_0 \circ \pi.$$

O seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{S}^1\end{array}$$

Intuitivamente,  $f$  é uma representação contínua de  $f_0$  em cada intervalo da reta real  $\mathbb{R}$ .

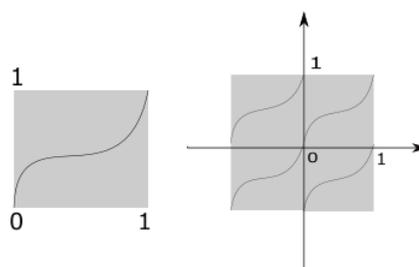


Figura 1.1:  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.2.**  $f(x) = x + \rho + k$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$  e para todo  $k \in \mathbb{Z}$  é um levantamento da aplicação rotação  $R_\rho([x]) = [x + \rho]$ .

O grau de uma aplicação contínua  $f_0$  nos diz quantas "voltas"  $f_0$  dá em torno de  $\mathbb{S}^1$ .

**Definição 1.3.** O número  $d = f(x + 1) - f(x)$ , onde  $f$  é um levantamento qualquer de  $f_0$  é chamado de grau de  $f_0$  e denotado por  $\deg f_0$ .

O grau de  $f_0$  independe de  $x$  e é o mesmo para qualquer levantamento de  $f_0$  (Observação 2.27 - Apêndice A).

Denotemos por  $\text{End}(\mathbb{S}^1)$  o conjunto das aplicações contínuas  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  de grau 1, com a topologia usual  $C^0$ . O conjunto de rotação de uma aplicação  $f_0 \in \text{End}(\mathbb{S}^1)$  leva em conta o deslocamento médio de todos os pontos do recobrimento.

**Definição 1.4.** *Sejam  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \in \text{End}(\mathbb{S}^1)$ ,  $f$  um levantamento de  $f_0$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Chamamos de número de rotação do ponto  $x$  ao número*

$$\rho(f, x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n}.$$

O conjunto de rotação de  $f$  é dado pelo fecho do conjunto dos números de rotação dos pontos da reta

$$\rho(f) = \overline{\{\rho(f, x); x \in \mathbb{R}\}}.$$

O número de rotação (consequentemente o conjunto de rotação) sempre existe. De fato,

**Proposição 1.5.** *Seja  $f_0$  um endomorfismo no círculo e  $f$  um levantamento de  $f_0$ . Então, o número de rotação  $\rho(f)$  sempre existe.*

*Demonstração.* De fato, basta mostrar que a sequência  $\left(\frac{f^n(x) - x}{n}\right)_{n \geq 1}$  é limitada. Para isso, mostraremos que essa sequência está contida no intervalo  $[-1, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Como  $\deg f_0 = 1$ , temos que  $f(x) - x \leq 1$  se  $x \geq 0$  e  $f(x) - x \geq -1$  se  $x \leq 0$ . Portanto  $|f(x) - x| \leq 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Agora,

$$\begin{aligned} |f^2(x) - x| &= |f^2(x) + f(x) - f(x) - x| \\ &\leq |f^2(x) - f(x)| + |f(x) - x| \\ &\leq 2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Segue, por indução que  $|f^n(x) - x| \leq n$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Sendo assim,

$$\frac{1}{n}|f^n(x) - x| \leq 1.$$

Logo,

$$\frac{1}{n}(f^n(x) - x) \subseteq [-1, 1],$$

$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ .

□

Além disso, veremos que esse número independe do levantamento escolhido (Proposição 1.6). Desses fatos, segue que o número de rotação (consequentemente o conjunto de rotação) está bem definido.

## 1.2 Propriedades do conjunto de rotação

O conjunto de rotação é uma importante noção para compreender o comportamento dinâmico dos endomorfismos no círculo. Nesta seção veremos algumas das principais propriedades deste conjunto, para este tipo de aplicação.

A seguinte proposição nos diz que o conjunto de rotação independe do levantamento escolhido, a menos da translação de uma constante inteira.

**Proposição 1.6.** *Se  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são dois levantamentos de  $f_0$ , então  $\rho(f_2, x) = \rho(f_1, x) + k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  levantamentos de  $f_0$ , então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x) + k \\ f_2^n(x) &= f_1^n(x) + nk. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho(f_2, x) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f_2^n(x) - x}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1^n(x) + nk - x}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1^n(x) - x}{n} + k \\ &= \rho(f_1, x) + k. \end{aligned} \tag{1.2}$$

□

Uma outra propriedade nos diz que dois números que estão na mesma fibra possuem o mesmo número de rotação.

**Proposição 1.7.** *Se  $\pi(x) = \pi(x')$ , então  $\rho(f, x) = \rho(f, x')$ .*

*Demonstração.* Se  $\pi(x) = \pi(x')$  então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $x' = x + k$ . Daí,

$$\begin{aligned} \rho(f, x') &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x') - x'}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x + k) - (x + k)}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) + k - x - k}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n} \\ &= \rho(f, x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

□

O número de rotação  $\rho(f, p)$  e o conjunto de rotação  $\rho(f)$  são invariantes topologicamente. Em outras palavras,

**Proposição 1.8.** *Se dado  $f_0, g_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \in \text{End}(\mathbb{S}^1)$ , existir  $h_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  homeomorfismo tal que  $g_0 = h_0^{-1} \circ f_0 \circ h_0$  então*

$$\begin{aligned}\rho(f, p) &= \rho(h^{-1} \circ f \circ h, h(p)), \\ \rho(f) &= \rho(h^{-1} \circ f \circ h).\end{aligned}$$

onde  $f, h$  são levantamentos de  $f_0, h_0$  respectivamente.

*Demonstração.* Sejam  $h, f$  levantamentos de  $h_0, f_0$ , respectivamente. Então,  $\pi \circ h = h_0 \circ \pi$  e  $\pi \circ f = f_0 \circ \pi$ .

\*  $h^{-1}$  é um levantamento de  $h_0^{-1}$ ;

\*\*  $h^{-1} \circ f \circ h$  é um levantamento de  $h_0^{-1} \circ f_0 \circ h_0$ . De fato,

$$\begin{aligned}\pi \circ h^{-1} \circ f \circ h &= h_0^{-1} \circ \pi \circ f \circ h \\ &= h_0^{-1} \circ f_0 \circ \pi \circ h \\ &= h_0^{-1} \circ f_0 \circ h_0 \circ \pi\end{aligned}\tag{1.4}$$

Então, dado  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned}\frac{(h^{-1} \circ f \circ h)^n(x) - x}{n} &= \frac{(h^{-1} \circ f^n \circ h)(x) - x}{n} \\ &= \frac{h^{-1} \circ (f^n \circ h)(x) - f^n \circ h(x) + f^n \circ h(x)}{n} \\ &\quad + \frac{h(x) - h(x) - x}{n} \\ &= \frac{h^{-1} \circ (f^n \circ h)(x) - f^n \circ h(x)}{n} \\ &\quad + \frac{f^n \circ h(x)}{n} - \frac{h(x)}{n} + \frac{h(x) - x}{n}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\rho(h^{-1} \circ f \circ h) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(h^{-1} \circ f \circ h)^n(x)}{n} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(h^{-1} \circ (f^n \circ h))(x) - f^n \circ h(x)}{n} \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n \circ h(x) - h(x)}{n} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{h(x) - x}{n}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Agora,  $h(x) - x$  e  $h^{-1}(x) - x$  são funções periódicas de período um. De fato,

$$\begin{aligned}h(x+1) - (x+1) &= h(x+1) - x - 1 \\ &= h(x) + 1 - x - 1 \\ &= h(x) - x.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Analogamente, verifica-se para  $h_1^{-1}(x) - x$ .

Assim, os numeradores do primeiro e terceiro limite são expressões limitadas independentes de  $x$ , logo esses limites tendem a zero. Portanto,

$$\begin{aligned}\rho(h^{-1} \circ f \circ h) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n \circ h(x) - h(x)}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n} \\ &= \rho(f).\end{aligned}\tag{1.8}$$

□

Na proposição 1.5 vimos que o número de rotação sempre existe, mas este número pode não ser o mesmo para todo ponto. Os resultados que seguem nos ajudarão a provar o Teorema A, o qual afirma que conjunto de rotação  $\rho(f)$ , para endomorfismos no círculo, é um intervalo fechado e limitado da reta.

O lema abaixo diz que dado um endomorfismo no círculo  $f_0$ , se não existe ponto periódico de  $f_0$  com número de rotação  $\frac{p}{q}$ ;  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  então todo número de rotação de  $f_0$  ou é menor que  $\frac{p}{q}$  ou maior que  $\frac{p}{q}$ .

**Lema 1.9.** *Seja  $f_0 \in \text{End}(\mathbb{S}^1)$  e  $f$  um levantamento de  $f_0$ . Se não existe  $x \in \mathbb{R}$  com  $f_0^q(\pi(x)) = \pi(x)$  e  $\rho(f, x) = \frac{p}{q}$ , então  $\rho(f)$  está contido em  $\{x \in \mathbb{R}; x < \frac{p}{q}\}$  ou  $\{x \in \mathbb{R}; x > \frac{p}{q}\}$ .*

*Demonstração.* Suponha que para algum  $x \in \mathbb{R}$ , tivéssemos  $f^q(x) = x + p$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Então

$$\rho(f, x) = \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{f^q(x) - x}{q} = \frac{p}{q}$$

e

$$f_0^q(\pi(x)) = \pi(f^q(x)) = \pi(x + p) = \pi(x).$$

Isto é,  $\pi(x)$  seria ponto periódico de  $f_0$  com número de rotação  $\frac{p}{q}$ , contradizendo a hipótese. Portanto, devemos ter  $f^q(x) - x < p$  ou  $f^q(x) - x > p$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Note que

$$f^q(x + 1) - (x + 1) = f^q(x) + 1 - x - 1 = f^q(x) - x,$$

ou seja,  $f^q(x) - x$  é periódica de período 1. Isso implica que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f^q(x) - x < p - \varepsilon$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  ou  $f^q(x) - x > p + \varepsilon$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Segue que  $\rho(f)$  está contido em

$$\{x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{p-\varepsilon}{q}\} \text{ ou } \{x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{p+\varepsilon}{q}\}.$$

□

**Corolário 1.10.** *Seja  $f_0 \in \text{End}(\mathbb{S}^1)$ ,  $\alpha, \beta \in \rho(f)$  e  $\alpha \leq \frac{p}{q} \leq \beta$  para algum racional  $\frac{p}{q}$ . Então  $f_0$  tem um ponto periódico com número de rotação  $\frac{p}{q}$  e consequentemente  $\frac{p}{q} \in \rho(f)$ .*

O corolário acima nos diz que se  $X \subset [\alpha, \beta]$  é o conjunto de todos os racionais que estão nesse intervalo, então  $X \in \rho(f)$ .

**Teorema A.** *Se  $f_0 \in \text{End}(\mathbb{S}^1)$  então o conjunto de rotação  $\rho(f)$  é um intervalo fechado e limitado da reta.*

*Demonstração.* O conjunto de rotação  $\rho(f)$  é limitado, portanto tem um ínfimo  $a$  e um supremo  $b$ . Por definição, o conjunto de rotação de uma aplicação  $f_0 \in \text{End}(\mathbb{S}^1)$ , onde  $f$  é um levantamento de  $f_0$ , é

$$\rho(f) = \overline{\{\rho(f, x); x \in [0, 1]\}},$$

logo é um conjunto fechado. Portanto,  $a, b \in \rho(f)$ .

Se  $a = b$ , então o conjunto de rotação  $\rho(f)$  é um único ponto. Se  $a < b$  (o caso  $a > b$  é análogo) então, pelo corolário 1.10, todos os números racionais que pertencem ao intervalo  $[a, b]$  estão no conjunto de rotação  $\rho(f)$ .

Seja

$$X = \{x \in \mathbb{Q}; x \in [a, b]\}.$$

Dado  $A \neq \emptyset$ , aberto em  $[a, b]$ , temos que  $A \cap X \neq \emptyset$ , logo  $X$  é denso em  $[a, b]$ , isto é,  $\overline{X} = [a, b]$ . Portanto, todo ponto de  $[a, b]$  é ponto de acumulação do conjunto de rotação  $\rho(f)$ . Como o conjunto de rotação é fechado, segue que  $\rho(f) = [a, b]$ .  $\square$

Esse teorema nos diz que se  $f_0 \in \text{End}(\mathbb{S}^1)$ , então o conjunto de rotação  $\rho(f)$  ou é um ponto ou é um intervalo fechado da reta. Em particular, se  $f_0$  é um homeomorfismo que preserva orientação no círculo, então o número de rotação sempre existe e além disso é o mesmo para todo ponto  $x \in \mathbb{R}$ . Em outras palavras,

**Teorema 1.11.** *Sejam  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  um homeomorfismo que preserva orientação no círculo e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $f_0$ . Então,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , o limite*

$$\rho_0(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n}$$

*existe e independe do ponto  $x$ .*

*Demonstração. Existência:* Precisamos mostrar que existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n}$  exista. Para isto, consideraremos dois casos. Primeiro o caso em que  $f_0$  tem um ponto periódico de período  $q$  e depois o caso em que  $f_0$  não tem pontos periódicos.

1.  $f_0$  tem um ponto periódico de período  $q$ .

Como  $f_0$  tem um ponto periódico de período  $q$ , então existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f_0^q(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$ .

Como  $f$  é um levantamento de  $f_0$ , já vimos que  $f^q$  é um levantamento de  $f_0^q$ , logo  $\pi \circ f^q = f_0^q \circ \pi$ . Daí,  $\pi(f^q(x_0)) = f_0^q(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$ , isto é  $\pi(f^q(x_0)) = \pi(x_0)$  e portanto,  $[f^q(x_0)] = [x_0]$  e então,  $f^q(x_0) = x_0 + p$ , onde  $p \in \mathbb{Z}$ .

*Afirmção:* O limite existe e além disso, é racional.

De fato, tomemos  $n \in \mathbb{N}$ , então pelo algoritmo da divisão euclidiana,  $n = kq + r$ , com  $0 \leq r < q$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 f^n(x_0) &= f^{kq+r}(x_0) = f^r(f^{kq}(x_0)) \\
 &= f^r(f^{q(k-1)}(f^q(x_0))) \\
 &= f^r(f^{q(k-1)}(x_0 + p)) \\
 &= f^r(f^{q(k-2)}(f^q(x_0 + p))) \\
 &= f^r(f^{q(k-2)}((x_0 + 2p))) \\
 &\vdots \\
 &= f^r(x_0 + kp) \\
 &= f^r(x_0) + kp, \text{ com } p \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x_0) - x_0}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^r(x_0) + kp - x_0}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^r(x_0) - x_0}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kp}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^r(x_0) - x_0}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kp}{kq + r} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^r(x_0) - x_0}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{q + \frac{r}{k}}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Como  $n = kq + r$  e  $r = 0, 1, 2, 3, \dots, q - 1$ , então  $f^r(x_0) - x_0 \leq \max |f^j(x_0) - x_0| = M$ , onde  $j \in \{0, \dots, q - 1\}$ . Logo,  $|f^r(x_0) - x_0|$  é limitado e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^r(x_0) - x_0}{n} = 0$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{q + \frac{r}{k}} = \frac{p}{q}$ , segue

$$\text{que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x_0) - x_0}{n} = \frac{p}{q}.$$

O que comprova a afirmação.

2.  $f_0$  não tem pontos periódicos.

Como  $f_0$  não tem pontos periódicos, não existe  $q \in \mathbb{Z}$ , tal que  $f_0^q(\pi(x)) = \pi(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Logo,  $f_0^q(\pi(x)) \neq \pi(x)$ ,  $\forall q \in \mathbb{Z}$  e então  $\pi(f^q(x)) = f_0^q(\pi(x)) \neq \pi(x)$ . Portanto  $[f^q(x)] \neq [x]$ , isto é,  $f^q(x) \neq x + p$ , onde  $p \in \mathbb{Z}$ .

Isto significa que não existe  $p, q \in \mathbb{N}$ , tal que  $f^q(x) = x + p$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , isto é,  $f^q(x) - x \notin \mathbb{Z}$ .

Fixando  $x$ , então para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$ , existe  $p_n \in \mathbb{Z}$  tal que

$$f^n(x) - x \in (p_n - 1, p_n) \quad (\text{i})$$

Daí, pelo Teorema do Valor Intermediário, o mesmo  $p_n$  serve  $\forall x \in \mathbb{R}$ . De fato, seja  $\alpha = f^n(x) - x$ , então  $\alpha$  é contínua. Tome  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$  com  $k_1 < k_2 \leq k_3 < k_4$ . Supondo que  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha(a) \in (k_1, k_2)$  e  $\alpha(b) \in (k_3, k_4)$  então, pela continuidade de  $\alpha$ , deve existir  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha(c) = k_2 \in \mathbb{Z}$ , isto é,  $f^n(c) - c = k_2 \in \mathbb{Z}$ , o que é uma contradição. Logo

$$p_n - 1 < f^n(x) - x < p_n, \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{ii})$$

Usando (ii) para  $x_0, f^n(x_0), f^{2n}(x_0), \dots$ , e para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , teremos

$$m \text{ parcelas } \begin{cases} p_n - 1 < f^n(x) - x < p_n \\ p_n - 1 < f^n(f^n(x_0)) - f^n(x_0) < p_n \\ p_n - 1 < f^n(f^{2n}(x_0)) - f^{2n}(x_0) < p_n \\ \vdots \\ p_n - 1 < f^n(f^{(m-1)n}(x_0)) - f^{(m-1)n}(x_0) < p_n \end{cases}$$

Somando as  $m$  parcelas acima, temos:

$$m(p_n - 1) < f^{mn}(x_0) - x_0 < mp_n$$

Multiplicando as parcelas desta desigualdade por  $\frac{1}{mn}$ , temos:

$$\frac{p_n}{n} - \frac{1}{n} < \frac{f^{mn}(x_0) - x_0}{mn} < \frac{p_n}{n}$$

Portanto,

$$\left| \frac{f^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \frac{p_n}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

E, invertendo os papéis de  $m$  e  $n$  temos

$$\left| \frac{f^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \frac{p_m}{m} \right| < \frac{1}{m}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_m}{m} - \frac{p_n}{n} \right| &= \left| \frac{p_m}{m} - \frac{f^{mn}(x_0) - x_0}{mn} + \frac{f^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \frac{p_n}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{f^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \frac{p_n}{n} \right| + \left| \frac{f^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \frac{p_m}{m} \right| \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Isto significa que a sequência  $(\frac{p_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy. Mas  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico completo, logo toda sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$  converge. Segue que a sequência  $(\frac{p_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente.

Já vimos que

$$\left| \frac{f^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \frac{p_n}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

Então,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x_0) - x_0}{n}$  existe, uma vez que as sequências  $(\frac{f^n(x_0) - x_0}{n})$  e  $(\frac{p_n}{n})$  tornam-se arbitrariamente próximas a medida que  $n \rightarrow \infty$  e a sequência  $(\frac{p_n}{n})$  converge. Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x_0) - x_0}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n}$$

*O limite independe de  $x$ :* Como  $f_0$  é um homeomorfismo que preserva orientação no círculo,  $\deg(f_0) = 1$ , isto é,  $f(x+1) = f(x) + 1$ . Para  $x, y \in [0, 1)$  temos  $|f(y) - f(x)| < 1$ . De fato, se  $x, y \in [0, 1)$ , então  $|y - x| < 1$ . Então, por um lado, como  $y - x \leq |y - x|$ , temos que  $y - x < 1$  e portanto  $y < x + 1$ . Daí, aplicando  $f^n$  em ambos os lados dessa desigualdade temos

$$\begin{aligned} f^n(y) &< f^n(x+1) \\ &= f^n(x) + 1. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Portanto,  $f^n(y) - f^n(x) < 1$ .

Por outro lado, como  $-y + x \leq |y - x|$ , temos que  $-y + x < 1$  e portanto,  $x < y + 1$ . Aplicando  $f^n$  em ambos os lados da desigualdade temos

$$\begin{aligned} f^n(x) &< f^n(y+1) \\ &= f^n(y) + 1 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Portanto,  $f^n(x) - f^n(y) < 1$ . Assim, concluímos que, em ambos os casos, vale  $|f^n(y) - f^n(x)| < 1$ . Agora,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^n(x) - x}{n} - \frac{f^n(y) - y}{n} \right| &= \frac{1}{n} |f^n(x) - x - f^n(y) + y| \\ &\leq \frac{1}{n} (|f^n(x) - f^n(y)| + |x - y|) \\ &\leq \frac{2}{n} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Portanto  $x$  e  $y$  coincidem.

Reunindo todos os resultados, temos que  $\rho_0(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n}$  tanto existe como tem o mesmo valor para todo  $x \in \mathbb{R}$ . O que completa a demonstração. □

### 1.3 A família Arnold Tongue

O objetivo principal dessa seção é mostrar que

**Teorema B.** *Todo intervalo fechado e limitado da reta é conjunto de rotação de algum endomorfismo do círculo  $\mathbb{S}^1$ .*

Para isso consideraremos a família de endomorfismos

$$f_0(x) = x + b + a \operatorname{sen}(2\pi x)$$

com parâmetros  $a, b \in \mathbb{R}$ , conhecida como família *Arnold Tongue* e estudaremos a geometria de seu conjunto de rotação. Na Figura 1.2 abaixo, exibimos algumas aplicações dessa família. Essas aplicações são casos particulares dos cinco casos abaixo.

Afim de provar o Teorema B, mostraremos as seguintes afirmações:

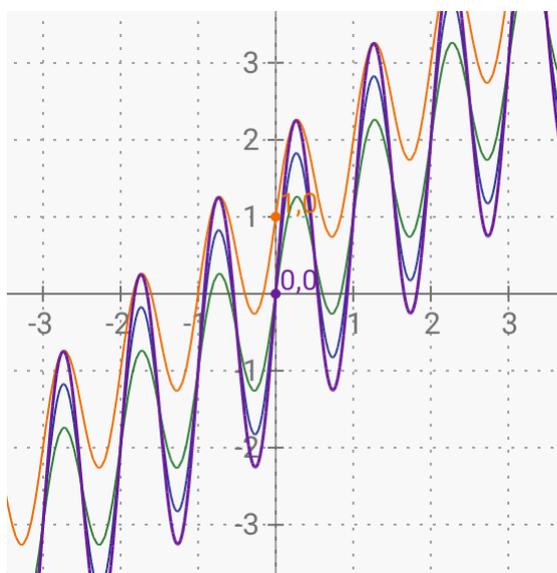


Figura 1.2: Algumas aplicações da família *Arnold Tongue*

- (1) Se  $a \in [0, \frac{1}{2\pi}]$ ,  $b = 0$  então  $\rho(f)$  é um único ponto;
- (2) Se  $a = 1$ ,  $b = 0$  então  $\rho(f) = [-1, 1]$ ;
- (3) Se  $a = 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  então,  $\rho(f) = \{b\}$ ;
- (4) Se  $a = 1$ ,  $b \in \mathbb{Z}$  então  $\rho(f) = [b - 1, b + 1]$ ;
- (5) Se  $a = k \in \mathbb{Z}$ ,  $b = 0$ , então  $\rho(f) = [-k, k]$ .

Verifiquemos o caso (1). Para isso, consideremos os casos particulares  $a = b = 0$  e  $a = \frac{1}{2\pi}$ ,  $b = 0$ .

- (a)  $a = b = 0$ ;  
Neste caso, temos que  $f_0(x) = x$ . É fácil mostrar que  $f(x) = x$  é um levantamento de  $f_0$ . Agora,

$$f^n(x) = x, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,  $\rho(f) = \{0\}$ .

(b)  $a = \frac{1}{2\pi}, b = 0$ .

Neste caso,  $f_0(x) = x + \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi x)$ . Mostraremos que  $f_0$  é um homeomorfismo. Com efeito, a derivada dessa aplicação é dada por

$$f'_0(x) = 1 + \cos(2\pi x).$$

Note que

$$f'_0(x) = 0 \iff \cos(2\pi x) = -1,$$

isto é,  $x = \frac{k}{2}$ ,  $k$  ímpar,  $k \in \mathbb{Z}$ . Isso significa que  $f'_0(x) = 0$  apenas para um conjunto discreto de pontos. Além disso, nos demais pontos, temos que  $f'_0(x) > 0$ , pois se  $f'_0(x) < 0$  teríamos que  $\cos(2\pi x) < -1$ , o que é uma contradição. Assim,  $f'_0$  é crescente e portanto,  $f_0$  é injetiva.

Por outro lado, note que os pontos 0 e 1 são pontos fixos para  $f_0$  e como  $f_0$  é claramente contínua, segue que  $f_0$  é contínua e injetiva num conjunto compacto, portanto é um homeomorfismo.

Assim, o conjunto de rotação  $\rho(f)$  de  $f_0$  é um único ponto.

Analogamente, se  $a < \frac{1}{2\pi}$ ,  $b = 0$  mostramos que  $f_0$  também é um homeomorfismo e portanto o conjunto de rotação  $\rho(f)$  é um único ponto.

Consideremos agora o caso (2), onde  $a = 1$ ,  $b = 0$ , isto é,

$$f_0(x) = x + \operatorname{sen} 2\pi x.$$

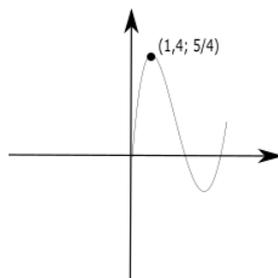
Neste caso, mostraremos que  $\rho(f) = [-1, 1]$ . De fato, vimos na seção 1.1 que  $\rho(f) \subset [-1, 1]$ .

Por outro lado, considere a aplicação  $g_0(x) = x + \operatorname{sen}(2\pi x)$ , definida no intervalo fechado  $[0, 1]$ . Note que a imagem de  $g_0$ , pelo intervalo  $[0, 1]$ , cai fora do intervalo  $[0, 1]$ . Consideremos então a aplicação  $f_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$f_0(x) = \begin{cases} g_0(x), & \text{se } g_0(x) \in [0, 1] \\ [g_0(x)], & \text{se } g_0(x) \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Como o círculo unitário  $\mathbb{S}^1$  pode ser visto como o intervalo  $[0, 1]$ , desde que os pontos 0 e 1 estejam identificados, segue que a aplicação  $f_0$  pode ser vista como uma aplicação com domínio e contradomínio em  $\mathbb{S}^1$ .

A fim de determinar o conjunto de rotação  $\rho(f)$  de  $f_0$ , consideremos a

Figura 1.3: Aplicação  $g$ 

aplicação contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x + \text{sen}(2\pi x)$ . Repare que  $f$  é um levantamento de  $f_0$ . De fato,

$$\begin{aligned}\pi \circ f(x) &= \pi(x + \text{sen}(2\pi x)) \\ &= [(x + \text{sen}(2\pi x))]\end{aligned}\tag{1.15}$$

Agora, se  $g_0(x) \in [0, 1]$ , então

$$\begin{aligned}f_0 \circ \pi(x) &= \pi(x) + \text{sen}(2\pi(\pi(x))) \\ &= \pi(x) + \text{sen}(2\pi x) \\ &= [(x + \text{sen}(2\pi x))].\end{aligned}\tag{1.16}$$

Se  $g_0(x) \notin [0, 1]$ , então

$$\begin{aligned}f_0 \circ \pi(x) &= [(\pi(x) + \text{sen}(2\pi(\pi(x))))] \\ &= [(x + \text{sen}(2\pi(\pi(x))))] \\ &= [(x + \text{sen}(2\pi x))].\end{aligned}\tag{1.17}$$

Como nos dois casos  $\pi \circ f = f_0 \circ \pi$ , segue que  $f$  é um levantamento de  $f_0$ . Note também que o grau de  $f_0$  é 1, pois

$$f(x+1) - f(x) = x+1 + \text{sen}(2\pi(x+1)) - x - \text{sen}(2\pi(x)) = 1.$$

Mostremos que 1 e  $-1$  pertencem ao conjunto de rotação de  $f_0$ . De fato,

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4},$$

$$f^2\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right) = f\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} + \text{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4} + 1 = 2 + \frac{1}{4}.$$

Segue indutivamente que  $f^n(\frac{1}{4}) = n + \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Portanto

$$\begin{aligned} \rho(f, \frac{1}{4}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(\frac{1}{4}) - \frac{1}{4}}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{n} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Por outro lado

$$f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} - 1,$$

$$f^2(\frac{3}{4}) = f(f(\frac{3}{4})) = f(\frac{3}{4} - 1) = \frac{3}{4} - 1 + \text{sen}(\frac{3\pi}{2} - 2\pi) = \frac{3}{4} - 1 - 1 = \frac{3}{4} - 2.$$

Segue indutivamente que  $f^n(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} - n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Portanto

$$\begin{aligned} \rho(f, \frac{3}{4}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(\frac{3}{4}) - \frac{3}{4}}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4} - n - \frac{3}{4}}{n} \\ &= -1. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Portanto os números  $-1, 1$  pertencem ao conjunto de rotação de  $f_0$ . Segue que intervalo fechado  $[-1, 1] \subseteq \rho(f)$ . Mas como já vimos que  $\rho(f) \subseteq [-1, 1]$ , concluímos que  $\rho(f) = [-1, 1]$ .

Uma observação importante é que o conjunto de rotação  $\rho(f)$  depende continuamente de  $f_0$ . De fato, para ver isto, fixemos a seguinte notação: Dado  $f_0 \in \text{End}(\mathbb{S}^1)$ ,  $f$  um levantamento de  $f_0$  então  $\rho_1(f), \rho_2(f) \in \mathbb{R}$  são os extremos do intervalo

$$\rho(f) = [\rho_1(f), \rho_2(f)].$$

**Proposição 1.12.** *Seja  $U \subset \text{End}(\mathbb{S}^1)$  um conjunto aberto tal que exista uma aplicação contínua  $f_0 \rightarrow f$  que atribui para cada  $f_0$  um levantamento  $f$  (para que  $f$  dependa continuamente de  $f_0$ ,  $U$  não deve ser muito grande). Então as funções*

$$\begin{aligned} f_0 &\rightarrow \rho_1(f) \\ f_0 &\rightarrow \rho_2(f) \end{aligned}$$

em  $U$  são contínuas.

*Demonstração.* Para qualquer número racional  $\frac{p}{q}$ , temos que

$$\frac{p}{q} < \rho_1(f)$$

é equivalente à  $f^q(x) - x > p$ , para todo  $x \in [0, 1]$ . Note que esta condição é uma condição de abertura, isto é, o conjunto formado pelas  $f \in U$ , com  $\rho_1(f) > \frac{p}{q}$  é aberto. Analogamente,

$$\{f_0 \in U; \rho_2(f) < \frac{p}{q}\}$$

é aberto.

Finalmente,  $\frac{p}{q} \in (\rho_1(f), \rho_2(f))$  se, e somente se, para algum  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, existe  $x, y \in [0, 1]$  com

$$\begin{aligned} f^{Nq}(x) - x &> Np + 1, \\ f^{Nq}(y) - y &< Np - 1. \end{aligned}$$

Esta também é uma condição de abertura, logo  $\rho_1(f)$  e  $\rho_2(f)$  dependem continuamente de  $f_0$ .  $\square$

Como os extremos do conjunto de rotação  $\rho(f)$  dependem continuamente de  $f_0$ , segue que para  $a \in [0, 1]$  os intervalos de rotação da família

$$f_0(x) = x + a \operatorname{sen}(2\pi x)$$

assumem todos os comprimentos.

Consideramos agora o caso (3), onde  $a = 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ , isto é,  $f_0(x) = x + b$ . Dado o levantamento  $f(x) = x + b \operatorname{sen}(2\pi x)$  de  $f_0$  temos que

$$f^n(x) = x + nb.$$

Assim,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - x}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x + nb - x}{n} = b.$$

Logo,  $\rho(f) = \{b\}$ .

No caso (4),  $a = 1$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ , temos que  $\rho(f) = [b - 1, b + 1]$ . De fato, a aplicação  $f_b(x) = x + b + \operatorname{sen}(2\pi x)$  é um levantamento de  $f_{0b}(x) = x + b + \operatorname{sen}(2\pi x)$  e de  $f_0(x) = x + \operatorname{sen}(2\pi x)$ . Mas  $f(x) = x + \operatorname{sen}(2\pi x)$  também é um levantamento de  $f_0(x) = x + \operatorname{sen}(2\pi x)$ . Assim,

$$f_b(x) = f(x) + b.$$

Segue que

$$\rho(f_b, x) = \rho(f, x) + b = [-1, 1] + b = [b - 1, b + 1].$$

Note que quando  $a = 0$  e  $b$  qualquer, o conjunto de rotação é dado por  $\rho(f) = \{b\}$  e quando  $a = 1$  e  $b$  qualquer, temos que  $\rho(f) = [b - 1, b + 1]$ . Isso significa que quando  $a$  vai variando no intervalo  $[0, 1]$ , o conjunto de rotação vai crescendo, isto é, ao transladar a endomorfismo  $f_0(x) = x + a \operatorname{sen}(2\pi x)$  por  $b \in \mathbb{R}$ , estamos na verdade, transladando o conjunto de rotação.

Por fim, consideremos o caso [5], onde  $f_0(x) = x + k \operatorname{sen}(2\pi x)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Então,

$$f_0\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + k \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} + k,$$

$$f_0^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + k + k \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{1}{4} + k + k.$$

Indutivamente, temos que

$$f_0^n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + nk.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_0^n\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}}{n} = \frac{\frac{1}{4} + nk - \frac{1}{4}}{n} = k.$$

Portanto,  $\rho(f, \frac{1}{4}) = k$ . Analogamente, mostramos que  $\rho(f, \frac{3}{4}) = -k$ . Desse modo,

$$\rho(f) = [-k, k].$$

Isso implica que quando tomamos  $a = k \in \mathbb{Z}$  arbitrariamente grande, o conjunto de rotação também cresce arbitrariamente. Juntando os cinco casos acima, provamos que

**Teorema B.** *Todo intervalo compacto da reta é conjunto de rotação de algum endomorfismo no círculo.*

O teorema acima é o principal resultado, desse capítulo, relacionado ao conjunto de rotação da família *Arnold Tongue*.

# Capítulo 2

## Conjunto de rotação para aplicações no toro

Neste capítulo generalizaremos a noção de número de rotação para aplicações contínuas  $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ , homotópicas à identidade. Além disso, provaremos o Teorema C e exibiremos um exemplo que ilustra o artigo de *Kwapisz*, citado na introdução.

### 2.1 Conjunto de rotação para aplicações no toro

Seja  $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$  o toro  $m$ -dimensional, onde  $\mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$  é o quociente do grupo aditivo  $\mathbb{R}^m$ , pelo subgrupo aditivo  $\mathbb{Z}^m$ . Nesta seção consideraremos sempre aplicações contínuas do toro  $m$ -dimensional  $\mathbb{T}^m$  em si mesmo, homotópicas à identidade. Isto é, existe uma aplicação contínua

$$H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

onde  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = id_{\mathbb{S}^1}(x)$ .

Seja  $\mathcal{C}_m$  a classe dos levantamentos das aplicações contínuas no toro  $\mathbb{T}^m$ , homotópicas à identidade; e  $\mathcal{H}_m$  a classe dos levantamentos dos homeomorfismos do toro  $\mathbb{T}^m$ , homotópicos à identidade.

Se  $f$  é homotópica à identidade no espaço  $\mathcal{C}_m$  então,

$$F(x + k) = F(x) + k, \forall k \in \mathbb{Z}^m.$$

Com efeito, seja  $F$  é um levantamento de  $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  então

$$\pi \circ F(x) = f \circ \pi(x), \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

e onde  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  é a projeção natural. Como  $\pi(x) = \pi(x + k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}^m$ , segue que

$$\pi \circ F(x) = f \circ \pi(x) = f \circ \pi(x + k).$$

Por outro lado,

$$\pi \circ F(x + k) = f \circ \pi(x + k).$$

Logo,

$$\pi \circ F(x + k) = \pi \circ F(x).$$

Portanto,  $F(x + k)$  e  $F(x)$  diferem por uma constante  $m \in \mathbb{Z}^m$ , isto é, existe um endomorfismo  $A : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$  tal que

$$F(x + k) = F(x) + Ak.$$

Em particular, quando  $f$  é homotópica a identidade, temos que  $\deg f = 1$ , isto é,  $F(x + 1) = F(x) + 1$ . Logo

$$F(x + k) = F(x + k - 1) + 1 = \dots = F(x) + k.$$

Assim,  $A = id$ . Portanto

$$F(x + k) = F(x) + k, \forall k \in \mathbb{Z}^m.$$

Seja  $F \in \mathcal{C}_m$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $\rho(F, x)$  o conjunto dos limites das subsequências convergentes da sequência  $\left(\frac{F^n(x) - x}{n}\right)_{n \geq 1}$ . O conjunto

$$\rho_p(F) = \cup_{x \in \mathbb{R}^m} \rho(F, x)$$

é dito *conjunto de rotação pontual de  $f$* .

O conjunto  $\rho(F)$  formado pelos pontos de acumulação da sequência

$$\left(\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}\right)_{i \geq 1}; x_i \in \mathbb{R}^m, n_i \rightarrow \infty.$$

é o *conjunto de rotação de  $f$* . Note que  $\rho_p(F) \subset \rho(F)$ .

Consideremos agora o conjunto

$$K_k(F) = \left\{ \frac{F^k(x) - x}{k}; x \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Note que  $F^k(x) - x = F^k(x + m) - (x + m)$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}^m$ . Assim,

$$K_k(F) = \left\{ \frac{F^k(x) - x}{k}; x \in \mathbb{I}^m \right\},$$

onde  $I = [0, 1]$ . Dessa forma,  $K_k(F)$  é compacto.

**Lema 2.1.**  $\rho(F) = \bigcap_{i \geq 1} \overline{\bigcup_{n \geq i} K_n(F)}$ .

*Demonstração.* Seja  $v \in \bigcap_{i \geq 1} \overline{\bigcup_{n \geq i} K_n(F)}$ , então para todo  $i \geq 1$  temos que  $v \in \overline{\bigcup_{n \geq i} K_n(F)}$ , logo existe  $v_i \in \bigcup_{n \geq i} K_n(F)$  tal que  $|v - v_i| < \frac{1}{i}$ . Como  $v_i \in \bigcup_{n \geq i} K_n(F)$ , existe  $x_i \in [0, 1]^m$ ,  $n_i \geq i$  tal que  $v_i = \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}$ . Logo,

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}, \quad n_i \rightarrow \infty,$$

pois  $v_i \rightarrow v$ . Portanto  $v \in \rho(F)$ .

Por outro lado, seja  $v \in \rho(F)$ . Fixemos  $i \geq 1$ . Como  $v \in \rho(F)$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_i \geq i$  e  $x_i \in [0, 1]^m$  tal que  $|v - w_i| < \varepsilon$ , onde

$$w_i = \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}.$$

Pela definição de  $K_n(F)$ , temos que  $w_i \in K_{n_i}(F)$ . Logo,  $w_i \in \bigcup_{n \geq i} K_n(F)$ , ou seja  $\forall \varepsilon > 0, \exists w_i \in \bigcup_{n \geq i} K_n(F)$  tal que  $w_i \in (v - \varepsilon, v + \varepsilon)$ . Logo  $v \in \overline{\bigcup_{n \geq i} K_n(F)}$ . Portanto,  $v \in \bigcap_{i \geq 1} \overline{\bigcup_{n \geq i} K_n(F)}$ , para todo  $i \geq 1$  e  $v \in \bigcap_{i \geq 1} \overline{\bigcup_{n \geq i} K_n(F)}$ .  $\square$

**Observação 2.2.** Para cada  $F$ , existe  $M > 0$  tal que

$$\left| \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right| \leq M, \quad \forall n_i \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{R}^m.$$

De fato, como  $\varphi = F - id$  é periódica, existe  $M > 0$  tal que

$$|F^{n_i}(x_i) - x_i| \leq M, \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^m.$$

Por outro lado, para cada  $n_i \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{i=0}^{n_i-1} F(F^i(x_i)) - F^i(x_i).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right| &\leq \frac{1}{n_i} \sum_{i=0}^{n_i-1} |F(F^i(x_i)) - F^i(x_i)| \\ &\leq \frac{1}{n_i} \sum_{i=0}^{n_i-1} M = M. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Essa propriedade implica que  $\rho(F)$  é limitado. Como é também a interseção de enumerável de compactos encaixantes, ele é não vazio.

**Observação 2.3.** A definição de conjunto de rotação acima de fato generaliza a noção de conjunto de rotação para endomorfismos no círculo.

Se  $F \in \mathcal{C}_1$ , pela definição de intervalo de rotação temos que

$$[a, b] \subset \rho_p(F) \subset \rho(F).$$

Sabemos que o número de rotação  $\frac{l}{k}$  é maior que  $a$  (respectivamente menor que  $b$ ) se e somente se,  $F^k(x) - x < l$  (respectivamente  $F^k(x) - x > l$ ),  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Mas note que isto é equivalente a dizer que

$$\frac{l}{k} > \sup K_k(F) \text{ e } \frac{l}{k} > \inf K_k(F).$$

Para cada  $k$  existe um  $l$  tal que  $b < \frac{l}{k} \leq b + \frac{1}{k}$ . Consequentemente,

$$\sup K_k(F) < b + \frac{1}{k}.$$

Se  $k \geq n$  então

$$\sup K_k(F) < b + \frac{1}{n}.$$

Portanto,

$$\sup \overline{\cup_{k \geq n} K_k(F)} \leq b + \frac{1}{n}$$

logo

$$\sup \rho(F) \leq b.$$

Analogamente,  $\inf \rho(F) \geq a$ . Logo  $\rho(F) \subset [a, b]$ . Assim, para  $F \in \mathcal{C}_1$  o conjunto de rotação  $\rho(F)$  é o intervalo de rotação.

A observação acima mostra que a noção de conjunto de rotação para aplicações contínuas e homotópicas à identidade, definidas no toro  $m$ -dimensional  $\mathbb{T}^m$ , de fato generaliza a definição do conjunto de rotação para os endomorfismos no círculo  $\mathbb{S}^1$ .

## 2.2 Conjunto de rotação para medida

Nesta seção definiremos o conjunto de rotação para medida. Mais adiante veremos que em muitos casos é mais fácil encontrar primeiro o conjunto de rotação para medida para depois encontrar o conjunto de rotação. Resultados sobre Teoria de Medida e Teoria ergódica podem ser consultados no apêndice B ou na referência [8].

Seja  $F \in \mathcal{C}_m$ . Considere a aplicação contínua  $\phi : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $\phi(x) = F(y) - y$ , onde  $y \in \pi^{-1}(x)$ .

A aplicação  $\phi$  está bem definida, pois não depende do ponto  $y \in \pi^{-1}(x)$ . De fato, suponha que  $x = x' \in \mathbb{T}^m$  então  $\phi(x) = F(y) - y$  e  $\phi(x') = F(y') - y'$ , onde

$y, y' \in \pi^{-1}(x)$ .

Assim,  $\pi(y) = \pi(y')$  e portanto existe  $k \in \mathbb{Z}^m$  tal que  $y' = y + k$ . Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
 \phi(x') &= F(y') - y' \\
 &= F(y + k) - (y + k) \\
 &= F(y) + k - y - k \\
 &= F(y) - y \\
 &= \phi(x).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Denotemos o espaço de todas as medidas probabilísticas  $f$ -invariantes em  $\mathbb{T}^m$  por  $\mathcal{M}(f)$  e os subespaços constituído por medidas ergódicas por  $\mathcal{M}_E(f)$ .

Seja  $\mu \in \mathcal{M}_E(F)$  então, pelo Teorema Ergódico de Birkhof,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k \rightarrow \int \phi d\mu, \mu - \text{qtp.}$$

Por outro lado, se  $\pi(y) = x$  então

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k(\pi(y)) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ \pi(F^k(y)) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(F^k(y)) - F^k(y) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F^{k+1}(y) - F^k(y) \\
 &= \frac{1}{n} (F(y) - y + F^2(y) - F(y) + \dots + F^n(y) - F^{n-1}(y)) \\
 &= \frac{1}{n} (F^n(y) - y)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Isso significa que a sequência  $(\frac{1}{n}(F^n(y) - y))_{n \geq 1}$  converge para  $\int \phi d\mu$ . Assim,  $\int \phi d\mu \in \rho_p(F)$ .

Escrevamos então

$$\rho_{mes}(F) = \left\{ \int \phi d\mu; \mu \in \mathcal{M}_E(f) \right\}.$$

Temos assim que

$$\rho_{mes}(F) \subset \rho_p(F) \subset \rho(F).$$

Note que se  $F \in \mathcal{C}_1$ , então os três conjuntos definidos acima coincidem.

## 2.3 Propriedades gerais do conjunto de rotação

Seja  $A$  um subconjunto qualquer de  $\mathbb{R}^m$ . Denotemos por  $\text{Conv}(A)$  a casca convexa de  $A$ , isto é, o menor subconjunto convexo, contendo  $A$ .

Se  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\varepsilon > 0$ , então

$$\begin{aligned} B(A, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}^m; d(x, A) < \varepsilon\}, \\ \overline{B}(A, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}^m; d(x, A) \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Por  $f_*(\mu)$  denotemos a imagem de uma medida  $\mu$ , isto é, a medida tal que para toda  $\psi : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}$  contínua,

$$\int \psi df_*(\mu) = \int \psi \circ f d\mu.$$

**Proposição 2.4.** *Seja  $F \in \mathcal{C}_m$ ,  $p \in \mathbb{Z}^m$  e  $q \in \mathbb{N}$  então*

- (A)  $\rho(F^q - p) = q \cdot \rho(F) - p$ ;
- (B)  $\rho(F^q - p, x) = q \cdot \rho(F, x) - p$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ ;
- (C)  $\rho_p(F^q - p) = q \cdot \rho_p(F) - p$ ;
- (D)  $\rho_{mes}(F^q - p) = q \cdot \rho_{mes}(F) - p$ ;  
Se  $F \in \mathcal{H}_m$  então
- (E)  $\rho(F^{-1}) = -\rho(F)$ ;
- (F)  $\rho_{mes}(F^{-1}) = -\rho_{mes}(F)$ .

*Demonstração.* Provemos item (A).

Seja  $v \in \rho(F^q - p)$  então existem sequências  $(n_i)_{i \geq 1}$  e  $(x_i)_{i \geq 1}$  tal que  $n_i \rightarrow \infty$  e  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F^q - p)^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v$ .

Disso, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F^{qn_i}(x_i) - pn_i - x_i)}{n_i} &= v \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F^{qn_i}(x_i) - x_i)}{n_i} &= v + p \\ q \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F^{qn_i}(x_i) - x_i)}{qn_i} &= v + p \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F^{qn_i}(x_i) - x_i)}{qn_i} &= \frac{v+p}{q}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Logo,  $\frac{v+p}{q} \in \rho(F)$ . Portanto,  $v = q \frac{v+p}{q} - p \in q\rho(F) - p$ .

Por outro lado, seja  $v \in \rho(F)$ . Então existem sequências  $(n_i)_{i \geq 1}$  e  $(x_i)_{i \geq 1}$  tal que  $n_i \rightarrow \infty$  e  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v$ .

Seja  $k_i = E(\frac{n_i}{q})$ , onde  $E(\cdot)$  denota a parte inteira. Existe uma constante  $M$  tal que para todo  $z \in \mathbb{R}^2$  e  $0 \leq r \leq q-1$ ,  $\|F^r(z) - z\| \leq M$ . Escreva  $n_i = qk_i + r$ ,

$F^{qk_i}(x_i) = z_i$ . Então,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} - \frac{F^{qk_i}(x_i) - x_i}{qk_i} \right| &= \left| \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} + \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{qk_i} - \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{qk_i} - \frac{F^{qk_i}(x_i) - x_i}{qk_i} \right| \\
&\leq \left| \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} - \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{qk_i} \right| + \left| \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{qk_i} - \frac{z_i - x_i}{qk_i} \right| \\
&= \left| \frac{qk_i F^{n_i}(x_i) - qk_i x_i - n_i F^{n_i}(x_i) + n_i x_i}{n_i qk_i} \right| + \frac{1}{qk_i} |F^{n_i}(x_i) - z_i| \\
&= \left| \frac{(qk_i - n_i)F^{n_i}(x_i) - (qk_i - n_i)x_i}{n_i qk_i} \right| + \frac{1}{qk_i} |F^{n_i}(x_i) - z_i| \\
&= \left| \frac{r(F^{n_i}(x_i) - x_i)}{n_i qk_i} \right| + \frac{1}{qk_i} |F^{n_i}(x_i) - z_i| \\
&= \frac{r}{qk_i} \left| \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right| + \frac{1}{qk_i} |F^{n_i}(x_i) - z_i|.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Como  $\left| \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right| \rightarrow |v|$ ,  $\frac{r}{qk_i} \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{qk_i} \rightarrow 0$  com  $i \rightarrow \infty$ ; e  $|F^r(z_i) - z_i| \leq M$ , temos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F^q)^{k_i}(x_i) - x_i}{k_i} = qv.$$

Logo

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F^q - p)^{k_i}(x_i) - x_i}{k_i} = qv - p.$$

Portanto,  $qv - p \in \rho(F^q - p)$ .

Se substituimos  $x_i$  por  $x$  na prova do item (A) obtemos a prova do item (B). Além disso, por definição,

$$\rho_p(F) = \cup \rho(F, x), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Portanto, o item (C) segue diretamente do item (B).

Provemos agora o item (D). Lembremos que a aplicação contínua  $\phi : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  foi definida por  $\phi(x) = F(y) - y$ , onde  $y \in \pi^{-1}(x)$ . Vimos anteriormente que se  $\pi(x) = y$  então

$$\sum_{j=0}^{q-1} \phi \circ f^j(x) = F(y) - y = \phi(x).$$

Se substituimos  $F$  por  $F^q - p$  temos que

$$\phi(x) = F(y) - y = F^q(y) - p - y = \sum_{j=0}^{q-1} \phi \circ f^j(x) - p.$$

Portanto, se  $u \in \rho_{mes}(F^q - p)$  então existe uma medida  $\mu \in \mathcal{M}_E(f^q)$  tal que

$$u = \sum_{j=0}^{q-1} \int \phi \circ f^j d\mu - p.$$

A medida  $v = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} f_*^j(\mu)$  pertence a  $\mathcal{M}_E(f)$ . Assim

$$\int \phi dv = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \int \phi \circ f^j d\mu = \frac{u+p}{q}.$$

Logo  $\frac{u+p}{q} \in \rho_{mes}(F)$  e portanto  $u = q \cdot \frac{u+p}{q} - p \in q \cdot \rho_{mes}(F) - p$ . Então existe uma medida  $v \in \mathcal{M}_E(f)$  tal que  $\int \phi dv = u$ . A medida  $v$  é invariante por  $f^q$ , mas não é necessariamente ergódica. No entanto, sabendo que para algum  $r$  dividindo  $q$  e  $\mu \in \mathcal{M}_E(f)$  temos

$$v = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{q-1} f_*^j(\mu).$$

Assim

$$v = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} f_*^j(\mu).$$

Portanto,

$$u = \int \phi dv = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \int \phi \circ f^j d\mu = \frac{1}{q} \int (\sum_{j=0}^{q-1} \phi \circ f^j - p) d\mu + p.$$

Logo  $qv - p \in \rho_{mes}(F^q - p)$ .

Provemos o item (E). Seja  $x_i \in \mathbb{R}^m$  e  $F^{n_i}(x_i) = y_i$ . Então

$$\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = \frac{F^{n_i}(F^{-n_i}(y_i)) - F^{-n_i}(y_i)}{n_i} = \frac{y_i - (F^{-1})^{n_i}(y_i)}{n_i} = -\left(\frac{(F^{-1})^{n_i}(y_i) - y_i}{n_i}\right).$$

Logo  $\rho(F^{-1}) = -\rho(F)$ . □

A proposição abaixo mostra que existe uma relação entre o conjunto de rotação e órbitas periódicas.

**Proposição 2.5.** *Se  $f^q(y) = y$  onde  $y = \pi(x)$  então o conjunto  $\rho(F, x)$  consiste de um único ponto. Além disso, esse número é racional.*

*Demonstração.* Com efeito,

$$\pi \circ F^q(x) = f^q(\pi(x)) = f^q(y) = y = \pi(x),$$

ou seja,  $F^q(x) = x + p$ ,  $p \in \mathbb{Z}^m$ . Mostraremos que  $y$  tem número de rotação  $\rho(F, x) = \frac{p}{q}$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{p}{q}.$$

De fato, pelo Algoritmo da divisão euclidiana,  $n = m_n q + r_n$ ,  $0 \leq r_n < q$ . Assim,

$$\frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{1}{n} (F^{m_n q + r_n}(x) - x) = \frac{1}{n} (F^{r_n}(F^{m_n q}(x)) - F^{m_n q}(x) + F^{m_n q}(x) - x).$$

Como  $|(F^{r_n}(F^{m_n q}(x)) - F^{m_n q}(x))| \leq M$ ,  $M > 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (F^{r_n}(F^{m_n q}(x)) - F^{m_n q}(x)) = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (F^{m_n q}(x) - x) \\
&= \lim_{m_n \rightarrow \infty} \frac{1}{m_n q + r_n} (F^{m_n q}(x) - x) \\
&= \lim_{m_n \rightarrow \infty} \frac{m_n q}{m_n q + r_n} \cdot \frac{1}{m_n q} (F^{m_n q}(x) - x) \\
&= \lim_{m_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{r_n}{m_n q}} \cdot m_n p \\
&= \frac{p}{q}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

pois  $F^q(x) = x + p$ , logo  $F^{m_n q}(x) = x + m_n p$ .  $\square$

O lema a seguir afirma que o conjunto de rotação é um subconjunto da casca convexa de  $K_n(F)$ . Como consequência desse lema, provaremos que  $\rho(F)$  é conexo.

**Lema 2.6.** *Se  $F \in \mathcal{C}_m$  então  $\rho(F) \subset \text{Conv}(K_n(F))$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Fixemos  $n \in \mathbb{N}$  e seja  $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear. Tomemos  $k \in \mathbb{N}$  e  $z \in \mathbb{R}^m$ . Temos que

$$\Phi(F^k(z) - z) = \sum_{i=0}^{l-1} \Phi(F^{(i+1)n}(z) - F^{in}(z)) + \Phi(F^k(z) - F^{ln}(z)),$$

onde  $l = E\left(\frac{k}{n}\right)$  é a parte inteira.

Para cada  $j = 0, 1, \dots, n-1$  o conjunto  $\{F^j(x) - x; x \in \mathbb{R}^m\}$  é limitado desde que  $F^j(x) - x = \sum_{i=0}^{j-1} \phi(\pi(F^i(x)))$  e  $\phi$  contínua. Portanto existe uma constante  $M$  tal que  $\Phi(F^j(x) - x) \leq M$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Obtemos

$$\Phi(F^k(z) - z) \leq l.n. \sup \phi(K_n(F)) + M.$$

Consequentemente,

$$\Phi\left(\frac{F^k(z) - z}{k}\right) \leq \frac{ln}{k} \sup \phi(K_n(F)) + \frac{M}{k}.$$

Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{ln}{k} = 1$ , pois  $l = E(k/n)$ , e  $M, n, \sup \Phi(K_n(F))$  não depende de  $k$ , obtemos que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup (\Phi(K_k(F))) \leq \sup \Phi(K_n(F)).$$

Consequentemente, pela definição de  $\rho(F)$ ,

$$\sup \Phi(\rho(F)) \leq \sup (\Phi(K_n(F))). \tag{2.7}$$

O conjunto  $\text{Conv}(K_n(F))$  é convexo e fechado. Portanto, para cada ponto  $v \in \mathbb{R}^m$  que não pertence a  $\text{Conv}(K_n(F))$ , pode-se encontrar um funcional linear  $\Phi$  tal que

$$\Phi(v) > \sup \Phi(\text{Conv}(K_n(F))).$$

Como para cada subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^m$ ,

$$\sup \Phi(\text{Conv}(A)) = \sup \Phi(A),$$

obtemos por (2.5) que

$$\Phi(v) > \sup \Phi(\rho(F)),$$

e conseqüentemente  $v \notin \rho(F)$ . Logo,  $\rho(F) \subset \text{Conv}(K_n(F))$ .  $\square$

No próximo teorema exibimos uma parte da demonstração do Teorema C.

**Teorema 2.7.** *Se  $F \in \mathcal{C}_m$  então o conjunto de rotação  $\rho(F)$  é conexo.*

*Demonstração.* Por definição  $\rho(F)$  é fechado. Pelo lema anterior  $\rho(F) \subset \text{Conv}(K_n(F))$ .

Como  $K_n(F)$  é compacto, fechado e limitado, existe uma bola fechada  $\overline{B} \subset \mathbb{R}^m$  tal que

$$K_n(F) \subset \overline{B}.$$

Como  $\overline{B}$  é convexa, segue que  $\text{Conv}(K_n(F)) \subset \overline{B}$ . Portanto,  $\text{Conv}(K_n(F))$  é limitado, logo  $\rho(F)$  também o é. Assim,  $\rho(F)$  é compacto.

Suponha que  $\rho(F)$  não é conexo. Então existem conjuntos disjuntos  $A, B$  não-vazios e fechados em  $\rho(F)$  tal que  $\rho(F) = A \cup B$ . Como  $\rho(F)$  é compacto, segue que  $A$  e  $B$  são compactos.

O espaço  $\mathbb{R}^m$  é um espaço normal, então para  $A$  e  $B$  existem abertos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que

$$\begin{aligned} A &\subseteq U \subseteq \overline{U}, \\ B &\subseteq V \subseteq \overline{V}, \end{aligned}$$

onde  $\overline{U}$  e  $\overline{V}$  são disjuntos e compactos.

Seja  $\delta = \text{dis}(\overline{U}, \overline{V}) > 0$ ,  $v \in A$  e  $w \in B$ . Pela definição de  $\rho(F)$ , existem seqüências de inteiros  $n_i \rightarrow \infty$ ,  $k_j \rightarrow \infty$  e seqüências de pontos em  $\mathbb{R}^m$ ,  $(x_i)_{i \geq 1}$ ,  $(y_j)_{j \geq 1}$  tais que

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} &= v, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F^{k_j}(y_j) - y_j}{k_j} &= w. \end{aligned}$$

Como  $K_1(F)$  é compacto,  $\exists M > 0$  tal que  $|F(t) - t| \leq M, \forall t \in \mathbb{R}^m$ . Portanto, se tomamos  $z \in \mathbb{R}^m$  e escrevemos  $t = F^n(z)$ , temos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F^{n+1}(z) - z}{n+1} - \frac{F^n(z) - z}{n} \right| &= \left| \frac{F(t)-z}{n+1} - \frac{t-z}{n} \right| \\
&= \left| \frac{F(t)-z}{n+1} + \frac{F(t)-z}{n} - \frac{F(t)-z}{n} - \frac{t-z}{n} \right| \\
&= \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) |F(t) - z| + \left| \frac{F(t)-t}{n} \right| \\
&\leq \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) |F(t) - z| + \frac{M}{n} \\
&= \frac{1}{n} \left[ \left( 1 - \frac{n}{n+1} \right) |F(t) - z| + M \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{1}{n+1} \right) |F(t) - z| + M \right] \\
&= \frac{1}{n} \left( \left| \frac{F^{n+1}(z)-z}{n+1} \right| + M \right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
|F^{n+1}(z) - z| &= |F^{n+1}(z) + F^n(z) - F^n(z) + \dots + F(z) - F(z) - z| \\
&\leq |F^{n+1}(z) - F^n(z)| + \dots + |F(z) - z| \\
&\leq M + M + \dots + M \\
&= (n+1)M.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Logo,

$$\left| \frac{F^{n+1}(z)-z}{n+1} - \frac{F^n(z)-z}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \left( \frac{(n+1)M}{n+1} + M \right) = \frac{2M}{n}.$$

Isto é, as médias dos deslocamentos estão cada vez mais próximas uma da outra.

Como  $\rho(F) \subset U \cup V$  (aberto), existe  $N$  tal que

$$\frac{F^n(z)-z}{n} \in U \cup V, \forall n \geq N \text{ e } z \in \mathbb{R}^m.$$

Tome  $i$  tal que  $\frac{2M}{n_i} < \delta$ ,  $n_i \geq N$  e  $\left( \frac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{n_i} \right) \in U$ . Tome  $j$  tal que  $k_j \geq n_i$  e  $\left( \frac{F^{k_j}(y_j)-y_j}{k_j} \right) \in V$ .

Como para todo  $n \geq n_i$  temos  $\frac{2M}{n} \leq \frac{2M}{n_i} < \delta$ , segue que

$$\left| \frac{F^{n+1}(x_i)-x_i}{n+1} - \frac{F^n(x_i)-x_i}{n} \right| \leq \frac{2M}{n} < \delta = \text{dis}(\overline{U}, \overline{V}).$$

Como  $k_j \geq n_i$  temos que

$$\left( \frac{F^{k_j}(x_i)-x_i}{k_j} \right) \in U.$$

Seja  $\gamma$  a curva que junta  $x_i$  com  $y_j$ . Como  $x_i \in U$  e  $y_j \in V$ , temos que  $\gamma$  passa fora de  $U \cup V$ . Sua imagem sobre  $\frac{F^{k_j}-id}{k_j}$  junta  $\left( \frac{F^{k_j}(x_i)-x_i}{k_j} \right) \in U$  com  $\left( \frac{F^{k_j}(y_j)-y_j}{k_j} \right) \in V$ . Assim, essa imagem é uma curva que também passa fora de  $U \cup V$ , para todo

$n \geq n_i \geq N$ . Mas isso é uma contradição, pois para todo  $n \geq N$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$  temos que  $(\frac{F^n(z)-z}{n}) \in U \cup V$ . Logo  $\rho(F)$  é conexo.  $\square$

Uma observação interessante é que como a noção de conjunto de rotação, definida nesse capítulo, é uma generalização para o caso de endomorfismos no círculo, segue do teorema acima que  $\rho(f)$  é conexo, quando  $f$  é levantamento de algum endomorfismo. No entanto, optamos por fazer a prova do Teorema A, no capítulo 1, pois é mais simples.

O teorema que segue afirma que as cascas convexas do conjunto de rotação e do conjunto para medida coincidem. Desse teorema obteremos dois corolários relacionando os três conjuntos de rotação definidos anteriormente. Mais adiante veremos que essas propriedades nos ajudam a encontrar muitos conjuntos de rotações.

**Teorema 2.8.** *Se  $F \in \mathcal{C}_m$  então  $\text{Conv}(\rho(F)) = \text{Conv}(\rho_{mes}(F))$ .*

*Demonstração.* Já vimos que  $\rho_{mes}(F) \subset \rho(F)$ , portanto

$$\text{Conv}(\rho_{mes}(F)) \subset \text{Conv}(\rho(F)).$$

Note que para mostrar que  $\text{Conv}(\rho(F)) \subset \text{Conv}(\rho_{mes}(F))$ , basta mostrar que os pontos extremos de  $\text{Conv}(\rho(F))$  pertencem a  $\rho_{mes}(F)$ .

Seja  $v$  um ponto extremo de  $\text{Conv}(\rho(F))$ . Então  $v \in \rho(F)$  e portanto existem seqüências  $n_i \rightarrow \infty$  e  $y_i \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$\frac{F^{n_i}(y_i)-y_i}{n_i} \rightarrow v, \text{ com } i \rightarrow \infty.$$

Como  $y_i \in \mathbb{R}^m$ , dada  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ , tomemos  $x_i = \pi(y_i)$ . O conjunto

$$\mu_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=0}^{n_i-1} \delta_{f^k(x_i)}$$

onde  $\delta_z$  denota a medida probabilística concentrada em  $z$  (isto é,  $\delta_z(C) = 1$  se  $z \in C$  ou  $\delta_z(C) = 0$  se  $z \notin C$ , onde  $C \subseteq [0, 1]$ ).

Dada a seqüência  $(\mu_i)_{i \geq 1}$  (a qual é fracamente-convergente\* em  $\mathbb{R}^m$ ), podemos escolher uma subsequência fracamente-convergente\* para alguma medida probabilística  $\mu$  em  $\mathbb{T}^m$ . Para cada função contínua  $\psi : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , como

$$\begin{aligned} \left| \int \psi d(f_*(\mu_i)) - \int \psi d\mu_i \right| &= \left| \frac{\psi(f^{n_i}(x_i)) - \psi(x_i)}{n_i} \right| \\ &= \frac{1}{n_i} |\psi(f^{n_i}(x_i)) - \psi(x_i)| \\ &\leq \frac{2 \sup |\psi|}{n_i}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

temos que  $\int \psi d(f_*(\mu)) = \int \psi d(\mu)$ . Sendo assim, temos que  $f_*(\mu) = \mu$ , isto é  $\mu$  é  $f$ -invariante. Pela continuidade de  $\phi$  temos que

$$\int \phi d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \phi d\mu_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(y_i)-y_i}{n_i} = v.$$

Pelo Teorema de Decomposição Ergódica, podemos decompor a medida  $\mu$  em componentes ergódicas. Isso significa que existe uma medida probabilística  $w \in \mathcal{M}_E(f)$  tal que a cada função contínua  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int \psi d\mu = \int (\int \psi d\mu_E) dw(\mu_E).$$

Assim,

$$v = \int \phi d\mu = \int (\int \phi d\mu_E) dw(\mu_E). \quad (*)$$

Note que para cada  $\mu_E \in \mathcal{M}_E(f)$  temos

$$\int \phi d\mu_E \in \rho_{mes}(F) \subset \rho(F) \subset \text{Conv}(\rho(F)). \quad (**)$$

Por (\*) e (\*\*) e a suposição de que  $v$  é um ponto extremo de  $\text{Conv}(\rho(F))$ , segue que para  $\mu$ -quase cada medida  $\mu_E \in \mathcal{M}_E(f)$  temos  $\int \phi d\mu_E = v$ . Portanto  $v \in \rho_{mes}(F) \subset \text{Conv}(\rho_{mes}(F))$ .  $\square$

Como as medidas ergódicas são pontos extremos de  $\mathcal{M}(f)$ , segue que

$$\text{Conv}(\rho_{mes}(F)) = \left\{ \int \phi d\mu; \mu \in \mathcal{M}(f) \right\}.$$

**Corolário 2.9.** *Se  $F \in \mathcal{C}_m$  então  $\text{Conv}(\rho(F)) = \text{Conv}(\rho_p(F))$ .*

*Demonstração.* Como  $\rho_p(F) \subset \rho(F)$  segue que

$$\text{Conv}(\rho_p(F)) \subset \text{Conv}(\rho(F)).$$

Por outro lado, pelo Teorema anterior, temos que  $\text{Conv}(\rho(F)) = \text{Conv}(\rho_{mes}(F))$ . Como  $\rho_{mes}(F) \subset \rho_p(F)$  segue que  $\text{Conv}(\rho_{mes}(F)) \subset \text{Conv}(\rho_p(F))$ . Logo  $\text{Conv}(\rho(F)) \subset \text{Conv}(\rho_p(F))$ . Portanto,

$$\text{Conv}(\rho(F)) = \text{Conv}(\rho_p(F)).$$

$\square$

Note que a igualdade encontrada no corolário acima não seria possível sem a definição de conjunto de rotação para medida.

Como para cada  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  quase todo ponto é não-errante, obtemos o também o seguinte corolário

**Corolário 2.10.** *Se  $F \in \mathcal{C}_m$  então*

$$\text{Conv}(\rho(F)) = \text{Conv}(\cup \rho(F, x)),$$

onde a união é tomada para todo  $x \in \pi^{-1}(\Omega(f))$ .

*Demonstração.* Para cada  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  quase todo ponto é não-errante, assim

$$\text{Conv} (\rho_{mes}(F)) = \left\{ \int \phi d\mu; \mu \in \mathcal{M}(f) \right\} = \text{Conv} (\cup \rho(F, x)),$$

onde  $x \in \pi^{-1}(\Omega(f))$ . Pelo teorema anterior,

$$\text{Conv} (\rho_{mes}(F)) = \text{Conv} \rho(F).$$

Logo,

$$\text{Conv} \rho(F) = \text{Conv} (\cup \rho(F, x)), x \in \pi^{-1}(\Omega(f)).$$

□

Este corolário é útil para calcular o conjunto de rotação de alguns exemplos explícitos que sejam difíceis de calcular de outro modo.

**Definição 2.11.** Um ponto  $v \in \rho(F)$  é realizado por um subconjunto  $K \in \mathbb{R}^m$ , se  $K$  for compacto,  $f$ -invariante e o vetor de rotação  $\rho(F, x) = v$ , para todo  $x \in K$ . Em particular, dizemos que um ponto  $v \in \rho(F)$  é realizado por uma órbita periódica, se  $v \in \mathbb{Q}^m$  e existe  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{T}^m$ , tal que  $f^k(x) = x$  e  $F^k(y) = y + v$ ,  $y \in \pi^{-1}(x)$ .

**Proposição 2.12.** Todo ponto extremal de  $\rho(F)$  pode ser realizado por um ponto de  $\mathbb{R}^m$ .

*Demonstração.* De fato, como  $\rho(F) = \text{Conv} (\rho_{erg}(F))$ , todo ponto extremal de  $\rho(F)$  é ponto de  $\rho_{erg}(F)$ . Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff dado  $v \in \rho_{erg}(F)$  existe  $z \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$\frac{F^n(z) - z}{n} \rightarrow \{v\}; n \rightarrow \infty.$$

Logo,  $\rho_p(F) = v$ . □

**Lema 2.13.** Para cada  $F \in \mathcal{C}_m$  e  $\varepsilon > 0$  existe um  $n_0$  tal que  $\forall n \geq n_0$  temos  $K_n(F) \subset B(\text{Conv} (\rho(F)), \varepsilon)$ .

*Demonstração.* Suponhamos por contradição que o resultado seja falso. Então existe  $F \in \mathcal{C}_m$ ,  $\varepsilon > 0$  e seqüências  $n_i \rightarrow \infty$ ,  $v_i \in K_{n_i}(F)$  tal que

$$v_i \notin B(\text{Conv} (\rho(F)), \varepsilon).$$

Como  $K_{n_i}(F)$  é compacto, podemos escolher uma subsequência adequada de modo que a seqüência  $(v_i)_{i \geq 1}$  converge. Seja  $v = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i$ . Como  $v_i \in K_{n_i}(F)$ , temos

$$v_i = \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}, x_i \in \mathbb{R}^m.$$

Logo  $v \in \rho(F) \subset \text{Conv}(\rho(F))$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Proposição 2.14.** *Se  $F \in \mathcal{C}_m$ , então  $\text{Conv}(\rho(F)) = \bigcap_{n \geq 1} \text{Conv}(K_n(F))$ .*

*Demonstração.* Já vimos que  $\rho(F) \subset \text{Conv}(K_n(F))$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , assim

$$\text{Conv} \rho(F) \subset \text{Conv}(K_n(F)), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo,  $\text{Conv} \rho(F) \subset \bigcap_{n \geq 1} \text{Conv}(K_n(F))$ .

Por outro lado, pelo lema anterior, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $n$  suficientemente grande,

$$\text{Conv} K_n(F) \subset \text{Conv} B(\text{Conv} \rho(F), \varepsilon) = B(\text{Conv} \rho(F), \varepsilon).$$

Portanto se  $v \in \bigcap_{n \geq 1} \text{Conv}(K_n(F))$ , então  $v \in \text{Conv}(K_n(F))$ , para todo  $n$ . Daí,  $v \in B(\text{Conv} \rho(F), \varepsilon)$ . Logo,  $v \in \text{Conv} \rho(F)$ . Como queríamos.  $\square$

**Teorema 2.15.** *A função  $\text{Conv}(\rho(\cdot))$  de  $\mathcal{C}_m$  no espaço de subconjuntos de  $\mathbb{R}^m$  é semicontínua superiormente; isto é, para cada  $F \in \mathcal{C}_m$  e  $\varepsilon > 0$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $F$  em  $\mathcal{C}_m$  tal que para cada  $G \in V$  temos*

$$\text{Conv} \rho(G) \subset B(\text{Conv} \rho(F), \varepsilon).$$

*Demonstração.* Seja  $F \in \mathcal{C}_m$  e  $\varepsilon > 0$ , pelo lema anterior existe  $n$  tal que

$$\text{Conv} K_n(F) \subset B(\text{Conv} \rho(F), \varepsilon/2).$$

Por outro lado, existe uma vizinhança  $V$  de  $F$  em  $\mathcal{C}_m$  tal que para cada  $G \in V$ ,

$$\text{Conv} K_n(G) \subset B(\text{Conv} K_n(F), \varepsilon/2).$$

Daí,

$$\rho(G) \subset \text{Conv} K_n(G) \subset B(\text{Conv} K_n(F), \varepsilon/2).$$

Logo,

$$\text{Conv} \rho(G) \subset B(\text{Conv} K_n(F), \varepsilon).$$

$\square$

Deste teorema segue que o conjunto  $\mathcal{A} = \{F \in \mathcal{C}_m; x \in \text{Conv}(\rho(F))\}$  é fechado.

## 2.4 Propriedades do conjunto de rotação para aplicações no toro 2-dimensional

Nesta seção veremos que no caso de homeomorfismos no toro 2-dimensional, homotópicos à identidade, o conjunto de rotação possui propriedades mais fortes. Mais particularmente, se  $F \in \mathcal{H}_2$  então mostraremos que  $\rho(F)$  é *convexo*.

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}^2$ , denotemos por  $ab$  o segmento de linha reta aberto ligando  $a$  com  $b$  e por  $\overline{ab}$  o segmento de linha reta fechado ligando  $a$  com  $b$ . O lema a seguir será importante para as próximas considerações.

**Lema 2.16.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}^2$ ,  $a \neq b$  e  $T$  uma translação por um vetor  $v$ . Seja  $\gamma$  uma curva simples ligando  $a$  com  $b$ , não intersectando  $ab$ . Assuma que  $\gamma$  não intersecta  $T(\gamma)$ . Então  $T(a)$  não pertence a região aberta  $D$  limitada por  $ab \cup \gamma$ .*

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  uma aplicação contínua de  $I$  em  $\mathbb{R}^2$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $a = 0$ . Como  $\gamma$  não intersecta  $T(\gamma) = \gamma + v$ , a equação  $\gamma(s) = \gamma(t) + v$  não tem solução  $(s, t) \in I^2$ . Considere a aplicação  $\psi : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\psi(s, t) = \gamma(s) - \gamma(t).$$

Então, temos que  $v \notin \psi(I^2)$ , pois caso contrário, existiria  $(s_1, t_1) \in I^2$  tal que  $\gamma(s_1) - \gamma(t_1) = v$  e então,  $\gamma$  intersectaria  $T(\gamma)$ . Defina a curva fechada  $\alpha$  por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (3t, 0), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (1, 3t - 1), & \text{se } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ (3 - 3t, 3 - 3t), & \text{se } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

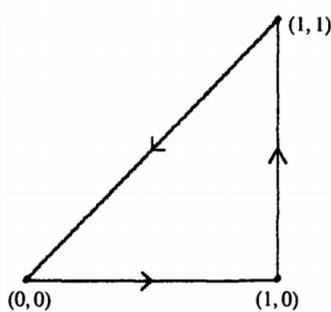


Figura 2.1: Aplicação  $\alpha$ .

A curva  $\psi(\alpha)$  é uma concatenação das curvas  $\gamma$  e  $b - \gamma$ . Seja  $\beta(t) = tb$ ,  $t \in I$ . Então  $\psi(\alpha)$  é uma concatenação de duas curvas fechadas  $\delta = \gamma * \beta^{-1}$  e  $\epsilon = \beta * (b - \gamma)$ . Por hipótese, a curva  $\gamma$  é simples. Se  $v \in D$  então o índice  $ind_v(\gamma)$  de  $\gamma$  com respeito a  $v$  é 1 ou  $-1$ . Como  $\epsilon$  é simétrica para  $\gamma$  com respeito ao ponto  $\frac{1}{2}b$ ,  $\epsilon$  é também simples e ou  $ind_v(\epsilon) = ind_v(\gamma)$  (se  $b - v \in D$ ) ou  $ind_v(\epsilon) = 0$  (se  $b - v \notin D$ ). Portanto

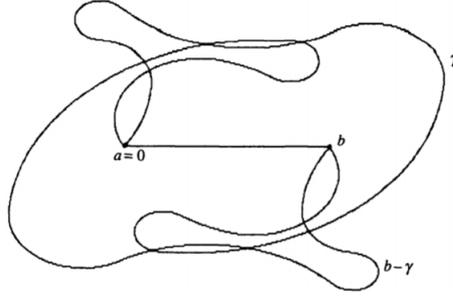


Figura 2.2: Curva  $\psi(\alpha)$ .

$$\text{ind}_v(\psi(\alpha)) = \text{ind}_v(\delta) + \text{ind}_v(\epsilon) \neq 0.$$

Consequentemente,  $v$  é imagem de alguns pontos do triângulo limitado por  $\alpha$ , contradição. Logo,  $T(a) = v \notin D$ .  $\square$

**Lema 2.17.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}^2$ ,  $a \neq b$ . Seja  $\gamma$  uma curva simples ligando  $a$  com  $b$ , não intersectando  $ab$ . Assuma que  $\pi(\gamma)$  é uma curva simples. Então*

- (a)  $\pi(a) \notin \pi(D)$ , onde  $D$  é como no lema acima;
- (b)  $\overline{ab} \subset \overline{B}(\gamma, \sqrt{2})$ .

*Demonstração.* Suponhamos por absurdo que  $\pi(a) \in \pi(D)$ . Então existe  $c \in D$  tal que  $\pi(a) = c$ , isto é,  $c - a$  tem coordenadas inteiras. Seja  $T$  a translação por  $c - a$ . Então as hipóteses do lema anterior são satisfeitas e obtemos uma contradição, provando o item (a).

Fazendo uma pequena rotação se necessário, podemos assumir que  $ab$  não é nem horizontal nem vertical. Para mostrar o item (b) é suficiente provar que para cada quadrado aberto com um lado de comprimento 1 e vértices pertencendo a rede  $a + \mathbb{Z}^2$ , que se isso intersecta o segmento  $ab$  então isso intersecta  $\gamma$ . Se um tal quadrado intersecta  $ab$ , então este intersecta  $D$ , mas estes vértices não pertencem a  $D$ , por (a). Como uma linha reta não pode separar um ponto interior de um quadrado com todos esses vértices, finalmente pelo menos um desses vértices tem que ser separado por  $\gamma$ . Consequentemente,  $\gamma$  tem que intersectar o fecho desse quadrado. Como queríamos.  $\square$

**Lema 2.18.** *Se  $G \in \mathcal{H}_2$  então  $\text{Conv}(G(I^2)) \subset \overline{B}(G(I^2), \sqrt{2})$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in \text{Conv}(G(I^2)) \setminus G(I^2)$ . Olhemos para o conjunto  $A$  de todos os elementos  $\theta$  do círculo unitário  $\mathbb{S}^1$  tal que o raio  $\{x + t\theta; t \geq 0\}$  intersecta  $G(I^2)$ . Como  $G(I^2)$  é conexo e compacto,  $A$  também o é. Consequentemente, como  $x \in \text{Conv}(G(I^2))$ ,  $A$  deve conter um semicírculo fechado. Isto implica que existem  $a, b \in G(I^2)$  tal que  $x \in ab$  e que  $ab$  é disjunto de  $G(I^2)$ . Temos que  $a = G(y)$  e  $b = G(z)$  para algum  $y, z \in I^2$ . A curva  $\gamma = G(\overline{yz})$  satisfaz as hipóteses do lema acima, a menos que  $\pi(y) = \pi(z)$ . Neste caso, para cada vizinhança de  $b$  deve existir  $b' = G(z') \neq b$  tal que  $ab'$  é disjunto de  $G(I^2)$ , já que  $G(I^2) = \text{int}(G(I^2))$ . Então, substituindo  $z$  por  $z'$ ,  $b$  por  $b'$  e  $x$  por  $x'$ , onde  $x'$  é o ponto de  $ab'$  mais

próximo de  $x$ . Pelo item (b) do lema acima,  $x$  ou  $x'$  pertence a  $B(G(I^2), \sqrt{2})$ . Como  $b'$  poderia ser escolhido arbitrariamente perto de  $x$ ,  $x'$  é arbitrariamente perto de  $x$ . Assim, em ambos os casos temos  $x \in \overline{B}(G(A), \sqrt{2})$ .  $\square$

Veremos agora que conjunto de rotação, para aplicações de  $\mathcal{H}^2$  é também convexo. Isso significa que, neste caso, esse conjunto é um subconjunto compacto e convexo de  $\mathbb{R}^2$ . Na próxima seção veremos como se caracterizam esses conjuntos de rotação.

**Teorema 2.19.** *Seja  $F \in \mathcal{H}_2$ . Então*

(a)  $\rho(F) = \bigcap_{n \geq 1} \text{Conv}(K_n(F));$

(b)  $\rho(F)$  é convexo;

(c) para cada  $v \in \rho(F)$  existe uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x_n) - x_n}{n} = v.$$

*Demonstração.* Já vimos que  $\rho(F) \subset \text{Conv}(K_n(F))$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $\rho(F) \subset \bigcap_{n \geq 1} \text{Conv}(K_n(F))$ . Por definição,

$$K_n(F) = \left\{ \frac{F^n(x) - x}{n}; x \in I^2 \right\}.$$

Logo,  $K_n(F) \subset \overline{B}\left(\frac{F^n(I^2)}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$ .

Também pela definição de  $K_n(F)$  temos que

$$\frac{F^n(I^2)}{n} \subset \overline{B}(K_n(F), \frac{\sqrt{2}}{n}).$$

Das três inclusões acima temos

$$\text{Conv}(K_n(F)) \subset \overline{B}(K_n(F), \frac{3\sqrt{2}}{n}).$$

Agora, se  $v \in \bigcap_{n \geq 1} \text{Conv}(K_n(F))$  então pela última inclusão acima, existe uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  tal que

$$\left\| \frac{F^n(x_n) - x_n}{n} - v \right\| \leq \frac{3\sqrt{2}}{n}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x_n) - x_n}{n} = v$$

e portanto  $v \in \rho(F)$ . Isso prova que  $\bigcap_{n \geq 1} \text{Conv}(K_n(F)) \subset \rho(F)$  e portanto segue o item (a). Como vimos que  $v \in \rho(F)$  provamos também o item (c). Além disso, como  $\bigcap_{n \geq 1} \text{Conv}(K_n(F))$  é convexo segue que  $\rho(F)$  também o é, provando o item (b).  $\square$

**Corolário 2.20.** *Se  $F \in \mathcal{H}_2$  então  $\rho(F) = \text{Conv}(\rho_{mes}(F)) = \text{Conv}(\rho_p(F))$ .*

*Demonstração.* De fato, vimos que se  $F \in \mathcal{C}_m$  então

$$\text{Conv}(\rho(F)) = \text{Conv}(\rho_{mes}(F)) = \text{Conv}(\rho_p(F)).$$

Pelo teorema acima,  $\rho(F) = \text{Conv}(\rho(F))$ . Portanto o resultado segue imediatamente.  $\square$

**Corolário 2.21.** *Se  $F \in \mathcal{H}_2$  então  $\rho(F) = \text{Conv}(\cup \rho(F, x))$ , onde a união é tomada para todo ponto  $x \in \pi^{-1}(\Omega(f))$  e  $\Omega(f)$  é o conjunto dos pontos não-errantes de  $f$ .*

*Demonstração.* De fato, se  $F \in \mathcal{C}_m$  então

$$\rho(F) = \text{Conv}(\cup \rho(F, x)), x \in \pi^{-1}(\Omega(f))$$

Como para  $F \in \mathcal{H}_2$ , o conjunto de rotação  $\rho(F)$  é convexo, segue que

$$\rho(F) = \text{Conv}(\cup \rho(F, x)), x \in \pi^{-1}(\Omega(f)).$$

$\square$

**Corolário 2.22.** *A função  $\rho$  de  $\mathcal{H}_2$  do espaço de subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  é semicontínua superiormente.*

**Corolário 2.23.** *Para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ , o conjunto  $\{F \in \mathcal{H}_2; x \in \rho(F)\}$  é fechado.*

A prova desses dois últimos corolários segue imediatamente por serem válidos para o caso geral, como provado na seção 2.2; e usando o fato de que para  $\mathcal{H}_2$ , o conjunto de rotação  $\rho(F)$  é convexo.

Já vimos que se  $F \in \mathcal{C}_m$  então existe uma relação entre o conjunto de rotação e órbitas periódicas, isto é,  $f^q(x) = x$  e  $\pi(y) = x$  então o conjunto  $\rho(F, y)$  consiste de um único ponto.

No caso em que  $F \in \mathcal{H}_2$ , vimos também que todo ponto extremal do conjunto de rotação pode ser realizado.

O seguinte teorema é provado por *Franks* [7] (Teorema 3.5), ele diz que se 0 pertence ao conjunto de rotação para medida de  $F$ , então  $F$  tem um ponto fixo.

**Teorema 2.24.** *Se  $F \in \mathcal{H}_2$  e  $0 \in \rho_{mes}(F)$  então  $F$  tem um ponto ponto fixo.*

Como corolário do teorema acima, garantimos que os pontos extremais racionais são realizados por órbitas periódicas.

**Teorema 2.25.** *Se  $F \in \mathcal{H}_2$  e  $(\frac{r}{q}, \frac{s}{q}) \in \rho_{mes}(F)$ , onde  $r, s \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  e o máximo divisor comum de  $r, s, q$  é 1, então existe um ponto  $q$ -periódico  $x \in \mathbb{T}^2$  de  $f$  tal que  $\rho(F, y) = \{(\frac{r}{q}, \frac{s}{q})\}$  para  $y \in \pi^{-1}(x)$ .*

*Demonstração.* Vimos que  $\rho_{mes}(F^q - p) = q \cdot \rho_{mes}(F) - p$ . Por hipótese,  $(\frac{r}{q}, \frac{s}{q}) \in \rho_{mes}(F)$ . Segue que

$$(r, s) = q \cdot (\frac{r}{q}, \frac{s}{q}) \in q \cdot \rho_{mes}(F).$$

Logo,  $0 \in q \cdot \rho_{mes}(F) - (r, s) = \rho_{mes}(F^q - (r, s))$ . Assim, pelo teorema anterior, segue que  $F^q - (r, s)$  tem um ponto fixo  $z$ , isto é,  $F^q(z) - (r, s) = z$ . Desse modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F^q)^n(z) - (r, s) - z}{n} = 0.$$

Isto é,  $\rho(F^q(r, s); z) = \{0\}$ . Mas como  $\rho(F^q - p, x) = q \cdot \rho(F, x) - p$ , segue que

$$q \cdot \rho(F, z) - (r, s) = \rho(F^q - (r, s); z) = \{0\}.$$

Daí,

$$\rho(F, z) = \{(\frac{r}{q}, \frac{s}{q})\}.$$

Agora, se  $x = \pi(z)$ ,  $y \in \pi^{-1}(x)$  então  $\pi(y) = \pi(z)$  e portanto,  $y = z + k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ . Daí,

$$\begin{aligned} \rho(F, y) &= \rho(F, z + k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(z+k) - (z+k)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(z) + k - z - k}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(z) - z}{n} \\ &= \rho(F, z) \\ &= \{(\frac{r}{q}, \frac{s}{q})\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Temos também que

$$f^q(x) = f(\pi(z)) = \pi(F^q(z)) = \pi(z + (r, s)) = \pi(z) = x.$$

Agora, se  $x$  é periódico para  $f$  para algum período  $q'$  dividindo  $q$  então  $f^{q'}(x) = x = \pi(z)$ . Daí,

$$\pi(F^{q'}(z)) = f^{q'}(\pi(z)) = f^{q'}(x) = x = \pi(z),$$

ou seja,  $F^{q'}(z) = z + (r', s')$ , para algum  $r', s' \in \mathbb{Z}$ . Como  $q'$  divide  $q$ , existe  $l \in \mathbb{Z}$

tal que  $q = q' \cdot l$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
F^q(z) &= F^{q' \cdot l}(z) \\
&= (F^{q'}(z))^l \\
&= z + l(r', s') \\
&= z + \frac{q}{q'}(r', s') \\
&= z + \left(\frac{q}{q'}r', \frac{q}{q'}s'\right).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Isso implica que  $r = \frac{q}{q'}r'$ ,  $s = \frac{q}{q'}s'$  e  $\frac{q}{q'}$  divide  $r, s, q$ . Logo,  $\frac{q}{q'} = 1$  e portanto  $q = q'$ , completando a demonstração.  $\square$

**Corolário 2.26.** *Se  $f \in \mathcal{H}_2$  então  $\rho_{mes}(F) \cap \mathbb{Q}^2 = \cup \rho(F, y)$ , onde a união é dada para todo  $y$  tal que  $\pi(y)$  é periódico para  $f$ .*

*Demonstração.* Seja  $(\frac{r}{q}, \frac{s}{q}) \in \mathbb{Q}^2$  tal que  $(\frac{r}{q}, \frac{s}{q}) \in \rho_{mes}(F)$ . Então pelo teorema anterior, existe  $x = \pi(y) \in \mathbb{T}^2$  ponto  $q$ -periódico de  $f$  tal que  $\rho(F, y) = (\frac{r}{q}, \frac{s}{q})$ . Logo,  $(\frac{r}{q}, \frac{s}{q}) \in \cup \rho(F, x)$ . Por outro lado, se  $(a, b) \in \cup \rho(F, y)$  então existe  $x \in \mathbb{T}^2$ , onde  $\pi(y) = x$ , tal que  $\rho(F, y) = (a, b)$  e  $f^q(x) = x$  para algum  $q$  inteiro. Assim,

$$\pi(F^q(y)) = f^q(\pi(y)) = \pi(y).$$

Então,  $F^q(y) = y + (a', b')$ ,  $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$ . Daí,

$$\rho(F, y) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{F^q(y) - y}{q} = \frac{(a', b')}{q} \in \mathbb{Q}^2.$$

Além disso,

$$\frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \phi \circ f^k(x) = \frac{F^q(y) - y}{q} = \frac{(a', b')}{q}.$$

Logo,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \phi \circ f^k(x) = \frac{(a', b')}{q}.$$

Por outro lado, como  $\mu \in \mathcal{M}_E$ , segue pelo Teorema ergódico que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \phi \circ f^k(x) = \int \phi d\mu.$$

Portanto,

$$\int \phi d\mu = \frac{(a', b')}{q}.$$

Logo,

$$\frac{(a', b')}{q} \in \left\{ \int \phi d\mu; \mu \in \mathcal{M}_E \right\} = \rho_{mes}(F).$$

Isso completa a prova do corolário.  $\square$

## 2.5 Exemplos de conjuntos de rotação para homeomorfismos no toro

Como vimos anteriormente, o conjunto de rotação  $\rho(F)$  de um homeomorfismo de  $\mathbb{T}^2$ , homotópico à identidade, é compacto e convexo. Dessa forma, ele pode ser um ponto, um segmento de reta ou possuir interior não-vazio. Nesta seção veremos exemplos que ilustram cada um dos três casos acima.

(1) *Um único vetor;*

Seja  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $H(x) = x + v$ ,  $v \in \mathbb{R}^2$ . Note que  $H$  é um levantamento de  $h(x) = [x + v]$ , pois

$$\begin{aligned}\pi \circ H(x) &= \pi(x + v) = [x + v] \\ h \circ \pi(x) &= [\pi(x) + v] = [x + v]\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}H^n(x) &= H^{n-1}(H(x)) = H^{n-1}(x + v) = H^{n-2}H(x + v) = H^{n-2}(x + 2v) = \\ &\dots = x + nv.\end{aligned}$$

Logo,  $\frac{H^n(x) - x}{n} = \frac{x + nv - x}{n} = v$ . Portanto,  $\rho(H) = v$ .

(2) *Um segmento de reta;*

Esse exemplo é conhecido por *Fluxo de Reeb* e construído na faixa  $(-\infty, \infty) \times [0, 1]$ .

Definamos sobre as retas  $(-\infty, \infty) \times \{0\}$ ,  $(-\infty, \infty) \times \{\frac{1}{2}\}$  e  $(-\infty, \infty) \times \{1\}$

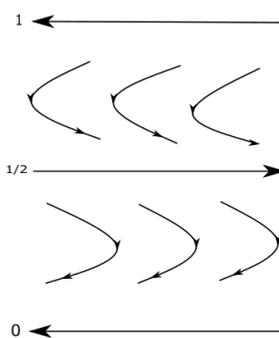


Figura 2.3: Fluxo de Reeb

um campo  $v$  que vale  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$ , respectivamente.

Estendamos esse campo em  $(-\infty, \infty) \times [0, 1]$  de forma que as curvas integrais restantes sejam assintóticas às retas dadas anteriormente e satisfaçam

$$\begin{aligned}v(x + 1, y) &= v(x, y), \\ v(x, y + \frac{1}{2}) &= -v(x, y).\end{aligned}$$

De forma natural, estendamos esse campo para todo o plano e consideremos o homeomorfismo dado pelo fluxo no tempo 1,

$$F(x, y) = (x + \cos(2\pi y), y + \frac{1}{100} \sin(2\pi y)).$$

Dado  $(x, \frac{k}{2}) \in \mathbb{R} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ , temos

(A) Se  $k$  é par, então,

$$\begin{aligned} F(x, \frac{k}{2}) &= (x + \cos(\pi k), \frac{k}{2} + \frac{1}{100} \sin(\pi k)), \\ F^2(x, \frac{k}{2}) &= F(F(x, \frac{k}{2})) \\ &= F(x + 1, \frac{k}{2}) \\ &= (x + 1 + \cos(\pi k), \frac{k}{2} + \frac{1}{100} \sin(\pi k)) \\ &= (x + 2, \frac{k}{2}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Assim,  $F^n(x, \frac{k}{2}) = (x + n, \frac{k}{2})$ . Portanto,

$$\frac{F^n(x, \frac{k}{2}) - (x, \frac{k}{2})}{n} = \frac{(x+n, \frac{k}{2}) - (x, \frac{k}{2})}{n} = \frac{(n, 0)}{n} = (1, 0).$$

Analogamente,

(B) Se  $k$  é ímpar, então,

$$F^n(x, \frac{k}{2}) = (x + n, \frac{k}{2}).$$

Portanto,

$$\frac{F^n(x, \frac{k}{2}) - (x, \frac{k}{2})}{n} = (-1, 0).$$

É possível mostrar que  $\forall z \in \mathbb{R}^2$ ,  $\rho(F, z) = \{(-1, 0)\}$  ou  $\rho(F, z) = \{(1, 0)\}$ . Assim,  $\rho_p(F) = \{(-1, 0), (1, 0)\}$ .

Como  $\rho(F) = \text{Conv } \rho_p(F)$ , segue que

$$\rho(F) = [-1, 1] \times \{0\}.$$

(3) *Possui interior não-vazio.*

Vamos construir um caso particular onde o conjunto de rotação  $\rho(F) = [0, 1]^2$ .<sup>1</sup>

Sejam  $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  funções periódicas de período 1, tais que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \psi(t) = 0; t \in \mathbb{Z} \\ \phi(t) &= \psi(t) = 1; t \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sejam  $G, H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por

$$\begin{aligned} G(x, y) &= (x + \phi(y), y) \\ H(x, y) &= (x, y + \psi(x)). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>O caso geral, onde qualquer polígono convexo de  $\mathbb{R}^2$  é conjunto de rotação de algum homeomorfismo homotópico à identidade, pode ser consultado na referência [3].

Considere  $F = H \circ G$ . Então,  $F(x, y) = (x + \phi(y), y + \psi(x + \phi(y)))$ . Se  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2$  então

$$F(x, y) + (v_1, v_2) = (x + \phi(y) + v_1, y + \psi(x + \phi(y)) + v_2), \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} F(x + v_1, y + v_2) &= (x + v_1 + \phi(y + v_2), y + v_2 + \psi(x + v_1 + \phi(y + v_2))) \\ &= (x + v_1 + \phi(y), y + v_2 + \psi(x + v_1 + \phi(y))) \\ &= (x + v_1 + \phi(y), y + v_2 + \psi(x + \phi(y))) \\ &= F(x, y) + (v_1, v_2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Logo,  $F$  é levantamento de algum homeomorfismo de  $\mathbb{T}^2$ , homotópico à identidade. Agora,

$$F(\tfrac{1}{2}, 0) = (\tfrac{1}{2} + \phi(0), \psi(\tfrac{1}{2} + \phi(0))) = (\tfrac{1}{2}, \psi(\tfrac{1}{2})) = (\tfrac{1}{2}, 1),$$

$$F^2(\tfrac{1}{2}, 0) = F(F(\tfrac{1}{2}, 0)) = (\tfrac{1}{2} + \phi(1), 1 + \psi(\tfrac{1}{2} + \phi(1))) = (\tfrac{1}{2}, 1 + \psi(\tfrac{1}{2})) = (\tfrac{1}{2}, 1 + 1).$$

Logo,  $F^n(\tfrac{1}{2}, 0) = (\tfrac{1}{2}, n)$ . Daí,

$$\frac{F^n(\tfrac{1}{2}, 0) - (\tfrac{1}{2}, 0)}{n} = \frac{(\tfrac{1}{2}, n) - (\tfrac{1}{2}, 0)}{n} = \frac{(0, n)}{n} = (0, 1).$$

Portanto,  $\rho(F; (\tfrac{1}{2}, 0)) = (0, 1)$ . Analogamente,

$$\begin{aligned} \rho(F; (0, \tfrac{1}{2})) &= (1, 0), \\ \rho(F; (0, 0)) &= (0, 0), \\ \rho(F; (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})) &= (1, 1). \end{aligned}$$

Assim,  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \subseteq \rho_p(F)$ . Como  $\rho(F) = \text{Conv } \rho_p(F)$ , segue que  $[0, 1]^2 \subseteq \rho(F)$ .

Por outro lado, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  temos

$$\begin{aligned} F(x, y) - (x, y) &= (x + \phi(y), y + \psi(x + \phi(y))) - (x, y) = \\ &= (\phi(y), \psi(x + \phi(y))) \in [0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^2(x, y) - (x, y) &= F(F(x, y)) - (x, y) = F(x + \phi(y), y + \psi(x + \phi(y))) - (x, y) = \\ &= (x + \phi(y) + \phi(y), y + \psi(x + \phi(y)) + \psi(x + \phi(y))) - (x, y) = \\ &= (2\phi(y), 2\psi(x + \phi(y))) \in [0, 2]^2. \end{aligned}$$

Por recorrência,  $F^n(x, y) - (x, y) \in [0, n]^2$ . Logo,

$$\frac{F^n(x, y) - (x, y)}{n} \in \frac{[0, n]^2}{n} = [0, 1]^2.$$

Logo,  $\rho(F) = [0, 1]^2$ .

O exemplo acima ilustra o resultado de *Kwapisz*, citado na introdução. Isso termina a prova de todos os resultados citados na introdução.

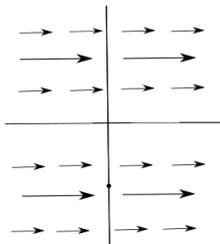


Figura 2.4: Fluxo da aplicação  $G$

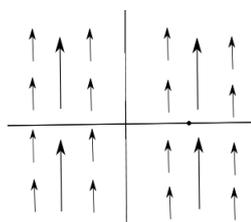


Figura 2.5: Fluxo da aplicação  $H$

# Apêndice A

## Teorema de Classificação de Poincaré

Inicialmente veremos algumas propriedades do levantamento.

O lema a seguir nos diz que toda aplicação contínua definida no círculo unitário admite infinitos levantamentos, os quais diferem dois a dois por um inteiro (função constante).

**Lema 2.27.** *Toda aplicação contínua  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  admite um levantamento  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Mais ainda, para todo  $k \in \mathbb{Z}$  tem-se que  $f_1 + k$  também é levantamento de  $f_0$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathbb{S}^1$ , então existe  $x' \in \mathbb{S}^1$  tal que  $f_0(x) = x'$ . Por outro lado, como  $\pi$  é sobrejetiva, existe  $y, y' \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(y) = x$  e  $\pi(y') = x'$ . Assim,

$$f_0(x) = x' \Rightarrow f_0(\pi(y)) = \pi(y') \Rightarrow \pi^{-1}(f_0(\pi(y))) = y'.$$

Isto é, existe uma aplicação contínua  $f_1 = \pi^{-1} \circ f_0 \circ \pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_1(y) = y'$ . Portanto  $f_1$  é levantamento de  $f_0$ .

Além disso,  $f_1 + k$ ; para todo  $k \in \mathbb{Z}$  é também levantamento de  $f_0$ . Com efeito, é claro que como  $f_1$  é contínua,  $f_1 + k$  também é contínua, para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Além disso,

$$\pi \circ (f_1 + k) = \pi \circ f_1 = f_0 \circ \pi.$$

Portanto,  $f_0$  possui infinitos levantamentos.

Sejam  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  levantamentos quaisquer de  $f_0$ . Vamos mostrar que  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tal que  $f_1(x) = f_2(x) + k, \forall x \in \mathbb{R}$ . Como  $f_1$  e  $f_2$  são ambos levantamentos de  $f_0$ , temos

$$\pi \circ f_1 = f_0 \circ \pi = \pi \circ f_2.$$

Assim,  $\pi(f_1) - \pi(f_2) = 0$  e portanto,

$$f_1(x) - f_2(x) = k(x) \in \mathbb{Z}$$

*Afirmção:*  $k(x)$  independe de  $x$ .

Com efeito,  $(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x) = k(x)$ . Como  $f_1, f_2$  são contínuas, segue que  $f_1 - f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  também é contínua. Daí, como  $\mathbb{Z}$  é um espaço discreto, segue que  $f_1 - f_2$  tem um único inteiro como imagem. Portanto,  $f_1(x) - f_2(x) = (f_1 - f_2)(x) = k \in \mathbb{Z}$ . Isto é,  $f_1(x) = f_2(x) + k, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Observação 2.28.** *O lema anterior nos diz que dado um levantamento qualquer de  $f$  é possível determinar todos os seus outros levantamentos, os quais são infinitos.*

*Note que*

$$\pi(f(x+1)) = f_0(\pi(x+1)) = f_0(\pi(x)) = \pi(f(x)).$$

*Isto implica que,  $f(x+1) - f(x) = d(x) \in \mathbb{Z}$ , onde  $f$  é um levantamento de  $f_0$ . Analogamente ao argumento na prova do lema anterior, mostramos que  $f(x+1) - f(x)$  independe de  $x$ . Além disso, se  $g$  é outro levantamento de  $f_0$ , então pelo lema,  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tal que  $g(x) = f(x) + k$ . Daí,*

$$g(x+1) - g(x) = f(x+1) + k - f(x) - k = f(x+1) - f(x) = d.$$

*Portanto,  $d$  independe do levantamento.*

A proposição abaixo exhibe algumas propriedades envolvendo o grau de  $f_0$  e seus levantamentos.

**Proposição 2.29.** *Sejam  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  contínua e  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  levantamentos de  $f_0$ , então:*

$$P1) \quad f_1(x+m) = f_1(x) + md; \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$P2) \quad f_1^n(x+m) = f_1^n(x) + md^n; \quad m, n \in \mathbb{Z};$$

$$P3) \quad \text{Se } \deg f_0 = 1, \text{ então } f_1^n(x) = f_2^n(x) + nk; \quad k, n \in \mathbb{Z};$$

$$P4) \quad f_1^n, f_2^n \text{ são levantamentos de } f_0^n.$$

*Demonstração.* P1)

$$\begin{aligned} f_1(x+m) &= f_1(x+m-1) + d \\ &= f_1(x+m-2) + 2d \\ &= f_1(x+m-3) + 3d. \end{aligned}$$

(2.16)

Portanto,  $f_1(x+m) = f_1(x+m-m) + md = f_1(x) + md$ .

P2)

$$\begin{aligned}
 f_1^n(x+m) &= f_1^{n-1}(f_1(x+m)) \\
 &= f_1^{n-1}(f_1(x)+md) \\
 &= f_1^{n-2}(f_1(f_1(x)+md)) \\
 &= f_1^{n-2}(f_1^2(x)+md^2).
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Segue indutivamente que ,  $f_1^n(x+m) = f_1^{n-n}(f_1^n(x)+md^n) = f_1^n(x)+md^n$ .

P3) Por indução temos que se  $n = 1$  então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $f_1(x) = f_2(x)+k$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Suponhamos que  $f_1^t(x) = f_2^t(x) + tk$  para todo inteiro  $t$  maior do que ou igual a 1 e menor que  $n$ . Então

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= f_1^{n-1}(f_1(x)) \\
 &= f_2^{n-1}(f_1(x)) + (n-1)k \\
 &= f_2^{n-1}(f_2(x)+k) + (n-1)k \\
 &= f_2^{n-1}(f_2(x)) + k + (n-1)k \\
 &= f_2^n(x) + nk.
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Portanto a igualdade é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

P4) Vamos mostrar que  $f_1^n$  é levantamento de  $f_0^n$ . Por indução, se  $n = 1$  a afirmação é verdadeira por hipótese. Suponha que a afirmação seja verdadeira para todo inteiro maior do que ou igual a 1 e menor que  $n$ . Pela definição de levantamento, temos

$$\pi \circ f_1^n = \pi \circ f_1^{n-1} \circ f_1 = f_0^{n-1} \circ \pi \circ f_1 = f_0^{n-1} \circ f_0 \circ \pi = f_0^n \circ \pi.$$

Portanto,  $f_1^n$  é levantamento de  $f_0^n$ .

□

Agora veremos algumas propriedades do número de rotação para homeomorfismos no círculo. Logo depois exibiremos a prova do *Teorema de Classificação de Poincaré*.

O número de rotação é um número real associado a aplicação  $f$ , definida no círculo unitário  $\mathbb{S}^1$ . Vejamos como o número de rotação caracteriza o comportamento das órbitas de  $f$ .

**Definição 2.30.** *Sejam  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  um homeomorfismo que preserva orientação no círculo e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento qualquer de  $f$ . O número  $\rho(F) = \rho_0(f)(\text{mod}1)$  é chamado de número de rotação de  $f$ , onde*

$$\rho_0(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

sempre existe.

Esta definição nos diz o quanto em média cada iterado de um ponto  $x \in \mathbb{S}^1$ , "caminha" pelo homeomorfismo  $f$ . O número de rotação sempre existe e independe do ponto escolhido.

Se  $x$  e  $y$  são dois pontos em  $\mathbb{S}^1$ , então definimos o intervalo  $[x, y] \subset \mathbb{S}^1$  sendo  $\pi([x', y'])$ , onde  $x' \in \pi^{-1}(x)$  e  $y' = \pi^{-1}(y) \cap [x', x' + 1]$ . Intervalos abertos e semi-abertos são definidos de maneira semelhante.

**Lema 2.31.** *Suponha  $\rho(F)$  irracional. Então, para qualquer  $x \in \mathbb{S}^1$  e quaisquer inteiros distintos  $m > n$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(x) \in I = [f^m(x), f^n(x)]$ .*

Vejamos agora a seguinte proposição.

**Proposição 2.32.** *Se  $\rho(F)$  é irracional, então  $\omega(x) = \omega(y), \forall x, y \in \mathbb{S}^1$ , e também  $\omega(x) = \mathbb{S}^1$  ou  $\omega(x)$  é perfeito (fechado e sem pontos isolados) e não denso em nenhum aberto.*

**Lema 2.33.** *Suponha que  $\rho(F)$  é irracional, onde  $F$  um levantamento de  $f$  e  $\rho = \rho(F)$ . Então para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \iff F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$$

para qualquer  $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema 2.34.** (Teorema de Poincaré) *Seja  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  um homeomorfismo que preserva orientação com número de rotação irracional  $\rho$ .*

- 1) *Se  $f$  é topologicamente transitiva então  $f$  é conjugada topologicamente à rotação  $R_\rho$ .*
- 2) *Se  $f$  não é topologicamente transitiva, então  $R_\rho$  é um fator topológico de  $f$ , através de uma aplicação monótona, contínua e não-invertível  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ .*

*Demonstração.* Seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $f$  e fixe  $x \in \mathbb{R}$ . Considere também os conjuntos  $A = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$  e  $B = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ . Defina  $H : A \rightarrow B$  por  $H(F^n(x) + m) = n\rho + m$ . Pelo lema anterior,  $H$  é monótona.

O conjunto  $B$  é denso em  $\mathbb{R}$ . De fato, seja  $J \subset \mathbb{R}$  um aberto qualquer e  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , onde  $\pi(x) = x \pmod{1}$  a aplicação projeção. Considere também a rotação  $R_\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , onde  $R_\rho(x) = x + \rho$ . Pelo Teorema de Jacobi a rotação  $R_\rho$  é minimal, isto é, a órbita  $O_{R_\rho}(x) = \{R_\rho^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é densa em  $\mathbb{S}^1, \forall x \in \mathbb{S}^1$ . Em particular, a órbita de 0,  $O_{R_\rho}(0) = \{R_\rho^n(0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é densa em  $\mathbb{S}^1$ . Então, considerando o intervalo  $\pi(J) = I \subset \mathbb{S}^1$ , temos que  $R_\rho^n(0) \in I = \pi(J)$ . Logo, existe  $x \in J$  tal que  $R_\rho^n(0) = \pi(x), n \in \mathbb{Z}$ .

Agora, seja  $F$  um levantamento de  $R_\rho$ . Já vimos que então,  $F^n$  é um

levantamento de  $R_\rho^n$ . Logo, existe  $y \in J$  tal que  $F^n(0) = y$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Pela definição de levantamento temos

$$\begin{aligned} \pi \circ F^n(0) &= R_\rho^n \circ \pi(0) \\ &\Rightarrow \\ \pi(y) &= R_\rho^n(0) \\ &\Rightarrow \\ \pi(y) &= n\rho \\ &\Rightarrow \\ y(\text{mod } 1) &= n\rho \\ &\Rightarrow \\ y &= n\rho + m \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto  $B$  é denso em  $\mathbb{R}$ .

Se abusarmos da notação e escrevermos  $R_\rho$  como a transformação  $R_\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $R_\rho(x) = x + \rho$  então  $H \circ F = R_\rho \circ H$  em  $A$ , já que

$$\begin{aligned} H \circ F(F^n(x) + m) &= H \circ F(F^n(x + m)) \\ &= H \circ F^{n+1}(x + m) \\ &= H(F^{n+1}(x) + m) \\ &= (n + 1)\rho + m \end{aligned} \tag{2.19}$$

e

$$\begin{aligned} R_\rho \circ H(F^n(x) + m) &= R_\rho(n\rho + m) \\ &= n\rho + m + \rho \\ &= (n + 1)\rho + m \end{aligned} \tag{2.20}$$

**Afirmção:**  $H$  se estende continuamente ao fecho de  $A$ .

De fato, se  $y \in \overline{A}$  então existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  tal que  $\lim x_n = y$ . Queremos definir  $H(y) = \lim H(x_n)$ . Para mostrarmos que  $\lim H(x_n)$  existe e independe da escolha da sequência se aproximando de  $y$ , observe que os limites laterais existem e são independentes da sequência, pois  $H$  é monótona. Se os limites laterais fossem diferentes então,  $\mathbb{R} - B$  conteria um intervalo, contradizendo o fato de  $B$  ser denso em  $\mathbb{R}$ . Portanto,  $\lim H(x_n)$  existe e independe da sequência que se aproxima de  $y$ .

**1º caso:**  $\overline{A} \neq \mathbb{R}$ .

A transformação  $H$  pode agora ser estendida a  $\mathbb{R}$ . A função  $H : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}$  é monótona e sobrejetiva, já que  $H$  é monótona e contínua em  $A$ ,  $\overline{A}$  é fechado e  $B$  é denso em  $\mathbb{R}$ , então não existe alternativa a definir  $H$  nos intervalos complementares a  $\overline{A}$ . A única alternativa é que  $H = \text{constante}$  nesses intervalos, pois se  $H$  não é contante, teremos que defini-la nesses intervalos de alguma outra forma, já que  $H$  é sobrejetiva, mas qualquer outra forma contraria a monotonicidade de  $H$ .

Escolhamos a constante igual aos valores nos extremos desses intervalos. Tal origina uma transformação  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $H \circ F = R_\rho \circ H$ . De fato, já vimos

que para todo  $x \in A$  tal igualdade se verifica. Mas, como  $H$  é uma extensão contínua ao fecho  $\bar{A}$  de  $A$ , segue-se que a igualdade também é válida para pontos de  $\bar{A}$ .

Resta-nos mostrar que  $H \circ F = R_\rho \circ H$  se verifica para todo ponto  $x$  contido nos intervalos complementares de  $\bar{A}$ . Sejam  $x \in \bar{A}^C$ ,  $u \in \partial\bar{A}$  tal que  $H(x) = H(u)$  e considere o intervalo  $[u, x]$  que, por construção, não contém pontos de  $A$ , isto é,  $[u, x] \cap A = \emptyset$ , então  $[F(u), F(x)] \cap A = \emptyset$ . De fato, se existe  $y$  tal que  $y \in [F(u), F(x)] \cap A = \emptyset$ , então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um  $z \in [u, x]$  tal que  $F(z) = y$ . Logo,  $F^{-1}(y) \cap [u, x] \neq \emptyset$  e  $F^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$ , contradição. Portanto,  $H(F(x)) = H(F(u)) = \text{constante}$ . Então, como  $u \in \bar{A}$ , temos que  $H(F(u)) = R_\rho(H(u))$  e portanto

$$\begin{aligned} H \circ F(x) &= H(F(x)) \\ &= H(F(u)) \\ &= R_\rho(H(u)), \\ &= R_\rho(H(x)) \\ &= R_\rho \circ H(x) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Agora, se  $z \in A$ , temos

$$H(z + 1) = H(F^n(x) + m + 1) = n\rho + m + 1 = H(z) + 1$$

e essa propriedade é válida para a extensão contínua. De fato, dado  $x$  contido em algum intervalo complementar a  $\bar{A}$ , temos  $H(x) + 1 = H(u) + 1 = H(u + 1)$ , pois  $u \in \bar{A}$ . Agora, seja  $x \in \bar{A}^C$  e  $u \in \partial\bar{A}$  tal que  $H(x) = H(u)$ , então se  $[u, x] \cap A = \emptyset$  vale que  $[u + 1, x + 1] \cap A = \emptyset$ . Com efeito, se existe  $y \in [u + 1, x + 1] \cap A$ , então  $y - 1 \in A$  e  $y - 1 \in [u, x]$ , contradizendo o fato de  $[u, x]$  não ter pontos de  $A$ . Assim,  $H(u + 1) = H(x + 1)$  e portanto  $H(x) + 1 = H(x + 1)$  para todo  $x$  contido em algum intervalo complementar a  $\bar{A}$ .

Essa propriedade garante a existência de uma semi-conjugação  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $h \circ f = R_\rho \circ h$ . Isto conclui a demonstração do teorema para o caso em que  $f$  não é transitiva.

**2º caso:**  $\bar{A} = \mathbb{R}$ .

Suponha agora que  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  é transitiva, então o conjunto  $A$  é denso em  $\mathbb{R}$ . De fato, seja  $I$  um intervalo aberto qualquer de  $\mathbb{R}$ . Considere também a aplicação projeção  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , então  $\pi(I)$  é um intervalo de  $\mathbb{S}^1$ . Todo ponto de  $\pi(I)$  tem uma pré-imagem em  $I$ , ou seja, dado  $z \in \pi(I)$  existe  $y \in I$  tal que  $\pi(y) = z$ .

Como  $f$  é transitiva, a órbita de  $\pi(x) \in \mathbb{S}^1$  e então existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $f^n(\pi(x)) \in \pi(I)$ . Logo, existe  $y \in I$  tal que  $\pi(y) = f^n(\pi(x))$ .

Como  $F$  é um levantamento de  $f$  e portanto,  $F^n$  é um levantamento de  $f^n$ , temos

$$\begin{aligned} \pi(F^n(x)) &= f^n(\pi(x)) \\ &\Rightarrow \\ \pi(F^n(x)) &= \pi(y) \\ &\Rightarrow \\ y &= F^n(x) + m \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto  $A$  é denso em  $\mathbb{R}$ .

Desse modo,  $\overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R}$  e portanto  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é monótona e bijetiva. Logo, podemos obter um homeomorfismo  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $h \circ f = R_\rho \circ h$  e isso completa a demonstração.  $\square$

# Apêndice B

## Teoria de Medida, Teoria Ergódica e Entropia Topológica

Inicialmente faremos uma revisão de alguns conceitos e teoremas da Teoria de Medida e Teoria Ergódica. Mais detalhes e demonstrações dos teoremas podem ser consultados na referência [8].

**Definição 2.35.** *Seja  $\Sigma$  uma coleção de subconjuntos de um conjunto  $X$ . Dizemos que  $\Sigma$  é uma álgebra se:*

- 1)  $\emptyset, X \in \Sigma$ ;
- 2) Se  $A \in \Sigma$  então  $X - A \in \Sigma$ ;
- 3) Se  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$  então  $\cup_{i=1}^n A_i \in \Sigma$ .

Se  $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$  implica que  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$ , então  $\Sigma$  é uma  $\sigma$ -álgebra. Se  $\Sigma$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ , chamamos o par  $(X, \Sigma)$  de *espaço mensurável*. Neste caso, os elementos de  $\Sigma$  são conjuntos mensuráveis.

**Exemplo 2.36.** *Seja  $X$  um conjunto qualquer não-vazio. As coleções  $\{\emptyset, X\}$  e  $\mathcal{P}(X)$  são  $\sigma$ -álgebras.*

Se  $X$  é um espaço topológico, a  $\sigma$ -álgebra *Boreliana de  $X$*  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pela família de todos os abertos de  $X$ .

**Definição 2.37.** *Seja  $(X, \Sigma)$  um espaço mensurável. Dizemos que uma função  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$  é uma medida se:*

- 1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- 2)  $\mu(\cup_{i=0}^{\infty} E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i)$ , para toda coleção  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$  de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos.

Se  $\mu$  é uma medida em  $(X, \Sigma)$  chamamos  $(X, \Sigma, \mu)$  de *espaço de medida*.

A medida  $\mu$  é dita *finita* se  $\mu(X) < \infty$ . Se  $\mu(X) = 1$ , então o espaço de medida é dito *espaço de probabilidade* e  $\mu$  é dita *medida de probabilidade*.

**Definição 2.38.** *Sejam  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação. A aplicação  $f$  é mensurável se para qualquer conjunto  $A \subset X$  mensurável,  $f^{-1}(A)$  é mensurável.*

Uma medida  $\mu$  é  $f$ -invariante se

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A), \text{ para qualquer conjunto } \mu\text{-mensurável.}$$

Quando  $f$  é invertível, isto é equivalente a dizer que

$$\mu(A) = \mu(f(A)) = \dots = \mu(f^k(A)), \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Neste caso também dizemos que  $f$  preserva  $\mu$ .

A seguinte proposição fornece uma caracterização de aplicações que preservam medida. A prova pode ser encontrada em [8].

**Proposição 2.39.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida em  $X$ . Então,  $f$  preserva a medida  $\mu$  se, e somente se,*

$$\int \phi d\mu = \int (\phi \circ f) d\mu,$$

para toda função integrável  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

O teorema que segue garante a existência de medidas invariantes.

**Teorema 2.40.** *(Existência de medidas invariantes) Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em  $X$  que é invariante por  $f$ .*

**Definição 2.41.** *Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida e  $P$  uma propriedade referente aos elementos de  $X$ . Dizemos que  $P$  é verdadeira em  $\mu$  - quase todo ponto, e denotamos por  $\mu$  - qtp, se  $P$  é verdadeira para o complementar de um conjunto de medida  $\mu$  - nula.*

O seguinte teorema afirma que a órbita de quase todo ponto, relativamente a qualquer medida invariante finita, regressa arbitrariamente perto de seu estado inicial.

**Teorema 2.42.** *(Teorema de Recorrência de Poincaré) Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida finita invariante por  $f$ . Seja  $B \subset X$  qualquer conjunto mensurável com  $\mu(B) > 0$ . Então para  $\mu$  - qtp,  $x \in B$ , existem infinitos valores de  $n$  para os quais  $f^n(x)$  também está em  $B$ .*

Fixemos uma transformação  $f : X \rightarrow X$ . Denotemos por  $\mathcal{M}_f(X)$  o espaço de todas medidas de probabilidade Boreliana invariantes por  $f$ .

**Lema 2.43.**  $\mathcal{M}_f(X)$  é não-vazio, compacto com a topologia fraca\*<sup>2</sup> e convexo.

Nesse contexto, o conceito de ergodicidade é análogo ao de transitividade (na dinâmica topológica). O sistema é formado por uma única peça dinâmica, ou seja, o estudo do sistema não pode ser dividido em diferentes partes relevantes, independentes entre si, com respeito a uma dada medida.

**Definição 2.44.** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de probabilidade. Dizemos que  $T : X \rightarrow X$  é ergódica com respeito a  $\mu$  se  $\mu(A) = 0$  ou  $1$ , para todo conjunto  $A$  mensurável e tal que  $T^{-1}(A) = A$ .

Existem várias maneiras de caracterizar a ergodicidade de uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  com respeito a uma medida de probabilidade invariante.

**Definição 2.45.** Dizemos que um ponto  $x$  de um conjunto convexo  $C$  é ponto extremal de  $C$  se não for combinação convexa de nenhum ponto de  $C$ , isto é,  $x$  não pode ser escrito na forma  $x = (1-t)y + tz$ , para nenhum  $y, z \in C$  e  $t \in (0, 1)$ . Se isso acontece, então  $x = y = z$ .

A próxima proposição diz que as medidas ergódicas são os elementos extremais do convexo  $\mathcal{M}_f(X)$ .

**Proposição 2.46.** Dada  $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$  uma probabilidade invariante,  $\mu$  é ergódica se, e somente se, não é possível escrevê-la na forma  $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$  com  $t \in (0, 1)$  e  $\mu_1, \mu_2$  probabilidades invariantes distintas.

O seguinte teorema é conhecido como *Teorema ergódico de Birkhof*.

**Teorema 2.47.** Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $T : X \rightarrow X$  uma transformação que preserva  $\mu$ . Então, dada qualquer função integrável  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$$

existe para quase todo ponto  $x \in X$ . Além disso, se  $T$  é ergódica então esse limite é  $\int f d\mu$ .

Esse teorema nos diz que, exceto para um conjunto de medida nula, a média temporal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$$

<sup>2</sup>A topologia fraca\* em  $\mathcal{M}_f(X)$  é a topologia gerada pela base de vizinhanças  $\{V(\mu, \phi, \varepsilon)\}$  de  $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ , onde  $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  é o conjunto de funções contínuas limitadas,  $\varepsilon > 0$ ,  $V(\mu, \phi, \varepsilon) := \{v \in \mathcal{M}_f(X) : |\int \phi_i d\mu - \int \phi_i dv| < \varepsilon\}$  e  $V(\mu, \phi, \varepsilon) = \cap_{i=1}^n V(\mu, \phi_i, \varepsilon)$ .

é igual à média espacial  $\int f d\mu$ , onde  $\mu$  é uma medida de probabilidade. Na média espacial, ao invés de fixar um ponto e analisar o seu futuro, fixa-se um tempo e analisa o comprimento de todos os pontos de uma vez.

No caso de subconjuntos convexos de espaços vetoriais com dimensão finita tem-se que todo elemento do convexo pode ser escrito como combinação convexa dos elementos extremais. Por exemplo, todo ponto num triângulo no plano pode ser escrito como combinação convexa dos vértices do triângulo.

É natural perguntar se a mesma propriedade vale no espaço de probabilidade invariante, isto é, se toda medida invariante é combinação linear de pontos extremais, ou seja, de medidas ergódicas.

O teorema de decomposição ergódica mostra que esta resposta é verdadeira, exceto que o número de parcelas nesta combinação não é necessariamente finito, nem mesmo enumerável. Este teorema permite reduzir a demonstração de muitos resultados ao caso em que o sistema é ergódico.

Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de probabilidade,  $\mathcal{P}$  uma partição de  $X$  em conjuntos mensuráveis e  $\pi : X \rightarrow \mathcal{P}$  a projeção natural que associa a cada  $x \in X$  o elemento  $\mathcal{P}(x)$  da partição que o contém.

A projeção permite munir  $\mathcal{P}$  de uma estrutura de espaço de probabilidade: Dizemos que um conjunto  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{P}$  é mensurável se, e somente se, a pré-imagem

$$\pi^{-1}(\mathcal{Q}) = \text{a união dos elementos } P \text{ de } \mathcal{P} \text{ que pertencem a } \mathcal{Q}$$

é um subconjunto mensurável de  $X$ . A família  $\widehat{\mathcal{B}}$  dos subconjuntos mensuráveis é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\mathcal{P}$ . Definamos a medida quociente  $\widehat{\mu}$  por  $\widehat{\mu}(\mathcal{Q}) = \widehat{\mu}(\pi^{-1}(\mathcal{Q}))$  para cada  $\mathcal{Q} \in \widehat{\mathcal{B}}$ .

**Teorema 2.48.** *(Teorema de decomposição ergódica) Seja  $X$  um espaço completo separável,  $f : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma probabilidade invariante. Então existe um conjunto mensurável  $X_0 \subset X$  com  $\mu(X_0) = 1$ , uma partição  $\mathcal{P}$  de  $X_0$  em subconjuntos mensuráveis e uma família de probabilidades  $\{\mu_P; P \in \mathcal{P}\}$  em  $X$ , satisfazendo*

- (a)  $\mu_P(P) = 1$ , para  $\mu$ -quase todo  $P \in \mathcal{P}$ ;
- (b)  $P \rightarrow \mu_P(E)$  é mensurável, para todo conjunto mensurável  $E \subset X$ ;
- (c)  $\mu_P$  é invariante e ergódica para  $\mu$ -quase todo  $P \in \mathcal{P}$ ;
- (d)  $\mu(E) = \int \mu_P(E) d\widehat{\mu}(P)$ , para todo conjunto mensurável  $E \subset M$ .

A propriedade (d) significa que  $\mu$  é uma combinação convexa das várias probabilidades ergódicas  $\mu_P$ , em que cada  $\mu_P$  entra com peso igual a  $\widehat{\mu}(P)$ . A propriedade (b) garante que a integral em (d) está bem definida.

Definiremos agora a noção de entropia topológica. Esse conceito é uma forma de medir a taxa de complexidade de um sistema dinâmico. Um sistema dinâmico é dito caótico se sua entropia topológica é positiva.

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  seja

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq k \leq n-1} d(f^k(x), f^k(y)).$$

O número  $d_n$  mede a distância máxima entre os iterados de  $x$  e  $y$  num trecho de órbita de tamanho  $n$ . Definida dessa maneira, cada  $d_n$  é uma métrica em  $X$  e induzem a mesma topologia em  $X$ .

Fixemos  $\varepsilon > 0$  e seja  $cov(n, \varepsilon, f)$  a cardinalidade mínima de uma cobertura de  $X$  por conjuntos de diâmetro menor que  $\varepsilon$  na métrica  $d_n$ . Por compacidade,  $cov(n, \varepsilon, f)$  é finito.

**Definição 2.49.** O número  $h_{top} = h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_\varepsilon(f)$ , onde

$$h_\varepsilon(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(cov(n, \varepsilon, f)).$$

Algumas propriedades sobre Entropia topológica podem ser encontradas na referência [10].

O teorema abaixo nos diz que se  $\rho(F)$  tem interior não vazio, então  $f$  tem um comportamento dinâmico caótico. A prova desse teorema pode ser consultada em [11].

**Teorema 2.50.** Se  $\rho(F)$  tem interior não vazio, então  $f$  tem entropia positiva.

# Referências Bibliográficas

- [1] Newhouse, S.; Palis, J.; Takens, F.; *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publications Mathématiques 57 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris, 1983) 43-45.
- [2] Misiurewicz, M.; Ziemian, K.; *Rotation sets for maps of tori*, Journal of the London Mathematical Society, 311(1), 1989.
- [3] Kwapisz, J.; *Every convex polygon with rational vertices is a rotation set*, Institute of Mathematics, Warsaw University, Banacha 2, Warsaw 59, Poland, 1990.
- [4] Katok, A.; Hasselblatt, B.; *A moderna teoria dos sistemas dinâmicos*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2005.
- [5] Aoki, N.; Hiraide, K.; *Topological theory of dynamical systems*, North-Holland, 1994.
- [6] Jager, T.; Passeggi, A.; *On torus homeomorphisms semiconjugate to irrational rotations*, Ergodic Theory Dynam. Systems 35, 2010.
- [7] Franks, J.; *Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms*, Ergod. Theory Dynam. Systems 8\*, (1988) 99-107.
- [8] Viana, M.; Oliveira, K.; *Fundamentos da Teoria Ergódica*, Rio de Janeiro, SBM.90, 2014.
- [9] Poincaré, H.; *Oeuvres complètes*, tome 1 (Gauthier-Villars, Paris, 1952) 137-158.
- [10] Nébias, A.; Filho, F.; *Aplicações de grau 1 do círculo: Conjunto de rotação e Entropia*, Belo Horizonte, Dissertação de Mestrado, 2006.
- [11] Libre, L.; Mackay, R. S.; *Rotations vectors and entropy for diffeomorphisms of the torus isotopic to the identity*, Warwick, 1988 .