WILLIAMS UBALDO HUAMANI QUISPE

UM JOGO INFINITO COM CONSEQUÊNCIAS TOPOLÓGICAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

Huamani Quispe, Williams Ubaldo, 1989-

H874j 2017

Um jogo infinito com consequências topológicas / Williams Ubaldo Huamani Quispe. – Viçosa, MG, 2017.

viii, 53f. ; 29 cm.

Orientador: Catarina Mendes de Jesus.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.53.

1. Espaços Uniformes. 2. Topologia. 3. Matemática. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 514.3

WILLIAMS UBALDO HUAMANI QUISPE

UM JOGO INFINITO COM CONSEQUÊNCIAS TOPOLÓGICAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 18 de Dezembro de 2017.

Laércio José dos Santos

Pouya Mehdipour Balagafsheh

Mercio Botelho Faria
(Presidente)

Dedico este trabalho a minha família.

Lo que distingue lo real de lo
irreal está en el corazón

John Nash.

Agradecimentos

Primeiramente eu agradeço a Deus por me abençoar, iluminar nos momentos mais difíceis, e me guiar sempre.

Agradeço a minha família, por me motivar, acreditar em min e torcer por min. Obrigado por ser minha motivação !.

Agradeço a minha orientadora, Catarina, pela paciência, aprendizado valioso, por confiar em min, pelas suas correções e incentivo. Enfim pela pessoa maravilhosa que é.

Agradeço a meus colegas de curso pela amizade e a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Finalmente, agradeço à CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Introdução **1**

1 Preliminares **3**

1.1 Topologia e Base 3

1.2 Topologia Inicial e Produto 6

1.3 Coberturas de Espaços 9

2 Espaços Uniformes **12**

2.1 Uniformidade 12

2.2 Base Uniformidade 15

2.3 Propriedades de Uniformidade 18

3 Jogo Topológico Proximal **22**

3.1 Jogo Proximal 22

3.2 Espaços Proximal 25

3.3 Propriedades de Espaços Proximal 30

4 Jogo Topológico Gruenhage **34**

4.1 Jogo Gruenhage 34

4.2 W- Espaços 36

4.3 Propriedades de W-Espaços 38

5 Consequências Topológicas **41**

5.1 Jogo Proximal Fraco 41

5.2 Separação e Cobertura 45

5.3 Consequência Topológica 50

Considerações Finais **52**

Referências Bibliográficas **53**

Resumo

WILLIAMS, Ubaldo Huamani Quispe, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2017. **Um Jogo Infinito com Consequências Topológicas**. Orientadora: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.

No presente trabalho estudamos um jogo topológico infinito definido num espaço uniforme, que gera um novo espaço, chamado espaço proximal. Mais especificamente, estudamos as propriedades deste espaço como sua relação com W-espaços, teorema de caracterização de espaço métrico completo, e algumas consequências topológicos, como implicações a espaços coleção normal, espaço meta-compacto e coleção Hausdorff.

Abstract

WILLIAMS, Ubaldo Huamani Quispe, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2017. **An Infinite Game with Topological Consequences**. Adviser: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.

In this paper we study an infinite topological game defined in a uniform space, that generates a new space, called proximal space. More specifically, we study the properties of this space as its relation with W-space, complete metric space characterization theorem, and some topological consequences, such as implications for normal collection spaces, meta-compact space, and Hausdorff collection.

Introdução

A noção de jogo topológico tem no principio a Banach e Mazur em 1935, onde se propôs no famoso livro de problemas de Banach, um jogo que estava relacionado com a propriedade de Baire de um espaço topológico.

A filosofia geral é mais ou menos a seguinte: define-se um jogo entre dois jogadores A e B, envolvendo a topologia do espaço em questão e, prova-se por exemplo, que um certo espaço tem certa propriedade se o jogador A sempre tem estratégia vencedora. Muitas vezes isso nos permite descrever essa propriedades em vários graus de "força"distintos, o que possivelmente seria complicado de se fazer sem recorrer ao jogo. Esse nome foi introduzido em 1956-7 por C. Berge e A. R. Pears [9]. É uma técnica largamente usada, tanto para provar teoremas, quanto para caracterizar propriedades topológicas (ver [10]).

Cronologicamente, temos uma lista de jogos topológicos definidos entre dois jogadores; como jogo de Sierpinsky 1924, jogo de Banach-Manzur 1935, jogo de Ulam 1935 (é uma modificação do jogo de Banach-Manzur), jogo de Banach 1935, jogo de Choquet 1937, jogo ponto aberto 1970 (este jogo nos chamaremos de jogo Gruenhage, e será de interesse neste trabalho). Todos esses jogos são definidos num espaço topológico. Para mais detalhe e a contribuição destes jogos (ver [9, 10]).

Os jogos topológico citados acima foram definidos num espaço topológico. Este trabalho, apresenta um jogo topológico definido num espaço uniforme, o qual foi publicado recentemente no 2014 por J. Bell em [2], e estará composto de cinco capítulos que são descritas em seguida.

O primeiro capítulo consta de uma breve revisão de espaços topológicos, base topológicas, geração de topologias através de propriedades dadas, topologia inicial, topologia produto e espaços topológicos definidos em função de coberturas. As principais referências são [6, 4, 8, 7, 3].

O segundo capítulo, apresenta uma breve introdução de espaço uniformes, munido de exemplos para sua melhor compreensão, algumas propriedades básicas e relaçoes entre topologia e uniformidade. As referências principais [6, 4, 7, 3].

No terceiro capítulo, será definido o principal jogo deste trabalho chamado de jogo proximal definido num espaço uniforme. Este jogo é realizado entre dois jogadores A e B num espaço uniforme X, onde as escolhas do jogador A são elementos da uniformidade e as escolhas do jogador B são pontos de X. Além disso será definido alguns elementos do jogo proximal e consequentemente, o espaço proximal em função do jogo que permite caracterizar espaços métricos completo. Este capítulo está baseado em [2].

O quarto capítulo, apresenta o jogo Gruenhage ou ponto aberto, definido num espaço topológico X, onde as escolhas do jogador A são abertos da topologia e as escolhas do jogador B são pontos de X. Aleém disso será elementos deste jogo e o W-espaço em função de jogo Gruenhage. Á referência para este capítulo é [5].

Finalmente, o ultimo capítulo apresenta um enfraquecimento do jogo proximal e as consequências topológicas deste jogo como implicações a espaços topológicos coleção normal, espaços topológicos meta-compactos e coleção Hausdorff. A referência para este capítulo também é [2].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, daremos uma breve revisão sobre alguns conceitos básicos de topologia, necessários para compreender o tema dissertado. As principais referências são [6, 4, 9, 8, 7, 3].

1.1 Topologia e Base

O conceito de espaço topológico foi introduzido por Felix Hausdorff em 1914 o qual hoje é conhecido como espaço de Hausdorff. A topologia moderna é baseada na teoria dos conjuntos, assim como a maior parte da Matemática. O conceito de espaço topológico é mais geral do que o conceito de espaço de Hausdorff e foi introduzido por Kazimierz Kuratowski em 1922.

Definição 1.1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathbb{T}$ de subconjuntos de X é uma **topologia** em X, se tem as seguintes propriedades:*

1) $\emptyset$, X pertencem a $\mathbb{T}$;

2) Se $A_1, A_2 \in \mathbb{T}$, então $A_1 \cap A_2 \in \mathbb{T}$;

3) Se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{T}$, então $\bigcup\limits_{A \in \mathbb{A}} A \in \mathbb{T}$.

*O par $(X, \mathbb{T})$ é chamado **espaço topológico**, onde $\mathbb{T}$ é uma topologia em X e os elementos de $\mathbb{T}$ são chamados conjuntos abertos.*

Daqui em adiante, a notação de espaço topológico será X, assumiremos que implicitamente está munido de alguma topologia. Em outras ocasiões será denotada por $(X, \mathbb{T})$, quando se precise em algumas definições para seu melhor entendimento.

Definição 1.2. *Seja $(X, \mathbb{T})$ um espaço topológico. Uma subfamília $\mathbb{B}$ de $\mathbb{T}$ é uma **base** para $\mathbb{T}$, se para todo $A \in \mathbb{T}$, existe $\mathbb{B}' \subset \mathbb{B}$, tal que $A = \bigcup\limits_{B \in \mathbb{B}'} B$, onde os elementos de $\mathbb{B}$ são chamados básicos.*

Definição 1.3. *Seja $(X, \mathbb{T})$ um espaço topológico. Uma subfamília $\mathbb{S}$ de $\mathbb{T}$ é uma sub-base para $\mathbb{T}$ se $\mathbb{B} = \{\bigcap_{S \in \mathbb{S}'} S : \mathbb{S}' \subseteq \mathbb{S}\}$ é uma base para $\mathbb{T}$.*

Observação 1.4. A Definição 1.3 quer dizer que $\mathbb{S}$ é uma sub-base para a topologia $\mathbb{T}$ se, e somente se, para todo $A \in \mathbb{T} - \{\emptyset\}$ e todo $x \in A$ existe $\mathbb{S}'$, subconjunto não vazio de $\mathbb{S}$ tal que $x \in \bigcap_{S \in \mathbb{S}'} S \subseteq A$.

A continuação, enunciaremos uma proposição que serve para gerar topologia num conjunto qualquer.

As ideias expressadas e analisadas sobre topologia, base e sub-base são uma motivação para obter métodos para construir topologias num conjunto qualquer a partir de sub-coleções do seu conjunto de partes que satisfazem certas propriedades.

Definição 1.5. *Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathbb{B}$ de subconjuntos de X é uma* ***base topológica*** *em X, se tem as seguintes propriedades:*

1) $X = \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B$;

2) Se $B_1, B_2 \in \mathbb{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, então existe $B_3 \in \mathbb{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$,

onde os elementos de $\mathbb{B}$ são chamados básicos.

Este resultado nos proporciona um método para gerar uma topologia num conjunto utilizando uma coleção de conjuntos, de tal forma que ela resulte ser uma base da topologia gerada.

Proposição 1.6. *Seja X um conjunto não vazio e $\mathbb{B}$ uma família não vazia de subconjuntos de X.*

1) Se $\mathbb{B}$ é uma base topológica em X, então $\mathbb{T}_{\mathbb{B}} = \{A \subset X : \exists \mathbb{B}' \subset \mathbb{B}, A = \bigcup_{B \in \mathbb{B}'} B\}$ é uma topologia em X.

2) Se $\mathbb{T}$ é uma topologia em X, $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{T}$ e $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathbb{B}}$, então $\mathbb{B}$ é uma base topológica em X.

Demonstração. Ver Proposição 1.36, pg 33 de [8] □

O seguinte conceito é de muita utilidade para a análise das propriedades topológicas locais num espaço topológico. Intuitivamente, o sistema de vizinhanças de um ponto determina o comportamento da topologia perto do ponto.

Definição 1.7. *Seja $(X, \mathbb{T})$ um espaço topológico e x um elemento de X. Um subconjunto V de X é uma* ***vizinhança*** *de x em $(X, \mathbb{T})$, se existe $A \in \mathbb{T}$ tal que $x \in A \subseteq V$.*

Notação 1.8. *O conjunto de todas as vizinhanças de x é chamada* ***sistemas de vizinhanças*** *de x e denote-se por $\mathbb{V}(x)$.*

Definição 1.9. *Sejam $(X, \mathbb{T})$ um espaço topológico, x um elemento de X e $\mathbb{V}(x)$ sistemas de vizinhanças de x. Uma família $\mathbb{B}(x)$ de $\mathbb{V}(x)$ é uma* ***base de vizinhanças*** *de x em $(X, \mathbb{T})$, se para todo $V \in \mathbb{V}(x)$ existe $B \in \mathbb{B}(x)$ tal que $B \subseteq V$.*

Em seguida, definimos base local de vizinhanças ou simplesmente base de vizinhanças.

Definição 1.10. *Seja X um conjunto não vazio e x um elemento de X. Uma família $\mathbb{B}(x)$ de subconjuntos de X, com $x \in V \in \mathbb{B}$, é uma* ***base de vizinhanças*** *de x, se tem as seguintes propriedades:*

1) Se $V_1, V_2 \in \mathbb{B}(x)$, então existe $V \in \mathbb{B}(x)$ tal que, $V \subseteq V_1 \cap V_2$.

2) Se $V \in \mathbb{B}(x)$, então existe $V_0 \in \mathbb{B}(x)$ tal que se $y \in V_0$ então existe $W \in \mathbb{B}(y)$ tal que $W \subseteq V$.

Como consequência da Definição 1.10, temos a definição de espaços topológicos primeiro enumerável.

Definição 1.11. *Um espaço topológico X é* ***primeiro enumerável****, se para todo $x \in X$ existe uma base local de vizinhanças de x em X.*

Um exemplo claro de espaço primeiro enumerável é:

Exemplo 1.12. Seja $\mathbb{R}$ e x um elemento de $\mathbb{R}$, note que a família $\mathbb{S}(x)$ formada pelos elementos de forma $[x, x + \varepsilon)$ é uma base de vizinhanças de x em $\mathbb{R}$ para a topologia de Sorgenfrey. Para mais detalhe podemos ver [8].

Conhecendo o comportamento de um sistema de vizinhanças de um ponto, podemos saber o comportamento da topologia. A seguinte proposição nos oferece uma forma de construir espaços topológicos através de base de vizinhanças.

Proposição 1.13. *Seja X um conjunto não vazio tal que para cada x elemento de X tem-se $\mathbb{B}(x)$ uma família de subconjunto de X.*

1) Se $\mathbb{B}(x)$ é uma base de vizinhanças de x, então $\mathbb{T}_{\mathbb{B}} = \{A \subseteq X : \forall x \in A, \exists V \in \mathbb{B}(x); V \subseteq A\}$ é uma topologia em X.

2) Se $\mathbb{T}$ é uma topologia em X e $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathbb{B}}$, então $\mathbb{B}(x)$ é uma base de vizinhanças de x.

Demonstração. Ver Proposição 1.40, pg 38 de [8]. □

1.2 Topologia Inicial e Produto

Nesta seção, construiremos uma topologia num conjunto a partir de funções quando se tornam contínuas, o qual gera uma topologia menor, cujas referência são [6, 4, 8, 7, 3].

Seja Y um espaço topológico e X um conjunto não vazio, o propósito é obter uma topologia em X (topologia mais pequena em X). Considere a função $f : X \longrightarrow Y$ tal que, seja possível que a função f se torne continua.

Note que para toda função f definida num conjunto X e com valores em Y e para toda família $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ de subconjuntos de Y se cumpre:

1) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ e $f^{-1}[Y] = X$

2) $f^{-1}[\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha] = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f^{-1}[A_\alpha]$

3) $f^{-1}[\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha] = \bigcap\limits_{\alpha\in I} f^{-1}[A_\alpha]$

As três igualdades acima nos permitem definir uma topologia em X, quando temos uma função f definida em X e com conjunto de valores num espaço topológico Y.

Proposição 1.14. *Se $(Y, \mathbb{T})$ é um espaço topológico, então o conjunto $\mathbb{T}_f = \{f^{-1}[A] : A \in \mathbb{T}\}$ é uma topologia em X.*

Demonstração. Ver Proposição 4.1, pg 113 de [8]. □

Notação 1.15. *A topologia $\mathbb{T}_f$ é chamada de **topologia inicial** em X definida por f e Y ou topologia fraca induzida por f.*

Observação 1.16. A topologia $\mathbb{T}_f$ é a menor topologia (ou mais fraca) das topologias em X que tornam continua à função f.

Agora ilustraremos com um exemplo a topologia inicial.

Exemplo 1.17. Seja E um subconjunto de um conjunto X, e $\mathbb{R}$ a reta real com a topologia usual. Consideremos a função característica de E, $\mathcal{X}_E : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in X - E, \\ 1 & \text{se } x \in E. \end{cases}$$

A topologia induzida em X pela função caraterística $\mathcal{X}_E$ é o conjunto de imagens inversas por $\mathcal{X}_E$, de abertos em $\mathbb{R}$ da forma que:

$$\mathbb{T}_{\mathcal{X}_E} = \{\emptyset, X, E, X - E\}.$$

Para um subconjunto aberto A de $\mathbb{R}$, temos:

1) Se $\{0,1\} \cap A = \emptyset$, então $(\mathcal{X}_E)^{-1}[A] = \emptyset$.

2) Se $\{0,1\} \subseteq A$, então $(\mathcal{X}_E)^{-1}[A] = X$.

3) Se $\{0,1\} \cap A = 0$, então $(\mathcal{X}_E)^{-1}[A] = X - E$.

4) Se $\{0,1\} \cap A = 1$, então $(\mathcal{X}_E)^{-1}[A] = E$.

Mencionaremos um teorema muito importante para construir a topologia inicial. Na topologia inicial a priori não conhecemos os elementos da topologia, mas tendo uma sub-base se pode gerar a topologia e saber como são os elementos.

Teorema 1.18. *Seja $\{(X_\alpha, \mathbb{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ uma família de espaços topológicos, X um conjunto não vazio e $\mathbb{F} = \{f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ uma família de funções. Então o conjunto $\mathbb{S} = \{f_\alpha^{-1}[A] : \alpha \in I \quad e \quad A \in \mathbb{T}_\alpha\}$ é uma sub-base para a topologia $\mathbb{T}_\mathbb{F}$.*

Demonstração. Ver Teorema 4.5, pg 126 de [8]. □

Notação 1.19. *Denote-se por $\mathbb{T}_\mathbb{F}$ à menor das topologias em X que tornam a toda função $f \in \mathbb{F}$ numa função continua.*

Definição 1.20. *Seja $\{(X_\alpha, \mathbb{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ uma família de espaços topológicos, X um conjunto não vazio e $\mathbb{F} = \{f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ uma família de funções. A topologia $\mathbb{T}_\mathbb{F}$ em X é chamada de topologia fraca ou inicial induzida por $\mathbb{F}$.*

Como aplicação deste resultado será introduzido uma topologia num produto cartesianos de dois elementos.

Observação 1.21. Para todo par de conjunto X e Y se pode considerar o conjunto produto $X \times Y$. Se X e Y são espaço topológicos, então é natural tentar construir uma topologia em $X \times Y$. Usando a técnica de topologia inicial, considere as projeções:

$$\Pi_X : X \times Y \longrightarrow X;$$
$$\Pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y,$$

tal que, $\Pi_X(x,y) = x$ e $\Pi_Y(x,y) = y$ respetivamente, para todo $(x,y) \in X \times Y$.

Definição 1.22. *Sejam X e Y espaços topológicos. A topologia $\mathbb{T}_\mathbb{P}$ é chamada topologia produto ou **topologia de Tychonoff**, em $X \times Y$ induzida por $\mathbb{P} = \{\Pi_X, \Pi_Y\}$*

A topologia $\mathbb{T}_\mathbb{P}$ é a menor das topologias em $X \times Y$ que tornam Π_X e Π_Y em funções continuas.

Em seguida, veremos algumas propriedades importantes num espaço topológico produto.

Observação 1.23. Da Definição 1.22 tem-se:

1) Se X ou Y é vazio, então $\mathbb{T}_{\mathbb{P}} = \emptyset$.

2) Se $\mathbb{B}_X$ é uma base em $\mathbb{T}_X$ e $\mathbb{B}_Y$ é uma base em $\mathbb{T}_Y$, então o conjunto $\{\Pi_X^{-1}(B) \cap \Pi_Y^{-1}(C) : B \in \mathbb{B}_X \text{ e } C \in \mathbb{B}_Y\}$ é uma base para $\mathbb{T}_{\mathbb{P}}$.

Agora veremos alguns exemplos (ver [8, 7]) que vão ter muita importância ao longo do desenvolvimento destes trabalho.

Exemplo 1.24. Uma base da topologia usual na reta real $\mathbb{R}$ é a coleção de intervalos abertos (a, b). Seja $\Pi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção ao i-esimo fator para $i = 1, 2$. A topologia produto em $\mathbb{R}^2$ é gerada pela coleção de todos os conjuntos da forma:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ e } c < y < d\}.$$

Todo elemento da topologia produto $\mathbb{R}^2$ se expressa da forma:

$$\Pi_1^{-1}[(a, b)] \cap \Pi_2^{-1}[(c, d)],$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi_1^{-1}[(a, b)] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b\}, \\ \Pi_2^{-1}[(c, d)] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d\}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.25. Uma base da topologia de Sorgenfrey na reta real $\mathbb{R}$ é a coleção de intervalos da forma:

$$[a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b\}.$$

Seja $\Pi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção ao i-esimo fator para $i = 1, 2$. Se pode descrever a topologia produto em $\mathbb{R}^2$. A coleção $\mathbb{B}$ com elementos da forma:

$$\Pi_1^{-1}[[a, b)] \cap \Pi_2^{-1}[[c, d)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b \text{ e } c \leq y < d\},$$

è uma base para a topologia em $\mathbb{R}^2$, onde:

$$\begin{aligned} \Pi_1^{-1}[(a, b)] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b\}, \\ \Pi_2^{-1}[(c, d)] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y < d\}. \end{aligned}$$

Finalmente, para fechar esta seção, vamos generalizar a topologia produto de uma coleção finita de espaços topológicos, para uma coleção infinita de espaço topológicos. Basicamente, para este trabalho precisaremos de uma coleção infinita de espaço topológicos, para o qual introduziremos de forma breve os seguintes conceitos.

Considere I um conjunto de índices, e o produto cartesiano da família de espaços topológicos $\{(X_\alpha, \mathbb{T}_\alpha) \ : \ \alpha \in I\}$.

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \text{ tal que } \forall \alpha \in I, \ f(\alpha) \in X_\alpha\}.$$

Definição 1.26. *Seja* $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ *o* ***produto cartesiano*** *da família* $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$. *Defina-se a projeção sobre o* α*-ésimo fator como*

$$\Pi_\alpha : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha,$$

tal que para todo $f \in \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$*, existe* $\alpha \in I$ *com* $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$.

Notação 1.27. *O conjunto de projeções* $\{\Pi_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha : \alpha \in I\}$ *será denotado por* $\mathbb{P}$.

Definição 1.28. *Chame-se espaço topológico produto ou* ***espaço produto Tychonoff*** *de espaços* X_α *no produto* $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ *o par:*

$$(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha, \mathbb{T}_{\mathbb{P}}),$$

onde $\mathbb{T}_{\mathbb{P}}$ *é induzida pela família de projeções* $\mathbb{P}$.

A topologia $\mathbb{T}_{\mathbb{P}}$ é a menor das topologias em $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ que tornam todo Π_α em funções continuas. Logo veremos algumas propriedades importantes de espaços topológicos obtido pelo produtos Tychonoff.

Teorema 1.29. *Seja* $\{(X_\alpha, \mathbb{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ *uma família de espaços topológicos. Então o conjunto* $\mathbb{S} = \{\Pi_\alpha^{-1}[B] \ : \ \alpha \in I \text{ e } B \in \mathbb{T}_\alpha\}$ *é uma sub-base da topologia* $\mathbb{T}_{\mathbb{P}}$*, onde* $\mathbb{P}$ *é a família de projeções das coordenadas* $\alpha \in I$.

Demonstração. Ver Teorema 4.15, pg 132 de [8]. □

A convergência de uma sequência num espaço produto está determinada pela convergência das sequências que determina cada projeção. A seguir, enunciaremos uma proposição para o caso quando a questão envolva convergência em espaço produtos.

Proposição 1.30. *Uma sequência* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *de pontos em* $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ *converge a um ponto de* x *de* $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$*, se, e somente se, a sequência* $(\Pi_\alpha(x_1), \Pi_\alpha(x_2), ..., \Pi_\alpha(x_n), ...)$ *converge a* $\Pi_\alpha(x)$ *em* X_α*, para todo* $\alpha \in I$.

Demonstração. Ver Proposição 4.17, pg 134 de [8]. □

1.3 Coberturas de Espaços

Nesta secção, o objetivo é apresentar definições e alguns exemplo e implicações de espaços topológicos, que estão definidos por meio de coberturas, como espaço compactos, para-compactos, meta-compactos, coleção Hausdorff e coleção normal.

A seguinte definição de para-compacidade fornece propriedades locais.

Definição 1.31. *Sejam X um espaço topológico, $\mathbb{U}$ uma cobertura aberta de X. Uma família $\mathbb{V}$ de subconjuntos de X é um* ***refinamento aberto localmente finito*** *da cobertura aberta $\mathbb{U}$, se satisfaz as seguinte propriedades:*

1) Para todo $V \in \mathbb{V}$ existe $U \in \mathbb{U}$ tal que $V \subseteq U$.

2) Para todo $x \in X$ existem uma vizinhança $V(x)$ de x e $\mathbb{V}' \subseteq \mathbb{V}$ finito, tal que para todo $V \in \mathbb{V}'$, tem-se que $V(x) \cap V \neq \emptyset$.

Observe que se a família $\mathbb{V}$ na Definição 1.31 só satisfaz a propriedade 1), então $\mathbb{V}$ é um refinamento aberto de $\mathbb{U}$.

Definição 1.32. *Um espaço topológico X é* ***para-compacto****, se para toda cobertura aberta $\mathbb{U}$ de X, existe um refinamento aberto localmente finito $\mathbb{V}$ de $\mathbb{U}$.*

Um exemplo claro de espaços para-compactos é um espaço compacto (um espaço topológico X é compacto, se para toda cobertura aberta de X, existe uma sub-cobertura finita de X). Para maiores detalhes ver [8].

As seguintes definições de meta-compacidade e coleção normal e coleção Haudorff também estão definidas em função de coberturas.

Definição 1.33. *Um espaço topológico X é uma* ***coleção normal****, se para toda família fechada disjunta dois a dois $\mathbb{F}$ existe uma família aberta disjunta dois a dois, $\mathbb{U}$, tal que para todo $F \in \mathbb{F}$ tem-se $F \subset A$, com $A \in \mathbb{U}$.*

Basicamente a Definição 1.33 deriva da definição de um espaço normal (um espaço topológico X é normal, se para todo F_1 e F_2 fechados disjuntos em X existem abertos disjuntos A_1 e A_2 tal que $F_1 \subseteq A_1$ e $F_2 \subseteq A_2$). Para maiores detalhes ver [8].

Definição 1.34. *Um espaço topológico X é* ***meta-compacto enumerável****, se para toda família de conjuntos fechados $\mathbb{F}$ de X, tais que:*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq, ..., \supseteq F_n \supseteq, ... \quad e \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset;$$

existe uma família de conjuntos abertos $\mathbb{U}$ de X, tais que

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq, ..., \supseteq U_n \supseteq, ... \quad e \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset,$$

onde para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $F_n \subseteq U_n$.

Finalmente, temos a definição coleção Hausdorff que se deriva da definição de espaço topológico Hausdorff.

Definição 1.35. *Um topológico X é **Hausdorff** se para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe vizinhanças abertas U, V de x e y respetivamente tal que $U \cap V = \emptyset$.*

Para maiores detalhes ver [8, 7, 3].

Definição 1.36. *Um espaço topológico X é uma **coleção Hausdorff**, se para todo conjunto fechado discreto F em X existe uma coleção aberta disjunta dois a dois $\mathbb{U}$ tal que para todo $x \in F$ existe $U \in \mathbb{U}$, com $x \in U$.*

Como exemplos de espaços coleção Hausdorff temos os espaços euclidianos e espaços métricos em geral. As definições desta seção, serão de muita importância para o desenvolvimento do capítulo final.

Capítulo 2

Espaços Uniformes

Neste capítulo faremos uma breve introdução aos espaços uniformes e veremos algumas propriedades relevantes como base de uma uniformidade, caracterização de base uniformidade, topologia induzida por uma uniformidade e finalmente propriedade de fechadura num espaço topológico induzida por uma uniformidade e suas consequências. [6, 4].

2.1 Uniformidade

En 1937 André Weil introduziu a primeira definição explícita de uma estrutura uniforme ou espaço uniforme. Os conceitos de uniformidade, e completude, foram discutidos usando espaços métricos. Nicolas Bourbaki forneceu a definição de uniformidade em termos de vizinhança diagonal no livro "Topologie Générale"e John Tukey deu a definição de cobertura uniforme.

Definição 2.1. *Sejam X um conjunto não vazio e $D = \{(x, y) : (x, y) \in X \times X\}$, $D^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in D\}$, $\Delta = \{(x, x) : (x, x) \in X \times X\}$ subconjuntos de $X \times X$. Defina-se os seguintes conjuntos em $X \times X$:*

*1) D é **simétrico**, se $D = D^{-1}$.*

2) $2D = D \circ D = \{(x, z) \in X \times X \ : \ \exists\, y \in X \mid (x, y) \in D$ e $(y, z) \in D\}$.

*3) D é **diagonal**, se $D = \Delta$.*

Definição 2.2. *Sejam X um conjunto não vazio, A um subconjunto de X e x um ponto em X. Defina-se os seguintes conjuntos em X:*

1) $D[x] = \{y \in X : (x, y) \in D\}$.

2) $D[A] = \bigcup_{x \in A} D[x] = \{y \in X : \exists\, x \in A \ / \ (x, y) \in D\}$.

A estrutura de uniformidade generaliza a estrutura do espaço métrico, a posteriori veremos que toda métrica induz uma uniformidade. Por outra parte, a qualquer conjunto podemos muni-lo de uma uniformidade.

Definição 2.3. *Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathbb{D}$ de subconjuntos de $X \times X$ é uma **uniformidade** em X, se satisfaz as seguintes propriedades:*

1) Para todo $D \in \mathbb{D}$, $\Delta \subset D$.

2) Se $D \in \mathbb{D}$, então $D^{-1} \in \mathbb{D}$.

3) Se $D \in \mathbb{D}$, então existe $E \in \mathbb{D}$ tal que $E \circ E \subseteq D$.

4) Se $D_1, D_2 \in \mathbb{D}$, então $D_1 \cap D_2 \in \mathbb{D}$.

5) Se $D \in \mathbb{D}$ e $D \subseteq E$, então $E \in \mathbb{D}$.

O par $(X, \mathbb{D})$ é chamado espaço uniforme, onde X é um conjunto não vazio e $\mathbb{D}$ é uma uniformidade em X e os elementos de $\mathbb{D}$ são chamados de vizinhanças diagonal.

Agora daqui em adiante a notação de espaço uniforme só será X, assumiremos que implicitamente está munido de alguma uniformidade. Em outras ocasiões será expressada por $(X, \mathbb{D})$ quando se precise em algumas definições para seu melhor entendimento.

No seguinte desenho podemos observar duas vizinhanças diagonais induzidas por uma partição no conjunto X.

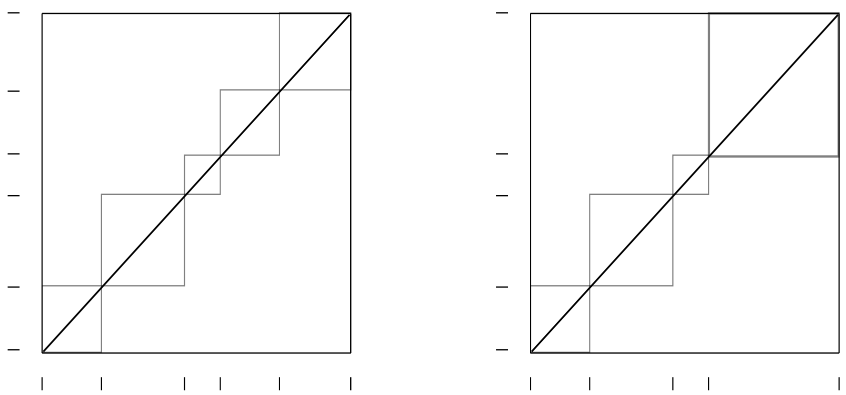

Figura 2.1: Vizinhanças Diagonais

Além disso, no desenho também se pode observar que uma é subconjunto da outra. Para ilustrar veremos um exemplo da uniformidade relativa.

Exemplo 2.4. Seja $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme. Se F é um subconjunto de X, então:

$$\mathbb{D}_F = \{D \cap (F \times F) : D \in \mathbb{D}\},$$

é uma uniformidade em F. De fato:

1) Para todo $D \in \mathbb{D}$, $\Delta \subset D$ e como $\Delta_F \in (F \times F)$, então $\Delta \subset D \cap (F \times F)$, para todo $D \cap (F \times F) \in \mathbb{D}_F$.

2) Sejam $D \cap (F \times F) \in \mathbb{D}_F$ e $D^{-1} \in \mathbb{D}$, então como $D^{-1} \cap (F \times F) = (D \cap (F \times F))^{-1}$, assim $(D \cap (F \times F)^{-1} \in \mathbb{D}_F$.

3) Sejam $D \cap (F \times F), E \cap (F \times F) \in \mathbb{D}_F$ e $D \in \mathbb{D}$ tal que existe $E \in \mathbb{D}$ com $E \circ E \subseteq D$, então $E \cap (F \times F) \in \mathbb{D}_F$, assim $E \cap (F \times F) \cap E \cap (F \times F) \subseteq D \cap (F \times F)$.

4) Sejam $D \cap (F \times F), E \cap (F \times F) \in \mathbb{D}_F$, $D, E \in \mathbb{D}$ e $D \cap E \in \mathbb{D}$, então como $(D \cap E) \cap (F \times F) = (D \cap (F \times F)) \cap (E \cap (F \times F))$, assim $(D \cap (F \times F) \cap E \cap (F \times F)) \in \mathbb{D}_F$.

5) Sejam $D \cap (F \times F) \in \mathbb{D}_F$ e $D \in \mathbb{D}$, $D \subseteq E$ tais que $E \in \mathbb{D}$, então como $D \cap (F \times F) \subseteq E \cap (F \times F)$, assim $E \cap (F \times F) \in \mathbb{D}_F$.

Portanto $\mathbb{D}_F$ é uma uniformidade em F.

Definição 2.5. *Sejam X um conjunto não vazio, $\mathbb{D}$ uma uniformidade em X. Uma família $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}$ é* ***base*** *para a uniformidade $\mathbb{D}$, se para todo $D \in \mathbb{D}$ existe $E \in \mathbb{E}$ tal que $E \subseteq D$.*

A seguinte proposição que vamos enunciar, diz que toda uniformidade possui uma base uniformidade simétrica.

Proposição 2.6. *Se $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme, então a família*

$$S(\mathbb{D}) = \{D \in \mathbb{D} \ : \ D = D^{-1}\}$$

é base para a uniformidade $\mathbb{D}$ em X.

Demonstração. Seja $\mathbb{D}$ uma uniformidade em X. Observe que para todo $D \in \mathbb{D}$, existe $E = D \cap D^{-1} \in S(\mathbb{D})$, pois

$$E^{-1} = (D \cap D^{-1})^{-1} = (D^{-1})^{-1} \cap D^{-1} = D \cap D^{-1} = E.$$

Assim, $E = E^{-1}$. Como $E = D \cap D^{-1}$, então $E = D \cap D^{-1} \subseteq D$. Logo, $S(\mathbb{D})$ é uma base para a uniformidade $\mathbb{D}$ em X. □

Definição 2.7. *Seja $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme. Um subconjunto $\mathbb{S}$ de $\mathbb{D}$ é uma* ***sub-base*** *de $\mathbb{D}$, se todas as intersecções finitas de elemento de $\mathbb{E}$ formam uma base para a uniformidade $\mathbb{D}$.*

Agora, daremos um exemplo importante de uma sub-base para uma uniformidade num produto.

Observação 2.8. Considere-se $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ uma sequência de espaços uniformes com as uniformidades $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, ..., \mathbb{D}_n, ...$ respectivamente. Então, defina-se uma sub-base uniformidade $\mathbb{E}$ em $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $D \in \mathbb{D}$ a sub-base uniformidade $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ esta formado pelos elemento da forma:

$$E = \{(x, y) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n : (x(n), y(n)) \in D\}.$$

Agora, observe que a interseção finita de elemento de $\mathbb{E}$ forma uma base uniforme para a uniformidade em $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

2.2 Base Uniformidade

Nesta seção, a ideia obter métodos para construir uniformidade num conjunto X a partir de sub-coleções de subconjuntos de $X \times X$, que satisfazem certas propriedades preestabelecidas. A definição de base uniformidade é um método para gerar uma uniformidade num conjunto, utilizando a coleção de subconjuntos de $X \times X$, de tal forma que ela resulte ser uma base uniforme da uniformidade gerada.

Definição 2.9. *Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathbb{E}$ de subconjuntos de $X \times X$ é uma **base uniformidade** em X, se satisfaz as seguintes propriedades:*

1) Para todo $E \in \mathbb{E}$, $\Delta \subset E$.

2) Se $E \in \mathbb{E}$, então existe $F \in \mathbb{E}$ tal que $F^{-1} \subseteq E$.

3) Se $E \in \mathbb{E}$, então existe $F \in \mathbb{E}$ tal que $F \circ F \subseteq E$.

4) Se $E_1, E_2 \in \mathbb{E}$, então $E_1 \cap E_2 \in \mathbb{E}$.

5) Se $E \in \mathbb{E}$ e $E \subseteq F$, então $F \in \mathbb{E}$.

Tendo definida base uniformidade agora veremos alguns exemplo destes, pois serão de muita importância mais adiante.

Exemplo 2.10. Seja S a linha de Sorgenfrey. A família $\mathbb{D}$ de subconjuntos de $S \times S$ formado pelos elementos da forma:

$$D = [a, b) \times [a, b)$$

é uma base uniformidade em S, isso quer dizer que existe uma uniformidade que gera a topologia de Sorgenfrey.

Exemplo 2.11. Seja X um conjunto não enumerável. A família $\mathbb{D}$ de subconjunto de $X \times X$, formado pelos elementos da forma:

$$D_F = F \times F \cup (X - F) \times (X - F),$$

é uma base uniformidade em X, onde F é um subconjunto finito de X.

Na proposição que mencionaremos a seguir, caracterizaremos base de uma uniformidade.

Proposição 2.12. *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathbb{E}$ uma família não vazia de subconjunto de $X \times X$. Podemos afirmar que:*

1) Se $\mathbb{E}$ é uma base uniformidade em X, então $\mathbb{D}_{\mathbb{E}} = \{D \subset X \times X : \exists E \in \mathbb{E}, E \subseteq D\}$ é uma uniformidade em X.

2) Se $\mathbb{D}$ é uma uniformidade em X, $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{D}$ e $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\mathbb{E}}$, então $\mathbb{E}$ é uma base uniformidade em X.

Demonstração. Mostremos que $\mathbb{D}_{\mathbb{E}} = \{D \subset X \times X : \exists E \in \mathbb{E}, E \subseteq D\}$ é uma uniformidade em X, ou seja, $\mathbb{D}_{\mathbb{E}}$ satisfaz as propriedades da Definição 2.3.

1) Se $D \in \mathbb{D}_{\mathbb{E}}$, então existe $E \in \mathbb{E}$ tal que $E \subseteq D$, e como $\Delta \subseteq E$, então $\Delta \subseteq D$.

2) Se $D \in \mathbb{D}_{\mathbb{E}}$, então existe $E \in \mathbb{E}$ tal que $E \subseteq D$, e como $\mathbb{E}$ é ma base uniformidade existe $F \in \mathbb{E}$ tal que $F^{-1} \subseteq E$, o que implica que $F \subseteq E^{-1} \subseteq D^{-1}$ assim $D^{-1} \in \mathbb{D}_{\mathbb{E}}$.

3) Se $D \in \mathbb{D}_{\mathbb{E}}$, então existe $E \in \mathbb{E}$ tal que $E \subseteq D$, e como $\mathbb{E}$ é ma base uniformidade existe $F \in \mathbb{E}$ tal que $F \circ F \subseteq E$ assim $F \circ F \subseteq D$.

4) Se $D_1, D_2 \in \mathbb{D}_{\mathbb{E}}$, então existem $E_1, E_2 \in \mathbb{E}$ tais que $E_1 \subseteq D_1$ e $E_2 \subseteq D_2$. Existe $E_3 \in \mathbb{E}$ tal que $E_3 \subseteq E_1 \cap E_2 \subseteq D_1 \cap D_2$, assim $D_1 \cap D_2 \in \mathbb{D}_{\mathbb{E}}$.

5) Se $E \in \mathbb{D}_{\mathbb{E}}$ e $E \subseteq D$, então existe $E' \in \mathbb{E}$ tal que $E' \subseteq E \subseteq D$, assim $D \in \mathbb{D}_{\mathbb{E}}$.

Portanto, $\mathbb{D}_{\mathbb{E}}$ é uma uniformidade em X. Agora, mostremos que $\mathbb{E}$ é uma base uniformidade em X, ou seja, $\mathbb{E}$ satisfaz as propriedades da Definição 2.9.

1) Se $E \in \mathbb{E}$, então $E \in \mathbb{D}$, $\Delta \subseteq E$.

2) Se $E \in \mathbb{E}$, então $E \in \mathbb{D}$, o que implica que $E^{-1} \in \mathbb{D}$. Existe $F \in \mathbb{E}$ tal que $F \subseteq E^{-1}$, assim $F^{-1} \subseteq E$.

3) Se $E \in \mathbb{E}$, então $E \in \mathbb{D}$, existe $F \in \mathbb{D}$ tal que $F \circ F \subseteq E$. Por outro lado existe $H \in \mathbb{E}$ tal que $H \subseteq F$. Assim $H \circ H \subseteq F \circ F \subseteq E$.

4) Se $E_1, E_2 \in \mathbb{E}$, então $E_1, E_2 \in \mathbb{D}$ o que implica que $E_1 \cap E_2 \in \mathbb{D}$. Tome $E_1 \cap E_2 = E_3$, temos $E_3 \subseteq E_1 \cap E_2$.

5) Se $D \in \mathbb{E}$ e $D \subseteq E$, então $D \in \mathbb{D}$, assim $E \in \mathbb{E}$.

Portanto, $\mathbb{E}$ é uma base uniformidade em X. □

A continuação veremos um exemplo de uma base uniformidade induzida por uma métrica.

Proposição 2.13. *Se (X, d) é um espaço métrico e $\mathbb{E}$ uma família de subconjuntos de $X \times X$, formado pelos elementos da forma:*

$$E_n = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < 2^{-n}\}.$$

Então $\mathbb{E}$ é uma base uniformidade em X.

Demonstração. Sejam (X, d) um espaço métrico e $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que $\mathbb{E}$ é uma base uniformidade em X. De fato:

1) Seja $E_n \in \mathbb{E}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que:

$$\begin{aligned} (x, x) \in \Delta &\Longleftrightarrow d(x, x) = 0 < 2^{-n} \\ &\Longrightarrow (x, x) \in E_n. \end{aligned}$$

Assim $\Delta \subseteq E_n$ para todo $n \in N$

2) Seja $E_n \in \mathbb{E}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $E_{n+1} \in \mathbb{E}$ tal que:

$$\begin{aligned} (y, x) \in E_{n+1}^{-1} &\Longrightarrow d(y, x) = d(x, y) < 2^{-(n+1)} < 2^{-n} \\ &\Longrightarrow (y, x) \in E_n. \end{aligned}$$

Logo $E_{n+1}^{-1} \subseteq E_n$.

3) Seja $E_n \in \mathbb{E}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $E_{n+1} \in \mathbb{E}$ tal que:

$$\begin{aligned} (x, z) \in E_{n+1} \circ E_{n+1} &\Longrightarrow \exists \;\; y \in X \;\text{ tal que }\; (x, y) \in E_{n+1} \;\text{ e }\; (y, z) \in E_{n+1} \\ &\Longleftrightarrow d(x, y) < 2^{-(n+1)} \;\text{ e }\; d(y, z) < 2^{-(n+1)} \\ &\Longrightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < 2^{-n} \\ &\Longrightarrow (x, z) \in E_n. \end{aligned}$$

Assim $E_{n+1} \circ E_{n+1} \subseteq E_n$.

4) Sejam $E_n, E_m \in \mathbb{E}$. Então $E_n \subseteq E_m$ ou $E_m \subseteq E_n$. Suponhamos que $E_n \subseteq E_m$ então $E_n \subset E_n \cap E_m$, assim $E_n \cap E_m \in \mathbb{E}$.

5) Sejam $E_n \in \mathbb{E}$ e $E_n \subseteq E_m$. Então tem-se:

$$\begin{aligned} (x, y) \in E_n &\Longleftrightarrow d(x, y) < 2^n < 2^m \\ &\Longrightarrow (x, y) \in E_m. \end{aligned}$$

Logo $E_m \in \mathbb{E}$.

Portanto, $\mathbb{E}$ é uma base uniformidade em X. □

2.3 Propriedades de Uniformidade

A uniformidade apresenta uma estrutura mais forte que uma topologia, pelo qual toda uniformidade induz uma topologia. A continuação definiremos uma topologia induzida por uma uniformidade, para o qual precisamos o seguinte teorema.

Teorema 2.14. *Se $(X, \mathbb{D})$ é um espaço uniforme e x é um elemento de X, então $\mathbb{V}(x) = \{D[x] : D \in \mathbb{D}\}$ é uma base de vizinhanças de x.*

Demonstração. Seja $(X, \mathbb{D})$ é um espaço uniforme e x um elemento em X, mostremos que $\mathbb{V}(x) = \{D[x] : D \in \mathbb{D}\}$ é uma base de vizinhanças em x. Primeiro observe que para todo $E \in \mathbb{E}$, $(x, x) \in \Delta \subseteq E$, o que implica que $x \in E[x]$. Com isso temos:

1) Se $D_1[x], D_2[x] \in \mathbb{V}(x)$, então $D_1, D_2 \in \mathbb{D}$ e $D_1 \cap D_2 \in \mathbb{D}$. Logo:

$$\begin{aligned} y \in D_1[x] \cap D_2[x] &\Longleftrightarrow y \in D_1[x] \ \text{ e } \ y \in D_2[x] \\ &\Longleftrightarrow (x, y) \in D_1 \ \text{ e } \ (x, y) \in D_2 \\ &\Longleftrightarrow (x, y) \in (D_1 \cap D_2) \\ &\Longleftrightarrow y \in (D_1 \cap D_2)[x], \end{aligned}$$

assim $D_1[x] \cap D_2[x] \in \mathbb{V}(x)$.

2) Se $D[x] \in \mathbb{V}(x)$, então $D \in \mathbb{D}$. Logo.

$$\begin{aligned} D \in \mathbb{D} &\Longrightarrow \exists \ \ E \in \mathbb{D} \ \text{ tal que } \ E \circ E \subseteq D \\ &\Longrightarrow E \circ E[x] \in \mathbb{V}(x). \end{aligned}$$

Por outro lado seja $y \in E[x]$ e $z \in E[y] \in \mathbb{V}(y)$,

$$\begin{aligned} y \in E[x] \ \text{ e } \ z \in E[y] &\Longrightarrow (x, y) \in E \ \text{ e } \ (y, z) \in E \\ &\Longrightarrow (x, z) \in 2E \subset D \\ &\Longrightarrow z \in D[x]. \end{aligned}$$

Assim $E[y] \subseteq D[x]$.

Portanto, $\mathbb{V}(x)$ é uma base de vizinhanças em x. □

Proposição 2.15. *Seja $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme e $x \in X$. Se $\mathbb{E}$ é base da uniformidade $\mathbb{D}$, então $\mathbb{B}(x) = \{E[x] : E \in \mathbb{E}\}$ é uma base de vizinhanças em x.*

Demonstração. Sejam $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme, x um elemento em X e $\mathbb{E}$ uma base para a uniformidade $\mathbb{D}$. Mostremos que $\mathbb{B}(x) = \{E[x] : E \in \mathbb{E}\}$ é uma base de vizinhanças em x. Primeiro observe que para todo $E \in \mathbb{E}$, $(x, x) \in \Delta \subseteq E$, o que implica que $x \in E[x]$. Com isso temos:

1) Se $D_1[x], D_2[x] \in \mathbb{B}(x)$, então $E_1, E_2 \in \mathbb{E}$ e $E_1 \cap E_2 \in \mathbb{E}$. Logo:

$$\begin{aligned} y \in E_1[x] \cap E_2[x] &\Longleftrightarrow y \in E_1[x] \ \text{ e } \ y \in E_2[x] \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in E_1 \ \text{ e } \ (x,y) \in E_2 \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in (E_1 \cap E_2) \\ &\Longleftrightarrow y \in (E_1 \cap E_2)[x]. \end{aligned}$$

Assim $E_1[x] \cap E_2[x] \in \mathbb{B}(x)$.

2) Se $E[x] \in \mathbb{B}(x)$, então $E \in \mathbb{E}$. Logo,

$$\begin{aligned} E \in \mathbb{E} &\Longrightarrow \exists F \in \mathbb{E} : F \circ F \subseteq E \\ &\Longrightarrow F \circ F[x] \in \mathbb{B}(x). \end{aligned}$$

Por outro lado seja $y \in F[x]$ e $z \in F[y] \in \mathbb{B}(y)$

$$\begin{aligned} y \in F[x] \ \text{ e } \ z \in F[y] &\Longrightarrow (x,y) \in F \ \text{ e } \ (y,z) \in F \\ &\Longrightarrow (x,z) \in 2F \subseteq E \\ &\Longrightarrow z \in E[x], \end{aligned}$$

assim $F[y] \subseteq E[x]$.

Portanto, $\mathbb{B}(x)$ é uma base de vizinhanças em x. □

Agora como consequência da Proposição 2.15, tendo uma base de vizinhança local em função de vizinhanças diagonais, então podemos gerar uma topologia chamada topologia uniforme.

Definição 2.16. *Seja $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme. A topologia uniforme em X, induzida pela uniformidade $\mathbb{D}$ é dada por:*

$$\mathbb{T}_{\mathbb{D}} = \{U \subseteq X : \ \forall\, x \in U, \ \exists\, D \in \mathbb{D}; \ D[x] \subseteq U\}.$$

O par $(X, \mathbb{T}_{\mathbb{D}})$ é chamado de ***espaço topológico uniforme****, onde $\mathbb{T}_{\mathbb{D}}$ é a topologia gerada pela uniformidade $\mathbb{D}$.*

Observação 2.17. Seja $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme. $D \in \mathbb{D}$ é aberto, se D é aberto em $X \times X$ com a topologia produto. Por outra parte tem-se que $D \in \mathbb{D}$ é aberto, então $D[x]$ é aberto em X para todo $x \in X$.

Desde que toda uniformidade induz uma topologia, passamos a definir um espaço topológico uniformizavél.

Definição 2.18. *Um espaço topológico X é* ***uniformizável****, se existe uma uniformidade $\mathbb{D}$ que induz a topologia em X.*

Exemplo 2.19. Seja $\mathbb{R}$ a reta real. Considere a família $\mathbb{D}$ de subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, formada pelos elementos da forma:

$$D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\}.$$

é uma base uniformidade $\mathbb{R}$. Esta base uniformidade $\mathbb{D}$ induz uma base topológica a qual gera a topologia usual em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.20. *Seja $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme, $(X, \mathbb{T}_{\mathbb{D}})$ um espaço topológico e A um subconjunto de X. Se $\mathbb{E}$ é base da uniformidade $\mathbb{D}$, então*

$$\overline{A} = \bigcap_{E \in \mathbb{E}} E[A].$$

Demonstração. Sejam $x \in \overline{A}$, $E \in \mathbb{E}$ e F uma vizinhança diagonal simétrica de E tal que $F \subseteq E$. Então $F[x]$ é uma vizinhança de x e $A \cap F[x] \neq \emptyset$. Logo existe $a \in A \cap F[x]$ tal que:

$$\begin{aligned}(x, a) \in F &\Longrightarrow (a, x) \in F \\ &\Longrightarrow x \in F[a] \subseteq F[A] \subseteq E[A] \\ &\Longrightarrow \forall E \in \mathbb{E},\ x \in E[A].\end{aligned}$$

Assim $x \in \bigcap\limits_{E \in \mathbb{E}} E[A]$.
Sejam $x \in \bigcap\limits_{E \in \mathbb{E}} E[A]$ e $\mathbb{V}[x]$ uma base de vizinhanças simétricas de x. Então:

$$\begin{aligned}x \in E[A] &\Longrightarrow \exists\ a \in A, \quad \text{tal que} \quad (a, x) \in E \\ &\Longrightarrow (x, a) \in E \quad \text{e} \quad a \in E[x] \\ &\Longrightarrow a \in E[x] \cap A \\ &\Longrightarrow E[x] \cap A \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Logo $x \in \overline{A}$. Portanto, $\overline{A} = \bigcap\limits_{E \in \mathbb{E}} E[A]$. □

Antes de apresentar o próximo lema, precisamos da seguinte observação.

Observação 2.21. Se X é um espaço uniforme, observe que $\overline{D[x]} \subseteq 2D[x]$ para todo D na uniformidade. De fato, por definição tem-se:

$$\begin{aligned}\overline{D[x]} &= \bigcap_{E \in \mathbb{E}} E[D[x]] \\ &\subseteq D[D[x]] = 2D[x].\end{aligned}$$

Assim $\overline{D[x]} \subseteq 2D[x]$ para todo D e $x \in X$.

Lema 2.22. *Sejam $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme, $D \in \mathbb{D}$ simétrico e $x \in X$. Se $A \subseteq D[x]$ e $y \in \overline{A}$, então $\overline{A} \subseteq 4D[y]$.*

Demonstração. Seja $D \in \mathbb{D}$ simétrico, $y \in \overline{A}$ e $A \subseteq D[x]$. Então, $\overline{A} \subseteq \overline{D[x]} \subseteq 2D[x]$, o que implica que $y \in 2D[x]$ e $(x, y) \in 2D[x]$. Por outra parte, para todo

$z \in \overline{A}$ tem-se:

$$\begin{aligned} z \in \overline{A} \subseteq \overline{D[x]} \subseteq 2D[x] &\Longrightarrow (z,x) \in 2D \\ &\Longrightarrow (z,x) \in 2D \ \text{ e } \ (x,y) \in 2D \\ &\Longrightarrow (z,y) \in 4D \Longrightarrow (y,z) \in 4D \\ &\Longrightarrow z \in 4D[y]. \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{A} \subseteq 4D[y]$. □

Agora finalmente enunciaremos as seguintes definições de cobertura num espaço uniforme e refinamento estrela.

Definição 2.23. *Sejam $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme, $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ coberturas de X e A um subconjunto de X. Dizemos que:*

*1) $\mathbb{U}$ é uma **cobertura uniforme**, se existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $\mathbb{U}_{\mathbb{D}} = \{D[x] : x \in X\}$ refina a $\mathbb{U}$.*

*2) Uma **estrela** do conjunto A, com respeito à cobertura uniforme $\mathbb{U}$, é o conjunto $S(A, \mathbb{U}) = \bigcup_{U \in \mathbb{U}'} U$, onde $\mathbb{U}' = \{U \in \mathbb{U} \ : \ U \cap A \neq \emptyset\}$.*

*3) $\mathbb{U}$ é um **refinamento estrela** de $\mathbb{V}$, se para todo $U \in \mathbb{U}$, existe $V \in \mathbb{V}$ tal que $S(U, \mathbb{U}) \subset V$.*

*4) $\mathbb{U}$ é uma **cobertura normal**, se $\mathbb{U}$ é uma cobertura aberta e se existe uma sequência de coberturas abertas $\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n, ...$ de X tal que $\mathbb{V}_0 = \mathbb{U}$ e $\mathbb{V}_{n+1}$ é refinamento estrela de $\mathbb{V}_n$.*

O próximo resultado nos garante que baixo certas condições, é possível encontrar um refinamento aberto localmente finito.

Proposição 2.24. *Se $(X, \mathbb{D})$ é um espaço uniforme e $D \in \mathbb{D}$ é um aberto, então a família $\mathbb{V} = \{D[x] : x \in X\}$ possui um refinamento aberto localmente finito $\mathbb{U}$.*

Demonstração. Suponha D um aberto em $X \times X$. Para todo $x \in X$ tem-se que $D[x]$ é um conjunto aberto em X. Agora, tome uma vizinhança diagonal aberta simétrica E em $\mathbb{D}$ tal que $4E \subseteq D$. Então

$$\mathbb{E} = \{E[x] : x \in X\}$$

é um refinamento estrela de $\mathbb{V} = \{D[x] : x \in X\}$ e $\mathbb{V}$ é uma cobertura normal para X. Isto implica que, $\mathbb{V}$ possui um refinamento aberto localmente finito $\mathbb{U}$. □

Capítulo 3

Jogo Topológico Proximal

Nesta capítulo, definiremos o jogo proximal e tendo definido passaremos a definir um novo espaço chamado espaço proximal, além disso veremos algumas caracterizações deste espaço. A principal referência é [2]

3.1 Jogo Proximal

Nesta secção, definiremos o jogo topológico infinito (jogo proximal) entre dois jogadores A e B num espaço uniforme e suas regras. Antes de definir formalmente podemos observar o jogo proximal graficamente no seguinte desenho.

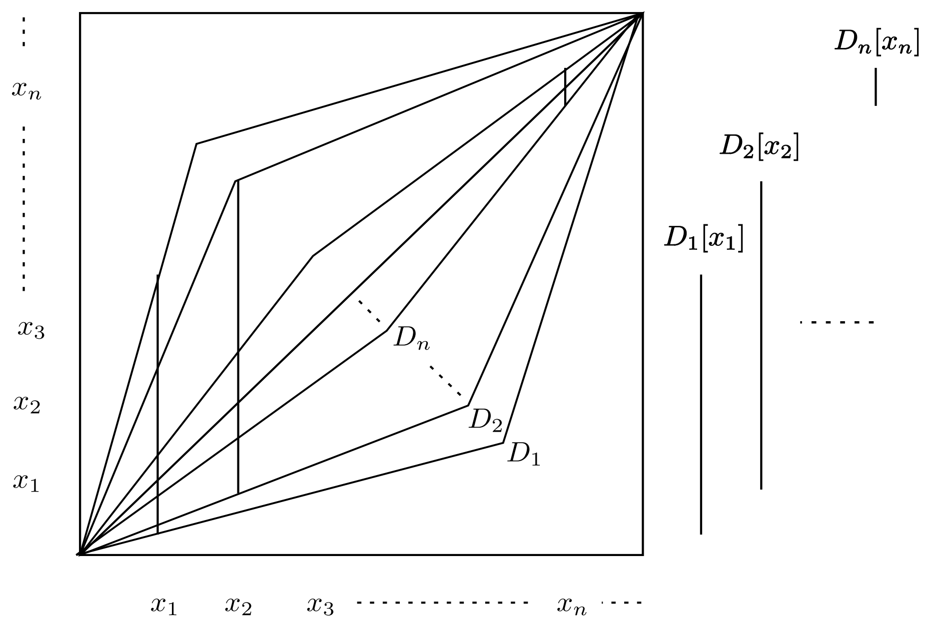

Figura 3.1: Jogo proximal

No desenho, o jogo proximal entre os jogadores A e B num espaços uniforme são escolhas infinitas, onde o jogador A escolhe vizinhanças diagonais (elementos da uniformidade em X) e o jogador B escolhe os pontos de X.

Definição 3.1. *Seja $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme. Defina-se jogo proximal entre os jogadores A e B em $(X, \mathbb{D})$ ou,* ***jogo proximal****, como as escolhas infinitas dos jogadores A e B da seguinte forma:*

1) *Jogador A: escolhe $X \times X$;*
   Jogador B: escolhe $x_1 \in X$;

2) *Jogador A: escolhe $D_1 \in \mathbb{D}$;*
   Jogador B: escolhe $x_2 \in X$;

3) *Jogador A: escolhe $D_2 \in \mathbb{D}$ com $D_2 \subseteq D_1$;*
   Jogador B: escolhe $x_3 \in D_1[x_2]$;

$\vdots$

n) *Jogador A: escolhe $D_{n-1} \in \mathbb{D}$ com $D_{n-1} \subseteq ... \subseteq D_2 \subseteq D_1$;*
   Jogador B: escolhe $x_n \in D_{n-2}[x_{n-1}]$;

$\vdots$

As jogadas de A e B neste jogo proximal é infinita, onde o conjunto de jogadas escolhidas pelos jogadores são chamadas de estratégias.

Uma vez tendo definido formalmente o jogo proximal entre os jogadores A e B num espaço uniforme ou simplesmente jogo proximal, definiremos sobre quais condições o jogador A vence o jogo proximal. Neste trabalho não estamos interessados se o jogador B vence o jogo proximal.

Definição 3.2. *Seja X um espaço uniforme. O jogador A vence o jogo proximal se, as escolhas infinitas dos jogadores A e B satisfaz a seguinte propriedade:*

1) *A sequência $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ converge em X, ou*

2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_{n-1}[x_n] = \emptyset$.

Na seguinte definição fixaremos algumas definições sobre elementos do jogo proximal.

Definição 3.3. *Seja $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme. Considere o jogo proximal da Definição 3.1. Então:*

1) *A sequência infinita $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ formada pelas escolhas do jogador B é chamada de* ***sequência proximal****.*

2) *A sequência finita $(x_1, D_1, x_2, D_2, ..., Dn - 1, x_n)$ formada pelas escolhas dos jogadores A e B é chamada de* ***jogo parcial proximal*** *do jogo proximal.*

3) *A sequência finita $(x_1, x_2, ..., x_n)$ formada pelas escolhas do jogador B é chamada de* ***sequência admissível****.*

Definição 3.4. *O conjunto de todas as sequências admissíveis no jogo proximal é chamado de* ***conjunto admissível*** *e será denotado por* $\mathcal{A}$.

Como em todo jogo existem as estratégias, na definição de jogo proximal vimos que o conjunto de escolhas de cada jogador é uma estratégia. Agora formalmente definiremos a estratégia para o jogador A no jogo proximal, por meio das escolhas do jogador A, o qual será descrita pela função a seguir:

Definição 3.5. *Seja* $(X, \mathbb{D})$ *um espaço uniforme. Defina-se a* ***estratégia*** *para o jogador* A *no jogo proximal como uma função:*

$$\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$$

tal que:

1) $\omega(\emptyset) = X \times X$.

2) $x_{n+1} \in \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$.

3) $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$,

onde $\mathcal{A}$ *é o conjunto admissível no jogo proximal em* X.

Basicamente, podemos observar que as condições do jogo são as estratégias do jogador A. Para finalizar passamos a definir uma estratégia vencedora para o jogador A no jogo proximal. Antes de passar na seguinte definição, a posteriori veremos as condições de vencer o jogo proximal.

Definição 3.6. *Sejam* $(X, \mathbb{D})$ *um espaço uniforme e* $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$ *uma estratégia no jogo proximal, onde* $\mathcal{A}$ *é o conjunto admissível. Então:*

1) ω *é* ***estratégia vencedora*** *ou* $\mathbb{D}$*-vencedora, se toda sequência proximal* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *ou converge em* X *ou* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] = \emptyset$.

2) ω *é uma* ***estratégia absolutamente vencedora*** *ou absolutamente* $\mathbb{D}$*-vencedora, se toda sequência proximal* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *converge em* X.

3) ω *é uma* ***estratégia quase vencedora*** *ou quase* $\mathbb{D}$*-vencedora, se toda sequência proximal* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$*, ou tem um ponto de acumulação em* X *ou* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] = \emptyset$.

Veremos que as condições de vencer um jogo (em geral) definem novos espaços topológicos (espaço proximal, quase proximal, absolutamente proximal). Porem para seu melhor entendimento, veremos um exemplo básico de espaço topológico proximal.

Exemplo 3.7. Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{D}_d$ uma uniformidade induzida pela métrica d em X, com elementos da forma:

$$D_n = \{(x, y) \in X \times X \quad : \quad d(x, y) < 2^{-n}\}.$$

Considere o jogo proximal entre os jogadores A e B como as escolhas infinitas da seguinte forma:

1) Jogador A: escolhe $X \times X$;
   Jogador B: escolhe $x_1 \in X$;

2) Jogador A: escolhe $D_1 \in \mathbb{D}$;
   Jogador B: escolhe $x_2 \in X$;

3) Jogador A: escolhe $D_2 \in \mathbb{D}$ com $D_2 \subseteq D_1$;
   Jogador B: escolhe $x_3 \in D_1[x_2]$;

$\vdots$

n) Jogador A: escolhe $D_{n-1} \in \mathbb{D}$ com $D_{n-1} \subseteq ... \subseteq D_2 \subseteq D_1$;
   Jogador B: escolhe $x_n \in D_{n-2}[x_{n-1}]$;

$\vdots$

Assim para qualquer escolha do jogador B com as regras acima tem-se que toda sequência proximal $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ converge a algum ponto em X. Portanto, o jogador A possui uma estratégia absolutamente vencedora.

3.2 Espaços Proximal

Nesta seção, uma vez definido um jogo topológico infinito, podemos definir novos espaços (espaços $\mathbb{D}$-proximal, absolutamente $\mathbb{D}$-proximal e quase $\mathbb{D}$-proximal) em função da sua uniformidade, e posteriormente definiremos estes espaços em função da topologia gerada pela uniformidade (espaços proximal, absolutamente proximal e quase proximal). Também veremos alguns exemplos básicos destes espaços. [2]

Definição 3.8. *Sejam X um espaço uniforme e $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$ uma estratégia para o jogador A no jogo proximal. Então:*

*1) X é um **espaço $\mathbb{D}$-proximal**, se existe uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora ω para o jogador A no jogo proximal.*

*2) X é um **espaço absolutamente $\mathbb{D}$-proximal**, se existe uma estratégia absolutamente $\mathbb{D}$-vencedora ω para o jogador A no jogo proximal.*

*3) X é um **espaço quase $\mathbb{D}$-proximal**, se existe uma estratégia quase $\mathbb{D}$-vencedora ω para o jogador A no jogo proximal.*

Como toda uniformidade induz uma topologia, então passamos a definir os seguintes espaços em função da topologia induzida pela uniformidade.

Definição 3.9. *Sejam $(X, \mathbb{D})$ um espaço uniforme e $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$ uma estratégia para o jogador A no jogo proximal, onde $\mathcal{A}$ é o conjunto admissível.*

1) Um espaço topológico X é um ***espaço proximal****, se existe uma uniformidade $\mathbb{D}$ em X que induz a topologia em X tal que X um espaço $\mathbb{D}$-proximal.*

2) Um espaço topológico X é um ***espaço absolutamente proximal****, se existe uma uniformidade $\mathbb{D}$ em X que induz a topologia em X tal que X um espaço absolutamente $\mathbb{D}$-proximal.*

3) Um espaço topológico X é um ***espaço quase proximal****, se existe uma uniformidade $\mathbb{D}$ em X que induz a topologia em X tal que X um espaço quase $\mathbb{D}$-proximal.*

Como para toda uniformidade existe uma base uniforme. Podemos afirmar os seguintes resultados.

Proposição 3.10. *Se X é um espaço $\mathbb{D}$-proximal e $\mathbb{E}$ é uma base para a uniformidade $\mathbb{D}$, então X é um espaço $\mathbb{E}$-proximal.*

Demonstração. Suponha que X é um espaço $\mathbb{D}$-proximal, então existe uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$ no jogo proximal.
Seja $\mathbb{E}$ uma base para a uniformidade $\mathbb{D}$. Defina-se a estratégia $\mathbb{E}$-vencedora:

$$\upsilon : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{E}$$

com, $\upsilon(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, x_2..., x_n)$, tal que:

1) $\upsilon(\emptyset) = \omega(\emptyset) = X \times X$.

2) Se $(x_1, x_2, ..., x_n)$ uma sequência admissível, com $x_{n+1} \in \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$, então existe um elemento $\upsilon(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$ da base $\mathbb{E}$ tal que $x_{n+1} \in \upsilon(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$.

3) Para todo $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, x_2..., x_{n-1})$, existem $\upsilon(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\upsilon(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, pela Definição 3.1 tem-se que, $\upsilon(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \upsilon(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$.

4) Se $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ um sequência proximal e desde que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $\upsilon(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] \subseteq \omega(x_1, x_2..., x_{n-1})[x_n]$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] = \emptyset$, pois ω é uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora no jogo proximal, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \upsilon(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] = \emptyset$.

Portanto, υ é uma estratégia $\mathbb{E}$-vencedora e assim X também é um espaço $\mathbb{E}$-proximal. □

Na seguinte proposição mostraremos que um espaço métrico X é um espaço $\mathbb{D}_d$-proximal com a uniformidade induzida pela sua métrica, que induz uma uniformidade sobre o espaço.

Proposição 3.11. *Se X é um espaço métrico e $\mathbb{D}_d$ é a uniformidade induzida pela métrica d em X, então X é um espaço $\mathbb{D}$-proximal.*

Demonstração. Sejam X um espaço uniforme com a uniformidade $\mathbb{D}_d$ induzida pela métrica d em X. Observe que da Proposição 2.13 cujos elementos de $\mathbb{D}_d$ são da forma:

$$D_{n+1} = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < 2^{-(n+1)}\}.$$

Defina-se a estratégia $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}_d$ dada por $\omega(x_1, ..., x_n) = D_{n+1}$ tal que:

1) $\omega(\emptyset) = X \times X$.
2) Pela definição de jogo proximal, tem-se $x_{n+1} \in \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$.
3) Se $\omega(x_1, ..., x_{n-1}) = D_n$ e $\omega(x_1, ..., x_n) = D_{n+1}$ e observe que $D_{n+1} \subseteq D_n$ pois

$$\begin{aligned}(x, y) \in D_{n+1} &\Longrightarrow d(x, y) < 2^{-(n+1)} < 2^{-n}\\ &\Longrightarrow (x, y) \in D_n.\end{aligned}$$

Assim $\omega(x_1, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, ..., x_{n-1})$.

4) Seja $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ uma sequência proximal e suponha-se que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n[x_n] \neq \emptyset$ então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe.

$$\begin{aligned}z \in D_n[x_n] &\Longrightarrow d(x_n, z) < 2^{-n}\\ &\Longrightarrow d(x_n, z) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

logo, a sequência proximal $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ converge a z.

Portanto, ω é uma estratégia $\mathbb{D}_d$-vencedora, consequentemente X é um espaço $\mathbb{D}_d$-proximal. □

No entanto, é o caso de que existe uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora no jogo proximal, onde X é um espaço métrico e $\mathbb{D}_d$ é uma uniformidade compatível com a uniformidade induzida pela métrica d do espaço X.

Agora veremos um exemplo onde existem espaços métricos que não possuem estratégia vencedora em relação a alguma uniformidade diferente da uniformidade natural (induzida pela do espaço).

Exemplo 3.12. Seja W um conjunto não enumerável, munido da topologia discreta. Observar que W munido da métrica discreta é um espaço metrizavel. Consideremos a seguinte base uniforme $\mathbb{D}$ do Exemplo 2.11, herdada por um ponto de compacificação de W,(Um espaço Fort é a compacificação de um ponto de um espaço discreto) formado pelos elemento da forma:

$$D_F = F \times F \cup (W - F) \times (W - F),$$

onde F e um subconjunto finito de W. Como W está munido de uma uniformidade, podemos considerar o jogo proximal entre os jogadores A e B com as seguintes escolhas:

1) Jogador A: escolhe $D_{F_1} = F_1 \times F_1 \cup (W - F_1) \times (W - F_1)$
Jogador B: escolhe $x_1 \in W - F_1$

2) Jogador A: escolhe $D_{F_2} = F_2 \times F_2 \cup (W - F_2) \times (W - F_2)$
Jogador B: escolhe $x_2 \in W - (F_1 \cup F_2)$ tal que $x_2 \in D_{F_1}[x_1] = W - F_1$

3) Jogador A: escolhe $D_{F_3} = F_3 \times F_3 \cup (W - F_3) \times (W - F_3)$
Jogador B: escolhe $x_3 \in X - (F_1 \cup F_2 \cup F_3)$ tal que $x_3 \in D_{F_2}[x_2] = W - F_2$

$\vdots$

n) Jogador A: escolhe $D_{F_n} = F_n \times F_n \cup (W - F_n) \times (W - F_n)$
Jogador B: escolhe $x_n \in W - (F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n)$ tal que $x_n \in D_{F_{n-1}}[x_{n-1}] = W - F_{n-1}$

$\vdots$

E assim continua infinitamente o jogo proximal. Então defina formalmente a estratégia tendo as escolhas dos jogadores A e B, como $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$ dada por:

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = D_{F_{n+1}} = F_{n+1} \times F_{n+1} \cup (W - F_{n+1}) \times (W - F_{n+1})$$

tal que:

1) $\omega(\emptyset) = D_{F_1}$.

2) Pela definição do jogo proximal tem-se que $x_{n+1} \in D_{F_n}[x_n] = \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$.

3) Pela definição de jogo proximal tem-se que $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$.

4) Seja $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ a sequência proximal no jogo proximal e observe-se que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \omega(x_1, ..., x_{n-1})[x_n] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_{F_n}[x_n] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W - F_n \neq \emptyset$. Alem disso a sequência proximal $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ não converge a nenhum ponto de W

Portanto, W não é um espaço $\mathbb{D}$-proximal, mesmo assim a topologia de W sendo metrizavél.

Exemplo 3.13. Seja $X = W \cup \{\infty\}$ um espaço Fort não enumerável munido de uma base uniformidade $\mathbb{D}$ 2.11 formado pelos elementos da forma:

$$D_F = F \times F \cup (W - F) \times (W - F),$$

onde F é um subconjunto finito de X. Então tendo X munido de uma uniformidade; para construir a estratégia podemos começar o jogo proximal entre os jogadores A e B com as seguintes escolhas:

1) Jogador A: escolhe $X \times X$
   Jogador B: escolhe $x_1 \in X$ com $x_1 \neq \infty$

2) Jogador A: escolhe $\omega(x_1) = D_{F_1} = F_1 \times F_1 \cup (W - F_1) \times (W - F_1)$
   Jogador B: escolhe $x_2 \in X \times X[x_1]$ com $x_2 \neq x_1$

3) Jogador A: escolhe $\omega(x_1, x_2) = D_{F_2} = F_2 \times F_2 \cup (W - F_2) \times (W - F_2)$
   Jogador B: escolhe $x_3 \in D_{F_1}[x_2]$ com $x_3 \neq x_2$

4) Jogador A: escolhe $\omega(x_1, x_2, x_3) = D_{F_3} = F_3 \times F_3 \cup (W - F_3) \times (W - F_3)$
   Jogador B: escolhe $x_4 \in D_{F_2}[x_3]$ com $x_4 \neq x_3$

$\vdots$

n) Jogador A: escolhe $\omega((x_1, x_2, ..., x_n) = D_{F_n} = F_n \times F_n \cup (W - F_n) \times (W - F_n)$
   Jogador B: escolhe $x_{n+1} \in D_{F_{n-1}}[x_n]$ com $x_{n+1} \neq x_n$

$\vdots$

Suponha que $F_1 = \{x_1\}, F_2 = \{x_1, x_2\}, ..., F_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Temos que:

1) Se $x_1 \neq x_2$, então $D_{F_1}[x_2] = X - \{x_1\}$ implica que na próxima jogada o jogador B não pode escolher x_1.

2) Se $x_1 = x_2$, então $D_{F_1}[x_2] = \{x_1\}$ implica que na próximas jogada o jogador B esta obrigado a escolher x_1.

Finalmente para obter uma estratégia vencedora neste jogo proximal, suponha que $F_1 = \{x_1\} - \{\infty\}, F_2 = \{x_1, x_2\} - \{\infty\}, ..., F_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\} - \{\infty\}$. Defina a estratégia ω como

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = D_{F_n}.$$

Então qualquer sequência proximal $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ converge a ∞ ou é eventualmente constante. Portanto, X é $\mathbb{D}$-proximal.

3.3 Propriedades de Espaços Proximal

Nesta seção, provaremos algumas propriedades básicas de espaços proximal; como sub-espaço proximal, caracterização de espaço métrico completo em função do espaço absolutamente proximal e produto enumerável de espaços proximal com a uniformidade produto.

Proposição 3.14. *Se X é um espaço $\mathbb{D}$-proximal e F é um subconjunto fechado de X, então F é um espaço $\mathbb{D}_F$-proximal.*

Demonstração. Suponha X um espaço $\mathbb{D}$-proximal, então existe uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$. Pelo Exemplo 2.4, a família:

$$\mathbb{D}_F = \{D \cap (F \times F) : D \in \mathbb{D}\},$$

é uma uniformidade em F. Defina-se a estratégia $\mathbb{D}_F$-vencedora $\omega_F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}_F$ dada por:

$$\omega_F(x_1, x_2, ..., x_n) = \omega(x_1, x_2, ..., x_n) \cap (F \times F)$$

tal que:

1) $\omega_F(\emptyset) = F \times F$.

2) $(x_1, x_2, ..., x_n)$ seja uma sequência admissível com $(x_1, x_2 ..., x_n) \in F$. Desde que ω é estratégia $\mathbb{D}$-vencedora, $x_{n+1} \in \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$ e $x_{n+1} \in (F \times F)[x_n]$. Como

$$(\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \cap (F \times F))[x_n] = \omega(x_1, ..., x_{n-1})[x_n] \cap (F \times F)[x_n],$$

então $x_{n+1} \in \omega_F(x_1, ..., x_{n-1})[x_n]$.

3) $(x_1, x_2, ..., x_n)$ seja uma sequência admissível com $(x_1, x_2, ..., x_n) \in F$. Desde que ω é estratégia $\mathbb{D}$-vencedora, $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, então

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \cap (F \times F) \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \cap (F \times F).$$

Assim $\omega_F(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega_F(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$

4) $(x_1, x_2, ..., x_n)$ seja uma sequência admissível tal que $(x_1, x_2, ..., x_n) \in F$ e suponha que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] \neq \emptyset$, então existe $z \in X$ tal que a sequência proximal $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ converge a z, assim $z \in F$ pois F é fechado.

Portanto, F é um espaço $\mathbb{D}_F$-proximal. □

A continuação, vemos que o jogo proximal define um espaço proximal que caracteriza espaço métrico completo, basicamente é uma outra forma de dizer espaço métrico completo.

Teorema 3.15. *Seja (X, d) um espaço métrico. Um espaço $\mathbb{D}_d$-proximal $(X, \mathbb{D}_d)$ é absolutamente $\mathbb{D}$-proximal se, e somente se (X, d) é completo.*

Demonstração. Seja $(X, \mathbb{D}_d)$ um espaço absolutamente $\mathbb{D}_d$-proximal, onde $\mathbb{D}_d$ é uma base uniformidade formado pelos elementos da forma:

$$D_n = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < 2^{-n}\}.$$

Mostremos que (X, d) é um espaço métrico completo. Existe uma estratégia absolutamente $\mathbb{D}_d$-vencedora $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}_d$ dada por $\omega(x_1, ..., x_n) = D_{n+1}$ tal que:

1) $\omega(\emptyset) = D_{k_0}$;

2) $x_{n+1} \in \omega(x_1, ..., x_{n-1})[x_n] = D_n[x_n]$;

3) $\omega(x_1, ..., x_n) = D_n \subset \omega(x_1, ..., x_{n-1}) = D_{n-1}$;

4) A sequência proximal $(x_1, ..., x_n, ...)$ converge em X.

Suponha que (X, d) é um espaço métrico não completo, isto é: Existe uma sequência de Cauchy $(x_1, ..., x_n, ...)$ em X com subsequência $(y_1, ..., y_n, ...)$ que não converge. Desde que $\omega(\emptyset) = D_{k_0}$, observe-se que a subsequência definida por $(y_1 = x_{k_0}, y_2 = x_{k_1}, ..., y_n = x_{k_{n-1}}, ...)$ é uma sequência proximal. De fato:

1) $\omega(\emptyset) = D_{k_0}$, com $k_0 \in \mathbb{N}$

2) As primeiras jogadas são D_{k_0} e x_{k_0}. Então existe $k_0 > 0$ tais que $d(x_{k_0}, x_{k_1}) < 2^{-k_0}$, para todo $k_0, k_1 \geq k_0$. O que implica que $x_{k_1} \in D_{k_0}[x_{k_0}]$. Continuado com a indução tem-se:

$$x_{k_n} \in \omega(x_{k_0}, x_{k_1}, ..., x_{k_{n-2}})[x_{k_{n-1}}] = D_{k_{n-1}}[x_{k_{n-1}}].$$

   Assim $y_{n+1} \in \omega(y_1, y_2, ..., y_{n-1})[y_n] = D_n[y_n]$.

3) Desde que $K_{n-1} < K_n$, com $K_{n-1}, K_n \in \mathbb{N}$, então $D_{k_n} \subseteq D_{k_{n-1}}$. O que implica que $\omega(y_1, y_2, ..., y_n) \subseteq \omega(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$.

4) Como $(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ é uma sequência proximal e ω é uma estratégia absolutamente $\mathbb{D}_d$-vencedora, então a sequência $(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ converge em X.

Como supomos que a sequência $(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ não converge e provamos que converge então é uma contradição. Portanto, (X, d) é um espaço métrico completo.

Agora suponhamos que (X, d) um espaço métrico completo e $(X, \mathbb{D}_d)$ um espaço uniforme. Mostremos que $(X, \mathbb{D}_d)$ é um espaço absolutamente $\mathbb{D}_d$-proximal. Observe-se que $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{D}_d$ é uma estratégia absolutamente $\mathbb{D}_d$-vencedora definida por:

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = D_{n+1}.$$

De fato, pela Proposição 3.11 obtemos que ω é uma estratégia. E desde que $(x_1, x_1, ..., x_n, ...)$ é uma sequência de Cauchy em X, e uma sequência proximal no jogo absolutamente proximal. Então a sequência $(x_1, x_1, ..., x_n, ...)$ converge em X, pois (X, d) é um espaço métrico completo.

Portanto, X é um espaço absolutamente $\mathbb{D}_d$-proximal. $\square$

Finalmente, provaremos que o produto enumerável de espaços proximal é um espaços proximal. Neste caso, precisaremos da uniformidade produto que podemos ver na Observação 2.8, para o caso de produto enumerável.

Teorema 3.16. *Se $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ é uma sequência de espaços proximal, então $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ é um espaço proximal.*

Demonstração. Suponha que $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ é uma sequência de espaços proximal, e $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, ..., \mathbb{D}_n, ...$ uma sequência de uniformidades. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ existem estratégias $\mathbb{D}_n$-vencedoras $\omega_n : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathbb{D}_n$. Considere-se para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $D \in \mathbb{D}_n$ a família $\mathbb{E}$ formada pelos elementos da forma:

$$\overline{\omega}(x_1, x_2, ..., x_n) = \{(x, y) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n : (x(n), y(n)) \in D = \omega_n(x_1, x_2, ..., x_n)\}$$

Da forma como esta definida cada elemento de $\mathbb{E}$, então é uma sub-base para a uniformidade produto em $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Para a construção da estratégia vencedora $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$, começamos o jogo proximal entre os jogadores A e B com as seguintes escolhas:

1) Jogador A: escolhe $\omega(\emptyset) = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$;
Jogador B: escolhe $x_1 = (x_1(1), x_1(2), ..., x_1(n), ...) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$;

2) Jogador A: escolhe $\omega(x_1) = \overline{\omega}_\alpha(x_1(\alpha))$, onde α toma valore de $F_1 = \{f_1(1)\}$ e $C_1 = \{f_1(1), f_1(2), ...\}$;
Jogador B: escolhe $x_2 = (x_2(1), x_2(2), ..., x_2(n), ...) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n[x_1]$;

3) Jogador A: escolhe $\omega(x_1, x_2) = \bigcap_{\alpha\in F_2} \overline{\omega}_\alpha(x_1(\alpha), x_2(\alpha))$, onde α toma valores de $F_2 = \{f_1(1), f_1(2), f_2(1), f_2(2)\}$ e $C_2 = \{f_2(1), f_2(2), ...\}$;
Jogador B: escolhe $x_3 = (x_3(1), x_3(2), ..., x_3(n), ...) \in \omega(x_1)[x_2]$;

$\vdots$

n) Jogador A: escolhe $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigcap_{\alpha\in F_n} \overline{\omega}_\alpha(x_1(\alpha), x_2(\alpha), ..., x_n(\alpha))$, onde α toma valores de $F_n = \{f_i(j) : i \leq n \text{ e } j \leq n\}$ e $C_n = \{f_n(1), f_n(2), ...\}$;
Jogador B: escolhe $x_{n+1} = (x_{n+1}(1), x_{n+1}(2), ..., x_{n+1}(n), ...) \in \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$;

$\vdots$

Tendo desenvolvido o jogo proximal, agora passamos a definir a estratégia

$$\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$$

dada por $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigcap\limits_{\alpha \in F_n} \overline{\omega}_\alpha(x_1(\alpha), x_2(\alpha), ..., x_n(\alpha))$, onde α toma valores de $F_n = \{f_i(j) : i \leq n \text{ e } j \leq n\}$ e $C_n = \{f_n(1), f_n(2), ...\}$.

Provemos que a estratégia ω é uma estratégia vencedora. Observe-se que para todo $\alpha \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$, desde que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$, existe k tal que $\alpha \in F_k$. Por outra parte, desde que ω_α é uma estratégia vencedora no jogo proximal em X_α então a sequência $(x_k(\alpha), x_{k+1}(\alpha), ...)$ converge algum $y(\alpha)$ ou $\bigcap\limits_{n > k} \omega_\alpha(x_k(\alpha), x_{k+1}(\alpha), ..., x_n(\alpha))[x_{n+1}(\alpha)] = \emptyset$. Logo, se esta interseção é vazia para algum $\alpha \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$, então $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \omega(x_1, x_2, ..., x_n)[x_{n+1}] = \emptyset$. Portanto, $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ é um espaço proximal com a uniformidade produto. $\square$

Capítulo 4

Jogo Topológico Gruenhage

Neste capítulo apresentaremos um jogo topológico antigo introduzido por G. Gruenhage para definir o espaço chamado de W-espaços que é uma generalização dos espaço primeiro enumeráveis [5]. Além disso, veremos algumas propriedades básicas que satisfaz este espaço e também a ligação entre os jogos Proximal e jogo de Gruenhage.

4.1 Jogo Gruenhage

Nesta seção apresentaremos W-espaços que foi introduzido por G. Gruenhage e provaremos que todo espaço proximal é um W-espaço. Para definir W-espaços a priori temos que definir o seguinte jogo topológico infinito.

Antes de enunciar a definição de um jogo Gruenhage num espaço topológico ou simplesmente jogo Gruenhage. O jogo Gruenhage será realizado entre os jogadores A e B. Graficamente podemos observar da maneira na qual estão escolhidas as jogadas dos jogadores.

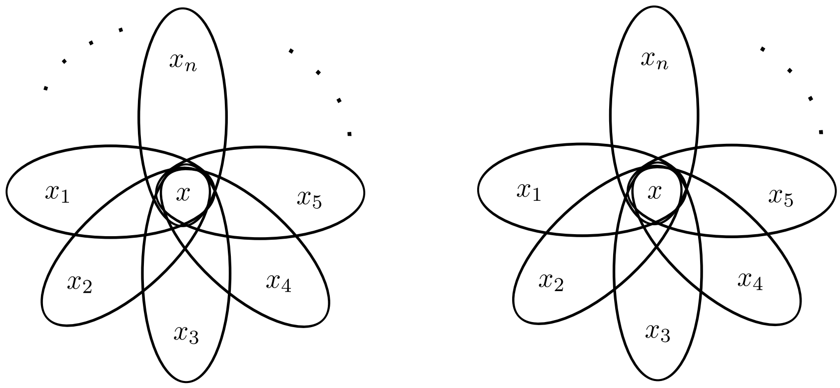

Figura 4.1: Jogo Gruenhage

Observe-se que as escolhas do jogador A são abertos da topologia e as escolhas do jogador B são pontos do conjunto onde esta definida a topologia tal que cada ponto escolhido por o jogador B está contido num aberto escolhido por o jogador A, assim passamos a definir o jogo Gruenhage como:

Definição 4.1. *Sejam X um espaço topológico, x um elemento de X. Defina-se jogo Gruenhage entre os jogadores A e B em X ou* ***jogo Gruenhage****, como as escolhas infinitas dos jogadores A e B da seguinte forma:*

1) Jogador A: escolhe X;
Jogador B: escolhe $x_1 \in X$;

2) Jogador A: escolhe U_1 vizinhança aberta de x;
Jogador B: escolhe $x_2 \in U_1$;

3) Jogador A: escolhe U_2 vizinhança aberta de x;
Jogador B: escolhe $x_3 \in U_2$;

$\vdots$

n) Jogador A: escolhe U_{n-1} vizinhança aberta de x;
Jogador B: escolhe $x_n \in U_{n-1}$;

$\vdots$

As jogadas dos jogadores A e B neste jogo Gruenhage é infinita, onde o conjunto de jogadas escolhidas pelos jogadores são chamadas de estratégias.

Uma vez definido formalmente o jogo Gruenhage entre os jogadores A e B num espaço topológico ou simplesmente jogo proximal, definiremos sob que condições o jogador A vence o jogo Gruenhage. Neste trabalho, não estamos interessados se o jogador B vence o jogo proximal. Para maiores referências sobre o jogo Gruenhage se observa em [5].

Definição 4.2. *Sejam X um espaço topológico e x um elemento de X. O jogador A vence o jogo Gruenhage em X , se a sequência $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ escolhida pelo jogador B converge a x em X.*

Na seguinte definição a mencionar, definiremos alguns elementos do jogo Gruenhage.

Definição 4.3. *Seja X um espaço topológico. Considere o jogo Gruenhage da Definição 4.1*

1) *A sequência infinita $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ formada pelas escolhas do jogador B é chamada de* ***δ-sequência****.*

2) *A sequência finita $(U_1, x_1, U_2, x_2, ..., Un, x_n)$ formada pelas escolhas dos jogadores A e B é um* ***jogo parcial Gruenhage*** *do jogo Gruenhage.*

3) *A sequência finita $(x_1, x_2, ..., x_n)$ formada pelas escolhas do jogador B é chamada de* ***sequência admissível****.*

Notação 4.4. *O conjunto de todas as sequências admissíveis no Gruenhage é chamada* ***conjunto admissível*** *e denote-se por* $\mathcal{A}$.

Como em todo jogo existem as estratégias; na definição de jogo Gruenhage vimos que o conjunto de escolhas de cada jogador é uma estratégia. Agora formalmente definiremos estratégia para o jogador A no jogo Gruenhage, por meio das escolhas do jogador A.

Definição 4.5. *Sejam X um espaço topológico e x um elemento de X. Defina-se a* ***estratégia*** *para o jogador A no jogo Gruenhage como uma função:*

$$\delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}(x)$$

tal que

1) $\delta(\emptyset) = X$;

2) $x_{n+1} \in \delta(x_1, x_2, ..., x_n)$,

onde $\mathcal{A}$ é o conjunto admissível, e $\mathbb{N}(x)$ um sistema de vizinhanças de x em X.

Basicamente podemos observar que as condições do jogo Gruenhage é a estratégia do jogador A. Para finalizar passamos a definir uma estratégia vencedora para o jogador A no jogo Gruenhage. Antes de passar na seguinte definição, a posteriori veremos as condições de vencer o jogo Gruenhage.

Definição 4.6. *Sejam X um espaço topológico, x um elemento de X e $\delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}(x)$ uma estratégia no jogo Gruenhage. δ é uma* ***estratégia vencedora****, se a δ-sequência $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ converge a x, onde $\mathcal{A}$ é o conjunto admissível e $\mathbb{N}(x)$ um sistema de vizinhanças de x em X.*

4.2 W- Espaços

Nesta seção, tendo definido o jogo Gruenhage, passaremos a definir o espaço topológico chamado de espaço "W-espaço "e também veremos alguns exemplos básicos, como; a relação que existe entre os jogos proximal e Gruenhage. Como este jogo Gruenhage também definiu alguns outros espaços topológicos [5], mas nosso interesse é só definir W-espaços para comparar com o espaço proximal.

Definição 4.7. *Um espaço topológico X é um* ***W-espaço****, se existe uma estratégia vencedora $\delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}(x)$ para o jogador A jogo Gruenhage.*

No seguinte teorema veremos a relação que existe entre o jogo proximal e o jogo Gruenhage; que diz que todo espaço proximal é um W-espaço. Cabe aclarar que a topologia do espaço onde se realiza o jogo Gruenhage é uma topologia que provem de uma uniformidade.

Teorema 4.8. *Se X é um espaço proximal, então X é um W-espaço.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico proximal, $(X, \mathbb{D})$ um espaço $\mathbb{D}$-proximal, $\mathbb{D}$ uma base uniformidade aberta simétrica, então existe uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora,

$$\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$$

tal que:

1) $\omega(\emptyset) = X \times X$
2) $y_{n+1} \in \omega(x, y_1, x, y_2, x, ..., x, y_n, x)[x]$
3) $\omega(x, y_1, x, y_2, x, ..., x, y_n, x) \subseteq \omega(x, y_1, x, y_2, x, ..., x, y_n)$
4) A sequência proximal $(x, y_1, x, y_2, x, ..., x, y_n, x, ...)$ converge em X ou $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \omega((x, y_1, x, y_2, x, ..., x, y_n)[x] = \emptyset$.

De maneira intuitiva vemos o seguinte desenho, ajuda a ver de que maneira podemos definir uma estratégia vencedora no jogo proximal Gruenhage.

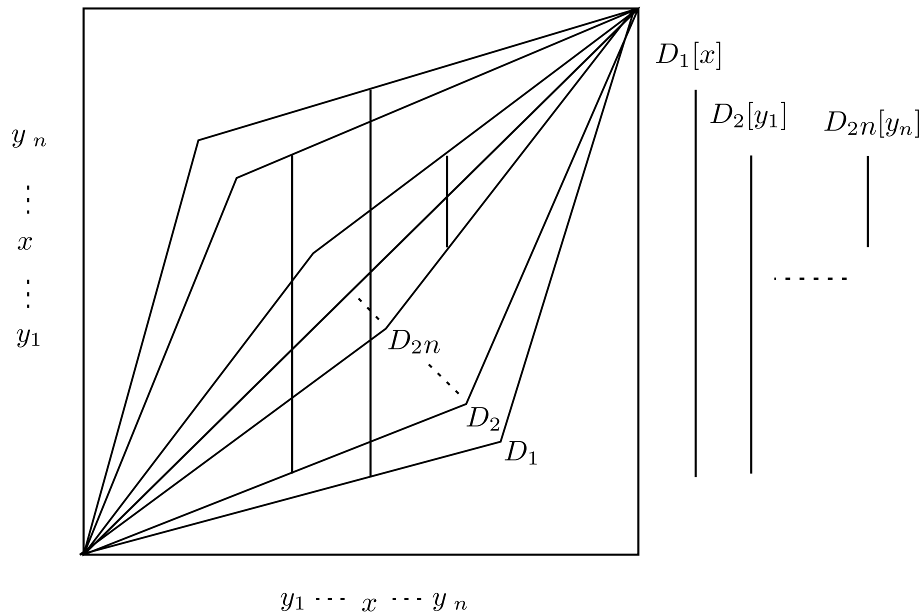

Figura 4.2: Proximal Gruenhage

Agora fixemos x um elemento de X, e considere $\mathbb{N}(x)$ um sistema de vizinhanças abertas de x. Defina-se a estratégia vencedora $\delta : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathbb{N}(x)$ no jogo Gruenhage dada por:

$$\delta(y_1, ..., y_n) = \omega(x, y_1, x, ..., x, y_n, x)[x]$$

tal que:

1) Observe-se que $\delta(\emptyset) = \omega(x)[x]$ é uma vizinhança de x.

2) Desde que $y_{n+1} \in \omega(x, y_1, x, ..., x, y_n, x)[x]$, então $y_{n+1} \in \sigma(y_1, ..., y_n)$.

3) Seja $(x, y_1, x, y_2, x, ..., x, y_n, x, ...)$ a sequência proximal no jogo proximal, então como ω por hipótese é uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora implica que a sequência $(x, y_1, x, y_2, x, ..., x, y_n, x, ...)$ é convergente então converge a x. Por outra parte a subsequência $(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ é uma δ-sequência no jogo Gruenhage que converge a x.

Portanto, X é um W-espaço. □

4.3 Propriedades de W-Espaços

Nesta seção, provaremos algumas propriedades básicas de W-espaços, como W-sub-espaços, um teorema importante que é a generalização de espaços primeiro enumeráveis [5] e finalmente produto enumerável de W-espaços com a topologia de Tychonoff (ou topologia produto).

Proposição 4.9. *Se X é um W-espaço e F é um sub-espaço topológico de X, então F é um W-espaço.*

Demonstração. Sejam F um subconjunto de X, x um elemento de X tal que $x \in F$ e X um W-espaço, então existe um estratégia vencedora $\delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}(x)$. Defina-se a estratégia vencedora $\delta^{'} : \mathcal{A}^{'} \longrightarrow \mathbb{N}(x)$ dada por:

$$\delta^{'}(x_1, x_2, ..., x_n) = \delta(x_1, x_2, ..., x_n) \cap F$$

tal que:

1) $\delta(\emptyset) = F$

2) Seja $(x_1, x_2, ..., x_n)$ uma sequência admissível tal que $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ é uma sequência em F, então como $x_{n+1} \in \delta(x_1, x_2, ..., x_n)$ pois δ é uma estratégia vencedora, assim implica que $x_{n+1} \in \delta(x_1, x_2, ..., x_n) \cap F = \delta^{'}(x_1, x_2, ..., x_n)$

3) Dada $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ a $\delta^{'}$-sequência no jogo Gruenhage e F sub-espaço de X. Como δ é uma estratégia vencedora, então a $\delta^{'}$-sequência $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ converge a x.

Portanto, o sub-espaço F é um W-espaço. □

Os W-espaços basicamente é uma generalização dos espaços primeiro enumeráveis. O seguinte teorema nos diz que todo espaço primeiro enumerável é um W-espaço.

Teorema 4.10. *Se X é um espaço primeiro enumerável, então X é um W-espaço.*

Demonstração. Suponha que X é um espaço primeiro enumerável e x um elemento de X, então existe uma base de vizinhança local $\mathbb{U}$ de x, tal que:

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq ... \supseteq U_n \supseteq ...$$

Logo defina-se uma estratégia vencedora $\delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}(x)$ tal que:

1) $\delta(\emptyset) = X$;

2) Pela definição de jogo Gruenhage defina-se que $x_{n+1} \in U_n = \delta(x_1, x_2, ..., x_n)$,

3) Seja $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ a δ-sequência no jogo Gruenhage, então como $U_1, U_2, ..., U_n, ...$ é uma sequência encaixada de abertos, implica que a sequência $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ converge a x.

Portanto, X é um W-espaço. □

Agora provaremos que o produto enumerável de W-espaços com a topologia Tychonoff,(topologia produto) é um W-espaço.

Teorema 4.11. *Se $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ é uma sequência de W-espaços, então $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ é um W-espaço.*

Demonstração. Suponha que $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ é uma sequência de W- espaços, então para todo X_n existe uma estratégia vencedora $\delta_n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}(x_n)$ no jogo Gruenhage.

Então, como para todo $n \in \mathbb{N}$ existem estratégias vencedoras δ_n e todo $U \in \mathbb{N}(x_n)$ a família $\mathbb{N}$ formada pelos elementos da forma:

$$\overline{\delta}_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \{y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n : y(n) \in \delta_n(x_1, x_2, ..., x_n)\}.$$

É uma sub-base para a topologia produto. Agora para a construção da estratégia vencedora $\delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}(x)$, começamos o jogo Gruenhage entre os jogadores A e B com as seguintes escolhas:

1) Jogador A: escolhe $\delta(\emptyset) = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$
Jogador B: escolhe $x_1 = (x_1(1), x_1(2), ..., x_1(n), ...) \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$

2) Jogador A: escolhe $\delta(x_1) = \overline{\delta}_\alpha(x_1(\alpha))$, onde α toma valore de $F_1 = \{f_1(1)\}$ e $C_1 = \{f_1(1), f_1(2), ...\}$
Jogador B: escolhe $x_2 \in \delta(x_1) = \overline{\delta}_\alpha(x_1(\alpha))$

3) Jogador A: escolhe $\delta(x_1, x_2) = \bigcap\limits_{\alpha\in F_2} \overline{\delta}_\alpha(x_1(\alpha), x_2(\alpha))$, onde α toma valores de $F_2 = \{f_1(1), f_1(2), f_2(1), f_2(2)\}$ e $C_2 = \{f_2(1), f_2(2), ...\}$
Jogador B: escolhe $x_3 = (x_3(1), x_3(2), ..., x_3(n), ...) \in \omega(x_1, x_2)$

$\vdots$

n) Jogador A: escolhe $\delta(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigcap\limits_{\alpha \in F_n} \overline{\delta}_\alpha(x_1(\alpha), x_2(\alpha), ..., x_n(\alpha))$, onde α toma valores de $F_n = \{f_i(j) : i \leq n \text{ e } j \leq n\}$ e $C_n = \{f_n(1), f_n(2), ...\}$
Jogador B: escolhe $x_{n+1} = (x_{n+1}(1), x_{n+1}(2), ..., x_{n+1}(n), ...) \in \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$

$\vdots$

Uma vez desenvolvido o jogo Gruenhage no ponto $x = (x(1), x(2), ..., x(n), ..) \in \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$, então passamos a definir a estratégia:

$$\delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}(x)$$

dada por $\delta(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigcap\limits_{\alpha \in F_n} \overline{\delta}_\alpha(x_1(\alpha), x_2(\alpha), ..., x_n(\alpha))$ onde α toma valores de $F_n = \{f_i(j) : i \leq n \text{ e } j \leq n\}$ e $C_n = \{f_n(1), f_n(2), ...\}$

Agora provemos que a estratégia δ é uma estratégia vencedor. Observe-se que para todo $\alpha \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$, desde que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$, existe k tal que $\alpha \in F_k$. Por outra parte desde que δ_α é uma estratégia vencedora no jogo Gruenhage em X_α, então pela Proposição 1.30 a sequência $(x_k(\alpha), x_{k+1}(\alpha), ...)$ converge a $x(\alpha)$ para todo α. Assim a sequência $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ converge a x.

Portanto, $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ é um W-espaço com a topologia produto. $\square$

Capítulo 5

Consequências Topológicas

Nesta capítulo, apresentaremos os resultados da teoria desenvolvida a priori; onde veremos consequências topológicas dos espaços definidos nos capítulos anteriores. Assim, como as implicações a coleções meta-compactas, normal e Hausdorff. Também veremos alguns contra-exemplos de espaços quase proximal.

5.1 Jogo Proximal Fraco

Nesta seção, apresentaremos um caso particular de um jogo proximal chamado jogo k-proximal, para definir este jogo em menção num espaço uniforme, tomemos em conta que o jogo k-proximal será realizado entre os jogadores A e B.

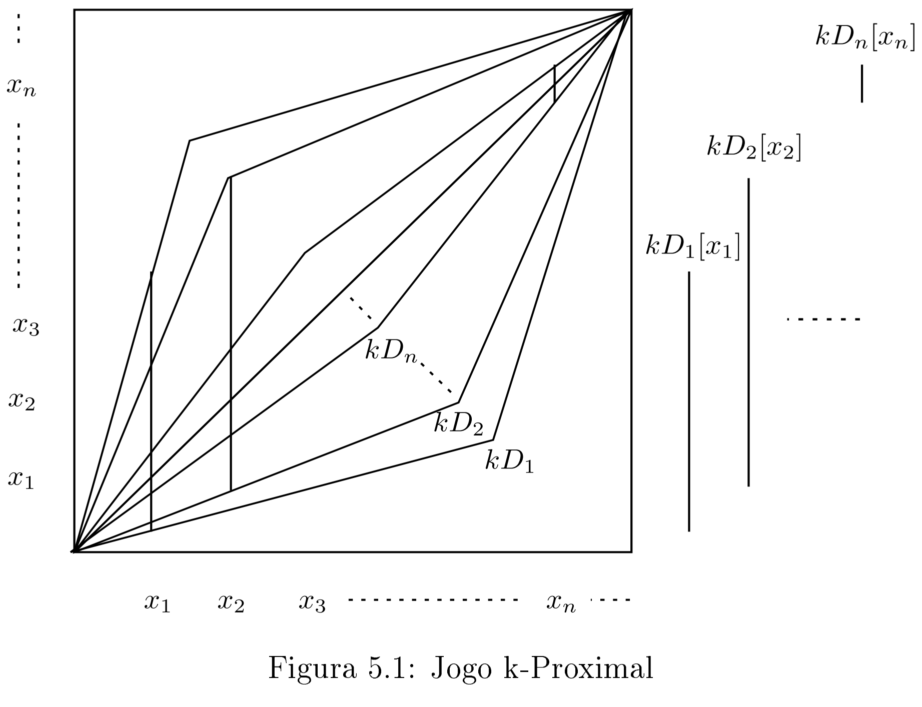

Figura 5.1: Jogo k-Proximal

Onde as escolhas do jogador A são elementos de uma uniformidade e as escolhas do jogador B são pontos do conjunto onde esta definida a uniformidade.

Definição 5.1. *Seja* $(X, \mathbb{D})$ *um espaço uniforme e* k *um numero inteiro positivo. Defina-se jogo* k*-proximal em* $(X, \mathbb{D})$ *entre os jogadores* A *e* B *ou* ***jogo*** k***-proximal*** *como as escolhas infinitas dos jogadores* A *e* B*:*

1) Jogador A: escolhe X*;*
Jogador B: escolhe $x_1 \in X$*;*

2) Jogador A: escolhe $D_1 \in \mathbb{D}$*;*
Jogador B: escolhe $x_2 \in X$*;*

3) Jogador A: escolhe $D_2 \in \mathbb{D}$ *com* $D_2 \subseteq D_1$*;*
Jogador B: escolhe $x_3 \in kD_1[x_2]$*;*

$\vdots$

n) Jogador A: escolhe $D_{n-1} \in \mathbb{D}$ *com* $D_{n-1} \subseteq ... \subseteq D_2 \subseteq D_1$*;*
Jogador B: escolhe $x_n \in kD_{n-2}[x_{n-1}]$*;*

$\vdots$

As jogadas dos jogadores A *e* B *neste jogo* k*-proximal é infinita, onde o conjunto de jogadas escolhidas pelos jogadores são chamadas de estratégias.*

Uma vez definido o jogo k-proximal entre os jogadores A e B num espaço uniforme ou simplesmente jogo k-proximal, definiremos sobre quais condições o jogador A vence o jogo k-proximal.

Definição 5.2. *Seja* X *um espaço uniforme. O jogador* A *vence o jogo* $k\mathbb{D}$*-proximal, se a sequência* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *escolhida pelo jogador* B *no jogo* $k\mathbb{D}$*-proximal converge em* X*.*

Neste jogo k-proximal existem elementos como na definição do jogo proximal 3.1 , porem para simplificar não mencionaremos novamente. Então passaremos a definir a estratégia no jogo k-proximal.

Definição 5.3. *Sejam* X *um espaço uniforme e* $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$ *uma* ***estratégia*** *para o jogador* A *no jogo* k*-proximal. O jogador* A *quase-vence o jogo* k*-proximal se a sequência proximal* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

1) A sequência k*-proximal* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *converge em* X*, ou*

2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] = \emptyset$*,*

onde $\mathcal{A}$ *é o conjunto admissível e* $\mathbb{D}$ *é a uniformidade em* X*.*

Definida uma estratégia k-vencedora, podemos definir um novo espaço que chamaremos de espaço k-proximal.

Definição 5.4. *Sejam X um espaço uniforme e $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$ uma estratégia para o jogador A no jogo k-proximal.*

*1) X é um espaço $k\mathbb{D}$-**proximal**, se existe uma estratégia $k\mathbb{D}$-vencedora ω para o jogador A no jogo k-proximal.*

*2) Um espaço topológico X é um **espaço k-proximal**, se existe uma uniformidade em X que induz a topologia em X tal que X é um espaço $k\mathbb{D}$-proximal.*

Como primeira consequência do jogo proximal e k-proximal é que todo espaço k-proximal é proximal, desde que $kD \supseteq D$ para todo k inteiro positivo e toda vizinhança diagonal D.

Observação 5.5. Se X é um espaço k-proximal, então X é uma espaço proximal.

De fato: Suponha X um espaço k-proximal, então existe uma estratégia $k\mathbb{D}$-vencedora $k\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$. Agora defina-se uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$ com,

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq k\omega(x_1, x_2, ..., x_n)$$

tal que:

1) $\omega(\emptyset) = k\omega(\emptyset) = X \times X$

2) Se $(x_1, x_2, ..., x_n)$ uma sequência admissível, $x_{n+1} \in k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$. Pela definição de jogo proximal existe um elemento $\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$ tal que $x_{n+1} \in \omega(x_1, x_2, ..., x_n)[x_n] \subseteq k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$.

3) Para todo $k\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq k\omega(x_1, x_2..., x_{n-1})$, existem $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq k\omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \subseteq k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$. Pela definição de jogo proximal tem-se que, $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$

4) Seja $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ uma sequência proximal desde que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] \subseteq k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] = \emptyset$, pois $k\omega$ é uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora no jogo proximal, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] = \emptyset$

Portanto, ω é uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora, assim X também é um espaço $\mathbb{D}$-proximal.

Na seguinte proposição provaremos que a reciproca é verdadeira. No sentido que existe um k natural tal que acontece o seguinte lema.

Lema 5.6. *Se X é um espaço $\mathbb{D}$-proximal e k um numero inteiro positivo, então existe uma estratégia $k\mathbb{D}$-vencedora $k\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$ para o jogador A no jogo k-proximal.*

Demonstração. Suponha X um espaço $\mathbb{D}$-proximal, então existe uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$. Defina-se uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora $k\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}$ com,

$$k\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_n),$$

tal que:

1) $k\omega(\emptyset) = \omega(\emptyset) = X \times X$

2) Se $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma sequência admissível, $x_{n+1} \in \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$. Pela definição de jogo k-proximal existe um elemento $k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$ tal que $x_{n+1} \in k\omega(x_1, x_2, ..., x_n)[x_n] \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$.

3) Para todo $\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, existem $k\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \subseteq k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, pela definição de jogo proximal tem-se que, $k\omega(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$

4) Seja $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ um sequência proximal desde que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] \subseteq \omega(x_1, x_2..., x_{n-1})[x_n]$ e como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] = \emptyset$, pois ω é uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora no jogo proximal, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} k\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] = \emptyset$

Portanto, $k\omega$ é uma estratégia $k\mathbb{D}$-vencedora, assim X também é um espaço $k\mathbb{D}$-proximal. □

Na seguinte observação, daremos um exemplo de um espaço quase proximal o qual dará informação sobre o produto de espaços quase-proximal.

Observação 5.7. Seja S a linha de Sorgenfrey munido da base uniformidade $\mathbb{D}$ pelos elementos da forma:

$$D = [a, b) \times [a, b)$$

Então tendo S munido de uma uniformidade começamos o jogo proximal entre os jogadores A e B com as seguinte escolhas:

1) Jogador A: escolhe $D_1 = [a_1, b_1) \times [a_1, b_1)$.
Jogador B: escolhe $x_1 \in S$.

2) Jogador A: escolhe $D_2 = [a_2, b_2) \times [a_2, b_2)$.
Jogador B: escolhe $x_2 \in D_1[x_1] = [a_1, b_1)$

3) Jogador A: escolhe $D_3 = [a_3, b_3) \times [a_3, b_3)$.
Jogador B: escolhe $x_3 \in D_2[x_2] = [a_2, b_2)$

⋮

n) Jogador A: escolhe $D_n = [a_n, b_n) \times [a_n, b_n)$.
Jogador B: escolhe $x_n \in D_{n-1}[x_{n-1}] = [a_{n-1}, b_{n-1})$

$\vdots$

Das escolhas dos jogadores A e B tem-se que se n tende a ∞ então a $|a_n - b_n|$ tende a "0". Então, temos as seguintes possibilidades:

1) Se as escolhas do jogador B são eventualmente não decrescente então o jogador A vence o jogo proximal pela condição 2.

2) Se as escolhas do jogador B não é eventualmente não decrescente então as escolhas do jogador B possui uma subsequência convergente.

Portanto, podemos encontrar um estratégia vencedora em S com a uniformidade $\mathbb{D}$.

5.2 Separação e Cobertura

Nesta seção, como consequências dos espaços definidos pelo jogo proximal, ganhamos alguns exemplos para espaços já conhecidos como, espaços coleção normal e espaços meta-compactos enumeráveis.

O primeiro resultado nos diz que todo espaço topológico proximal 3.9 é um espaço topológico coleção normal.

Teorema 5.8. *Se X é um espaço topológico proximal, então X é uma coleção normal.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico proximal. Então X é um $\mathbb{D}$-proximal, e assuma que $\mathbb{D}$ é uma base uniformidade aberta e simétrica. Observe pelo Lema 5.6 existe $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{D}$ estratégia quase $4\mathbb{D}$-vencedora no jogo 4-proximal.

Suponha $\mathbb{F}$ uma família fechada discreta de X. Então aplicando recursivamente a estratégia $4\mathbb{D}$-vencedora existe uma família $L_0, L_1, L_2, ..., L_n, ...$ de famílias abertas localmente finitos tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

1) L_{n+1} refina L_n;

2) $L_n = R_n \cup Q_n$, e $R_n = L_n - Q_n$, onde

$$Q_n = \{S \in L_n : \exists F_\alpha \in \mathbb{F} \text{ com } \overline{S} \cap F_\alpha \neq \emptyset\}.$$

De fato, aplicando o seguinte procedimento por indução vemos que a família $L_0, L_1, L_2, ..., L_n, ...$ é uma família de refinamentos aberto localmente finito.

L0) Seja $L_0 = \{X\}$ e $R_0 = L_0$.

L1) Seja (x_1) uma sequência admissível tal que $x_1 \in F_1$. Então, pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito L_1 que cobre X. Seja $R_1 = L_1 - Q_1$, onde:

$$Q_1 = \{S \in L_1 : \exists F_\alpha \in \mathbb{F} \text{ com, } \overline{S} \cap F_\alpha \neq \emptyset\}.$$

L2) Sejam (x_1, x_2) uma sequência admissível tal que, $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ e $A_1 \in R_1$. Então, pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1, x_2)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito $T_2(A_1)$ que cobre X. Logo considere $L_2(A_1) = \{S \cap A_1 : S \in T_2(A_1)\}$ e $L_2 = \bigcup\limits_{A_1 \in R_1} L_2(A_1)$ e $R_2 = L_2 - Q_2$, onde:

$$Q_2 = \{S \in L_2 : \exists F_\alpha \in \mathbb{F} \text{ com, } \overline{S} \cap F_\alpha \neq \emptyset\}.$$

L3) Sejam (x_1, x_2, x_3) uma sequência admissível tal que $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, x_3 \in F_3$ e $A_2 \in R_2$. Então, pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1, x_2, x_3)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito $T_3(A_2)$ que cobre X. Logo considere $L_3(A_2) = \{S \cap A_2 : S \in T_3(A_2)\}$ e $L_3 = \bigcup\limits_{A_2 \in R_2} L_3(A_2)$ e $R_3 = L_3 - Q_3$, onde:

$$Q_3 = \{S \in L_3 : \exists F_\alpha \in \mathbb{F} \text{ com } \overline{S} \cap F_\alpha \neq \emptyset\}.$$

$\vdots$

Ln) Sejam $(x_1, x_2, ..., x_n)$ uma sequência admissível tal que, $x_1 \in F_1, ..., x_n \in F_n$ e $A_{n-1} \in R_{n-1}$. Então pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1, ..., x_n)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito $T_n(A_{n-1})$ que cobre X. Logo considere $L_n(A_{n-1}) = \{S \cap A_{n-1} : S \in T_n(A_{n-1})\}$ e $L_n = \bigcup\limits_{A_{n-1} \in R_{n-1}} L_n(A_{n-1})$ e $R_n = L_n - Q_n$, onde:

$$Q_n = \{S \in L_n : \exists F_\alpha \in \mathbb{F} \\ \text{com } \overline{S} \cap F_\alpha \neq \emptyset\}.$$

Assim, note que L_n é uma família aberta localmente finita, desde que $L_n(A_{n-1})$ é um refinamento aberto localmente finito de A_{n-1}, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde A_{n-1} é um elemento da família aberta localmente finito L_{n-1}.

Agora precisamos encontrar uma família aberta disjunta dois a dois. Então, seja $\mathcal{Q} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} Q_n$, para todo $x \in \bigcup\limits_{F \in \mathbb{F}} F$ existe $A \in \mathcal{Q}$ com $x \in A$.

De fato, suponha que não acontece isso, então existe um $x \in \bigcup\limits_{F \in \mathbb{F}} F$ tal que $x \in A$ e A não pertence $\mathcal{Q}$.

1) Desde que L_1 é cobertura de X, existe $A_1 \in L_1$ com $x \in A_1$. Então, $A_1 \in R_1$, $A_1 \notin Q_1$ e $A_1 \subseteq \omega(x_1)[y_1]$, onde $x_1 \in F_1$ e $y_1 \in X$.

2) Desde que $L_2(A_1)$ é cobertura de A_1, existe $A_2 \in L_2(A_1)$ com $x \in A_2$. Então $A_2 \in R_2$, $A_2 \notin Q_2$ e também existem $y_2 \in X$ e $x_2 \in \bigcup\limits_{F\in\mathbb{F}} F$, onde $x \in F_2$ com $A_2 \subseteq \omega(x_1, x_2)[y_2] \subseteq 4\omega(x_1)[x_2]$. Continuando por indução tem-se:

$\vdots$

n) Desde que $L_n(A_{n-1})$ é cobertura de A_{n-1}, existe $A_n \in L_n(A_{n-1})$ com $x \in A_n$. Então $A_n \in R_n$, $A_n \notin Q_n$ e também existe $x_n \in \bigcup\limits_{F\in\mathbb{F}} F$ com $A_n \subseteq 4\omega(x_1, ..., x_{n-1})[x_n]$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n \subseteq 4\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$, então $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} 4\omega(x_1, ..., x_{n-1})[x_n] \neq \emptyset$. Desde que ω é uma estratégia $\mathbb{D}$-vencedora então a sequência proximal $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ converge. No entanto, isso é impossível, uma vez que não há dois termos consecutivos na sequência proximal $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ são elementos de um mesmo conjunto de $\mathbb{F}$.

Para finalizar a demonstração temos que encontrar uma família de abertos disjunto dois a dois. De fato:

Sejam $\mathcal{Q} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ e para cada $A \in Q_n$, define-se:

$$A^* = A - \overline{\bigcup_{Q\in\ Q_2} Q \cup \bigcup_{Q\in\ Q_3} Q \cup \cdots \cup \bigcup_{Q\in\ Q_{n-1}} Q}.$$

Então, $\mathbb{W} = \{W = A^* : A \in \mathcal{Q}\}$ é uma família localmente finita cobrindo $\mathbb{F}$. Para cada $\alpha \in I$ considere:

$$H_\alpha = \bigcup_{A\in\mathcal{Q}^*} A, \quad \text{onde} \quad A \in \mathcal{Q}^* \Longleftrightarrow \exists F_\alpha \in \mathbb{F} \quad \text{com} \quad A \cap F_\alpha \neq \emptyset;$$

$$G_\alpha = H_\alpha - \bigcup_{W\in\mathbb{W}} \overline{W} \quad W \in \mathbb{W}^* \Longleftrightarrow \overline{W} \cap F_\alpha \neq \emptyset.$$

Logo, $F_\alpha \subseteq G_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ e os G_α são disjuntos dois a dois. De fato, suponha que $\alpha \neq \beta$ e:

$$\begin{aligned} y \in G_\alpha \cap G_\beta &\Longrightarrow y \in \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q; \\ &\Longrightarrow \exists \ A \in Q \quad \text{com} \quad y \in A; \\ &\Longrightarrow \exists \ W \in \mathbb{W} \quad \text{com} \quad y \in W \subseteq A; \\ &\Longrightarrow \overline{A} \cap G_\alpha = \emptyset \quad \text{ou} \quad \overline{A} \cap G_\beta = \emptyset; \\ &\Longrightarrow \overline{W} \cap G_\alpha = \emptyset \quad \text{ou} \quad \overline{W} \cap G_\beta = \emptyset; \\ &\Longrightarrow y \notin G_\alpha \quad \text{ou} \quad y \notin G_\beta. \end{aligned}$$

Portanto, X é uma coleção normal. $\square$

Continuando com as caracterizações por meio de um espaço proximal em seguida, temos a caracterização por meio de espaço quase proximal, que diz que todo espaço quase proximal é meta-compacto enumerável 1.34. Mais precisamente enunciamos a continuação.

Teorema 5.9. *Se X é um espaço topológico quase proximal, então X é meta-compacto enumerável.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico quase proximal. Então X é um espaço quase $\mathbb{D}$-proximal, e assuma que $\mathbb{D}$ é uma base uniformidade aberta e simétrica. Oberserve pelo Lema 5.6 existe $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{D}$ estratégia quase $4\mathbb{D}$-vencedora no jogo 4-proximal.

Suponha $\mathbb{K}$ uma família de conjuntos fechados de X tal que:

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \subseteq K_n \subseteq \cdots \quad \text{e} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$$

Então, aplicando recursivamente a estratégia quase $4\mathbb{D}$-vencedora existe uma família $L_0, L_1, L_2, ..., L_n, ...$ de famílias abertas localmente finitos tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

1) L_{n+1} refina L_n.
2) $K_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, e $R_n = L_n - Q_n$, onde

$$Q_n = \{S \in L_n : \overline{S} \cap K_{n+1} = \emptyset\}.$$

De fato, aplicando o seguinte procedimento por indução vemos que a família $L_0, L_1, L_2, ..., L_n, ...$ é uma família de refinamentos aberto localmente finito:

L0) Seja $L_0 = \{X\}$ e $R_0 = L_0$.

L1) Seja (x_1) uma sequência admissível tal que $x_1 \in K_1$. Então pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito L_1 que cobre X. Seja $R_1 = L_1 - Q_1$, onde:

$$Q_1 = \{S \in L_1 : \overline{S} \cap K_2 = \emptyset\}.$$

L2) Sejam (x_1, x_2) uma sequência admissível tal que $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ e $A_1 \in R_1$. Então, pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito $T_2(A_1)$ que cobre X. Logo considere $L_2(A_1) = \{S \cap A_1 : S \in T_2(A_1)\}$, $L_2 = \bigcup_{A_1\in R_1} L_2(A_1)$ e $R_2 = L_2 - Q_2$, onde:

$$Q_2 = \{S \in L_2 : \overline{S} \cap K_3 = \emptyset\}$$

L3) Sejam (x_1, x_2, x_3) uma sequência admissível tal que $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2, x_3 \in K_3$ e $A_2 \in R_2$. Então, pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1, x_2, x_3)[x] : x \in X\}$

existe um refinamento aberto localmente finito $T_3(A_2)$ que cobre X. Logo considere $L_3(A_2) = \{S \cap A_2 : S \in T_3(A_2)\}$, $L_3 = \bigcup_{A_2 \in R_2} L_3(A_2)$ e $R_3 = L_3 - Q_3$, onde:

$$Q_3 = \{S \in L_3 : \overline{S} \cap K_4 = \emptyset\}$$

$\vdots$

Ln) Sejam $(x_1, x_2, ..., x_n)$ uma sequência admissível tal que $x_1 \in K_1, ..., x_n \in K_n$ e $A_{n-1} \in R_{n-1}$. Então, pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1, x_2, ..., x_n)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito $T_n(A_{n-1})$ que cobre X. Logo, considere $L_n(A_{n-1}) = \{S \cap A_{n-1} : S \in T_n(A_{n-1})\}$, $L_n = \bigcup_{A_{n-1} \in R_{n-1}} L_n(A_{n-1})$ e $R_n = L_n - Q_n$, onde

$$Q_n = \{S \in L_n : \overline{S} \cap K_{n+1} = \emptyset\}$$

Assim, note que $L_n(A_{n-1})$ é um refinamento aberto localmente finito de A_{n-1} para todo $n \in \mathbb{N}$ cuja união é A_{n-1}, onde A_{n-1} são elementos da família aberta localmente finita L_{n-1}. Então, L_n é localmente finito. Logo, L_n é um refinamento aberto localmente finito de L_{n-1} tal que $K_n \subseteq \bigcup_{L \in L_n} L$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora em seguida mostremos que para cada $x \in X$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $A \in Q_n$ e $x \in A$. De fato, suponha que isso não acontece:

1) Desde que L_1 cobre X, existe $A_1 \in L_1$ com $x \in A$, então $A_1 \notin Q_1$ e $A_1 \in R_1$, assim existem $x_1 \in K_1$ e $y_1 \in X$ tal que $A_1 \subseteq \omega(x_1)[y_1]$.

2) Desde que $L_1(A_2)$ cobre A_1, existe $A_2 \in L_2$ com $x \in A$, então $A_2 \notin Q_2$ e $A_2 \in R_2$, assim existem $x_2 \in K_2$ e $y_2 \in X$ tal que $A_n \subseteq \omega(x_1, x_2)[y_2] \subseteq 4\omega(x_1)[x_2]$.

$\vdots$

n) Desde que $L_n(A_{n-1})$ cobre A_{n-1}, existe $A_n \in L_n$ com $x \in A$, então $A_n \notin Q_n$ e $A_n \in R_n$, assim existem $x_n \in K_n$ e $y_n \in X$ tal que $A_n \subseteq \omega(x_1, x_2, ..., x_n)[y_n] \subseteq 4\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n \subseteq 4\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n]$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} 4\omega(x_1, x_2, ..., x_{n-1})[x_n] \neq \emptyset$ e como ω é uma estratégia quase $\mathbb{D}$-vencedora então a sequência proximal $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ tem um ponto de acumulação. Por outra parte, $x_n, x_{n+1}, ... \in K_n$, qualquer ponto de acumulação de $x_n, x_{n+1}, ...$ está também em K_n. Assim, todos os pontos de acumulação da sequência proximal $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ pertencem a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, o que contradiz que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$.

Para finalizar a demonstração temos que encontrar uma família de abertos encaixados. De fato:

$$U_1 = \bigcup_{L \in L_1} L$$

e para todo $n > 1$, considere:

$$U_n = \bigcup_{L \in L_1} L - \overline{\bigcup_{Q \in \ Q_2} Q \cup \bigcup_{Q \in \ Q_3} Q \cup \cdots \cup \bigcup_{Q \in \ Q_{n-1}} Q}.$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $K_n \subseteq U_n$, $U_{n+1} \subseteq U_n$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \emptyset$. Portanto, X é meta-compacto enumerável. □

5.3 Consequência Topológica

Nesta seção, apresentaremos o seguinte teorema que diz, que todo espaço quase-proximal é uma coleção Hausdorff 1.36.

Teorema 5.10. *Se X é um espaço topológico quase proximal, então X é uma coleção Hausdorff.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico quase proximal. Então X é um espaço quase $\mathbb{D}$-proximal, e assuma que $\mathbb{D}$ é uma base uniformidade aberta e simétrica. Observe pelo Lema 5.6 que existe $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{D}$ estratégia quase $4\mathbb{D}$-vencedora no jogo 4-proximal.

Suponha $\mathbb{F}$ um conjunto fechado discreto em X. Então, aplicando recursivamente a estratégia $4\mathbb{D}$-vencedora existe uma família $L_0, L_1, L_2, ..., L_n, ...$ de famílias abertas localmente finitos tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

1) L_{n+1} refina L_n;

2) $L_n = R_n \cup Q_n$, e $R_n = L_n - Q_n$, onde

$$Q_n = \{S \in L_n : \exists \ \ x_\alpha \in \mathbb{F} \ \ \text{com}, \ \ \overline{S} \cap \{x_\alpha\} \neq \emptyset\}.$$

De fato, aplicando o seguinte procedimento por indução vemos que a família $L_0, L_1, L_2, ..., L_n, ...$ é uma família de refinamentos aberto localmente finito.

L0) Seja $L_0 = \{X\}$ e $R_0 = L_0$.

L1) Seja (x_1) uma sequência admissível tal que $x_1 \in F_1$. Então, pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito L_1 que cobre X. Seja $R_1 = L_1 - Q_1$, onde:

$$Q_1 = \{S \in L_1 : \exists \ \ x_\alpha \in \mathbb{F} \ \ \text{com}, \ \ \overline{S} \cap \{x_\alpha\} \neq \emptyset\}.$$

L2) Sejam (x_1, x_2) uma sequência admissível tal que $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ e $A_1 \in R_1$. Então, pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1, x_2)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito $T_2(A_1)$ que cobre X. Logo, considere $L_2(A_1) = \{S \cap A_1 : S \in T_2(A_1)\}$ e $L_2 = \bigcup\limits_{A_1 \in R_1} L_2(A_1)$ e $R_2 = L_2 - Q_2$, onde:

$$Q_2 = \{S \in L_2 : \exists \;\; x_\alpha \in \mathbb{F} \;\; \text{com}, \;\; \overline{S} \cap \{x_\alpha\} \neq \emptyset\}.$$

L3) Sejam (x_1, x_2, x_3) uma sequência admissível tal que $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, x_3 \in F_3$ e $A_2 \in R_2$. Então pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1, x_2, x_3)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito $T_3(A_2)$ que cobre X. Logo considere $L_3(A_2) = \{S \cap A_2 : S \in T_3(A_2)\}$ e $L_3 = \bigcup\limits_{A_2 \in R_2} L_3(A_2)$ e $R_3 = L_3 - Q_3$, onde:

$$Q_3 = \{S \in L_3 : \exists \;\; x_\alpha \in \mathbb{F} \;\; \text{com}, \;\; \overline{S} \cap \{x_\alpha\} \neq \emptyset\}.$$

$\vdots$

Ln) Sejam $(x_1, x_2, ..., x_n)$ uma sequência admissível tal que $x_1 \in F_1, ..., x_n \in F_n$ e $A_{n-1} \in R_{n-1}$. Então pela Proposição 2.24 para $\{\omega(x_1, ..., x_n)[x] : x \in X\}$ existe um refinamento aberto localmente finito $T_n(A_{n-1})$ que cobre X. Logo considere $L_n(A_{n-1}) = \{S \cap A_{n-1} : S \in T_n(A_{n-1})\}$ e $L_n = \bigcup\limits_{A_{n-1} \in R_{n-1}} L_n(A_{n-1})$ e $R_n = L_n - Q_n$, onde:

$$Q_n = \{S \in L_n : \exists \;\; x_\alpha \in \mathbb{F}; \overline{S} \cap \{x_\alpha\} \neq \emptyset\}.$$

Assim, note que L_n é uma família aberta localmente finita, desde que $L_n(A_{n-1})$ é um refinamento aberto localmente finito de A_{n-1}, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde A_{n-1} é um elemento da família aberta localmente finito L_{n-1}.

Agora precisamos encontrar uma família aberta disjunta dois a dois. Então, seja $\mathcal{Q} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} Q_n$, para todo $x \in F$ existe n tal que $x \in \bigcup Q_n$, de outra forma isto define uma sequência proximal $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ contida em F que tem um ponto de acumulação, contradizendo que F é um conjunto discreto. Assim $\mathcal{Q}$ possui um refinamento aberto localmente finito $\mathbb{W}$. Logo para todo $x_\alpha \in F$ seja:

$$H_\alpha = \bigcup \{A \in \mathcal{Q} \;\; \text{tal que} \;\; x_\alpha \in A\}$$

e

$$G_\alpha = H_\alpha - \bigcup \{\overline{W} \;\; \text{tal que} \;\; W \in \mathbb{W} \;\; \text{e} \;\; x_\alpha \notin \overline{W}\}$$

Logo, $x_\alpha \in G_\alpha$ e a família de G_α's são disjuntos dois a dois. Portanto, X é uma coleção Hausdorff. $\square$

Considerações Finais

A partir deste trabalho, podemos concluir que os espaços induzidos pelo jogo proximal, caracteriza espaço métrico completo, goza de certas propriedades e tem uma relação com o espaço induzido pelo jogo Gruenhage. Alem disso tem implicações a espaços coleção normal, espaços meta-compactos e espaços coleção Hausdorff.

Referências Bibliográficas

[1] BELL J.R. **The Uniform Box Product**. Proceedings of the American Mathematical Society, 2014.

[2] BELL J.R. **An Infinite Game with Topological Consequences**. Topology and its Applications, 2014.

[3] DUGUNJI J. **Topology**. First Edition. Boston: Allyn and Bacon, 1965.

[4] ENGELKING R. **General Topology**. Heldermann Verlag, 1989.

[5] GRUENHAGE G. **Infinite Games and Generalizations of First-Countable Spaces**. General Topology and its Applications, 1976.

[6] KELLEY J.L. **General Topology**. Van Nostrand, 1955.

[7] MUNKRES J. **Topology a First Course**, Prentice Hall, 1974.

[8] TAMARIZ A. - CASARRUBIAS F. **Elementos de Topologia General**. Ciencias, Universidad Autónoma de Mexico, 2015.

[9] TELGARSKY R. **Spaces Defined by Topological Games** . Fundamental Mathematics, 1975.

[10] TELGARSKY R. **Topological Games: On the 50, Anniversary of the Banach-Manzur Game**, Journal of Mathematics, 1987.