

EDER LEANDRO SÁNCHEZ QUICENO

**CONTORNOS IRREDUTÍVEIS DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS  
ENTRE SUPERFÍCIES FECHADAS E ORIENTADAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2018

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

S211c  
2018

Sánchez Quiceno, Eder Leandro, 1993-  
Contornos irreduzíveis de aplicações estáveis entre  
superfícies fechadas e orientadas / Eder Leandro Sánchez  
Quiceno. – Viçosa, MG, 2018.  
x,70f. : il. ; 29 cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.67-70.

1. Matemática. 2. Singularidades (Matemática).  
3. Superfícies (Matemática). I. Universidade Federal de Viçosa.  
Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em  
Matemática. II. Título.

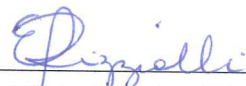
CDD 22. ed. 510

EDER LEANDRO SÁNCHEZ QUICENO

CONTORNOS IRREDUTÍVEIS DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS  
ENTRE SUPERFÍCIES FECHADAS E ORIENTADAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 23 de fevereiro de 2018.



Eliris Cristina Rizziolli



Pouya Mehdipour Balagafsheh



Catarina Mendes de Jesus  
Sánchez  
(Orientadora)

*Dedico este trabalho aos meus pais Rodrigo e Luz Mary  
e meu irmão Leonel.*

A persistência é o caminho do  
êxito.

---

Charles Chaplin

# Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

À minha família pelo seu grande apoio no meu processo acadêmico, pela sua constância, seus esforços e amor.

À minha orientadora Catarina Mendes de Jesus os mais sinceros agradecimentos pela paciência, disposição, confraternização e por ter sido promotora do meu crescimento profissional.

Às professoras Eliris Cristina Rizziolli e Pouya Mehdipour Balagafsheh, por aceitarem fazer parte da banca examinadora desta dissertação e pelas indicações de correções.

Ao Brasil, por me acolher da melhor forma e me fazer sempre sentir em casa e especialmente a minha namorada pela paciência e apoio neste processo.

Um agradecimento especial ao que foi secretário do mestrado João Marcos, por ser um grande apoio durante este tempo e a todos os amigos que a vida me tem dado.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

# Sumário

<b>Lista de Símbolos</b>	vii
<b>Resumo</b>	ix
<b>Abstract</b>	x
<b>Introdução</b>	1
<b>1 Preliminares</b>	4
1.1 Variedades . . . . .	4
1.2 Aplicações diferenciáveis entre variedades . . . . .	6
1.3 Grau, homotopias e isotopias . . . . .	9
1.4 Aplicações estáveis entre variedades . . . . .	11
1.4.1 Aplicações entre variedades . . . . .	11
1.4.2 Singularidades de aplicações entre superfícies. . . . .	12
1.5 Característica de Euler de superfícies . . . . .	14
1.6 Número de rotação de uma curva plana . . . . .	16
1.7 Funções de Morse . . . . .	18
<b>2 Aplicações entre superfícies fechadas.</b>	<b>21</b>
2.1 Construção de aplicações entre superfícies . . . . .	21
2.1.1 Cirurgias e transição de codimensão 1 . . . . .	21
2.1.2 Exemplos de aplicações de superfícies no plano . . . . .	24
2.2 Teorema de Quine . . . . .	27

<b>3</b>	<b>Aplicações estáveis entre superfícies orientadas</b>	<b>30</b>
3.1	Contorno aparente e característica de Euler . . . . .	30
3.2	Singularidades e contornos aparentes . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Contornos minimais de aplicações entre superfícies</b>	<b>42</b>
4.1	Construção de contornos irredutíveis . . . . .	42
4.2	Contornos minimais . . . . .	49
4.2.1	Contornos minimais de aplicações na esfera . . . . .	49
4.2.2	Um pouco mais sobre contornos minimais . . . . .	56
<b>A</b>	<b>Fórmulas Plucker</b>	<b>60</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>67</b>



# Lista de Símbolos

$g_c$	Aplicação $\frac{f_c}{ f_c }$ ;
$f_{d,g}$	Aplicação de grau $d$ de uma superfície de gênero $g$ ;
$\partial M$	Bordo da variedade $M$ ;
$\chi(M)$	Característica de Euler da superfície $M$ ;
$S^1$	Círculo;
$C^\infty(M, N)$	Conjunto de aplicações suaves $M \rightarrow N$ ;
$\mathcal{E}(M, N)$	Conjunto de aplicações estáveis de $M$ em $N$ ;
$\Sigma(f)$	Conjunto singular da aplicação $f$ ;
$Cusps(f)$	Conjunto de pontos de cúpidos da aplicação $f$ ;
$Dobras(f)$	Conjunto de pontos duplos da aplicação $f$ ;
$\alpha$	Componente de $\Sigma f$ ;
$c$	Componente de $\alpha \setminus Cusps(f)$ ;
$\hat{D}$	Conjunto de pontos $(p, q)$ tal que $f(p) = f(q)$ ;
$\gamma(f)$	Contorno aparente da aplicação $f$ ;
$\hat{f}$	Curva dual da curva fechada $f$ ;
$\Delta$	Diagonal do subconjunto $I \times I$ ;
$d_p f$	Diferencial da aplicação $f$ no ponto $p$ ;
$D_\infty$	Disco vizinhança de $\infty$ ;
$2P$	Dobro da variedade com bordo $P$ ;
$S^2$	Esfera bidimensional;
$T_p M$	Espaço tangente à variedade no ponto $p$ ;
$J^k(M, N)$	Espaço de jatos de aplicações $M \rightarrow N$ ;
$M^+$	Fecho do conjunto dos pontos regulares nos quais $f$ preserva a orientação;
$M^-$	Fecho dos pontos regulares nos quais $f$ inverte a orientação;
$\gamma_\epsilon$	Fronteira da interseção de $T$ com um quadrado tendo centro $(p, p)$ e lados $\epsilon$ ;
$\partial T$	Fronteira topológica de $T$ ;
$\pi$	Função de Morse;
$g(M)$ ou $g$	Gênero da superfície $M$ ;
$deg(f)$ ou $d$	Grau da aplicação $f$ ;
$\hat{n}$	Grau da curva $\hat{f}$ ;
$n(f)$	Grau da curva $s \wedge e_3$ ;
$\delta_{p,q}$	Grau de $s \wedge e_3 \mid \gamma$ ;
$k_p$	Grau da curva limite $s \wedge e_3 \mid \gamma_\epsilon, \epsilon \rightarrow 0$ ;

---

$j^k(f)$	Jato da aplicação $f$ ;
$m(f)$	Menor número de pré-imagens de uma aplicação $S_g \rightarrow S^2$ ;
$\tau(\alpha)$	Número de rotação tangente duplo da componente $\alpha$ ;
$D(f)$ ou $D$	Número de pontos duplos do contorno aparente de $f$ ;
$\mu(f)$	Número de componentes do contorno aparente de $f$ ;
$C(f)$ ou $C$	Número de pontos de cúspides do contorno aparente de $f$ ;
$\eta_i(f)$	Número de pontos críticos não degenerados de índice $i$ da aplicação de Morse $f$ ;
$D^+$	Número de pontos duplos positivos;
$D^-$	Número de pontos duplos negativos;
$\mu^+$	Número de componentes do contorno aparente positivas;
$\mu^-$	Número de componentes do contorno aparente negativas;
$v$	Número total de vértices de $M$ ;
$e$	Número total de lados de $M$ ;
$t$	Número total de triângulos da triangularização;
$l_p$	Laço centrado no ponto duplo $p$ ;
$\mathbb{R}P^2$	Plano projetivo bidimensional;
$\times$	Produto de espaços topológicos;
$\cdot$	Produto interno;
$\wedge$	Produto vetorial;
$f _\alpha$	Restrição de $f$ a componente $\alpha \in \text{Dobras}(f)$ ;
$f_c$	Restrição de $f$ a componente $c \in \text{Dobras}(f)$ ;
$l_\infty$	Reta no infinito do plano projetivo;
$\text{sign}(q)$	Sinal da cúspide $q$ .
$S_1 \# S_2$	Soma conexa das superfícies $S_1$ e $S_2$ ;
$M_g$	Soma conexa de $g$ cópias do toro;
$F_g$	Soma conexa de $g$ cópias do plano projetivo bidimensional;
$T$	Subconjunto de $I \times I$ tal que $p \leq q$ ;
$K$	Subconjunto de $\Delta$ tal que $f(p)$ é cúspide;
$P$	Superfície com bordo;
$T^2$	Toro bidimensional;
$\infty$	Valor regular, tal que $f^{-1}(\infty)$ tem exatamente $m(f)$ elementos;
$M$ e $N$	Variedades diferenciáveis;
$e_3$	Coordenada da reta que passa pela origem e o ponto $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ ;
$\delta$	$\sum_{p,q} \delta_{p,q}$ ;
$k$	$\sum_p k_p$ .

# Resumo

QUICENO, Eder Leandro Sánchez, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2018. **Contornos irreduzíveis de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas.** Orientadora: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.

Em 1991, Pignoni [37] introduziu o conceito de contornos minimais para aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano, que corresponde às aplicações com contorno irreduzível (conjunto singular conexo) e com o menor número correspondente a soma dos números de cúspides e de pontos duplos. Demoto, em [6], estendeu este conceito para aplicações da esfera na esfera e que foi mais tarde generalizado por Kamenosono-Yamamoto em [17]. O objetivo deste trabalho é estudar aplicações estáveis entre superfícies, enfatizando os contornos minimais de aplicações na esfera.

# Abstract

QUICENO, Eder Leandro Sánchez, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2018. **Irreducible contours of stable applications between closed and oriented surfaces.** Adviser: Catarina Mendes de Jesus Sánchez.

In 1991, Pignoni introduced the concept of minimal contours for stable maps of closed surfaces into the plane, which corresponds to maps with irreducible contours (singular connected set) and with the smallest number corresponding to the sum of numbers of cups and double points. Demoto, in [6], extended this concept to maps between spheres and that was later generalized by Kamenosono-Yamamoto in [17]. The objective of this survey is to study stable maps between surfaces, emphasizing the minimal contours of maps into the sphere.

# Introdução

Um problema clássico da Teoria das Singularidades é a classificação de aplicações estáveis, a menos de equivalências, em particular, a  $\mathcal{A}$ -equivalentes. Os rumos das pesquisas no sentido de resolver este problema se resumem, em muitos casos, na tentativa de encontrar invariantes que permitam classificar boa parte destas aplicações.

O primeiro pesquisador a trabalhar com as singularidades foi Whitney [43], que foi levado a estudar singularidades no processo de provar seu teorema de imersão: Uma variedade  $M$  de dimensão  $m$  pode ser imersa no espaço  $(2m - 1)$ , mesmo que as imersões não sejam densas no espaço de todas as aplicações de  $M$  em  $R^{2m-1}$ , algumas singularidades persistem sob pequenas deformações. Whitney listou as singularidades destas aplicações, das aplicações  $M \rightarrow R^{2m-1}$  e das aplicações  $M^2 \rightarrow R^2$  (ver [43]). A persistência de certas singularidades sob deformação leva à ideia de uma aplicação estável: uma que é essencialmente inalterada se a deformarmos um pouco. Whitney [44] caracterizou as aplicações estáveis  $M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$  e  $M^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Ao fazê-lo apresentou muitas das ideias e técnicas centrais no assunto. Foi René Thom que notificou ([41]) que todos estes resultados podiam ser incorporados em uma teoria.

Em 1990, Vassiliev ([42]) desenvolveu um método para obtenção de invariantes de isotopia locais no espaço das aplicações, no estudo da imagem da aplicação. Esse método se baseia no estudo do subconjunto discriminante, formado pelas aplicações não estáveis. A partir disso, vários pesquisadores dedicaram-se a pesquisar invariantes de aplicações estáveis: em 1990, Vassiliev ([42]) encontra invariantes de mergulhos de  $S^1$  em  $R^3$ ; Em 1994, Arnold ([2]) estuda invariante de imersões de  $S^1$  em  $R^2$ , chamados invariantes de Arnold; Em 1997, Goryunov ([10]), estuda invariantes de superfícies imersas em  $R^3$ ; Em 2006, Ohmoto e Aicardi ([36]), estudam invariantes de superfícies fechadas no plano.

Continuando com o estudo do contorno aparente (imagem do conjunto singular), em 1991, Pignoni [37] determinou o número mínimo para a soma dos números de cúspides e de pontos duplos para aplicações estáveis de superfícies

fechadas e orientadas no plano o qual chamou de contorno minimal. Seguindo Pignoni, em 2005, Demoto [6] determina os contornos minimais para aplicações da esfera na esfera. Mais tarde, Kamenosono-Yamamoto [17] no ano de 2009, estendem os resultados de Demoto para aplicações de superfícies fechadas na esfera.

Em 2001, Mendes ([24]) considerando o domínio da aplicação, introduziu um invariante do ponto de vista global que foi introduzido em sua tese de doutorado e mais tarde foi publicado por Hacon, Mendes e Romero-Fuster em [11, 13, 15], onde trataram também do caso particular das aplicações sem cúspides, conhecidas como aplicações dobras. Essa técnica, de associar grafo com pesos às aplicações estáveis, foi também estendida para outras aplicações estáveis como aplicações estáveis de: aplicações de 3-variedades orientadas e fechadas no  $\mathbb{R}^3$ , por Mendes de Jesus, Oset Sinha e Romero-Fuster, em ([29]) no ano de 2009; superfícies fechadas e orientadas na esfera, por Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster em [14] no ano de 2010; para aplicações de Gauss de superfícies fechadas e orientadas imersas no 3-espaço, por Mendes de Jesus, Morales e Romero-Fuster em ([28]) no ano de 2011; aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas em [25] no ano de 2016; aplicações de superfícies fechadas no plano projetivo em [27] no ano de 2018.

O presente trabalho tem como tema principal o estudo de contornos irredutíveis de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas. Segundo Eliasberg [7], para cada aplicação suave  $f$  entre duas superfícies existe uma aplicação estável  $h$ , na classe de homotopia de  $f$ , com o contorno irredutível (única componente singular). Estes contornos irredutíveis podem fornecer informações que auxiliam na classificação destas aplicações. Naturalmente, não existe uma única aplicação com contorno irredutível para a classe de homotopia de  $f$ . Uma pergunta natural que surge é: qual contorno irredutível tem o menor número de pontos duplos e de número de cúspides? Ou seja, qual é o contorno minimal na classe de homotopia de uma aplicação  $f$  dada?. Os principais resultados aqui apresentados estão baseados em [17]. A estrutura que adotamos neste trabalho para apresentação do conteúdo é como segue:

No primeiro capítulo, apresentamos alguns conceitos básicos e resultados sobre variedades, característica de Euler de superfícies, orientabilidade de superfícies e espaços de aplicações, afim de proporcionar as ferramentas necessárias para a abordagem proposta nos próximos capítulos. Como principais referências, temos [9, 33, 36, 42].

No segundo capítulo, apresentaremos alguns resultados de aplicações entre

superfícies fechadas e orientadas, com resultados particulares sobre aplicações na esfera, as demonstrações de alguns resultados serão omitidas, pois estes se encontram com detalhes em [21]. As principais referências são [6, 25, 30, 39, 36].

No terceiro capítulo, veremos um pouco sobre o contorno aparente de superfícies fechadas no plano e na esfera com exemplos de contornos irreduzíveis, além de algumas relações entre singularidades da aplicação e gênero da superfície. As principais referências são [17, 37, 34, 35, 45].

Finalmente, no quarto capítulo, apresentaremos aplicações estáveis entre superfícies com contornos irreduzíveis e alguns resultados sobre algumas famílias particulares destes contornos aparentes, chamadas de contornos minimais, baseado em [6, 17, 37, 46].

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar alguns conceitos e resultados sobre variedades, característica de Euler de superfícies, orientabilidade de superfícies e espaços de aplicações, afim de proporcionar as ferramentas necessárias para a abordagem proposta nos próximos capítulos. Como referência para a seção de variedades nos baseamos em [33], já para os conceitos das aplicações estáveis teremos como referência [9, 36, 42],

### 1.1 Variedades

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos relacionados ao estudo das variedades. Os resultados e definições podem ser encontradas em [33].

**Definição 1.1.1.** *Uma variedade topológica de dimensão  $m$  é um espaço topológico  $M$  com as seguintes três propriedades:*

- 1) *Localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^m$ . Isto é, existe uma cobertura aberta  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$  de  $M$  tal que para cada  $i \in \Lambda$  existe uma aplicação  $x_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$  a qual aplica  $U_i$  homeomorficamente sobre  $\mathbb{R}^m$ ;*
- 2) *Segundo enumerável;*
- 3) *Hausdorff.*

**Definição 1.1.2.** *Para uma variedade  $M$  usaremos as seguintes notações:*

- 1) *O par  $(U_i, x_i)$  é chamado carta (ou sistema de coordenadas local) com domínio  $U_i$ .*
- 2) *Dizemos que  $m$  é a dimensão de  $x : U \rightarrow x(U)$ . Para cada  $p \in U$  tem-se  $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$ .*
- 3) *Os números  $x^i = x^i(p)$ ,  $i = 1, \dots, m$  são chamados por coordenadas do ponto  $p \in M$  no sistema  $x$ .*



**Exemplo 1.1.3.** Uma forma de provar que, por exemplo,  $S^2$  é uma variedade topológica, é considerando as projeções estereográficas: Denotemos  $N$  o polo norte,  $(0, 0, 1) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , e denotemos  $S$  o polo sul,  $(0, 0, -1)$ . Defina a projeção estereográfica  $\varphi^N : (S^2 \setminus \{N\}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\varphi^N(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1, x_2)}{1 - x_3},$$

e defina  $\varphi^S(x) = -\varphi^N(-x)$  para  $x \in S^2 \setminus \{N\}$ .

**Definição 1.1.4.** Seja  $M$  uma variedade topológica. Se  $(U, x)$  e  $(V, y)$  são duas cartas tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ , a **função transição** de  $x$  a  $y$  é a aplicação composição  $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ . A qual é uma composição de homeomorfismos e, portanto, em si mesma um homeomorfismo.

**Definição 1.1.5.** Duas cartas  $(U, x)$ ,  $(V, y)$  se dizem ser **compatíveis**  $C^k$ , se  $U \cap V = \emptyset$  ou a função transição  $y \circ x^{-1}$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

**Definição 1.1.6.** Um **atlas** é um conjunto  $\mathfrak{A} = \{(U_i, x_i), i \in I\}$  de cartas tais que  $M = \cup_{i \in I} U_i$ . Se cada par de cartas de  $\mathfrak{A}$  são compatíveis  $C^k$  uma com a outra, então  $\mathfrak{A}$  é chamado **atlas de classe  $C^k$** .

**Definição 1.1.7.** Um atlas de classe  $C^k$  em  $M$  é um **atlas maximal**, se este não está propriamente contido em qualquer outro atlas de classe  $C^k$ .

**Definição 1.1.8.** Seja  $M$  uma variedade topológica. Uma **estrutura diferenciável** em  $M$  é um atlas  $\mathfrak{A}$  de classe  $C^k$  maximal. Ao par  $(M, \mathfrak{A})$  chamaremos de **variedade diferenciável** de classe  $C^k$ .

Um resultado útil para a construção de variedades diferenciáveis é dado a seguir. Pode-se encontrar uma prova deste em (Lee [33] p.22).

**Lema 1.1.9** (Lema das cartas das variedades diferenciáveis). *Seja  $M$  um conjunto, e suponha que é dada uma coleção  $\{U_\alpha\}$  de subconjuntos de  $M$  junto com aplicações  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tais que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- 1) Para cada  $\alpha$ ,  $x_\alpha$  é uma bijeção entre  $U_\alpha$  e um subconjunto aberto  $x_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ ;
- 2) Para cada  $\alpha$  e  $\beta$ , o conjunto  $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  e  $x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  são abertos de  $\mathbb{R}^n$ ;
- 3) Sempre que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  a aplicação  $x_\beta \circ (x_\alpha)^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  é diferenciável;
- 4) Uma quantidade enumerável dos conjuntos  $U_\alpha$  cobrem  $M$ ;
- 5) Sempre que  $p, q$  sejam diferentes pontos de  $M$ : ou existe algum  $U_\alpha$  contendo ambos  $p$  e  $q$  ou existem conjuntos disjuntos  $U_\alpha$  e  $U_\beta$  com  $p \in U_\alpha$  e  $q \in U_\beta$ .

Destas condições,  $M$  tem uma única estrutura de variedade diferenciável tal que cada  $(U_\alpha, x_\alpha)$  é uma carta diferenciável.

**Definição 1.1.10.** Uma *variedade de dimensão  $m$  com bordo* é um espaço topológico  $M$ , Hausdorff, segundo enumerável e com a seguinte propriedade adicional: Se  $x \in M$ , então existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  homeomorfa a um subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  ou  $\mathbb{H}^m = \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m : x^m \geq 0\}$ .

O conjunto dos pontos que têm uma vizinhança homeomorfa a  $\mathbb{H}^m$  é chamado o *bordo* de  $M$  e é denotado por  $\partial M$ .

**Definição 1.1.11.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Se  $\partial M = \emptyset$ , então  $M$  é chamada de *variedade sem bordo*.

Uma variedade compacta e sem bordo é chamada *variedade fechada*.

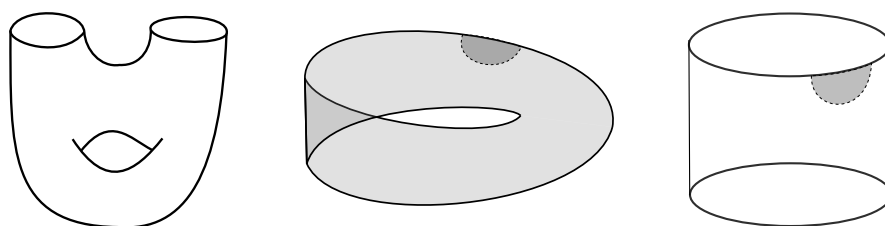


Figura 1.1: Superfícies com bordo.

**Exemplo 1.1.12.** A esfera, o  $n$ -toro e o plano projetivo são exemplos de variedades de dimensão 2 sem bordo. A Figura 1.1 ilustra três exemplos de variedades de dimensão 2 com bordo: o toro com dois buracos (com dois bordos), a faixa de Möebius (com o bordo conexo) e o cilindro finito (com duas componentes de bordo).

**Definição 1.1.13.** Um *colar* de uma variedade com bordo é um difeomorfismo da variedade com bordo  $\partial M \times [0, 1)$  sobre uma vizinhança aberta de  $\partial M$  em  $M$ , a qual é a inclusão  $\partial M \subset M$  em  $\partial M$  (ver Figura 1.2).

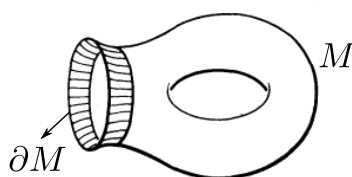


Figura 1.2: Colar de uma variedade de dimensão 2 com bordo

**Teorema 1.1.14.** ([A], p.132) Toda variedade com bordo tem um colar.

## 1.2 Aplicações diferenciáveis entre variedades

Apresentaremos a seguir o conceito de aplicação diferenciável entre variedades. Conceito que generaliza a noção de diferenciabilidade entre espaços euclidianos,

as definições e propriedades podem ser encontradas em [33], como também o conceito de orientação numa variedade, cujas definições são encontradas em [32].

**Definição 1.2.1.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Diz-se que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é **diferenciável no ponto**  $p \in M$  se existem cartas  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ ,  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $N$ , com  $p \in U$  e  $f(U) \subset V$  tais que  $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$  é diferenciável no ponto  $x(p)$ . A aplicação  $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$  é denominada **expressão** de  $f$  nas cartas  $x, y$ .*

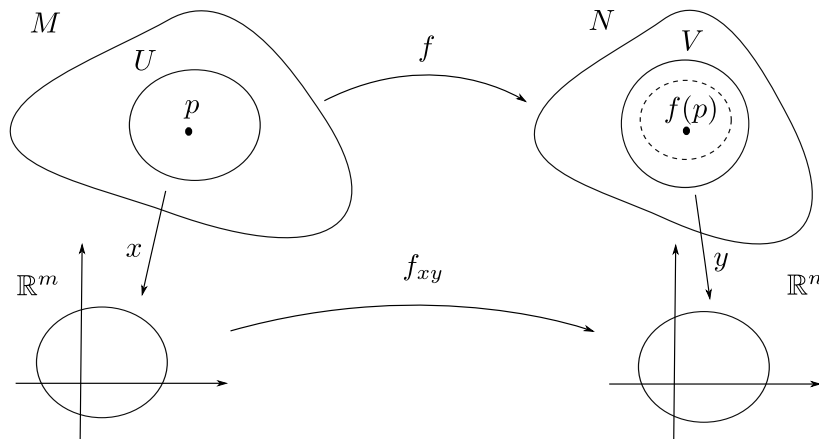


Figura 1.3: Representação da aplicação diferenciável  $f$  nas cartas  $(U, x)$  e  $(V, y)$ .

Como as mudanças de coordenadas em  $M$  e  $N$  são difeomorfismos de classe  $C^k$ , a definição de diferenciabilidade independe das cartas  $x, y$ .

Dizemos que  $f : M \rightarrow N$  é **diferenciável** se  $f$  for diferenciável em todos os pontos de  $M$ .

**Definição 1.2.2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ .*

- 1) Se  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma aplicação diferenciável com  $\alpha(0) = p$ , dizemos que  $\alpha$  é uma **curva centrada** em  $p$ .
- 2) Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  curvas centradas em  $p$ . Então,  $\alpha_1$  é **tangente** a  $\alpha_2$  se para toda carta  $(U, x)$  de  $M$  com  $p \in U$ ,

$$d_0(x \circ \alpha_1) = d_0(x \circ \alpha_2). \quad (1.1)$$

Este requerimento faz sentido já que  $x \circ \alpha_1$  e  $x \circ \alpha_2$  são aplicações definidas numa vizinhança aberta de 0 de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^m$ .

**Definição 1.2.3.** *Denotemos por  $S_p M$  o conjunto de todas as curvas em  $M$  centradas em  $p$ , onde  $p$  é um ponto de  $M$ . Sejam  $\alpha_1, \alpha_2 \in S_p M$ . Dizemos que  $\alpha_1 \simeq \alpha_2$  se  $\alpha_1$  é tangente a  $\alpha_2$  em  $p$ . Claramente  $\simeq$  é uma relação de equivalência. O conjunto  $T_p M = S_p M / \simeq$  é chamado o **espaço tangente** a  $M$  em  $p$ . Se  $\alpha_1 \in S_p M$ , então,  $\hat{\alpha}_1 \in T_p M$  denota a classe de equivalência de  $\alpha_1$  em  $T_p M$ .*

**Definição 1.2.4.** Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável com  $p$  em  $M$  e  $q = f(p)$ . Então,  $f$  induz uma aplicação linear  $d_p f : T_p M \rightarrow T_q N$  chamada **jacobiano** de  $f$  em  $p$  como segue: seja  $\alpha_1 \in S_p M$ ; então,  $f \circ \alpha_1 \in S_q N$ . Para induzir uma aplicação  $T_p M \rightarrow T_q N$ , necessitamos saber que se  $\alpha_1 \simeq \alpha_2$  em  $S_p M$  implica,  $f \circ \alpha_1 \simeq f \circ \alpha_2$  em  $S_q N$ . Sejam  $(U, x)$  uma carta de  $M$  com  $p \in U$  e  $(V, y)$  carta de  $N$  com  $q \in V$ . então,  $\alpha_1 \simeq \alpha_2$  implica que  $d_0 x \circ \alpha_1 = d_0 x \circ \alpha_2$ . Portanto, pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} d_0(y \circ f \circ \alpha_1) &= d_0(y \circ f \circ x^{-1} \circ x \circ \alpha_1) \\ &= d_{x(p)}(y \circ f \circ x^{-1}) \circ d_0(x \circ \alpha_2) = d_0(y \circ f \circ \alpha_2). \end{aligned}$$

Assim por definição  $\alpha_1 \simeq \alpha_2$ . Isto define  $d_p f : T_p M \rightarrow T_q N$ . A linearidade de  $d_p f$  segue da seguinte fórmula

$$d_p f = \lambda_y^q \circ d_{x(p)}(y \circ f \circ x^{-1}) \circ (\lambda_x^p)^{-1}, \quad (1.2)$$

onde  $\lambda_y^q : \mathbb{R}^n \rightarrow T_q N$  associa um vetor  $v$  à classe de equivalência da curva  $\alpha_1$  tal que  $d_0(y \circ \alpha_1) = v$ .

**Definição 1.2.5.** Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável, dizemos que  $f$  é **imersível** em  $x$  se a aplicação linear  $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  é injetiva ou **submersível** se  $T_x f$  é sobrejetiva. Se  $f$  é imersível em cada ponto de  $M$  esta é uma **imersão**; se esta é submersível em cada ponto de  $M$  esta é uma **submersão**.

**Definição 1.2.6.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis. A aplicação  $f : M \rightarrow N$  é um **mergulho** se:

- 1)  $f$  é uma imersão;
- 2)  $f$  aplica  $M$  homeomorficamente sobre sua imagem  $f(M) \subset N$ .

**Definição 1.2.7.** Seja  $N$  uma variedade de dimensão  $n$ . Um subconjunto  $M$  de  $N$  é dito ser uma **subvariedade** de  $M$  de dimensão  $m$  se, para cada ponto  $p \in M$ , existem um aberto  $V$  de  $N$ , com  $p \in V$ , e um difeomorfismo  $\xi : V \rightarrow \xi(V)$ , onde  $\xi(V)$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , tais que  $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$ .

**Definição 1.2.8.** Dadas duas bases de um espaço vetorial de dimensão  $(\geq 1)$   $e = (e_1, \dots, e_m)$  e  $e' = (e'_1, \dots, e'_m)$  tais que a mudança de bases vem dada pela matriz  $e'_j = \sum a_{ij} e_i$ , dizemos que  $e' \sim e$  se  $\det(a_{ij}) > 0$ . Cada uma das classes da relação de equivalência  $\sim$ , denotadas por  $\theta(e_1, e_2, \dots, e_m)$  e  $\theta(-e_1, e_2, \dots, e_m)$  é chamada **orientação do espaço vetorial real**.

**Definição 1.2.9.** Uma **orientação** de uma variedade  $M$  é uma aplicação que associa a cada  $p \in M$  uma orientação  $\theta_p$  do espaço vetorial  $T_p M$  de tal modo que para cada  $p \in M$  existem  $m$  campos independentes  $X^1, \dots, X^m$  definidos numa vizinhança aberta  $U$  de  $p$  de modo que  $\theta_q = \theta(X_q^1, \dots, X_q^m)$  para cada  $q \in U$ .

**Definição 1.2.10.** Uma variedade se diz **orientável** se esta admite uma orientação.

**Proposição 1.2.11.** ([32], p.97) Uma variedade orientável e conexa admite duas orientações.

**Proposição 1.2.12.** ([32], p.97) *Seja  $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  um atlas de uma variedade orientável  $M$  com domínios conexos. Então,  $\det(\frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi_i})_{(r,s)}$  tem sinal constante em  $U \cap V$ .*

**Exemplo 1.2.13.** Das três variedades com bordos na Figura 1.1, somente a faixa de Möebius é uma variedade não orientada. De fato, considere a faixa de Möebius como o espaço quociente  $M = \mathbb{R}^2 / \sim$  onde a relação vem dada por  $(r, s) \sim (r + z, (-1)^z s)$  com  $z$  inteiro. Seja  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  a projeção canônica. Tomemos o atlas de duas cartas  $\varphi = (p | (0, 1) \times \mathbb{R})^{-1}$ ,  $\psi = (p | (1/2, 3/2) \times \mathbb{R})^{-1}$  que têm domínio conexo. A mudança de coordenadas vem dada por  $\psi \circ \varphi^{-1}(r, s) = (r + 1, -s)$ , se  $0 < r < 1/2$ , e  $\psi \circ \varphi^{-1}(r, s) = (r, s)$ , se  $1/2 < r < 1$ . Então, o determinante  $\det(\frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi_i})_{(r,s)}$  vale 1, para  $0 < r < 1/2$  e vale  $-1$ , para  $1/2 < r < 1$ . Se supomos que  $M$  é orientável, então pela Proposição 1.2.12 temos que, o sinal de  $\det(\frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi_i})_{(r,s)}$  deve ser constante. Em consequência  $M$  não é orientável.

### 1.3 Grau, homotopias e isotopias

Nesta seção, apresentaremos o conceito de grau e homotopia de aplicações entre variedades. As definições e resultados pode-se encontrar em [23, 31].

**Definição 1.3.1.** *Duas aplicações  $f, g \in C^\infty(M, N)$  são ditas **homotópicas**, se existe uma aplicação suave  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ . Tal aplicação  $H$  é chamada de **homotopia** entre  $f$  e  $g$ .*

**Observação 1.3.2.** Ser homotópica é uma relação de equivalência no conjunto  $C^\infty(M, N)$  (Ver [23], p.37).

**Definição 1.3.3.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades sem bordo, tal que  $\dim M = \dim N$ . Suponha que  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação diferenciável própria (pre-imagens de conjuntos compactos são ainda compactos) entre as variedades  $M$  e  $N$ . Considere um ponto  $y$  em  $N$  tal que, para todo  $x \in M$  com  $f(x) = y$ , a aplicação linear  $d_x f : T_x M \rightarrow T_y N$  não é singular, isto é, um isomorfismo. Se  $\det(d_x f) > 0$  então,  $\text{sign } d_x f = 1$  e se  $\det(d_x f) < 0$ ,  $\text{sign } d_x f = -1$ . O **grau local** de  $f$  em  $y$  por*

$$\text{deg}_y(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } df_x.$$

O próximo teorema diz que para uma aplicação entre duas variedades fechadas e orientadas  $M$  e  $N$  com mesma dimensão, onde  $N$  é conexa, o grau da aplicação independe do valor regular escolhido.

**Teorema 1.3.4.** ([20]) *Sejam  $M$  e  $N$  variedades fechadas e orientadas com mesma dimensão. Se  $N$  é conexa, a cada aplicação própria  $f : M \rightarrow N$ , de classe  $C^2$ , corresponde um número inteiro  $d$ , tal que para qualquer valor regular  $y \in N$ , de  $f$ , tem-se que  $\text{deg}_y(f) = d$ .*

**Definição 1.3.5.** *O número  $d = \text{deg}_y(f)$  do Teorema 1.3.4 é o **grau da aplicação**  $f$ , ou simplesmente,  $\text{deg}(f)$ .*

Ou seja, o grau (global) de uma aplicação entre duas variedades fechadas, conexas e orientadas  $M$  e  $N$  de mesma dimensão é igual ao grau local, qualquer que seja o valor regular.

**Teorema 1.3.6.** ([31]) *Sejam  $M$  e  $N$  variedades compactas e orientadas e  $f, g : M \rightarrow N$  aplicações contínuas. Se  $f$  e  $g$  são homotópicas então  $\deg(f) = \deg(g)$ .*

O próximo teorema mostra que a recíproca do Teorema é válida para  $N = S^n$ , resultado que recebe o nome de Teorema do grau de Hopf (ver [31]).

**Teorema 1.3.7.** ([31], p.27) *Sejam  $M$  uma variedade de dimensão  $n$ , compacta e orientada,  $S^n$  a  $n$ -esfera e  $f, g : M \rightarrow S^n$  aplicações contínuas. Então:*

- 1)  $\deg(f) = \deg(g)$  se, e somente se,  $f$  e  $g$  são homotópicas;
- 2) Se  $f : M \rightarrow S^m$  não é sobrejetiva, então  $\deg(f) = 0$ ;
- 3) Se  $f : S^m \rightarrow S^m$  é a aplicação identidade, então  $\deg(f) = 1$ .

**Corolário 1.3.8.** *Se o conjunto singular  $\Sigma f$  de uma aplicação  $f : S^2 \rightarrow S^2$  é vazio, então  $\deg f = 1$ .*

**Demonstração:** Se  $\Sigma f = \emptyset$ , então  $f$  é homotópica a  $Id : S^2 \rightarrow S^2$ , que pelo Teorema 1.3.7 (3), possui grau um. Então por (1), segue que  $\deg(f) = \deg(Id) = 1$ .  $\square$

**Observação 1.3.9.** Desse corolário, temos que se  $f : S^2 \rightarrow S^2$  é tal que  $\deg(f) > 1$ , então o conjunto singular  $\Sigma f \neq \emptyset$ .

**Exemplo 1.3.10.** A Figura 1.4 ilustra uma curva plana que pode ser vista como o bordo de duas aplicações  $p_1 \circ j_1$  e  $p_2 \circ j_2$ , do disco no plano. Com isto podemos construir duas aplicações  $J_1, J_2$  da esfera no plano, não homotópicas, com o mesmo contorno aparente, onde  $J_1|_A = p_1 \circ j_1$ ,  $J_1|_B = p_1 \circ j_2$ ,  $J_2|_A = p_2 \circ j_2$  e  $J_2|_B = p_2 \circ j_2$

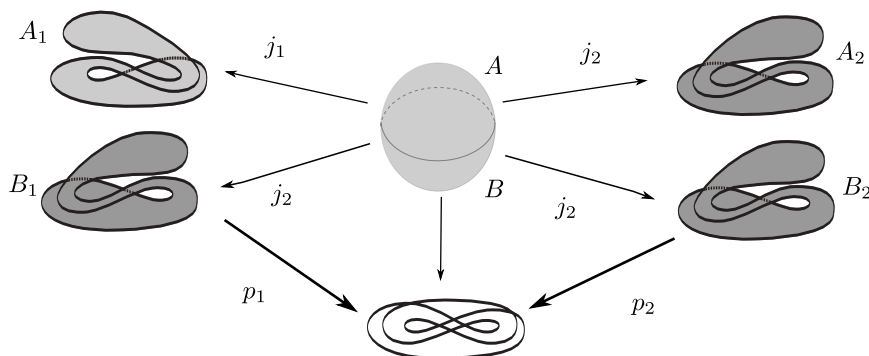


Figura 1.4: Disco de Milnor.

## 1.4 Aplicações estáveis entre variedades

Nesta seção, estudaremos o conjunto de aplicações suaves entre duas variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$ , o qual denotaremos por  $C^\infty(M, N)$ , como também a topologia  $C^\infty$  de Whitney nesse conjunto. Os resultados e definições pode-se encontrar em [9].

### 1.4.1 Aplicações entre variedades

**Definição 1.4.1.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $p$  um ponto de  $M$ . Suponha que  $f, g : M \rightarrow N$  são aplicações suaves.*

- 1)  $f$  e  $g$  têm **contato de ordem zero** em  $p$  se  $f(p) = g(p) = q$ ,
- 2)  $f$  e  $g$  têm **contato de primeira ordem** em  $p$  se, e somente se,  $d_p f = d_p g$ , como aplicações de  $T_p M \rightarrow T_q N$ .
- 3)  $f$  e  $g$  têm **contato de ordem  $k$** , com  $k \geq 1$  em  $p$  se, e somente se,  $df : TM \rightarrow TN$  e  $dg$  têm contato de ordem  $k - 1$  em todo ponto de  $T_p M$ . Neste caso  $f \sim_k g$ .

Seja  $C^\infty(M, N)_{(p,q)} = \{f \in C^\infty(M, N) : f(p) = q\}$ , a relação " $\sim_k$ " em  $p$  é uma relação de equivalência em  $C^\infty(M, N)_{(p,q)}$ . Denotemos o conjunto resultante de classes de equivalência por  $J^k(M, N)_{(p,q)}$ .

**Definição 1.4.2.** *Um elemento  $\sigma$  de  $J^k(M, N)_{(p,q)}$  é chamado um  **$k$ -jato** de aplicações de  $M$  em  $N$ , com fonte em  $p$  e meta  $q$ . Se  $\sigma \in J^k(M, N)_{(p,q)}$ , então escrevemos  $p = \text{fonte}(\sigma)$  e  $q = \text{meta}(\sigma)$ .*

**Definição 1.4.3.** *O **espaço de jatos** é o conjunto  $J^k(M, N) = \cup_{(p,q) \in M \times N} J^k(M, N)_{(p,q)}$ . Note que  $J^0(M, N) = M \times N$ .*

**Definição 1.4.4.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis. A **aplicação fonte** é  $\alpha : J^k(M, N) \rightarrow M$  que associa  $\sigma \rightarrow \text{fonte}(\sigma)$ .*

*E a **aplicação meta** é  $\beta : J^k(M, N) \rightarrow N$  que associa  $\sigma \rightarrow \text{meta}(\sigma)$ .*

Se prova em [9] que o conjunto de jatos resulta ser uma variedade diferenciável.

**Proposição 1.4.5.** ([9], p.40) *O conjunto  $J^k(M, N)$  pode ser munido com a estrutura de variedade diferenciável.*

**Definição 1.4.6.** *Dada a aplicação diferenciável  $f \in C^\infty(M, N)$  o  **$k$ -jato** de  $f$  é uma aplicação*

$$J^k f : M \longrightarrow J^k(M, N)$$

$$p \mapsto J^k f(p) = [f]_p^k,$$

onde  $[f]_p^k$  é a classe de equivalência de  $f$  em  $J^k(M, N)_{(p,q)}$  e  $q = f(p)$ .

**Definição 1.4.7.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis. Fixe um inteiro não negativo  $k$ . Seja  $\mathcal{U}$  um subconjunto de  $J^k(M, N)$ . Denotemos por  $\mathcal{M}^k(\mathcal{U})$  o seguinte subconjunto de  $C^\infty(M, N)$ :*

$$\mathcal{M}^k(\mathcal{U}) = \{f \in C^\infty(M, N); J^k f(M) \subset \mathcal{U}\}.$$

**Proposição 1.4.8.** ([9]) *A família de conjuntos  $\{\mathcal{M}^k(\mathcal{U})\}$ , onde  $\mathcal{U}$  é um subconjunto aberto de  $J^k(M, N)$ , forma uma base de uma topologia em  $C^\infty(M, N)$ .*

**Definição 1.4.9.** *A topologia induzida na Proposição 1.4.8 é chamada **topologia  $C^k$  de Whitney** e é denotada por  $\mathcal{M}_k$ .*

**Definição 1.4.10.** *A **topologia  $C^\infty$  de Whitney** em  $C^\infty(M, N)$  é aquela cuja base é dada por  $\mathcal{M} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k$ .*

**Definição 1.4.11.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é dita ser **estável** se existe uma vizinhança aberta  $\mathcal{N}(f)$  de  $f$  na topologia de Whitney (Definição 1.4.10) em  $C^\infty(M, N)$  tal que toda  $g$ , em  $\mathcal{N}(f)$ , é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f$ , isto é, existem difeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow M$  e  $\psi : N \rightarrow N$  satisfazendo  $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ .*

## 1.4.2 Singularidades de aplicações entre superfícies.

Outra definição equivalente baseada no Teorema de Whitney em [44].

**Definição 1.4.12.** *Sejam  $M$  uma superfície fechada e conexa,  $N$  uma superfície conexa e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Definimos o conjunto de **pontos singulares** de  $f$  como*

$$\Sigma f = \{p \in M : \text{Posto } d_p f < 2\}.$$

*Um ponto  $p \in M \setminus \Sigma f$  é dito **ponto regular** de  $f$  e um ponto  $y \in N$  é dito **valor regular** de  $f$  se  $f^{-1}(y)$  contém somente pontos regulares.*

*O **contorno aparente**  $f(\Sigma f)$  de  $f$ , é a imagem do conjunto singular de  $f$  e denotemos este por  $\gamma(f)$ .*

**Definição 1.4.13.** *Sejam  $M$  e  $N$  superfícies, então uma aplicação suave  $f : M \rightarrow N$  é dita ser **estável** se esta satisfaz as seguintes propriedades:*

- *Para cada  $p \in M$ , o germe da aplicação em  $p \in M$  é  $C^\infty$   $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos seguintes germes (Ver [9], p.11) em  $0 \in \mathbb{R}^2$  :*

- (1)  $(a, x) \rightarrow (a, x) : \text{um ponto regular};$
- (2)  $(a, x) \rightarrow (a, x^2) : \text{um ponto de dobra};$
- (3)  $(a, x) \rightarrow (a, x^3 + ax) : \text{um ponto de cúspide}.$



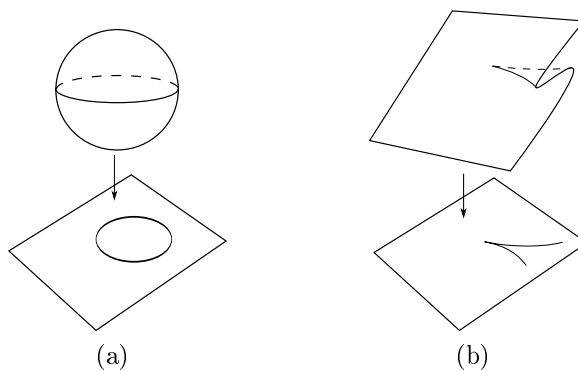


Figura 1.5: Cúspides e pontos de dobra.

- Para cada  $q \in \gamma(\varphi)$ , o germe  $(\varphi|_{\Sigma(\varphi)}, \varphi^{-1}(q) \cap \Sigma(\varphi))$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos três germes como os retratados na figura 1.6.

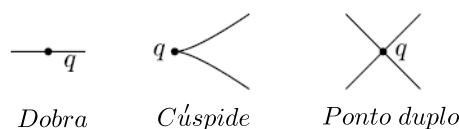


Figura 1.6: Germes de aplicações estáveis.

O subconjunto de aplicações estáveis de  $C^\infty(M, N)$  é denotado por  $\mathcal{E}(M, N)$ , que por [44] é aberto e denso em  $C^\infty(M, N)$ .

**Definição 1.4.14.** Sejam  $f$  e  $g$  duas aplicações estáveis entre duas variedades  $M$  e  $N$  e  $H : M \times I \rightarrow N$  uma homotopia de  $f$  e  $g$ , então se  $H_t \in \mathcal{E}(M, N)$ ,  $\forall t \in I$  a homotopia é dita **isotopia** da aplicação  $f$  a  $g$ .

**Definição 1.4.15.** Seja  $f$  uma aplicação estável entre superfícies. O número de cúspides, o número de componentes da curva de dobra e o número de pontos duplos de  $\gamma(f)$  são denotados por  $C(f)$ ,  $\mu(f)$  e  $D(f)$ , respectivamente.

No caso, onde não exista ambiguidade ao referirmos à aplicação  $f$ , simplesmente denotaremos por  $C, \mu$  e  $D$ .

**Definição 1.4.16.** Seja  $f$  uma aplicação estável entre superfícies. O conjunto de pontos de cúspides e o conjunto de pontos de dobra são denotados por  $Cusps(f)$  e  $Dobras(f) = \Sigma f \setminus Cusps(f)$ , respectivamente.

**Definição 1.4.17.** Uma aplicação estável  $f$  entre duas superfícies é chamada de **aplicação dobra** se esta não tem pontos de cúspides, ou seja, o conjunto  $Cusps(f) = \emptyset$ .

**Definição 1.4.18.** O contorno aparente de uma aplicação  $f$  entre duas superfícies é chamado de **irreduzível**, se o conjunto singular de  $f$  é conexo.

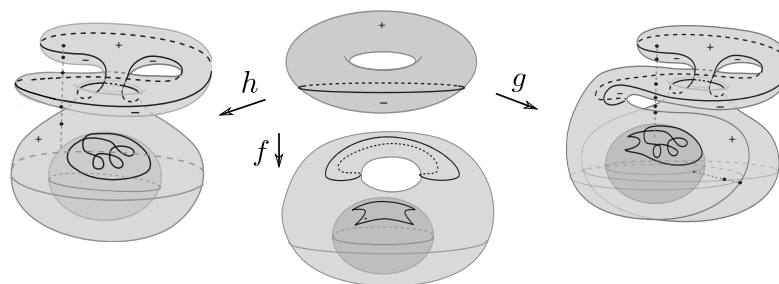


Figura 1.7: Aplicações do toro na esfera.

**Exemplo 1.4.19.** A Figura 1.7 ilustra três diferentes aplicações do toro na esfera com única curva singular:  $h$  é uma aplicação dobra com grau 1 e 4 pontos duplos;  $f$  tem grau 1 e 4 cúspides; e  $g$  tem grau 2, 4 pontos duplos e 2 cúspides.

**Proposição 1.4.20.** ([1], p.245) Sejam  $M$  uma superfície e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação estável. O conjunto  $\Sigma f$  consiste de uma coleção finita de círculos mergulhados em  $M$ , que não se intersectam.

## 1.5 Característica de Euler de superfícies

Nesta seção, apresentaremos a característica de Euler de uma superfície fechada. A referência é [23].

**Definição 1.5.1.** Uma *triangularização* de uma superfície  $S$  consiste de uma família de subconjuntos fechados  $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  que cobre  $S$  e uma família de homeomorfismos  $\{p_i : T'_i \rightarrow T_i, i = 1, \dots, n, \}$  onde cada  $T'_i$  é um triângulo no plano  $\mathbb{R}^2$ , isto é, um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$  cujo bordo é formado por três distintas linhas. Os subconjuntos  $T_i$  são chamados **triângulos**. Os subconjuntos de  $T_i$  que são as imagens dos vértices e lados do triângulo  $T'_i$  baixo  $p_i$  são também chamados **vértices** e **lados**, respectivamente. Finalmente, é requerido que quaisquer dois triângulos,  $T_i$  e  $T_j$ , ou são disjuntos, ou tem um único vértice em comum, ou tem um lado inteiro em comum.

**Exemplo 1.5.2.** Apresentaremos uma possível triangularização da esfera e do toro

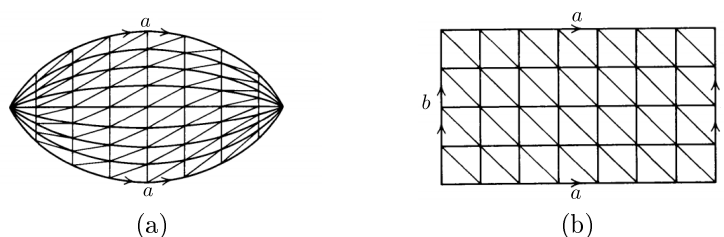


Figura 1.8: Triangularizações da Esfera e do Toro.

**Teorema 1.5.3.** ([23] p.26) *Qualquer superfície, fechada e orientada é homeomorfa a uma esfera ou somas conexas de toros. Qualquer superfície compacta e não orientada é homeomorfa a soma conexa ou do plano projetivo, ou a garrafa de Klein e uma superfície compacta e orientada.*

**Definição 1.5.4.** *Seja  $M$  uma superfície compacta com triangularização  $\{T_1, \dots, T_n\}$ . Denotemos por:*

$v =$  Número total de vértices de  $M$ ,

$e =$  Número total de lados de  $M$ ,

$t =$  Número total de triângulos (neste caso,  $t = n$ ).

Então, o número  $\chi(M) = v - e + t$  é chamado a **característica de Euler** de  $M$ .

**Exemplo 1.5.5.** Para calcular a característica de Euler da esfera, consideremos a triangularização em Figura 1.8a, para esta temos que  $v = 55$ ,  $e = 165$  e  $t = 112$  e portanto obtemos que  $\chi(S^2) = v - e + t = 55 - 165 + 112 = 2$ . Para calcular a característica de Euler do toro, consideremos a triangularização em Figura 1.8b, para esta temos que  $v = 28$ ,  $e = 84$  e  $t = 56$  e portanto obtemos que  $\chi(T^2) = v - e + t = 28 - 84 + 56 = 0$ .

**Proposição 1.5.6.** ([19], p.8) *Se  $M_1$  e  $M_2$  são duas superfícies compactas e conexas, então*

$$\chi(M_1 \cup M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2)$$

**Corolário 1.5.7.** *Se uma curva  $\alpha$  separa a superfície  $M$  em duas regiões  $M_1$  e  $M_2$ , então  $\chi(M) = \chi(M_1) + \chi(M_2)$ .*

**Proposição 1.5.8.** ([23]) *Para a soma conexa de duas superfícies,  $M$  e  $N$ , temos*

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Com o uso da Proposição 1.5.6 e usando indução, tem-se que.

Superfície	Característica de Euler
Esfera	2
Soma conexa de $n$ toros	$2 - 2n$
Soma conexa de $n$ planos projetivos	$2 - n$
Soma conexa do plano projetivo e $n$ toros	$1 - 2n$
Soma conexa da garrafa de Klein e $n$ toros	$-2n$

Note que a característica de Euler de uma superfície fechada e orientada é sempre um número par, enquanto que para uma superfície fechada e não orientada pode ser par ou ímpar. Pela invariância da característica de Euler (Ver [23] p.236) e o Teorema 1.5.3, obtém-se o seguinte teorema:

**Teorema 1.5.9.** ([23]) *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies compactas. Então,  $S_1$  e  $S_2$  são homeomorfos se, e somente se, suas características de Euler são iguais e ambas são orientadas ou ambas são não orientadas.*

**Definição 1.5.10.** *Sejam  $M$  uma superfície compacta e  $\chi(M)$  a característica de Euler de  $M$ , o **gênero** de  $M$  é o número*

$$g(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(M)) & \text{se } M \text{ é orientável,} \\ 2 - \chi(M) & \text{se } M \text{ não é orientável.} \end{cases}$$

Uma superfície fechada e orientável de gênero  $g$ , a qual é soma conexa de  $g$  cópias do toro 2-dimensional  $T^2$  é denotado por  $M_g$ . E uma superfície fechada e não orientável de gênero  $g$ , a qual é soma conexa de  $g$  cópias do plano projetivo 2-dimensional  $\mathbb{R}P^2$  é denotado por  $F_g$ .

## 1.6 Número de rotação de uma curva plana

Nesta seção, veremos alguns conceitos de curvas planas fechadas, estes conceitos serão necessários para o estudo do contorno aparente de aplicações estáveis entre superfícies, que veremos no segundo capítulo. Referência [1].

**Definição 1.6.1.** *Uma **curva fechada** plana é uma aplicação  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ .*

**Exemplo 1.6.2.** A Figura 1.9 ilustra a Lemniscata, uma curva fechada plana que possui um ponto duplo na origem.

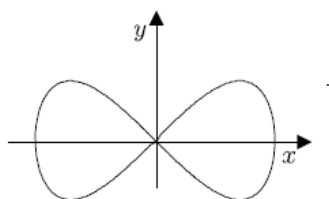


Figura 1.9: Curva fechada

**Definição 1.6.3.** ([1], p.489) *Para qualquer curva fechada  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ , que possui uma derivada que nunca se anula  $\alpha' : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , se define o **número de rotação** de  $\alpha$ , denotado  $R(\alpha)$ , por*

$$R(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \left[ \begin{array}{l} \text{O ângulo total atravessado por } \alpha'(s) \text{ como } s \text{ varia} \\ \text{uma vez ao redor do domínio } S^1 \text{ positivamente.} \end{array} \right].$$

**Proposição 1.6.4.** ([1]) *Seja  $\alpha$  uma curva fechada plana. Então,  $R(\alpha)$  é sempre um número inteiro. Em particular, se  $h$  é uma curva simples fechada,  $R(\alpha) = \pm 1$ .*

Outra maneira de pensar sobre isso é, considerando a aplicação

$$\left( \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \right) : S^1 \rightarrow S^1,$$

então o número de rotação  $R(\alpha)$  de  $\alpha$  é o número de vezes que a aplicação  $\frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$  cobre o círculo. O inteiro  $R(\alpha)$  é o grau global de  $\left( \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \right)$  (ver Definição 1.3.3).

Em [1], se estende o conceito de número de rotação para certas curvas fechadas, que podem não ter tangentes bem definidas em um conjunto finito de pontos.

**Exemplo 1.6.5.** No Exemplo 1.4.19 os contornos aparentes das aplicações  $f$  e  $g$  da Figura 1.7 têm quatro e dois pontos de cúspides, respectivamente, nos quais a tangente não está bem definida.

**Definição 1.6.6.** *Sejam  $I$  um intervalo da reta ou do círculo e  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada de classe  $C^1$  que possui uma derivada contínua  $\alpha'$  que nunca se anula em  $I$ . O número de rotação de  $\alpha$ , denotado  $R(\alpha)$ , é dado por*

$$R(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \left[ \begin{array}{l} \text{O ângulo total atravessado por } \alpha'(s) \text{ como } s \text{ varia} \\ \text{uma vez ao redor do domínio } I \text{ positivamente.} \end{array} \right],$$

**Proposição 1.6.7.** ([23]) *Seja uma curva fechada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que possui uma derivada contínua  $\alpha'$  que nunca se anula em  $(a, b)$ , se consideramos a aplicação  $\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} : I \rightarrow S^1$ , que associa a cada  $t$  o vetor unitário tangente em  $\alpha(t)$  dada por  $\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}(t) = \alpha'(t) / \|\alpha'(t)\|$ , e a aplicação  $g : I \rightarrow S^1$ , dada por  $g(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Então, existe uma aplicação  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que o diagrama é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \theta & \downarrow g \\ I & \xrightarrow{\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}} & S^1 \end{array}$$

**Definição 1.6.8.** *Em termos de  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  (Proposição 1.6.7), o número de rotação é dado por:*

$$R(\alpha) = \frac{1}{2\pi} (\lim_{s \rightarrow b^-} \theta(s) - \lim_{s \rightarrow a^+} \theta(s)).$$

Sejam  $s_1 < s_2 < \dots < s_k < s_1$  pontos, em ordem, em  $S^1$ . E  $I_j = (s_j, s_{j+1})$ , o arco aberto orientado positivamente em  $S^1$  com os pontos finais inicial e final  $s_j$  e  $s_{j+1}$ , respectivamente, onde  $j = 1, \dots, k$  e  $s_{k+1} = s_1$ .

**Definição 1.6.9.** *Seja  $\alpha$  uma curva fechada de classe  $C^1$ , onde  $\alpha' = 0$ , precisamente nos pontos  $s_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Defina  $\alpha_j = \alpha|_{I_j}$  a restrição de  $\alpha$  aos arcos  $(s_j, s_{j+1})$ . O número de rotação de  $\alpha$ , denotado  $R(\alpha)$ , é definido por:*

$$R(\alpha) = \sum_{i=1}^k R(\alpha_i).$$

**Proposição 1.6.10.** ([1], p.491) *Sejam  $M$  uma superfície compacta,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação estável e  $\alpha$  uma componente do conjunto singular  $\Sigma f$ , a qual é uma curva fechada em  $M$ . Se  $\alpha$  tem  $k$  cúspides, então para qualquer orientação de  $\alpha$ , a quantidade  $2R(f_\alpha)$  é um inteiro cuja paridade é igual à de  $k$ .*

**Definição 1.6.11.** *Sejam  $f$  uma aplicação de uma superfície compacta no plano e  $\alpha$  uma curva do conjunto singular  $\Sigma f$ . Denotando a restrição de  $f$  a  $\alpha$  por  $f_\alpha$ . O **número de giro tangente duplo** de  $f$  restrito à curva  $\alpha$ , denotado por  $\tau(f(\alpha))$ , será  $\tau(f(\alpha)) = 2R(f_\alpha)$ .*

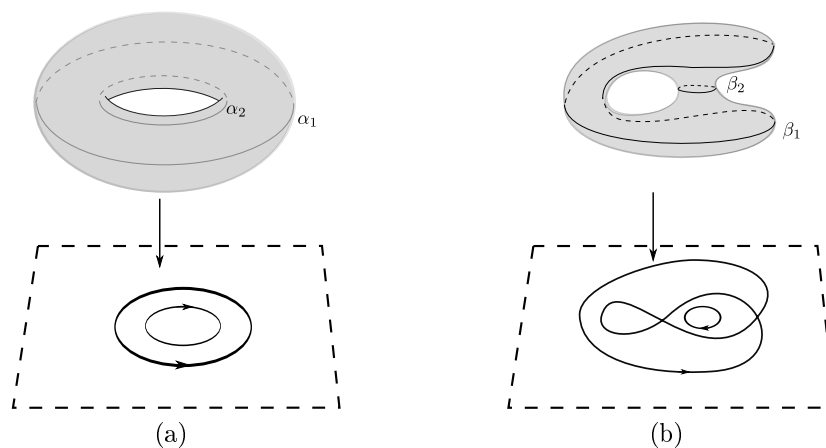


Figura 1.10: Número de giro tangente duplo.

**Exemplo 1.6.12.** A Figura 1.10 ilustra exemplos de contornos aparentes de duas aplicações  $f, h$  no plano, com duas curvas singulares, cada uma, sem pontos de cúspides. Na Figura 1.10a, o número de giro tangente duplo para as curvas  $f_{\alpha_1}$  e  $f_{\alpha_2}$  são  $\tau(f(\alpha_1)) = 2$  e  $\tau(f(\alpha_2)) = -2$ , respectivamente. Na Figura 1.10b  $\tau(h(\beta_1)) = 2$  e  $\tau(h(\beta_2)) = -2$ .

## 1.7 Funções de Morse

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos de funções reais definidas em superfícies cujas derivadas possuem certas propriedades. As referências [5].

**Definição 1.7.1.** *Seja  $\pi$  uma aplicação real suave definida na superfície  $M$ . A **Hessiana** de  $\pi$  num ponto crítico  $p \in M$  de  $\pi$  é a forma bilinear simétrica no espaço tangente de  $M$  em  $p$ ,  $Hess_p(\pi) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Hess_p(\pi)(v; w) = \sum_{i,j=1}^2 v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ , onde  $x = (x_1, x_2)$  é uma carta ao redor do ponto crítico  $p \in M$ .*

Em cartas locais a Hessiana se representa pela matriz simétrica

$$\left( \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{i,j}$$

**Definição 1.7.2.** *Seja  $\pi$  uma função real suave definida na superfície  $M$ , então um ponto crítico  $p \in M$  de  $\pi$  é chamado **não degenerado** se, e somente se, a Hessiana (matriz das segundas derivadas parciais) não é singular.*

**Definição 1.7.3.** *Uma função real  $\pi$  suave definida na variedade  $M$  é uma **função de Morse** se, e somente se, todos seus pontos críticos são não degenerados.*

**Definição 1.7.4.** *O índice de um ponto crítico não degenerado  $p$  é o número de autovalores negativos da matriz simétrica  $\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{i,j}$ , onde  $x = (x_1, x_2)$  é uma carta ao redor do ponto crítico  $p \in M$ .*

**Definição 1.7.5.** *Para uma função de Morse  $\pi$  de uma superfície  $M$ , denotamos por  $\eta_i(\pi)$ , o número de pontos críticos não degenerados de índice  $i$ .*

**Teorema 1.7.6.** ([5], p.353) *Seja  $\pi$  uma função de Morse numa superfície compacta  $M$ . Então, a característica de Euler é igual à soma alternada de números de pontos críticos de índice  $i$  com  $i = 0, \dots, 2$ ,*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \eta_i(\pi).$$

A seguinte proposição nos garante que para uma aplicação estável de uma superfície compacta no plano, sempre é possível encontrar uma aplicação linear, tal que a composição destas aplicações resulta ser uma função de Morse.

**Proposição 1.7.7.** ([18], p.79) *Sejam  $M$  uma superfície e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação estável. Para quase toda aplicação linear  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  temos que  $L \circ f$  é uma função de Morse e os pontos críticos de  $L \circ f$  estão contidos no conjunto  $Dobras(f)$ .*

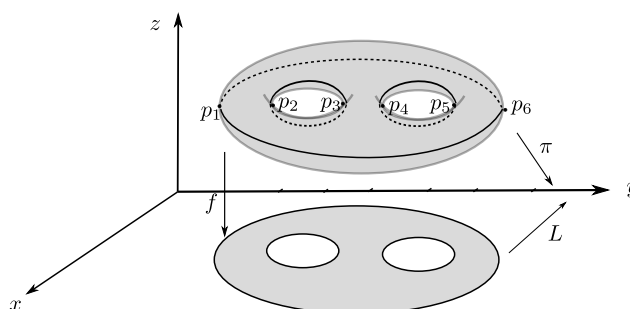


Figura 1.11: Função de Morse

**Exemplo 1.7.8.** A Figura 1.11 ilustra uma aplicação estável  $f$  do bitoro no plano, cujo conjunto singular  $\Sigma f$  está formado unicamente por pontos de dobra, isto é,  $\Sigma f = Dobras(f)$ . A proposição 1.7.7 garante a existência de um conjunto denso no espaço de funcionais lineares de  $\mathbb{R}^2$  que satisfazem a propriedade de que a

composição com  $f$  é uma aplicação de Morse. Por exemplo, a função  $\pi$  resultante de compor  $f$  com a projeção  $L$  do plano  $xy$  no eixo  $y$  é uma função de Morse. A expressão da função  $\pi$  em coordenadas locais ao redor de um ponto crítico de  $\pi$  em  $M$  é dada por:

**Pontos Críticos    Função  $\pi$  em coordenadas locais**

$p_1$	$\pi = c + x^2 + y^2$
$p_2, p_4$	$\pi = c - x^2 + y^2$
$p_3, p_5$	$\pi = c - x^2 + y^2$
$p_6$	$\pi = c - x^2 - y^2$

Para determinar o índice em cada um destes pontos do bitoro, note que a Hessiana de  $\pi$  em  $p_6$  tem dois autovalores negativos, assim o índice no ponto  $p_6$  é igual a dois, enquanto em  $p_2, p_3, p_4$  e  $p_5$  têm um autovalor negativo, logo os índices nestes pontos são igual a um. Assim, se determina que  $\eta_0(\pi) = 1$ ,  $\eta_1(\pi) = 4$  e  $\eta_2(\pi) = 1$ . Então, pelo Teorema [1.7.6](#) temos

$$\chi(M) = \eta_0(\pi) - \eta_1(\pi) + \eta_2(\pi) = 1 - 4 + 1.$$

Assim,

$$\chi(M) = -2.$$

Na Tabela [1.5](#) podemos verificar que  $\chi(M) = 2 - 2 \cdot 2 = -2$ .



# Capítulo 2

## Aplicações entre superfícies fechadas.

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados de aplicações entre superfícies fechadas e orientadas, com resultados particulares sobre aplicações na esfera. As principais referências são [6, 25, 30, 39, 36]

### 2.1 Construção de aplicações entre superfícies

Nesta seção, apresentaremos algumas técnicas para construir aplicações entre superfícies. Primeiro veremos as transições que alteram o conjunto singular, depois cirurgia de aplicações e ao final veremos exemplos de aplicações que podem ser utilizadas como aplicações básicas para a construção de novas aplicações estáveis.

#### 2.1.1 Cirurgias e transição de codimensão 1

Sejam  $f, g : M \rightarrow N$  duas aplicações estáveis na mesma classe de homotopia em  $C^\infty(M, N)$ , se existe um caminho de  $g$  a  $f$  que passa pelo complemento  $C^\infty(M, N) \setminus \mathcal{E}(M, N)$ , ou seja, passa por uma aplicação não estável. As deformações locais no contorno aparente, que ocorrem quando um caminho atravessa este complemento, são chamadas de transições de codimensão 1. Uma lista com essas deformações foi dada por Ohmoto e Aicardi e [36]. As transições de codimensão 1 que alteram a topologia do conjunto regular e do conjunto singular das aplicações estáveis, são as transições bicos e lábios, as quais estão ilustradas na Figura 2.1, onde as setas indicam o sentido positivo, ou seja, em que o número de cúspides aumenta por dois. Uma outra transição que altera o número de cúspides é a rabo de andorinha ( $S$ ), conforme Figura 2.2 item (b), mas essa transição não altera a topologia do conjunto regular.

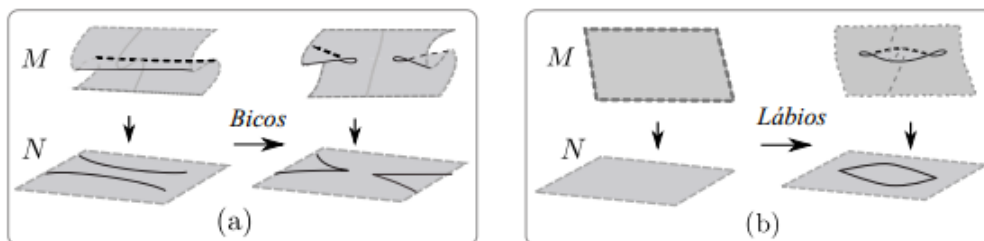


Figura 2.1: Transições Bicos e Lábios em  $C^\infty(M, N)$ .

**Exemplo 2.1.1.** Observe que através das transições de codimensão 1, podemos obter uma aplicação estável a partir de outra inicialmente conhecida e na mesma classe de homotopia. A Figura 2.2 ilustra uma aplicação estável da esfera no plano, obtida de uma aplicação  $g$ . Através de uma transição rabo de andorinha ( $S$ ), e de uma transição bicos no sentido negativo ( $-B$ ) (em que o número de cúspides diminui por dois).

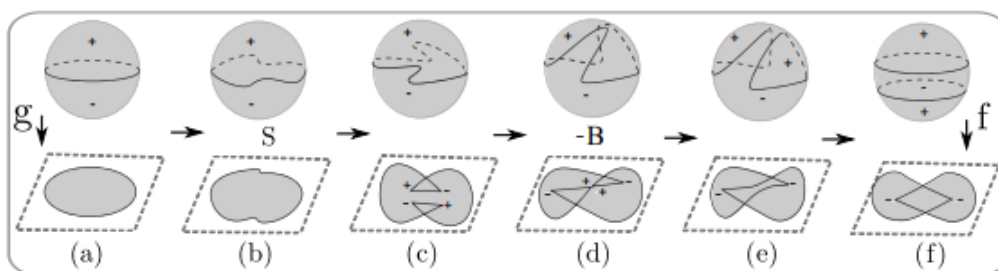


Figura 2.2: Exemplo transições.

Um invariante da classe de homotopia de aplicações entre superfícies fechadas e orientadas é o grau da aplicação. As transições de codimensão 1 não altera o grau das aplicações, por isto, não é possível obter aplicações com diferentes graus, uma a partir da outra somente por estas transições. Uma forma de obter novas aplicações em diferentes classes de homotopia é através de cirurgias de aplicações estáveis introduzidas em [25], chamadas de cirurgia horizontal e cirurgia vertical, ilustradas na Figura 2.3 itens (a) e (b), respectivamente. Em ambas as cirurgias, remove-se um par de discos disjuntos na superfície de domínio, os quais são substituídos por um tubo limitado (conectando os bordos da superfície) ao longo do qual as aplicações envolvidas são estendidas estavelmente, como veremos a seguir:

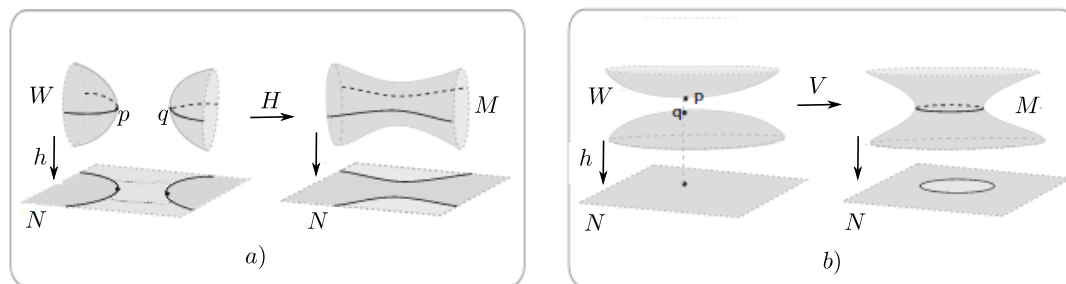


Figura 2.3: Cirurgia Horizontal e Vertical.

### Cirurgia horizontal

A cirurgia horizontal  $H$  é descrita da seguinte forma: dada uma aplicação estável  $h$  entre duas superfícies  $M$  e  $N$ , uma ponte é um retângulo com o interior mergulhado no complementar do contorno aparente  $\gamma(h)$  em  $N$  e com dois lados opostos sobre intervalos  $h(I)$  e  $h(J)$ , de forma compatível com a orientação de  $\gamma(h)$  (ver Figura 2.3a). A aplicação estável  $h_\beta$  (que depende da escolha do lugar da ponte  $\beta$ ) é construída como segue: uma ponte encontra  $h(W)$  em dois intervalos  $h(I)$  e  $h(J)$  contidos em  $\gamma(h)$ . Escolha pequenos discos em  $W$ , um conectando  $I$  e outro  $J$ . Repasse a seus interiores por um tubo respeitando a orientação de  $W$  de forma a obter uma orientação na superfície  $M$ . A aplicação  $h$ , como ilustrada na Figura 2.3(a), pode ser estendida sobre o tubo de forma a obter a aplicação estável  $h_\beta$ .

Em particular, se  $W$  é a união disjunta das superfícies  $P$  e  $Q$ , se denota por  $W = P \cup Q$ , onde  $p$  e  $q$  denota a restrição da aplicação  $h$  a  $P$  e a  $Q$ ; com  $I$  em  $P$  e  $J$  em  $Q$ . Neste caso, obtemos a soma horizontal  $p +_H q : M \rightarrow N$ . Em outras palavras  $h = p \cup q$  e  $(f \cup l)_\beta = p +_H q$ .

**Exemplo 2.1.2.** Na Figura 2.4 podemos ver a soma horizontal entre duas aplicações, entre duas esferas  $f_1$  e  $f_2$ , ambas obtidas pela aplicação identidade, passando pela transição do tipo lábios, obtemos a aplicação  $f : S^2 \rightarrow S^2$ , com grau dois e tal que o seu conjunto singular é conexo, sem pontos duplos e com quatro cúspides.

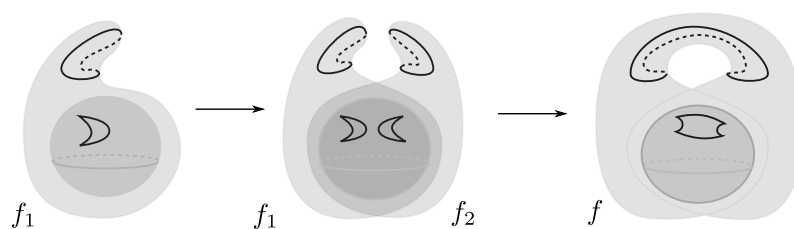


Figura 2.4: Aplicação da esfera na esfera com grau dois.

## Cirurgia vertical

Na cirurgia vertical  $V$ , fazemos a soma conexa pela identificação de dois pequenos discos no domínio sem pontos singulares, um contido numa componente regular positiva e outro numa componente regular negativa (ver Figura 2.3) cuja imagem em  $N$  coincide.

Os discos são substituídos por um tubo que é aplicado em  $N$ , com uma curva singular no meio do tubo. Assim a cirurgia adiciona uma curva disjunta mergulhada no conjunto de ramificação. Se denota esta soma como  $p +_V q$ .

**Exemplo 2.1.3.** Na Figura 2.5 vemos a realização da cirurgia vertical em uma aplicação da esfera no plano com uma curva singular, que passa a ter duas curvas singulares e a superfícies de domínio passa a ser homeomorfa a um toro.

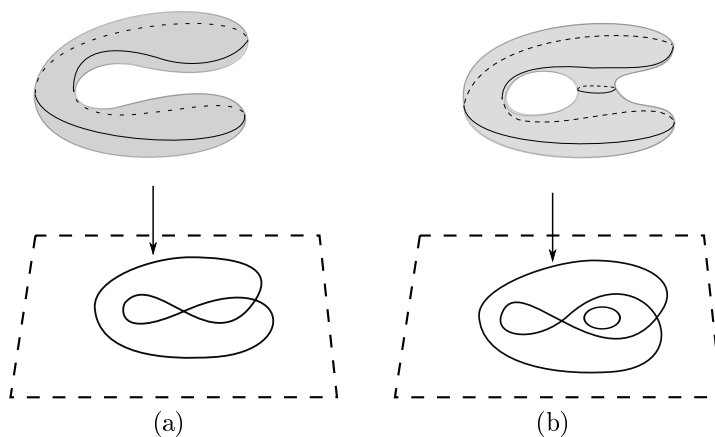


Figura 2.5: Aplicação do toro no plano.

### 2.1.2 Exemplos de aplicações de superfícies no plano

Várias famílias de aplicações entre superfícies podem ser obtidas por cirurgia ou transições a partir de aplicações mais conhecidas.

**Exemplo 2.1.4.** Hacon-Mendes-Romero-Matinez apresentam (ver [11], [22]) algumas tabelas com famílias de contornos aparentes de aplicações da esfera e do toro no plano.

- 1) A Figura 2.6 ilustra contornos aparentes de aplicações dobras da esfera no plano com no máximo: três componentes singulares e quatro pontos duplos ( $C = 0$ ,  $\mu \leq 3$  e  $D \leq 4$ ).

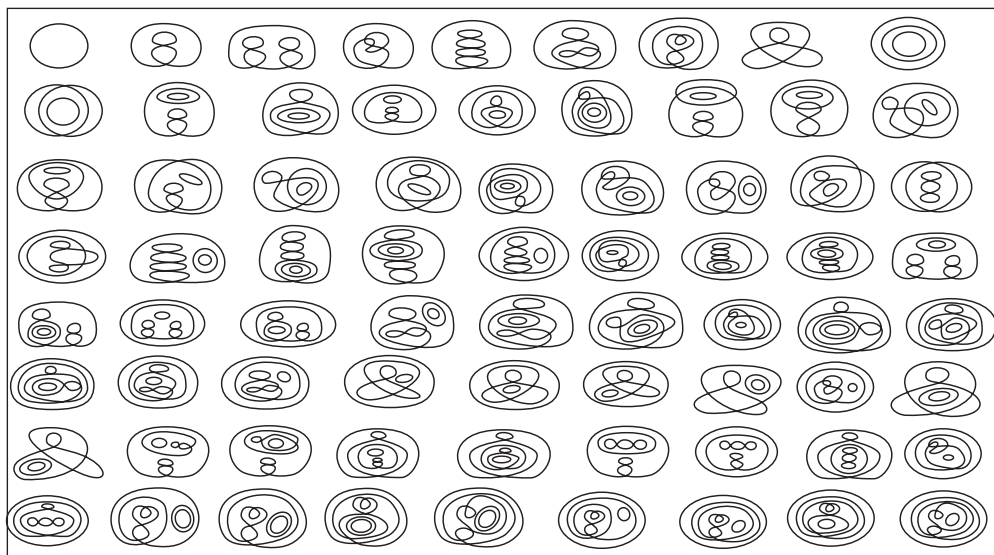


Figura 2.6: Contornos aparente de aplicações de dobra da esfera no plano.

- 2) A Figura 2.7 ilustra contornos aparentes de aplicações dobras da toro no plano com no máximo: três componentes singulares e quatro pontos duplos ( $C = 0$ ,  $\mu \leq 3$  e  $D \leq 4$ ).

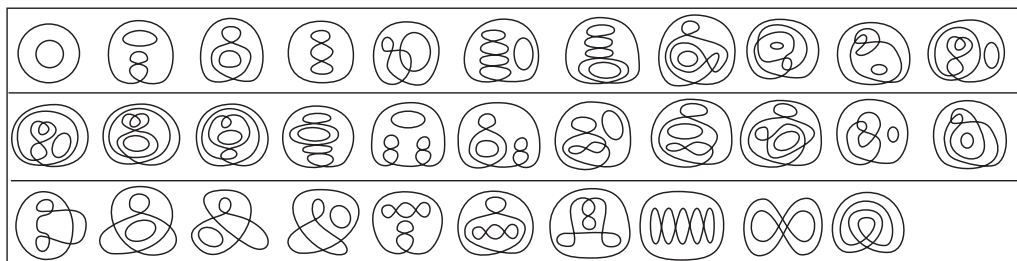


Figura 2.7: Contornos aparente de aplicações de dobra do toro no plano.

- 3) A Figura 2.8 ilustra contornos aparentes de aplicações estáveis da esfera e do toro no plano com no máximo: duas componentes singulares, quatro pontos duplos e duas cúspides ( $C \leq 2$ ,  $\mu \leq 3$  e  $D \leq 4$ ).

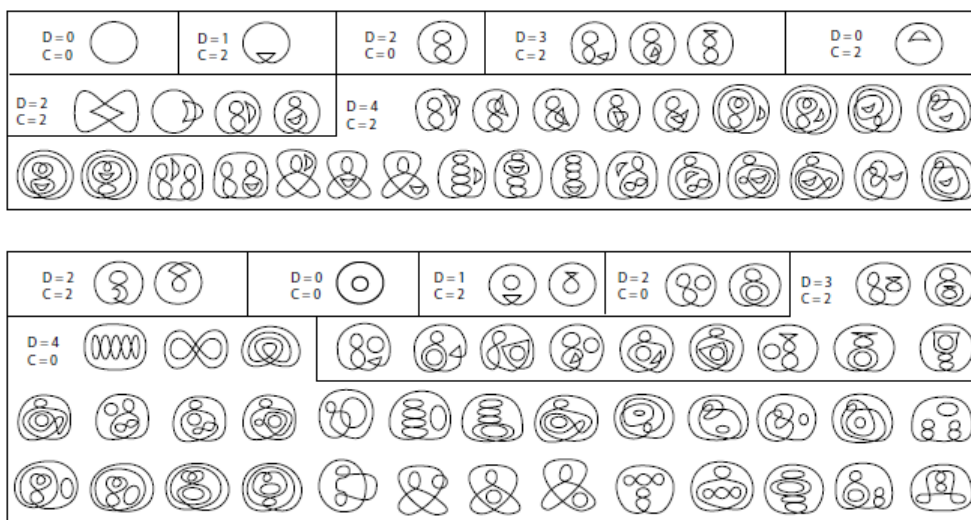


Figura 2.8: Contornos aparentes de aplicações estáveis da esfera e do toro no plano.

Apresentamos alguns exemplos de contornos aparentes de aplicações de superfícies orientadas ou não orientadas no plano (ver [27]).

**Exemplo 2.1.5.** As Figuras 2.9, 2.10(a) e (b) ilustram exemplos de aplicações do plano projetivo no plano. A Figura 2.10(c) e (d) ilustram aplicações da garrafa de Klein.

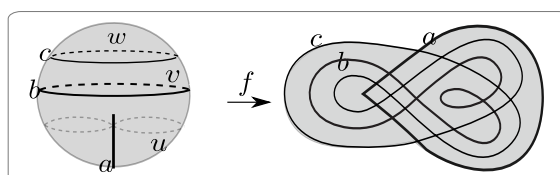


Figura 2.9: Exemplo de aplicação estável do plano projetivo no plano com uma cúspide.

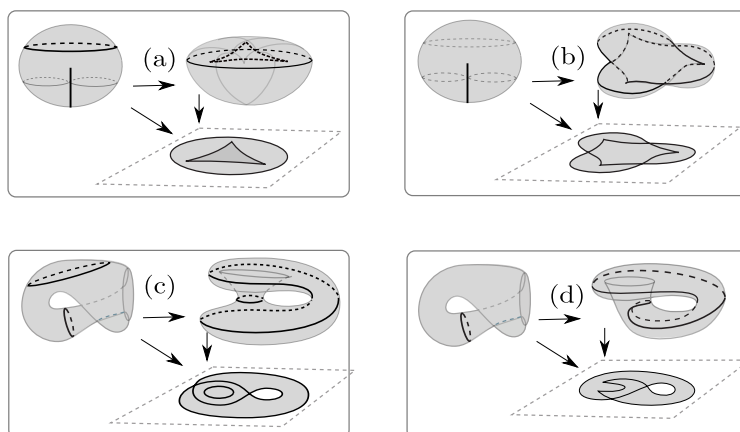


Figura 2.10: Contorno aparente de aplicações estáveis de superfícies não orientadas no plano.

**Exemplo 2.1.6.** A Figura 2.11 ilustra cirurgias horizontais: (a) cirurgia sobre uma aplicação da esfera, obtendo uma aplicação do toro com duas curvas

singulares, (c) e (d) cirurgia sobre a aplicação do toro obtendo aplicações do bitoro, com uma curva singular e com três curvas singulares, respectivamente.

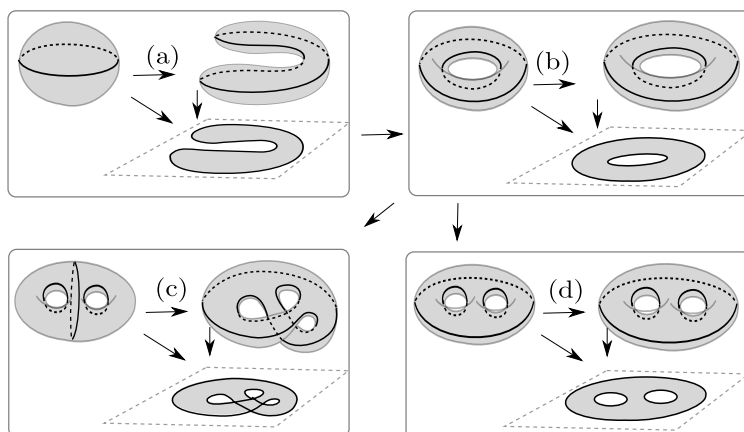


Figura 2.11: Exemplo de cirurgias horizontais.

**Exemplo 2.1.7.** A Figura 2.12 ilustra cirurgias verticais: (a) e (c) cirurgias sobre uma aplicação da esfera, obtendo duas diferentes aplicações do toro com duas curvas singulares e (d) cirurgia sobre a aplicação do toro obtendo nova aplicação do toro com quatro curvas singulares.

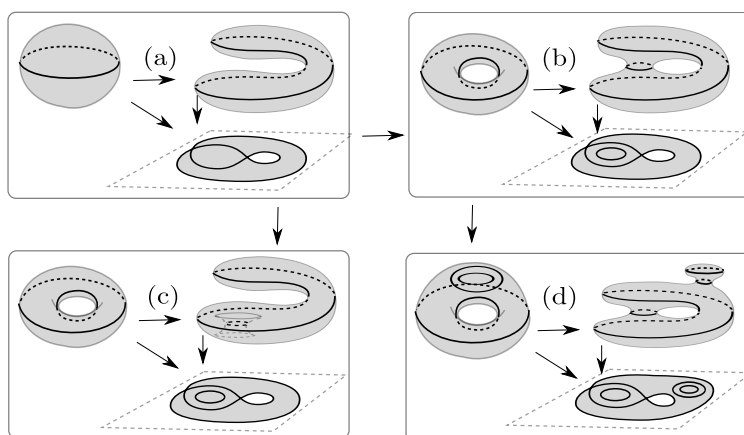


Figura 2.12: Exemplo de cirurgias verticais.

## 2.2 Teorema de Quine

Em 1978, Quine [39] apresentou um teorema global para aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, e o demonstrou usando resultados da Teoria de Variedades Diferenciáveis. Este teorema relaciona a soma do grau das cúspides com a característica de Euler do contradomínio e de dois conjuntos da aplicação:  $M^+$  formado pelo fecho das regiões regulares que tem a orientação preservada pela aplicação e,  $M^-$  formado pelo fecho das regiões regulares que tem a orientação invertida pela aplicação.

**Definição 2.2.1.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável entre duas superfícies suaves com cúspides. Se a cúspide  $q$  aponta para a região positiva da aplicação*

estável  $f$ , dizemos que o sinal da cúspide é  $\text{sign}(q) = +1$ , caso contrário, se a cúspide aponta para a região negativa de  $f$ , dizemos que o sinal da cúspide é  $\text{sign}(q) = -1$ .

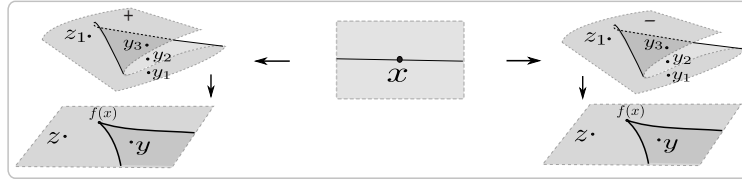


Figura 2.13: Sinal de cúspide.

**Teorema 2.2.2.** (Teorema de Quine, [39]) Sejam  $M$  e  $N$  duas superfícies suaves, compactas, orientadas e conexas,  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável,  $M^+$  o fecho do conjunto dos pontos regulares nos quais  $f$  preserva a orientação,  $M^-$  o fecho dos pontos regulares nos quais  $f$  inverte a orientação e  $q_1, \dots, q_n$  pontos de cúspides. Então,

$$\chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) = \text{deg}(f) \cdot (\chi(N)),$$

onde  $\chi$  denota a característica de Euler,  $\text{sign}(q_k)$  o sinal da cúspide  $q_k$  e  $\text{deg}(f)$  o grau da aplicação  $f$ .

**Corolário 2.2.3.** ([3]) Sejam  $M$  uma superfície diferenciável, compacta, orientada e conexa,  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável,  $M^+$  o fecho do conjunto dos pontos regulares nos quais  $f$  preserva a orientação,  $M^-$  o fecho dos pontos regulares nos quais  $f$  inverte a orientação e  $q_1, \dots, q_n$  pontos de cúspides. Então,

$$\chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) = 2\text{deg}(f),$$

onde  $\chi$  denota a característica de Euler,  $\text{sign}(q_k)$  o sinal da cúspide  $q_k$  e  $\text{deg}(f)$  o grau da aplicação  $f$ .

Sejam  $M$  e  $N$  duas superfícies fechadas e orientadas e  $f, h : M \rightarrow N$  duas aplicações estáveis na mesma classe de homotopia, ou seja,  $f$  pode ser obtida de  $h$  passando apenas por transições de codimensão 1. O resultado a seguir relaciona, do ponto de vista global, o número de cúspides com a característica de Euler das componentes regulares de aplicações estáveis numa mesma classe de homotopia.

**Lema 2.2.4.** ([30]) Sejam  $f$  e  $h$  duas aplicações estáveis na mesma classe de homotopia em  $C^\infty(M, N)$ . Se  $h$  é uma aplicação dobra, então

$$C^+(f) - C^-(f) = [\chi(M_h^+) - \chi(M_h^-)] - [\chi(M_f^+) - \chi(M_f^-)],$$

onde  $C^+$  e  $C^-$  indicam o número de cúspides com sinal positivo e negativo respectivamente.

Aplicando cirurgias horizontais e verticais sobre aplicações dobra com grau zero e aplicações sem singularidades com grau  $d$ , obtêm-se o próximo resultado.



**Lema 2.2.5.** ([30]) Se  $h : M \rightarrow N$  é um aplicação dobra com grau  $d$ , entre duas superfícies fechadas e orientadas  $M$  e  $N$ , obtida por cirurgias horizontais e verticais, então

$$\chi(M_h^+) - \chi(M_h^-) = \text{deg}(h) \cdot \chi(N).$$

O próximo resultado é equivalente ao Teorema 2.2.2 e uma consequência imediata dos Lemas 2.2.4 e 2.2.5. As demonstrações detalhadas destes resultados se encontram em [21].

**Teorema 2.2.6.** ([30]) Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável com grau  $\text{deg}(f)$ , entre duas superfícies fechadas e orientadas  $M$  e  $N$ . Então

$$[\chi(M_f^+) - \chi(M_f^-)] + [C^+(f) - C^-(f)] = \text{deg}(f) \cdot \chi(N),$$

onde  $\chi$  denota a característica de Euler.

**Corolário 2.2.7.** ([6]) Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada  $M$  de grau  $\text{deg}(f)$ . Se o conjunto singular  $\Sigma_f$  é não vazio e conexo, então

$$\left| \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) - 2\text{deg}(f) \right| \leq 2 - \chi(M),$$

onde o sinal das cúspides  $q_k$  satisfaz  $\text{sign}(q_k) = \pm 1$ .

**Demonstração.** Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, onde  $M$  é fechada e orientada, tal que o conjunto singular  $\Sigma f$  é não vazio e conexo, então o conjunto regular é composto de duas componentes conexas, que denotaremos por  $M^+$ , a região que  $f$  preserva a orientação, e por  $M^-$ , a região que  $f$  inverte a orientação. Como as duas superfícies tem único bordo, pelo Corolário 1.5.7,  $\chi(M) = \chi(M^+) + \chi(M^-)$ ,  $\chi(M^+) \leq 1$  e  $\chi(M^-) \leq 1$ . Assim,  $\chi(M^-) = \chi(M) - \chi(M^+) \geq \chi(M) - 1$ , e pelo fato de que  $\chi(M^-) \leq 1$ , temos

$$\chi(M) - 1 \leq \chi(M^-) \leq 1. \quad (2.1)$$

Como  $\chi(S^2) = 2$ , pela Desigualdade 2.1 e Pelo Teorema 2.2.2 temos as duas desigualdades

$$\sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) - 2\text{deg}(f) \leq 2 - \chi(M)$$

e

$$\sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) - 2\text{deg}(f) \geq \chi(M) - 2.$$

Portanto

$$\left| \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) - 2\text{deg}(f) \right| \leq 2 - \chi(M).$$

□

# Capítulo 3

## Aplicações estáveis entre superfícies orientadas

Neste capítulo, estudaremos o contorno aparente de uma aplicação estável de uma superfície compacta no plano, principalmente a relação que tem as singularidades da aplicação com a característica de Euler da superfície. Finalizamos o capítulo, com o estudo do contorno irreduzível de uma aplicação estável de uma superfície fechada na esfera, encontrando a relação do gênero da superfície com as singularidades da aplicação. As referências deste capítulo são [6, 17, 37, 34, 35, 45].

### 3.1 Contorno aparente e característica de Euler

Nesta seção, estudaremos o contorno aparente de aplicações estáveis definidas numa superfície compacta no plano, apresentaremos dois teoremas de Levine [34, 35]. Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação estável de uma superfície compacta no plano. Pela Proposição 1.7.7 existe uma aplicação linear  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $L \circ f$  tem somente pontos críticos não degenerados dos quais estão no conjunto  $Dobras(f)$  de pontos de dobra. Seja  $v$  um vetor unitário em  $\mathbb{R}^2$  no núcleo de  $L$ , tal que  $L$ , cresce à esquerda de  $v$ .

**Definição 3.1.1.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação estável de uma superfície compacta, considere o conjunto singular  $\Sigma f$  de  $f$  com a orientação usual descrita em Seção 3.2.2. Para qualquer componente  $c$  de  $Dobras(f)$ ,*

- 1) *Denotamos a restrição de  $f$  à componente  $c$  por  $f_c$ ,*
- 2) *Denotamos a aplicação  $\frac{(f_c)'}{\|(f_c)'\|}$  por  $g_c$ ,*
- 3) *Para  $\tau \in \{0, 1, 2\}$  e  $c$  uma componente do conjunto  $Dobras(f)$ , denotemos por  $\eta_c^\pm(\tau)$  o número de pontos  $p \in c$  nos quais  $L \circ f$  é singular com índice  $\tau$  e  $g_c(p) = \pm v$ .*

**Lema 3.1.2.** *Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação estável de uma superfície fechada  $M$  e  $c$  uma componente orientada do conjunto  $Dobras(f)$ . Então:*

- 1) Os pontos  $\pm v$  são valores regulares de  $g_c$ ,
- 2)  $\text{deg}_{+v}(g_c) = \eta_c^+(0) - \eta_c^+(1)$ ,
- 3)  $\text{deg}_{-v}(g_c) = \eta_c^-(2) - \eta_c^-(1)$ .

**Demonstração:** Dada a aplicação  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ , considere  $c$  uma componente de  $\text{Dobras}(f)$ . Veremos cada um dos casos separadamente.

1) Primeiro note que para um ponto  $p$  em  $c$ , temos que  $g_c(p) = \pm v \Leftrightarrow (f_c)'(p)$  é um múltiplo de  $v$ , como  $v$  está no núcleo de  $L$ , qualquer múltiplo de  $v$  também está, assim  $(f_c)'(p)$  é um múltiplo de  $v \Leftrightarrow L \circ (f_c)'(p) = 0$ . Usando a regra da cadeia obtemos que

$$L \circ (f_c)'(p) = 0 \Leftrightarrow [(L \circ f)_c]'(p) = 0.$$

Assim,  $g_c(p) = \pm v \Leftrightarrow p$  é um ponto singular de  $(L \circ f)_c$ . Para verificar que  $\pm v$  são valores regulares de  $g_c$ , devemos verificar que  $(g_c)'(p) \neq 0$ . Já que,  $\|g_c(p)\| \equiv 1$  para todo  $p \in c$ , sabemos que se  $g_c(p) = \pm v$ , logo

$$(g_c)'(p) \neq 0 \Leftrightarrow L \circ (g_c)'(p) \neq 0 \Leftrightarrow (L \circ g_c)'(p) \neq 0.$$

Mas, pela regra da cadeia e usando a fórmula de  $g_c$

$$(L \circ g_c)'(p) \neq 0 \Leftrightarrow [(L \circ f_c)]'(p) \neq 0 \Leftrightarrow [(L \circ f)_c]''(p) \neq 0.$$

Assim, vemos que  $\pm v$  são valores regulares de  $g_c \Leftrightarrow (L \circ f)_c$  tem apenas singularidades não degeneradas, o que é natural em virtude da escolha de  $L$  (Proposição [1.7.7](#)).

2) Suponha que  $g_c(p) = \pm v$ . Pelo item 1), isto equivale a dizer que  $p$  é uma singularidade não degenerada de  $(L \circ f)_c$ . Já que  $p \in c \subset \text{Dobras}(f)$  e todas as singularidades de  $L \circ f$  estão contidas no conjunto  $\text{Dobras}(f)$ , segue que  $p$  é uma singularidade não degenerada de  $(L \circ f)_c$  se, e somente se,  $p$  é uma singularidade não degenerada de  $L \circ f$ . Assim só resta determinar o índice de  $L \circ f$  em tal ponto  $p$ . Trabalhando em cartas locais  $\{u, x\}, \{U, X\}$  centradas em  $p$  e  $f(p)$  que colocam  $f$  na forma normal (2) (Definição [1.4.13](#)), temos  $g_c(0, 0) = (1, 0)$ . Suponha que

$$L(U, X) = aX + bU + eU^2 + h(U, X),$$

onde  $h$  envolve  $UX, X^2$  e termos de ordem maior do que dois, então

$$L \circ f(u, x) = L(u, x^2) = ax^2 + bu + eu^2 + h(u, x^2).$$

A ordem de  $h \circ f(u, x)$  é maior que dois em  $u$  e  $x$ . Como assumimos que  $(0, 0)$  é um ponto singular de  $L \circ f$  nessas coordenadas, sabemos que  $b = 0$ . Já que os pontos críticos de  $L \circ f$  são não degenerados, temos que  $ae \neq 0$ . Já que  $L \circ f$  e  $L \circ f / \|a\|$  têm os mesmos pontos críticos com os mesmos índices, então podemos assumir que  $a = \pm 1$  e assim,

$$L \circ f(u, x) = L(u, x^2) = \pm x^2 + eu^2 + h(u, x^2), \text{ e } v = (\pm 1, 0).$$

Nas cartas  $\{u, x\}$ ,  $\{U, X\}$  a equação de  $\Sigma f$  é  $x = 0$  e portanto, temos  $L \circ f(u, 0) = eu^2 + h(u, 0)$ , então  $L \circ f_c$  tem um mínimo se  $e > 0$  e um máximo se  $e < 0$ . Portanto, os pontos para os quais  $g_c(0, 0) = v$  são aqueles para os quais  $L \circ f(u, x) = x^2 + eu^2 + h(u, x^2)$  e  $g_c$  preserva a orientação (resp., inverte) quando  $e > 0$  (resp.,  $e < 0$ ). Assim, os pontos do índice 0 são contados positivamente e os do índice 1, negativamente, consequentemente

$$\deg_{+v}(g_c) = \eta_c^+(0) - \eta_c^+(1).$$

3) Da mesma forma como no item 2), os pontos para os quais  $g_c(0, 0) = -v$  são aqueles para os quais  $L \circ f(u, x) = -x^2 + eu^2 + h(u, x^2)$  e  $g_c$  preservam a orientação (resp., inverte) quando  $e < 0$  (resp.,  $e > 0$ ). Assim, os pontos de índice 2 são contados positivamente e os do índice 1, negativamente, resulta em

$$\deg_{-v}(g_c) = \eta_c^-(2) - \eta_c^-(1).$$

O que finaliza com a demonstração.  $\square$

Os pontos de índice 0 ou 2 acontecem só quando  $g_c = v$  ou  $-v$  respectivamente. Assim podemos escrever simplesmente  $\eta_c(0)$  e  $\eta_c(2)$  sem ambiguidade na notação.

**Teorema 3.1.3.** ([34]) *Sejam  $M$  uma superfície sem bordo e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação estável. Se o conjunto  $\Sigma f$  está orientado como na Definição 3.2.2, então*

$$\chi(M) = \sum_{\alpha} \tau(f(\alpha)),$$

onde a soma é tomada sobre todas as componentes  $f(\alpha)$  de  $f(\Sigma f)$  e  $\tau(f(\alpha))$  representa o número de giro tangente duplo de  $f_\alpha$ .

**Demonstração:** Dada a aplicação  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ , seja  $\alpha$  uma curva do conjunto singular  $\Sigma f$ . Pela Definição 1.6.11, o número de giro tangente duplo de  $f_\alpha$  é dado por:

$$\tau(f(\alpha)) = \sum_c (\deg_{+c}(g_c) + \deg_{-c}(g_c)),$$

onde a soma percorre sobre todas as componentes  $c$  de  $\alpha \setminus \text{Cusps}(f)$ . Definindo  $\eta_c(1) = \eta_c^+(1) + \eta_c^-(1)$ , pelo Lema 3.1.2 temos

$$\tau(f(\alpha)) = \sum_c (\eta_c(0) - \eta_c(1) + \eta_c(2)), \quad (3.1)$$

onde a soma percorre sobre todas as componentes  $c$  de  $\alpha \setminus \text{Cusps}(f)$ . Seja  $L$  como no lema 3.1.2, denote  $\eta_\tau(L \circ f)$  o número de pontos críticos de  $L \circ f$  de índice  $\tau$ , onde  $\tau \in \{0, 1, 2\}$ . Como os pontos críticos de  $L \circ f$  estão no conjunto

$Dobras(f)$ , então:

$$\begin{aligned}\eta_0(L \circ f) &= \sum_{\alpha} \sum_c \eta_c(0); \\ \eta_1(L \circ f) &= \sum_{\alpha} \sum_c \eta_c(1); \\ \eta_2(L \circ f) &= \sum_{\alpha} \sum_c \eta_c(2),\end{aligned}$$

onde  $c$  percorre as componentes de  $\alpha - Cusps(f)$ , para cada curva  $\alpha$  no conjunto singular  $\Sigma f$ . Somando sobre todas as componentes  $\alpha$  de  $\Sigma f$ , pelo Teorema [1.7.6](#), aplicado à aplicação  $L \circ f$  temos

$$\chi(M) = \eta_0(L \circ f) - \eta_1(L \circ f) + \eta_2(L \circ f)$$

Substituindo cada  $\eta_{\tau}(L \circ f)$

$$\chi(M) = \sum_{\alpha} \sum_c \eta_c(0) - \sum_{\alpha} \sum_c \eta_c(1) + \sum_{\alpha} \sum_c \eta_c(2).$$

Logo,

$$= \sum_{\alpha} \sum_c [\eta_c(0) - \eta_c(1) + \eta_c(2)]. \quad (3.2)$$

O resultado desejado

$$\chi(M) = \sum_{\alpha} \tau(f(\alpha)),$$

segue das Equações [3.1](#) e [3.2](#). □

**Definição 3.1.4.** Considere  $P$  uma superfície com bordo, o **dobro de  $P$**  denotado por  $2P$  é o espaço resultante da união disjunta

$$P_1 \cup (\partial P_1 \times [-1, 1]) \cup P_2,$$

onde  $P_1 = P$  e  $P_2 = P$  ao identificar  $x \in \partial P_1$  e  $x \in \partial P_2$  com os pontos  $(x, -1)$  e  $(x, 1)$ , respectivamente, em  $\partial P_1 \times [-1, 1]$ .

Outra forma alternativa de construir  $2P$  é tomando o quociente de  $P \times \{-1, 1\}$  pela relação  $(x, t) \equiv (x', t')$  se, e somente, se  $x = x'$  e também  $t = t'$  ou  $x \in \partial P$ .

**Proposição 3.1.5.** Seja  $P$  uma superfície compacta e com bordo. O espaço quociente  $2P$  é uma superfície fechada.

**Demonstração:** Seja  $P$  uma superfície compacta com bordo. Considere  $2P$  o espaço duplo de  $P$  (Definição [3.1.5](#)). Sejam as aplicações  $f_{\pm}$  dadas por:

$$\begin{aligned}f_{\pm} : P \times \{-1, 1\} &\rightarrow P \\ (x, \pm 1) &\mapsto x,\end{aligned}$$

pelo Teorema [1.1.14](#),  $P$  tem um colar, isto é, existe um difeomorfismo

$$k : \partial P \times [0, 1) \rightarrow V,$$

onde  $V$  é uma vizinhança aberta de  $\partial P$  em  $P$  com  $k(x, 0) = x$  (A qual é a inclusão em  $\partial P$ ). Considere o espaço  $2V$ , que é o duplo de  $V$ , e defina a bijeção  $f_k : \partial P \times (-1, 1) \rightarrow 2V$  por

$$f_k(x, s) = \begin{cases} [k(x, |s|), \frac{s}{|s|}] & \text{se } s \neq 0, \\ [x, \pm 1] & \text{se } s = 0. \end{cases}$$

Assim, pelo Lema [1.1.9](#), as bijeções  $f_+$ ,  $f_-$  e  $f_k$  formam uma estrutura diferenciável em  $2P$ . Portanto  $2P$  é superfície sem bordo. Como  $2P$  é o espaço quociente, do espaço topológico compacto  $P \times \{-1, 1\} / \sim$  (ver Definição [3.1.5](#)), temos que  $2P$  é um espaço topológico compacto e de dimensão. Logo,  $2P$  é uma superfície fechada.  $\square$

**Proposição 3.1.6.** ([3.5](#)) *Sejam  $P$  uma superfície compacta com bordo  $\partial P$  e uma aplicação estável  $f : P \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com o conjunto singular  $\Sigma f = \cup \alpha_i$ , onde  $\alpha_i$  são círculos mergulhados em  $M$  disjuntos um do outro. Seja  $\partial P$  a união de componentes de círculo  $\beta_j$  cada um dos quais é imerso por  $f$ . Então*

$$\chi(P) = \sum_{i=1}^k \tau(f(\alpha_i)) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \tau(f(\beta_j)),$$

onde  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  denotam as componentes irredutíveis de  $\Sigma f$  e as componentes irredutíveis de  $\partial P$ , respectivamente. E  $\tau(f(\alpha_i))$  e  $\tau(f(\beta_j))$  denotam o número de giro tangente duplo das curvas  $f_{\alpha_i} : \alpha_i \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $f_{\beta_j} : \beta_j \rightarrow \mathbb{R}^2$ , respectivamente.

**Demonstração:** Seja  $2P$  o dobro da superfície  $P$ . Pela Proposição [3.1.5](#) temos que  $2P$  é uma superfície fechada. Tomemos a aplicação estável  $\hat{f}$  definida da seguinte forma: seja  $h : (-1, 1) \rightarrow [0, 1]$  uma função par diferenciável satisfazendo:

$$h(s) = \begin{cases} s^2, & 0 \leq |s| < \epsilon < 1/2, \\ |s|, & 1 - \epsilon < |s|, \\ sh'(s) > 0, & s \neq 0. \end{cases}$$

Defina a aplicação diferenciável  $\hat{f} : 2P \rightarrow \mathbb{R}^2$  para os pontos fora da vizinhança colar de  $\partial P$  por:

$$\hat{f}([x, t]) = f(x), \text{ para } x \notin k(\partial P \times [0, 1 - \epsilon])$$

e para os pontos dentro da vizinhança colar de  $\partial P$  por:

$$\hat{f}([k(x, s), t]) = f(k(x, h(s))), \text{ para } (x, s) \in \partial P \times [0, 1 - \epsilon/2).$$

Para o conjunto  $\partial P \times (-\epsilon, \epsilon)$ , temos

$$\hat{f}(f_k(x, s)) = f(k(x, s^2)).$$

A menos de uma leve perturbação, a aplicação  $\hat{f}$  é estável. Pelo Teorema [3.1.3](#),

temos

$$\chi(2P) = 2 \sum_j \tau(f(\alpha_i)) + \sum_j \tau(f(\beta_j)), \quad (3.3)$$

onde  $i$  e  $j$  percorrem (número finito) as componentes de  $\Sigma f$  e  $\partial P$ , respectivamente. A razão que cada componente  $\tau(f(\alpha_i))$  aparece duas vezes é que em  $P$ , na notação representando  $2P$  como um quociente de  $P \times \{1, -1\}$ , a curva  $\alpha_i$  aparece como  $\alpha_i \times -1$  e  $\alpha_i \times 1$ . Ambas cópias de  $\alpha_i$  estão orientadas da mesma maneira, logo dá contribuições iguais para  $\chi(2P)$ . Por outro lado,

$$\chi(2P) = 2\chi(P) - \chi(\partial P).$$

Mas  $\chi(\partial P) = 0$  (Já que  $\partial P$  é difeomorfo a  $S^1$ ). Portanto  $\chi(2P) = 2\chi(P)$ . Substituindo na Equação 3.3, obtemos

$$\chi(P) = \sum_i \tau(f(\alpha_i)) + \frac{1}{2} \sum_j \tau(f(\beta_j)),$$

que é a igualdade desejada. □

## 3.2 Singularidades e contornos aparentes

Nesta seção, introduziremos algumas noções concernentes ao contorno aparente de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$  de uma superfície fechada  $M$ , pode-se encontrar as definições e resultados em [17].

Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície fechada na esfera, cujo contorno aparente não é vazio. Pela Proposição 1.4.20, o conjunto  $\Sigma f$  se decompõe em curvas fechadas e disjuntas, mergulhadas em  $M$ . Logo,  $\Sigma f = \alpha_1 \cup \alpha_2 \dots \cup \alpha_l$ . Denote  $\gamma_i = f(\alpha_i)$  ( $i = 1, \dots, l$ ). Assim, temos o contorno aparente  $\gamma(f) = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_l$ .

**Definição 3.2.1.** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície fechada  $M$  na esfera, cujo contorno aparente não é vazio, então*

1.  $m(f)$  é o menor número de elementos no conjunto  $f^{-1}(y)$ , onde  $y \in S^2$  varia sobre todos os valores regulares de  $f$ .
2. Um valor regular de  $f$  em  $S^2$  tal que  $f^{-1}(\infty)$  consiste de  $m(f)$  pontos, será denotado por  $\infty$ .
3. Para cada  $\gamma_i$ , denote por  $U_i$  a componente de  $S^2 \setminus \gamma_i$  a qual contém  $\infty$ .
4. Uma pequena vizinhança aberta do ponto  $\infty$ , será denotada por  $D_\infty$ .

**Definição 3.2.2.** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície fechada  $M$  na esfera, então a **orientação canônica** de  $\gamma_i(f)$  é tal que na imagem de cada ponto de dobra, a superfície é "dobrada a esquerda", isto é, para cada ponto  $y \in \gamma_i$  o qual não é uma cúspide nem ponto duplo, escolha um vetor normal  $v$  de  $\gamma_i$  em  $y$  tal que  $f^{-1}(y')$  contém mais elementos que  $f^{-1}(y)$ , onde  $y'$  é um*

valor regular de  $f$  próximo a  $y$  na direção de  $v$ . Seja  $\tau$  um vetor tangente de  $\gamma_i$  em  $y$  com respeito a orientação canônica de  $\gamma_i$ . Então, se orienta  $S^2$  pelo par  $(\tau, v)$ .

**Exemplo 3.2.3.** A Figura 3.1 ilustra as orientações canônicas de contornos aparentes de aplicações na esfera.

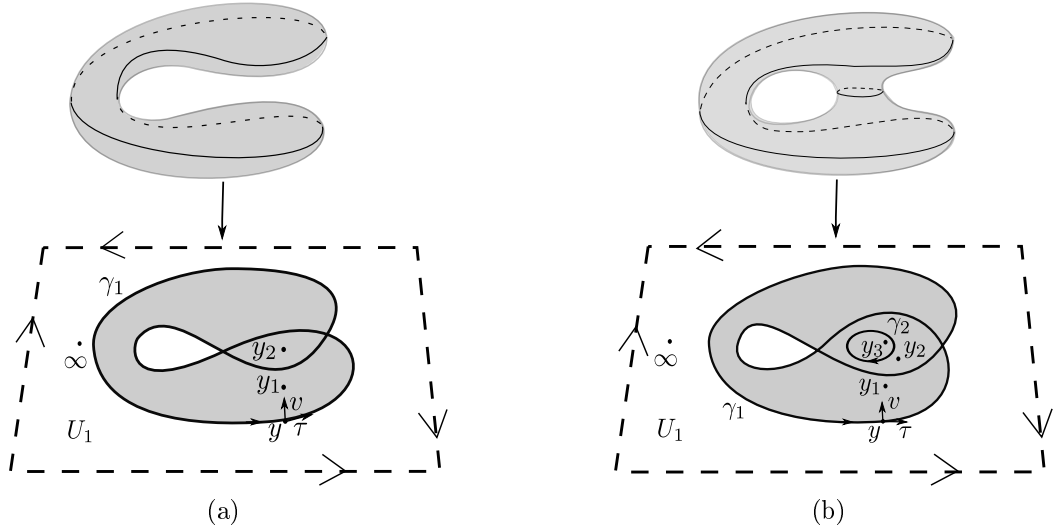


Figura 3.1: Orientação canônica.

**Definição 3.2.4.** Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície fechada  $M$  na esfera, então:

1. Um ponto  $y \in \partial U_i \setminus \{Cusps(f) \cup Duplos(f)\}$  é dito ser **positivo** se a orientação normal  $v$  em  $y$  aponta em direção a  $U_i$ ; caso contrário, este se diz ser **negativo**.
2. Uma componente  $\gamma_i$  se diz ser **positiva** se todo ponto de  $\partial U_i \setminus \{Cusps(f) \cup Duplos(f)\}$  são positivos; caso contrário,  $\gamma_i$  se diz ser **negativa**.
3. O **número de componentes positivas** e **negativas** são denotadas por  $\mu^+$  e  $\mu^-$  respectivamente.

**Definição 3.2.5.** Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície fechada  $M$  na esfera, então um ponto  $y \in \partial U_i \setminus \{Cusps(f) \cup Duplos(f)\}$  é chamado **ponto de partida admissível** se:

- 1)  $y$  é um ponto positivo de uma componente positiva  $\gamma_i$ , ou
- 2)  $y$  é um ponto negativo de uma componente negativa  $\gamma_i$ .

**Definição 3.2.6.** Sejam  $y \in \gamma_i$  um ponto de partida admissível e  $Q \in \gamma_i$  um ponto duplo. Seja  $\beta : [0, 1] \rightarrow \gamma_i$  uma parametrização consistente com a orientação a qual é singular só quando a imagem é uma cúspide tal que  $\beta^{-1}(y) = \{0, 1\}$ . Então:



- 1) *Existem dois números  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  satisfazendo  $\beta(\tau_1) = \beta(\tau_2) = Q$ . Dizemos que  $Q$  é **positivo** se a orientação de  $S^2$  em  $Q$  definida pelo par ordenado  $(\beta'(\tau_1), \beta'(\tau_2))$  coincide com a de  $S^2$  em  $Q$ ; **negativo**, em caso contrário,*
- 2) *O número de pontos duplos positivos e negativos em  $\gamma_i$  são denotados por  $D_i^+$  e  $D_i^-$ , respectivamente.*

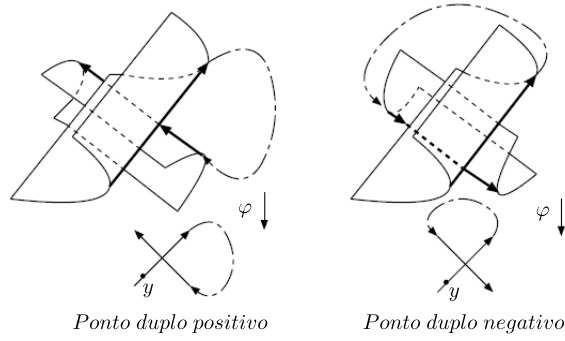


Figura 3.2: Sinal nos pontos Duplos.

A definição de ponto duplo positivo (ou negativo) em  $\gamma_i$  depende da escolha do ponto de partida admissível  $y$ . Entretanto, é conhecido que o número algébrico  $D_i^+ - D_i^-$  não depende da escolha de  $y$  (ver [45]). Assim, o número algébrico  $\sum_{i=1}^k D_i^+ - D_i^-$  está bem definido. Daqui em diante, para uma aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$  e uma componente  $\alpha$  de  $\Sigma(f)$ , nós referimos à curva  $f_\alpha : \alpha \rightarrow S^2$  por sua imagem  $f(\alpha) \in \gamma(f)$ .

**Lema 3.2.7.** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície  $M$  na esfera, então a característica de Euler de  $M$  é dada por:*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \tau(\gamma_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \tau(e_j) + m(f),$$

onde  $\gamma_i$  e  $e_j$  são as componentes do contorno aparente  $f(\Sigma(f))$  e a imagem do bordo da superfície  $M \setminus f^{-1}(D_\infty)$ , respectivamente.

**Demonstração:** Dada a aplicação  $f : M \rightarrow S^2$ , considere um ponto  $\infty$  em  $S^2$  como na Definição 3.2.1 e tome  $D_\infty$  uma pequena vizinhança de  $\infty$ . O número de componentes conexas de  $f^{-1}(D_\infty)$  é  $m(f)$ . Pela Proposição 1.5.6, temos

$$\chi(M) = \chi(M \setminus f^{-1}(D_\infty)) + \chi(f^{-1}(D_\infty)) - \chi((M \setminus f^{-1}(D_\infty)) \cap f^{-1}(D_\infty)), \quad (3.4)$$

como  $\chi(f^{-1}(D_\infty)) = m(f)$ , pois é a característica de Euler de uma união disjunta de  $m(f)$  discos, e

$$\chi((M \setminus f^{-1}(D_\infty)) \cap f^{-1}(D_\infty)) = \chi(\partial(M \setminus f^{-1}(D_\infty))) = 0,$$

pois é a característica de uma união disjunta de  $m(f)$  círculos  $\beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_{m(f)}$ , cada um com característica de Euler zero, então da Equação 3.4, temos

$$\chi(M) = \chi(M \setminus f^{-1}(D_\infty)) + m(f) \quad (3.5)$$

Por outro lado, considere um mergulho  $\rho : (S^2 \setminus D^\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Considere a restrição de  $f$  ao subconjunto  $M \setminus f^{-1}(D_\infty)$  de  $M$ . Pela composição destas duas aplicações obtemos a aplicação  $\rho \circ (f|_{(M \setminus f^{-1}(D_\infty))})$  que está definida na superfície com bordo  $M \setminus f^{-1}(D_\infty)$  no plano. Perturbando  $\rho \circ (f|_{(M \setminus f^{-1}(D_\infty))})$  levemente podemos obter uma aplicação estável

$$\bar{f} : M \setminus f^{-1}(D_\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

satisfazendo  $\bar{f}(\beta_i) \cap \bar{f}(\beta_j) = \emptyset$  se  $i \neq j$  e  $\Sigma \bar{f} \cap \partial(M \setminus f^{-1}(D_\infty)) = \emptyset$ . Identificando o contorno aparente  $\gamma(\bar{f})$  com o contorno  $\gamma(f)$  e aplicando a Proposição 3.1.6, temos que a característica de Euler de  $M \setminus f^{-1}(D_\infty)$  é dada por

$$\chi(M \setminus f^{-1}(D_\infty)) = \sum_{i=1}^k \tau(\gamma_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \tau(e_j), \quad (3.6)$$

onde  $\gamma_i$  e  $e_j$  são as componentes do contorno aparente  $f(\Sigma(f))$  e a imagem do bordo da superfície  $M \setminus f^{-1}(D_\infty)$ , respectivamente. O resultado desejado

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \tau(\gamma_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \tau(e_j) + m(f)$$

segue das Equações 3.5 e 3.6. □

**Lema 3.2.8.** *Os números de giro tangente duplo das curvas  $f_{\alpha_i}$ , de  $f(\Sigma(f))$ , e das componentes  $f(\beta_i)$ , da imagem do bordo da superfície  $M \setminus f^{-1}(D_\infty)$ , do Lema 3.2.7 são dados por:*

$$\tau(\gamma_i) = 2\eta(\gamma_i) + 2D_i^- - 2D_i^+ + C_i^+ - C_i^- \quad \text{e} \quad \tau(e_j) = 2,$$

onde  $\eta(\gamma_i) = \pm 1$  é definida de acordo com a orientação de  $\gamma_i$ ,  $C_i^+$  (ou  $C_i^-$ ) denota o número de cúspides positivas (respectivamente negativas) de  $\gamma_i$  e  $D_i^+$  (ou  $D_i^-$ ) o número de pontos duplos positivos (respectivamente negativos) de  $\gamma_i$

**Demonstração:** Seja  $\bar{f}$  como no Lema 3.2.7 então, oriente cada componente  $\gamma_i$  de  $\Sigma(\bar{f})$ , tal que  $\gamma_i = f(\alpha_i)$  possui a orientação canônica e cada componente  $e_j$  do bordo da superfície, de forma que ao percorre-la, a superfície esteja à esquerda, pelo Teorema A.0.14, para a curva  $\gamma_i$ , o número de giro tangente duplo é dado por

$$\tau(\gamma_i) = 2\eta(\gamma_i) + 2D_i^- - 2D_i^+ + C_i^+ - C_i^-, \quad (3.7)$$

onde  $\eta(\gamma_i) = \pm 1$  é definida de acordo com a orientação da curva  $\gamma_i$ ,  $C_i^+$  (ou  $C_i^-$ ) denota o número de cúspides positivas (respectivamente negativas) de  $\gamma_i$  e  $D_i^+$  (ou  $D_i^-$ ) o número de pontos duplos positivos (respectivamente negativos) de  $\gamma_i$ .

Com a orientação dada a  $\gamma_i$ , cada cúspide é negativa, logo

$$\tau(\gamma_i) = 2\eta(\gamma_i) + 2D_i^- - 2D_i^+ - C_i,$$

onde  $C_i$  denota o número de cúspides de  $\gamma_i$ . Por outro lado, sabemos que cada curva  $\bar{f}_{\beta_j}$ , que é restrição de  $\bar{f}$  às componentes do bordo  $\beta_j$ , é uma curva fechada simples, então pelo Teorema [A.0.12](#),  $\tau(e_j) = 2$ . Obtendo assim o resultado desejado.  $\square$

**Proposição 3.2.9.** ([\[17\]](#)) Para uma aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$  de uma superfície fechada de gênero  $g(M)$ , temos

$$g(M) = \epsilon(M)[(D^+ - D^-) + \frac{C(f)}{2} + (1 + \mu^+ - \mu^-) - m(f)],$$

onde  $\epsilon(M) = 1$  se  $M$  for orientável ou  $\epsilon(M) = 2$  caso contrário,  $m(f)$  denota o menor número das pré-imagens de valores regulares,  $\mu^+$  e  $\mu^-$  denotam as componentes positivas e negativas, respectivamente.

**Demonstração:** Sejam  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície de gênero  $g(M)$  e  $\alpha_i$  uma componente do conjunto singular  $\Sigma f$ . Considerando a aplicação  $\bar{f}$  como no Lema [3.2.7](#) e aplicando o Lema [3.2.8](#) temos que o número de giro tangente duplo da curva  $\gamma_i = f(\alpha_i)$  é dado por

$$\tau(\gamma_i) = 2\eta(\gamma_i) + 2D_i^- - 2D_i^+ + C_i^+ - C_i^-,$$

pela orientação dada à curva, temos  $\eta(\gamma) = +1$  se, e somente se, a componente do contorno aparente  $\gamma_i$  é negativa, então fazendo a soma sobre todas as componentes do conjunto singular

$$\sum_{i=1}^k \tau(\gamma_i) = 2\mu^- - 2\mu^+ + 2D^- - 2D^+ - C(f). \quad (3.8)$$

Por outro lado, pelo Lema [3.2.8](#) para uma componente do bordo  $\beta_i$  de  $M \setminus f^{-1}(D_\infty)$ , temos  $\tau(f(\beta_j)) = 2$ . Fazendo a soma sobre todas as componentes do bordo da superfície  $M \setminus f^{-1}(D_\infty)$ , temos

$$\sum_{i=1}^k \tau(f(\beta_i)) = \sum_{j=1}^{m(f)} 2. \quad (3.9)$$

Substituindo as Equações [3.8](#) e [3.9](#) no Lema [3.2.7](#), temos

$$\chi(M) = 2\mu^- - 2\mu^+ + 2D^- - 2D^+ - C(f) + 2m(f).$$

Para  $M$  orientável, pela Definição 1.5.10,  $g(M) = \frac{1}{2}(2 - \chi(M))$ , logo

$$\begin{aligned} g(M) &= \frac{1}{2}(2 - \chi(M)) = \frac{1}{2}(2 - (2\mu^- - 2\mu^+ + 2D^- - 2D^+ - C + 2m(f))) \\ &= 1 - \mu^- + \mu^+ - D^- + D^+ + \frac{C(f)}{2} - m(f) \\ &= 1[(D^+ - D^-) + \frac{C(f)}{2} + (1 + \mu^+ - \mu^-) - m(f)]. \end{aligned}$$

Para  $M$  não orientável, pela Definição 1.5.10, o resultado segue da seguinte igualdade  $\chi(M) = 2 - g(M)$ . Completando assim a prova.  $\square$

A fórmula na Proposição 3.2.9 não depende da escolha de  $\infty$ . A seguir, estudaremos a forma de um contorno aparente de uma aplicação estável cujo contorno é irreduzível.

**Lema 3.2.10.** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície fechada e orientada. Se o contorno aparente  $\gamma(f)$  de  $f$  possui um ponto duplo, então  $\gamma(f)$  possui pelo menos um ponto duplo negativo.*

**Demonstração:** Dado o contorno aparente  $\gamma(f)$  de  $f$ , escolha um ponto admissível  $y$  em  $\gamma(f)$ . Percorrendo  $\gamma(f)$  a partir de  $y$  e seguindo a orientação canônica de  $\gamma(f)$  temos que, quando se passa por um ponto duplo positivo em  $\gamma(f)$  pela primeira vez, o número de pontos na imagem inversa diminui em dois (ver Figura 3.2). Isso é uma contradição, pois a superfície está dobrada a esquerda.  $\square$

**Proposição 3.2.11.** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície orientada, tal que o contorno aparente  $\gamma(f)$  de  $f$  é irreduzível e possui apenas um ponto duplo negativo  $p_0$ . Fixando um ponto de partida admissível  $y \in \gamma(f)$  e denotando por  $U$  a componente de  $S^2 \setminus \gamma(f)$  que contém  $\infty$ , tem-se:*

- 1) O contorno  $\gamma(f)$  consiste em dois laços começando e terminando em  $p_0$ .
- 2) Os dois laços não se intersectam exceto em  $p_0$ .

**Demonstração:** Seja  $p_0 \in \gamma(f)$  um ponto duplo negativo, então escolhendo um ponto admissível  $y \in \gamma(f)$ , pela demonstração no Lema 3.2.10, o ponto duplo  $p_0 \in \partial U$ , ou seja,  $p_0$  é o primeiro ponto duplo que aparece ao percorrer  $\gamma(f)$  a partir de  $y$  com a orientação canônica. Mostremos que  $p_0$  é o único ponto duplo em  $\partial U$ . De fato, suponha que  $\partial U$  contenha mais de um ponto duplo. Denote por  $q \in \partial U$  o primeiro ponto duplo que se encontra, percorrendo ao longo de  $\gamma(f)$  a partir de  $y$  e passando  $p_0$ , observe que  $q$  é um ponto duplo positivo, pois caso contrário, depois de passar pelo ponto duplo  $q$ , a nossa esquerda teríamos  $m(f) + 6$  pré-imagens e à direita  $m(f)$ , o que é contradição. Da suposição de que  $\gamma(f)$  é irreduzível, deve haver outro ponto duplo  $\tilde{q}$  em  $\partial U$ . O ponto duplo  $\tilde{q}$  é um ponto duplo negativo, pois caso contrário do lado direito, ou seja, pontos em  $\partial U$ , teriam  $m(f) - 2$  pré-imagens, o que é contradição pela definição de  $m(f)$ . Assim o ponto  $\tilde{q}$  é diferente de  $p_0$  e  $q$ . É contradição, pois por hipótese existe um único ponto duplo negativo.  $\square$

**Definição 3.2.12.** Um **laço** na esfera é uma curva fechada  $l : [0, 1] \rightarrow S^2$  tal que  $l(0) = p$  e  $l(1) = p$ . O ponto  $p$  é chamado de ponto base.

**Definição 3.2.13.** Sejam  $\gamma(f)$  o contorno irreduzível de uma aplicação estável  $f$  de uma superfície na esfera. Denotaremos por  $l_p$  o laço com base no ponto duplo positivo  $p \in \gamma$ , percorrendo a curva  $\gamma(f)$  a partir de um ponto inicial  $y \in \gamma(f)$ , seguindo a orientação canônica desta curva.

Note que para cada  $p$ , tal laço é único porque  $\gamma(f)$  é irreduzível.

**Exemplo 3.2.14.** A Figura 3.3 ilustra um laço  $l_p$  do contorno aparente,  $\gamma(f)$ , de uma aplicação estável do toro na esfera.

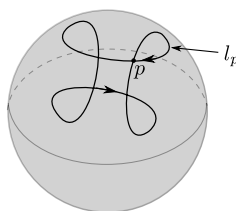


Figura 3.3: Laço  $l_p$  do ponto duplo  $p$ .

**Proposição 3.2.15.** Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície fechada e orientada, e  $p$  um ponto duplo positivo do contorno irreduzível  $\gamma(f)$ . O laço  $l_p$  contém um único ponto duplo, sendo este  $p$ .

**Demonstração:** Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável. Escolha um ponto admissível  $y \in S^2$  e denote  $p_0, p_1, \dots, p_k \in \gamma(f)$  os pontos duplos do contorno aparente, indexados de acordo com a ordem no qual aparecem enquanto percorremos ao longo de  $\gamma(f)$  a partir do ponto  $y$ . Pelo Lema 3.2.10, o ponto  $p_0$  é um ponto duplo negativo, assim os outros pontos duplos são positivos, pois por hipótese  $\gamma(f)$  só possui um ponto duplo negativo. Denote por  $l_1, \dots, l_k$  os laços associados a  $p_0, p_1, \dots, p_k$ , respectivamente. Se cruzarmos  $p_1$  pela primeira vez, se reduz por dois pontos na imagem inversa de  $f$ . Isso significa que, para cada ponto da região que está "à esquerda" enquanto percorremos ao longo de  $l_1$ , o número da imagem inversa de  $f$  é igual a somar 2 ao menor número da pré-imagem, isto é,  $m(f) + 2$ , pelo menos até encontrarmos o próximo ponto duplo. Seja  $q \in l_1$  o próximo ponto duplo que se encontra após cruzarmos  $p_1$  pela primeira vez. O ponto  $q \neq p_0$ , pois antes da segunda vez que se encontra com  $p_0$ , temos que passar por  $y$ , mas  $y \notin l_1$  pois, antes da segunda vez que se cruza  $p_0$ , o número de pontos na pré-imagem de um ponto imediatamente a nossa esquerda deve ser  $m(f) + 4$ . Suponha  $q \neq p_1$ , então  $q = p_2$  ou ... ou  $p_k$ . Assim existe uma região adjacente a  $q$  tal que para cada ponto da região, o número de pré-imagem é igual a  $m(f) - 2$ , o que é contradição pois  $m(f)$  é o menor número nas pré-imagem de pontos regulares. Assim,  $q = p_1$ . Portanto, o único ponto duplo no laço  $l_1$  é  $p_1$ . Analogamente podemos provar que para cada  $p$  ponto duplo positivo, o laço  $l_p$  contém unicamente um ponto duplo, sendo este  $p$ .  $\square$

# Capítulo 4

## Contornos minimais de aplicações entre superfícies

Neste capítulo, apresentaremos aplicações estáveis entre superfícies com contornos irredutíveis e alguns resultados sobre algumas famílias particulares destes contornos aparentes, chamadas de contornos minimais, baseado em [6, 17, 37, ?, ?, 46].

### 4.1 Construção de contornos irredutíveis

Nesta seção, apresentaremos resultados sobre contornos minimais de superfícies fechadas e orientada na esfera. Antes porem veremos a construção de alguns contornos irredutíveis, ou seja, aplicações com conjunto singular conexo.

**Definição 4.1.1.** *Uma aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  de grau  $\deg(f) = d$ , onde  $M_g$  é uma superfície fechada e orientada de gênero  $g$ , será denotada por  $f_{d,g}$ .*

**Definição 4.1.2.** *Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície fechada e orientada de gênero  $g$ . Diremos que uma cirurgia horizontal adiciona uma **alça** quando se realiza uma cirurgia à aplicação obtida da aplicação  $f$  depois de duas transições tipos lábios.*

**Exemplo 4.1.3.** A Figura 4.1 ilustra uma aplicação estável  $f$  do toro na esfera, com grau um e quatro cúspides. Esta aplicação foi obtida por uma cirurgia horizontal sobre uma mesma aplicação estável  $f_2$  da esfera na esfera com duas componentes singulares e quatro cúspides, obtida da aplicação identidade ( $Id : S^2 \rightarrow S^2$ ) por duas transições tipos lábios.

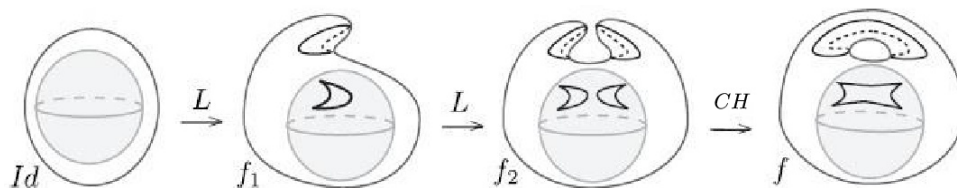


Figura 4.1: Adição de alça na aplicação identidade da esfera

O contorno aparente da aplicação no Exemplo 4.1.3 está ilustrada na Figura 4.2b. Outros contornos aparentes de aplicações do toro na esfera de grau um pode ser visto na Figura 4.2.

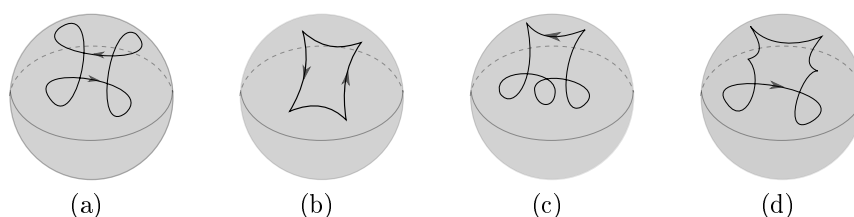


Figura 4.2: Contornos aparentes de aplicações de toro na esfera de grau um.

**Lema 4.1.4.** Para cada inteiro  $d \geq 2$ , existe uma aplicação estável  $f_{d,0} : S^2 \rightarrow S^2$  de grau  $d$ , cujo contorno possui  $2d$  cúspides e nenhum ponto duplo.

**Demonstração:** Faremos a construção por indução sobre  $d = \deg(f)$ . A aplicação  $f_1 : S^2 \rightarrow S^2$ , obtida pela aplicação identidade, passando pela transição do tipo lábios, possui grau um e é tal que o seu conjunto singular é conexo, sem pontos duplos e com duas cúspides (ver Figura 2.4). Fazendo a cirurgia horizontal das aplicações entre duas esferas  $f_1$  e  $f_2$ , ambas obtidas pela aplicação identidade, passando pela transição do tipo lábios, obtemos a aplicação  $f : S^2 \rightarrow S^2$ , com grau dois e tal que o seu conjunto singular é conexo, sem pontos duplos e com quatro cúspides, como ilustrado na Figura 2.4. Agora assumimos que o conjunto singular da aplicação estável  $g : S^2 \rightarrow S^2$  possui uma curva conexa, e além disso,  $g$  contém exatamente  $2\deg(g)$  cúspides, para  $d \leq m$ . Vamos mostrar que existe uma aplicação estável  $g' : S^2 \rightarrow S^2$ , com  $\deg(g') = m + 1$ , tal que  $\Sigma g'$  é conexo e possui  $2\deg(g')$  cúspides.

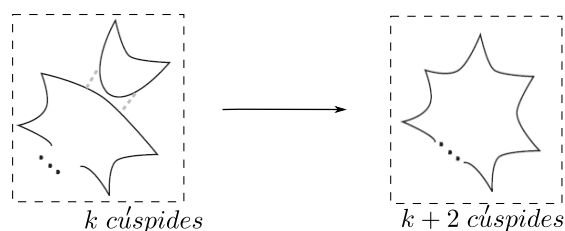


Figura 4.3: Alterando o grau e o número de cúspides.

Consideramos  $g' = g +_H f_2$  definida na Subseção 2.1.1, onde  $g : S^2 \rightarrow S^2$  é tal que  $\deg(g) = m$  e  $f_2$ , a qual possui duas cúspides e nenhum ponto duplo. Assim,

$\deg(g') = \deg(g) + \deg(f_2) = m + 1$ . Pela hipótese de indução, o conjunto singular  $\Sigma g$  possui exatamente  $2\deg(g)$  cúspides e é conexo. Com a cirurgia horizontal, as curvas singulares de  $g$  e  $f_2$  se conectam, formando uma única curva singular (ver Figura 4.3). Por construção, esta é a curva singular de  $g'$ , e com isso, o contorno aparente de  $g'$  possui  $2\deg(g) + 2 = 2m + 2 = 2(m + 1) = 2\deg(g')$  cúspides e é conexo. Daí, podemos construir aplicações estáveis  $f_{d,0} : S^2 \rightarrow S^2$  com  $\deg(f_{d,0}) > 0$  arbitrário, tal que o conjunto singular de  $f$ ,  $\Sigma f$  é conexo, possui  $2d$  cúspides e nenhum ponto duplo.  $\square$

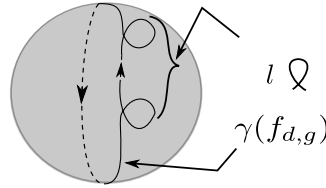


Figura 4.4: Contorno aparente de  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$ , onde  $d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$ .

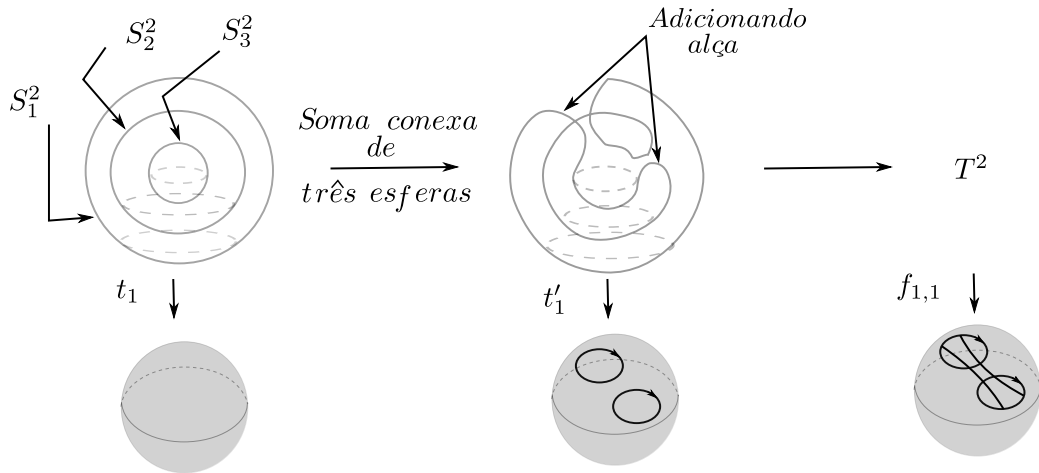


Figura 4.5: A construção de uma aplicação estável do toro na esfera na Figura 4.2a.

**Lema 4.1.5.** *Para cada inteiro  $d \geq 1$ , existe  $f_{d,d} : M_d \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de grau  $d$  cujo contorno está na Figura 4.4 com  $l = 2d + 2$ .*

**Demonstração:** A aplicação estável  $f_{1,1} : T^2 \rightarrow S^2$  cujo contorno está na Figura 4.2a é obtida pelo seguinte caminho (Figura 4.5): Pondo  $S_i^2 = S^2$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). A aplicação  $t_1 : S_1^2 \cup S_2^2 \cup S_3^2 \rightarrow S^2$  é definida por  $t_1|_{S_1^2} = t_1|_{S_2^2} = id_{S^2}$  e  $t_1|_{S_3^2}$  é a aplicação antipodal de  $S^2$ . Tomando a soma conexa das três esferas, obtemos uma aplicação estável  $t'_1 : S^2 \rightarrow S^2$ . Adicionando uma alça a  $t'_1$  obtemos a desejada aplicação estável  $f_{1,1} : T^2 \rightarrow S^2$ . A aplicação  $f_{2,2} : M_2 \rightarrow S^2$  é construída da seguinte maneira (Figura 4.6). Considere a aplicação  $t_2 : T^2 \cup S^2 \rightarrow S^2$  definida por  $t_2|_{T^2} = f_{1,1}$  e  $t_2|_{S^2} = id|_{S^2}$ . A aplicação  $t_2$  é estável e de grau dois, assim tomando a soma conexa de  $T^2$  e  $S^2$ , obtemos uma aplicação estável de grau dois  $t'_2 : T^2 \rightarrow S^2$ . Adicionando uma alça a  $t'_2$ , obtemos a aplicação estável desejada  $f_{2,2} : M_2 \rightarrow S^2$ .



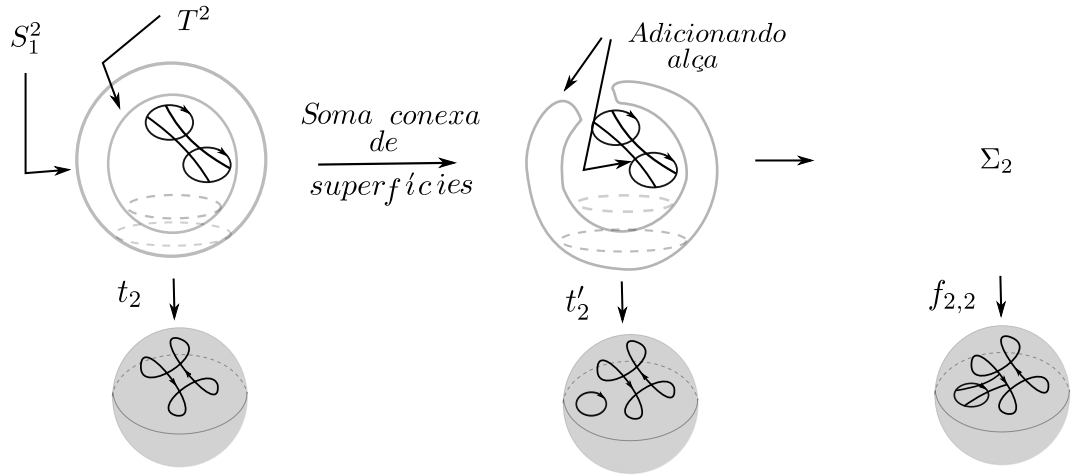


Figura 4.6: A construção de uma aplicação estável  $f_{2,2} : M_2 \rightarrow S^2$ .

Fazendo o mesmo processo realizado para construir  $f_{2,2} : M_2 \rightarrow S^2$ , podemos indutivamente construir uma aplicação estável  $f_{d,d} : M_d \rightarrow S^2$ .  $\square$

Nas Figuras 2.4 e 1.7 temos as duas aplicações  $f_1 +_H f_2$  e  $g$ , respectivamente. Estas aplicações podem ser obtidas ao fazer cirurgias horizontais às aplicações  $f_1, f_2 : S^2 \rightarrow S^2$ , obtidas pela aplicação identidade, passando pela transição do tipo lábios e nas aplicações  $f_1$  e  $h$  (Figura 1.7).

**Proposição 4.1.6.** Para cada  $g \geq 1$  e cada  $d \geq g$ , existe uma aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  com contorno irreduzível tal que o par  $(C, D) = (2(d - g), 2g + 2)$ .

**Demonstração:** Considere o par  $(d, g)$  satisfazendo  $g \geq 1$  e  $d \geq g$ . Fazendo a soma conexa indutivamente de  $f_1$  com a aplicação  $f_{g,g}$  do Lema 4.1.5, obtemos para  $d \geq g$  uma aplicação estável  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$  de grau  $d$  com  $m(f_{d,g}) = d$  (Figura 4.7). Em cada soma conexa, o número de cúspides aumenta em dois. Fazendo o processo,  $d - g$  vezes temos que o contorno  $\gamma(f_{d,g})$  é irreduzível e possui  $2(d - g)$  cúspides, um ponto duplo negativo e  $2g + 1$  pontos duplos positivo, ou seja,  $(C, D) = (2(d - g), 2g + 2)$ .  $\square$

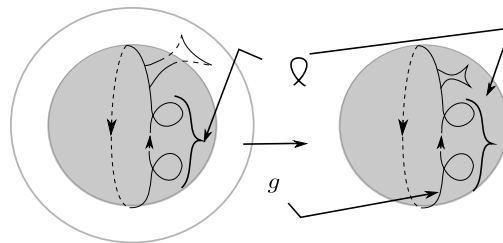


Figura 4.7: A construção de uma aplicação estável  $f_{g+1,g} : M_g \rightarrow S^2$ .

**Proposição 4.1.7.** Para cada  $d \neq 0$  e  $g = 1$ , existe  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável com contorno irreduzível tal que o par  $(C, D)$  é  $(2(d - 1), 4)$  ou  $(2d + 2, 0)$ .

**Demonstração:** Considere o par  $(d, g)$  tal que  $d \neq 0$  e  $g = 1$ . Pela Proposição 4.1.6, fixando  $g = 1$  então, existe uma aplicação estável de grau  $d$ , com contorno irreduzível tal que o par  $(C, D) = (2(d - 1), 4)$ . Por outro lado, fazendo somas conexas indutivamente de  $f_1$  com a aplicação  $f' : T^2 \rightarrow S^2$  cujo contorno está na Figura 4.2b, obtemos uma aplicação estável  $f : T^2 \rightarrow S^2$  com grau  $d \geq 1$  com contorno irreduzível. O contorno da aplicação estável possui  $2d + 2$  cúspides e nenhum ponto duplo.  $\square$

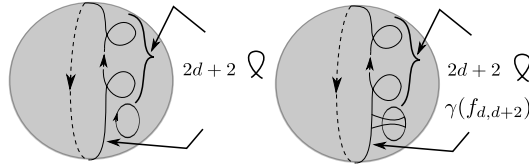


Figura 4.8: Contorno aparente de  $f_{d,d+2} : M_{d+2} \rightarrow S^2$ .

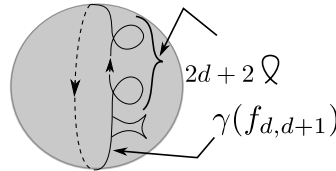


Figura 4.9: Contorno aparente de  $f_{d,d+1} : M_{d+1} \rightarrow S^2$ .

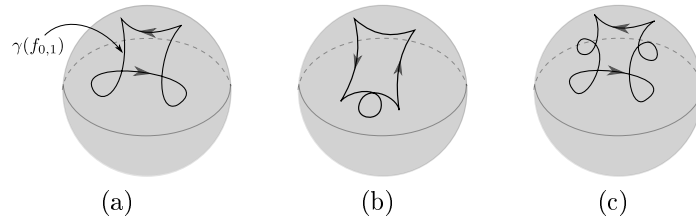


Figura 4.10: Contornos aparentes de aplicações de grau zero do toro na esfera.

**Lema 4.1.8.** *Para cada inteiro  $d \geq 1$ , existe  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de grau  $d$  com contorno irreduzível satisfazendo  $l = 2d + 2$  (ver Figura 4.4).*

**Demonstração:** Seja o par  $(d, g)$  tal que  $g \geq 1$  e  $d \geq 0$ . Suponha  $d \neq 0$  e consideremos a aplicação  $f_{d,d}$  construída como no Lema 4.1.5. Adicionando um par de alças a  $f_{d,d}$ , indutivamente, obtemos uma aplicação estável  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$  de grau  $d$  com  $m(f_{d,g}) = d$  e  $l = d + g + 2$  (ver Figura 4.4), para cada par  $(d, g)$  com  $1 \leq d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$ , como ilustra a Figura 4.8 para o caso de  $g = d + 2$ . O contorno  $\gamma(f_{d,g})$  é irreduzível e possui um ponto duplo negativo,  $d + g + 1$  pontos duplos positivos e nenhuma cúspides. Assim,  $C + D = d + g + 2$ . Note que ao lado esquerdo da Figura 4.8, uma alça é adicionada verticalmente; no lado direito, uma alça é adicionada horizontalmente.  $\square$

**Lema 4.1.9.** *Para cada par  $(d, g)$  satisfazendo  $1 \leq d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$ , existe uma aplicação estável  $f_{d,g+1} : M_{g+1} \rightarrow S^2$  de grau  $d$ .*

**Demonstração:** Consideremos a aplicação  $f_{d,g}$  construída no Lema 4.1.8. Adicionando uma alça à aplicação estável  $f_{d,g}$  horizontalmente, obtemos para cada par  $(d, g)$  satisfazendo  $1 \leq d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$ , uma aplicação estável  $f_{d,g+1} : M_{g+1} \rightarrow S^2$  de grau  $d$  com  $m(f_{d,g+1}) = d$  (Figura 4.9). O contorno  $\gamma(f_{d,g+1})$  é irreduzível e possui duas cúspides, um ponto duplo negativo e  $d+g+1$  pontos duplos positivos, ou seja,  $C+D = d+g+4$ . Portanto, para cada  $(d, g')$  satisfazendo  $1 \leq d \leq g'$  e  $d \not\equiv g' \pmod{2}$  existe uma aplicação  $f_{d,g'} : M'_g \rightarrow S^2$  com  $m(f_{d,g'}) = d$ . O contorno  $\gamma(f_{d,g'})$  é irreduzível e possui duas cúspides, um ponto duplo negativo e  $d+g'$  pontos duplos positivos, ou seja,  $(C+D) = (2, d+g'+1)$ .  $\square$

**Proposição 4.1.10.** *Para quaisquer inteiro  $g \geq 1$  e  $d \geq 0$ , existe uma aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  com contorno irreduzível tal que o par  $(C, D)$  é algum dos itens seguintes:*

$$(C, D) = \begin{cases} (1)(0, d+g+2) & \text{se } d \leq g \text{ e } d \equiv g \pmod{2}, \\ (2)(2, d+g+1) & \text{se } d \leq g \text{ e } d \not\equiv g \pmod{2}, \end{cases}$$

**Demonstração:** Pelos Lemas 4.1.8 e 4.1.9, basta provar o caso quando  $d = 0$ . Em [37], Pignoni construiu, para cada  $g \geq 1$ , uma aplicação estável  $p_g : M_g \rightarrow \mathbb{R}^2$  com contorno minimal (ver Teorema ??) então, definindo  $f_{0,g} : M_g \rightarrow S^2$  por  $f_{0,g} = j \circ p_g$ , onde  $j$  denota a inclusão  $j : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = S^2$ , temos que a aplicação  $f_{0,g}$  é estável de grau zero com contorno irreduzível e  $m(f_{0,g}) = 0$ . Se  $g$  é ímpar, então  $\gamma(f_{0,g})$  possui um ponto duplo negativo,  $g$  pontos duplos positivos e duas cúspides. Assim,  $C+D = g+3$ . Se  $g$  é par, então  $\gamma(f_{0,g})$  possui um ponto duplo negativo,  $g+1$  pontos duplos positivos e nenhuma cúspide. Assim,  $C+D = g+2$ .  $\square$

**Exemplo 4.1.11.** A Figura 4.11 ilustra os contornos irreduzíveis da aplicação  $p_g : M_g \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ver [37]), que também pode ser visto como aplicações de grau zero na esfera.

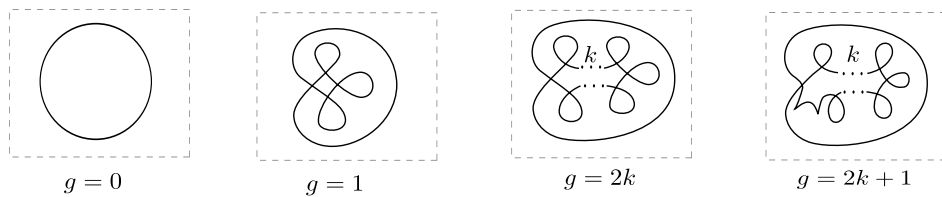


Figura 4.11: Contornos minimais no plano

**Exemplo 4.1.12.** Para o par  $(d, g) = (1, 2)$ , existe uma aplicação estável  $f_{1,2} : M_2 \rightarrow S^2$  com contorno irreduzível tal que o par  $(C, D)$  é  $(2, 4)$  ou  $(6, 0)$ . Adicionando uma alça horizontalmente à aplicação estável  $f : T^2 \rightarrow S^2$  cujo contorno está na Figura 1.7, obtemos uma aplicação estável  $f_{1,2} : M_2 \rightarrow S^2$  de grau um com contorno irreduzível. O contorno desta aplicação estável possui seis cúspides e nenhum ponto duplo, ou seja,  $(C, D) = (6, 0)$ . Por outro lado, pela Proposição 4.1.10, para o par  $(d, g) = (1, 2)$ , existe uma aplicação estável  $f_{1,2} : M_2 \rightarrow S^2$  de grau um, cujo contorno satisfaz  $(C, D) = (2, 4)$

**Teorema 4.1.13.** Para cada  $g \geq 1$  e cada  $d \geq 0$ , existe uma aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  com contorno irreduzível tal que o par  $(C, D)$  é algum dos itens seguintes:

$$(C, D) = \begin{cases} (1) (2(d-1), 4) \text{ ou } (2d+2, 0) & \text{se } d \neq 0 \text{ e } g = 1, \\ (2) (2, 4) \text{ ou } (6, 0) & \text{se } (d, g) = (1, 2), \\ (3) (2(d-g), 2g+2) & \text{se } d \geq g > 1, \\ (4) (0, d+g+2) & \text{se } d \leq g \text{ e } d \equiv g \pmod{2} \text{ exceto } (d, g) = (1, 1), \\ (5) (2, d+g+1) & \text{se } d \leq g \text{ e } d \not\equiv g \pmod{2} \text{ exceto } (d, g) = (1, 2), \end{cases}$$

**Demonstração:** Pelas Proposições [4.1.6](#), [4.1.7](#), [4.1.10](#) e Exemplo [4.1.12](#) segue o resultado.  $\square$

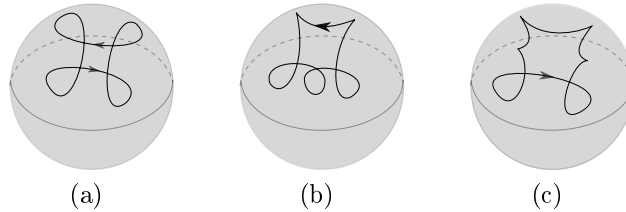


Figura 4.12: Contornos aparentes de aplicações estáveis de grau zero do bitoro na esfera.

**Exemplo 4.1.14.** A aplicação estável cujo contorno está na Figura [4.12c](#) é também obtida por adicionar uma alça à aplicação  $f' : T^2 \rightarrow S^2$  (ver Figura [4.10a](#)).

**Exemplo 4.1.15.** A aplicação  $f_1 : S^2 \rightarrow S^2$ , obtida pela aplicação identidade, passando pela transição do tipo lábios, possui grau 1 e é tal que o seu conjunto singular é conexo, sem pontos duplos e com duas cúspides (ver Figura [2.4](#)). Fazendo a soma conexa da aplicação  $f_1$  com a aplicação estável de grau zero  $f_{0,1} : T^2 \rightarrow S^2$ , obtemos uma aplicação estável  $(f_1 +_H f_{0,1}) : T^2 \rightarrow S^2$  de grau 1 cujo contorno está na Figura [4.2d](#).

**Exemplo 4.1.16.** Consideremos o caso onde temos uma aplicação  $f : M_g \rightarrow M_1$ . A Figura [4.13](#) ilustra aplicações estáveis que junto com seus contornos irreduzíveis satisfazem:

- (a)  $d = 0$  e  $g = 0$  tal que  $(C, D) = (0, 0)$ ,
- (b)  $d = 0$  e  $g = 1$  tal que  $(C, D) = (2, 2)$ ,
- (c)  $d \neq 0$  e  $g = 1$  tal que  $(C, D) = (2, 0)$ ,
- (d)  $g \geq 2$  é par e para qualquer  $d$  tal que  $(C, D) = (0, g - 2)$ ,
- (e)  $g \geq 3$  é ímpar e para qualquer  $d$  tal que  $(C, D) = (2, g - 3)$ .

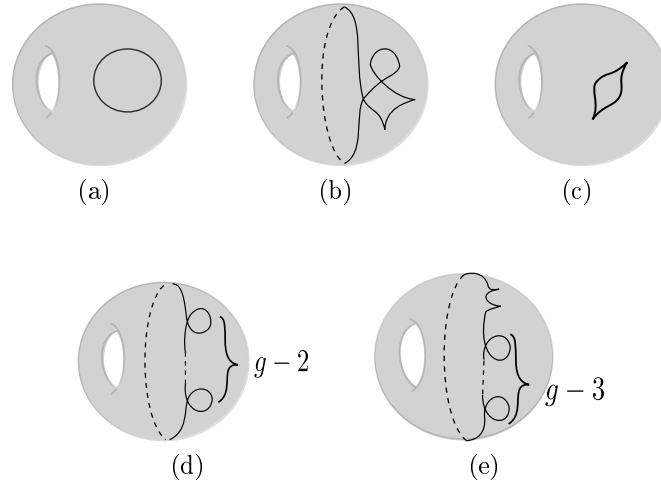


Figura 4.13: Contornos aparentes de aplicações  $M \rightarrow M_1$ .

## 4.2 Contornos minimais

Nesta seção, apresentaremos os casos em que os contornos irredutíveis têm o menor número de pontos duplos e cúspides.

**Definição 4.2.1.** *Seja  $f_0 : M \rightarrow N$  uma aplicação suave e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação estável a qual é homotópica a  $f_0$  e cujo conjunto singular consiste de uma componente. O contorno  $\gamma(f)$  é chamado **contorno minimal** de  $f_0$ , se  $C(f) + D(f)$  de  $\gamma(f)$  é o menor de todos os contornos de aplicações estáveis que são homotópicas a  $f_0$  e cujos contornos são irredutíveis.*

### 4.2.1 Contornos minimais de aplicações na esfera

**Teorema 4.2.2.** *Seja  $f : S^2 \rightarrow S^2$  uma aplicação estável com  $\deg(f) \geq 2$ . A aplicação estável  $h : S^2 \rightarrow S^2$ , que realiza o contorno minimal de  $f$ , deve possuir no mínimo  $2\deg(f)$  cúspides e nenhum ponto duplo, ou seja  $C(h) + D(h) \geq 2\deg(f)$ .*

**Demonstração:** Seja  $h$  uma aplicação estável, homotópica a  $f$ , que realiza o contorno minimal de  $f$ . Pela Proposição 1.3.7, duas aplicações homotópicas tem o mesmo grau, ou seja,  $\deg(h) = \deg(f) \geq 2$ , então pelo corolário 1.3.8 o conjunto singular  $\Sigma h \neq \emptyset$ . Por outro lado, como a característica de Euler  $\chi(S^2) = 2$ , segue pelo Corolário 2.2.7 que

$$\left| \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) - 2\deg(f) \right| \leq 0,$$

onde  $\text{sign}(q_k)$  é o sinal da cúspide  $q_k$ . Ou seja,

$$\sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) = 2\deg(f).$$

Portanto, a aplicação que gera o contorno minimal de  $f$  deve ter o menor valor para a soma do número de cúspides e de pontos duplos, ou seja,  $C(f) + D(f) \geq 2deg(f)$ .  $\square$

Nesta parte se assume  $g \geq 1$  e  $d > 0$ .

**Teorema 4.2.3.** *Sejam  $d \leq g$ ,  $d \equiv g \pmod{2}$  e  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau  $d$  com contorno irredutível. O contorno minimal de  $f$  possui no mínimo  $d + g + 2$  cúspides e pontos duplos, ou seja,  $C + D \geq d + g + 2$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 3.2.9 para uma aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  de grau  $d$  com contorno irredutível,

$$d + g \leq g + m(f) = (D^+ - D^-) + \frac{C}{2}. \quad (4.1)$$

Se  $\gamma(f)$  possui um ponto duplo, pelo Lema 3.2.10 temos que,  $\gamma(f)$  tem um ponto duplo negativo, ou seja  $D^- \geq 1$ . Então, da Desigualdade 4.1, temos  $D^+ \geq d + g + 1 - \frac{C}{2}$ . Como  $D^- \geq 0$ ,  $D = D^+ + D^- \geq d + g + 2 - \frac{C}{2}$ . Somando o número de cúspides  $C$  a ambos lados da desigualdade, temos

$$C + D \geq C + d + g + 2 - \frac{C}{2} = d + g + 2 + \frac{C}{2} \geq d + g + 2.$$

Ou seja,

$$C + D \geq d + g + 2.$$

Portanto, o contorno minimal da aplicação  $f$  deve ter  $C + D \geq d + g + 2$ . Por outro lado, se  $\gamma(f)$  não possui pontos duplos, pela Equação 4.1,

$$C \geq 2(g + d).$$

Se  $d \geq 1$ , então  $2(d + g) \geq d + g + 2$ . Assim, para o contorno  $\gamma(f)$  temos,

$$C + D \geq d + g + 2.$$

Portanto, a aplicação que gera o contorno minimal de  $f$  deve ter o menor valor para a soma do número de cúspides e de pontos duplo. Ou seja,  $C + D \geq d + g + 2$ . Então, pelo Teorema 4.1.5, vemos que o contorno  $\gamma(f_{d,g})$  é minimal de  $f$ , pois o contorno aparente é conexo e possui exatamente  $d + g + 2$  cúspides e pontos duplos. Portanto, o contorno  $\gamma(f_{g,d})$  é minimal para cada  $(d, g)$  satisfazendo  $1 \leq d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$ .  $\square$

**Lema 4.2.4.** *Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de grau  $d$  com contorno irredutível. Se o número  $g - d$  é ímpar, então o contorno  $\gamma(f)$  tem pelo menos duas cúspides, ou seja,  $C \geq 2$ .*

**Demonstração:** Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável. Como  $\chi(S^2) = 2$ , segue Teorema 2.2.2 que

$$\chi(M_g) - 2\chi((M_g)^-) + \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) = 2d. \quad (4.2)$$

Note que  $M_g^-$  é homeomorfo a  $M_{g-\lambda}$  com um buraco, para  $\lambda = 0, \dots, g$ . Então,  $\chi((M_g)^-) = 2 - 2(g - \lambda) - 1$ . Como  $\chi(M_g) = 2 - 2g$ , pela Equação 4.2, temos

$$2 - 2g - 2(2 - 2(g - \lambda) - 1) + \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) = 2d. \quad (4.3)$$

Simplificando a Equação 4.3, temos

$$2g - 4\lambda + \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) = 2d. \quad (4.4)$$

Se  $\gamma(f)$  não possui cúspides então, pela Equação 4.4, temos  $g - d = 2\lambda$ . Isto é uma contradição, pois  $g - d$  é, pela hipótese, um número ímpar.  $\square$

Note que por um resultado de Thom 40, o número de cúspides de  $\gamma(f)$  é um número par.

**Teorema 4.2.5.** *Sejam  $d < g$ ,  $d \not\equiv g \pmod{2}$  e  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau  $d$  com contorno irredutível. O contorno minimal de  $f$  possui no mínimo duas cúspides e  $d + g + 1$  pontos duplos, ou seja,  $C + D \geq d + g + 3$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 3.2.9 para uma aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  de grau  $d$  com contorno irredutível, temos

$$g + m(f) = (D^+ - D^-) + \frac{C}{2}. \quad (4.5)$$

Como  $d \leq m(f)$ , segue que

$$d + g \leq g + m(f) = (D^+ - D^-) + \frac{C}{2}. \quad (4.6)$$

Se  $\gamma(f)$  possui um ponto duplo, o Lema 3.2.10 garante que  $\gamma(f)$  tem um ponto duplo negativo, ou seja  $D^- \geq 1$ . Assim, da Desigualdade 4.6 temos que

$$D^+ + D^- \geq d + g + 1 - \frac{C}{2} + 1.$$

Ou seja,

$$D \geq d + g + 2 - \frac{C}{2}.$$

Somando  $C$  nos dois lados da desigualdade, temos

$$C + D \geq C + d + g + 2 - \frac{C}{2} = d + g + 2 + \frac{C}{2}. \quad (4.7)$$

Pela condição  $d \not\equiv g \pmod{2}$ , temos que  $g - d$  é ímpar. Logo, pelo Lema 4.2.4 o contorno da aplicação  $f$  possui pelo menos duas cúspides, isto é,  $C \geq 2$ . Assim, pela Desigualdade 4.7

$$C + D \geq d + g + 2 + \frac{C}{2} \geq d + g + 2 + 1 = d + g + 3.$$

Portanto, a aplicação que gera o contorno minimal de  $f$  deve ter  $C + D \geq d + g + 3$ . Pelo Teorema 4.1.13, vemos que o contorno  $\gamma(f_{d,g})$  é minimal de  $f$ , pois o contorno aparente é irredutível e  $C + D = d + g + 3$ .  $\square$

**Lema 4.2.6.** *Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de grau  $d$  com contorno irredutível. Então, o contorno  $\gamma(f)$  possui pelo menos  $2(d - g)$  cúspides, ou seja,  $C \geq 2(d - g)$ .*

**Demonstração:** Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável cuja curva de dobra é conexa. Pelo Corolário 2.2.7, temos

$$\left| \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) - 2d \right| \leq 2 - \chi(M_g), \quad (4.8)$$

onde o sinal da cúspide  $q_k$  satisfaz  $\text{sign}(q_k) = \pm 1$ . Na Tabela 1.5 vemos que  $\chi(M_g) = 2 - 2g$ , logo

$$\left| \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) - 2d \right| \leq 2 - 2 + 2g,$$

Assim,

$$-2g \leq \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) - 2d \leq 2g. \quad (4.9)$$

Segue da desigualdade 4.9 que

$$2(d - g) \leq \sum_{q_k: \text{cusp}} \text{sign}(q_k) \leq 2(d + g). \quad (4.10)$$

Portanto, o menor valor para a soma dos sinais das cúspides é  $(2d - g)$ , ou seja, o contorno aparente possui no mínimo  $(2d - g)$  cúspides.  $\square$

**Teorema 4.2.7.** *Sejam  $d \geq g$  e  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau  $d$  com contorno irredutível. O contorno minimal para a aplicação  $f$  possui  $2(d - g)$  cúspides e  $2g + 2$  pontos duplos.*

**Demonstração:** Seja  $f$  uma aplicação suave de grau  $d$  de uma superfície  $M_g$ , tal que o par  $(d, g)$  satisfaz  $d \geq 0$ ,  $g \geq 1$ . Pela Proposição 3.2.9 se  $f$  tem grau  $d$  e contorno irredutível, então

$$d + g \leq g + m(f) = (D^+ - D^-) + \frac{C}{2}. \quad (4.11)$$

Se  $\gamma(f)$  possui um ponto duplo, pelo Lema 3.2.10 temos que,  $\gamma(f)$  possui um ponto duplo negativo, ou seja  $D^- > 0$ . Da Desigualdade 4.11 temos que

$$D^+ \geq d + g + 1 - \frac{C}{2}. \quad (4.12)$$

Por outro lado, pelo Lema 4.2.6, temos  $C \geq 2(d - g)$  e pela Desigualdade 4.12, temos

$$D^+ \geq d + g + 1 - \frac{2(d - g)}{2} \geq 2g + 1.$$



Como  $D^- > 0$ , então

$$D = D^+ + D^- \geq 2g + 2.$$

Assim, o contorno minimal para a aplicação  $f$  possui pelo menos  $2(d-g)$  cúspides e pelo menos  $2g+2$  pontos duplos. Portanto, pelo Teorema [4.1.13](#), o contorno  $\gamma(f_{d,g})$  é minimal para cada  $(d,g)$  satisfazendo  $d \geq g \geq 1$ , pois  $\gamma(f_{d,g})$  possui  $2(d-g)$  cúspides e  $2g+2$  pontos duplos.  $\square$

**Proposição 4.2.8.** *Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de grau zero com contorno irredutível. Se o menor número de pré-imagens de valores regulares  $m(f) \neq 0$ , então o número  $C + D$  para o contorno irredutível  $\gamma(f)$  de  $f$  é maior que para o contorno  $\gamma(f_{0,g})$  (ver Proposição [4.1.10](#)).*

**Demonstração:** Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de grau zero. Suponha que  $m(f) \geq 0$ . Pela Proposição [3.2.9](#), obtemos a seguinte desigualdade para a aplicação estável de grau zero  $f : M_g \rightarrow S^2$ , com contorno irredutível com  $m(f) \neq 0$ ,

$$g + 1 \leq g + m(f) = (D^+ - D^-) + \frac{C}{2}. \quad (4.13)$$

Primeiro vamos supor que  $g$  é um número ímpar. Se  $\gamma(f)$  possui um ponto duplo, pelo Lema [3.2.10](#) temos que  $\gamma(f)$  possui um ponto duplo negativo, ou seja,  $D^- \geq 1$ . Pela Equação [4.13](#), temos

$$D = D^+ + D^- \geq g + 3 - \frac{C}{2}.$$

Somando o número de cúspides  $C$ , a ambos lados da desigualdade, temos

$$C + D \geq g + 3 + \frac{C}{2}. \quad (4.14)$$

Como  $d = 0$  e  $g$  é um número ímpar, pelo Lema [4.2.4](#) a aplicação  $f$  possui pelo menos duas cúspides, ou seja,  $\frac{C}{2} \geq 1$ . Assim, pela Desigualdade [4.14](#), temos

$$C + D \geq g + 3 + \frac{C}{2} \geq g + 4 \geq g + 3.$$

Se  $f$  não possui pontos duplos, pela Desigualdade [4.13](#),

$$C \geq 2g + 2.$$

Como  $g$  é ímpar, podemos escrever  $g = 2n + 1$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Então

$$2g + 2 = 2(2n + 1) + 2 = 4n + 4 \leq (2n + 1) + 3 = g + 3.$$

Logo, o contorno minimal da aplicação  $f$ , quando  $g$  é ímpar, satisfaz  $C + D \geq g + 3$ . Assuma que  $g$  é um número par. Se  $\gamma(f)$  possui um ponto duplo, pelo Lema [3.2.10](#) temos que  $\gamma(f)$  possui um ponto duplo negativo, ou seja,  $D^- > 0$ . Substituindo na Equação [4.13](#), temos

$$D^+ \geq g + 2 - \frac{C}{2}.$$

Como  $D^- > 0$ ,

$$D = D^+ + D^- \geq g + 2 - \frac{C}{2}. \quad (4.15)$$

Somando  $C$  a ambos lados da Desigualdade [4.15](#), temos

$$C + D \geq g + 2 + \frac{C}{2} \geq g + 2.$$

Se  $f$  não possui pontos duplos, novamente pela Desigualdade [4.13](#),

$$C \geq 2g + 2.$$

Como  $2g + 2 \geq g + 2$ , logo podemos afirmar que o contorno minimal da aplicação  $f$  satisfaz  $C + D \geq g + 2$ .  $\square$

**Teorema 4.2.9.** *Sejam  $d = 0$ ,  $g \geq 1$  e  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau zero com contorno irreduzível. A aplicação estável  $f_{0,g} : S^2 \rightarrow S^2$ , que realiza o contorno minimal de  $f$  satisfaz  $C + D \geq g + 3$  ou  $C + D \geq g + 2$ , se  $g$  é ímpar ou par, respectivamente.*

**Demonstração:** Sejam  $d = 0$ ,  $g \geq 1$  e  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau  $d$ . Pelo visto na demonstração da Proposição [4.2.8](#), se o gênero  $g$  é ímpar ou par, o contorno irreduzível da aplicação  $f$  satisfaz  $C + D \geq g + 3$  ou  $C + D \geq g + 2$ , respectivamente. Assim, pelo Teorema [4.1.13](#), existe uma aplicação estável  $f_{0,g} : M_g \rightarrow S^2$  de grau zero cujo contorno satisfaz  $(C, D) = (2, g + 1)$  se  $g$  é ímpar e  $(C, D) = (0, g + 2)$  se  $g$  é par. Portanto, em ambos os casos,  $\gamma(f_{0,g})$  é um contorno minimal da aplicação  $f$ .  $\square$

A seguir, apresentaremos o resultado geral de minimalidade para aplicações na esfera.

**Teorema 4.2.10.** *Seja  $d \geq 0$ ,  $g \geq 0$  e  $f : M_g \rightarrow S^2$  aplicação suave de grau  $d$  com contorno irreduzível. O par  $(C, D)$  para um contorno minimal de  $f$  é um destes itens a seguir:*

$$(C, D) = \begin{cases} (1) (2d, 0) & \text{se } d \neq 2 \text{ e } g = 0, \\ (2) (2(d-1), 4) \text{ ou } (2d+2, 0) & \text{se } d \neq 0 \text{ e } g = 1, \\ (3) (2, 4) \text{ ou } (6, 0) & \text{se } (d, g) = (1, 2), \\ (4) (2(d-g), 2g+2) & \text{se } d \geq g > 1, \\ (5) (0, d+g+2) & \text{se } d \leq g \text{ e } d \equiv g \pmod{2} \text{ exceto } (d, g) = (1, 1), \\ (6) (2, d+g+1) & \text{se } d \leq g \text{ e } d \not\equiv g \pmod{2} \text{ exceto } (d, g) = (1, 2). \end{cases}$$

**Demonstração:** Considere a aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  de grau  $d$ . Vamos dividir a prova nos seis casos diferentes.

(1) Suponha  $f : S^2 \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau  $d \geq 2$ , então pelo Teorema [4.2.2](#) a aplicação que gera o contorno minimal de  $f$  deve ter  $C + D \geq 2deg(f)$ . Então, pelo Lema [4.1.4](#), vemos que o contorno  $\gamma(f_{d,0})$  é minimal de  $f$ , pois o contorno aparente é conexo e possui exatamente  $2deg(f)$  cúspides e nenhum ponto duplo.

(2) Suponha  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau  $d$ , onde  $(d, g)$  satisfaz  $d \neq 0$  e  $g = 1$ . Pelo Teorema 4.2.7, o contorno minimal da aplicação  $f$  possui  $2(d-1)$  cúspides e quatro pontos duplos, ou seja,  $(C, D) = (2(d-1), 4)$ . Logo, o contorno minimal de uma aplicação  $f : M_g \rightarrow S^2$ , onde o par  $(d, g)$  satisfaz  $d \neq 0$  e  $g = 1$ , satisfaz  $(C, D) = (2(d-1), 4)$ . Por outro lado, pelo Teorema 4.1.13, existe uma aplicação estável  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$ , onde o par  $(d, g)$  satisfaz  $d \neq 0$  e  $g = 1$ , cujo contorno é irreduzível com  $2d+2$  cúspides e nenhum ponto duplo, ou seja,  $(C, D) = (2d+2, 0)$ . Portanto, este contorno irreduzível é o contorno minimal da aplicação  $f$ .

(3) Suponha  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau  $d$ , onde  $(d, g)$  satisfaz  $d = 1$  e  $g = 2$ . Pelo Teorema 4.2.5, o contorno minimal da aplicação  $f$  possui duas cúspides e quatro pontos duplos, ou seja,  $(C, D) = (2, 4)$ . Logo, o contorno minimal de uma aplicação  $f : M_g \rightarrow S^2$ , onde o par  $(d, g)$  é tal que  $d = 1$  e  $g = 2$ , satisfaz  $(C, D) = (2, 4)$ . Por outro lado, pelo Teorema 4.1.13, existe uma aplicação estável  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$ , onde o par  $(d, g)$  satisfaz  $d = 0$  e  $g = 1$  e cujo contorno é irreduzível e possui seis cúspides e nenhum ponto duplo, ou seja,  $(C, D) = (6, 0)$ . Logo, o contorno minimal de uma aplicação  $f : M_g \rightarrow S^2$ , onde o par  $(d, g)$  é tal que  $d = 1$  e  $g = 2$ , satisfaz  $(C, D) = (2, 4)$ . Portanto, os contornos destas duas aplicações são contornos minimais da aplicação  $f$ .

(4) Suponha  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau  $d$ , onde  $(d, g)$  satisfaz  $d \neq 0$  e  $g = 1$ . Pelo Teorema 4.2.7, o contorno minimal da aplicação  $f$  possui  $2(d-g)$  cúspides e  $(2g+2)$ , ou seja,  $(C, D) = (2(d-g), 2g+2)$ . Portanto, o contorno minimal de uma aplicação  $f : M_g \rightarrow S^2$ , onde o par  $(d, g)$  satisfaz  $d \neq 0$  e  $g = 1$ , satisfaz  $(C, D) = (2(d-g), 2g+2)$ .

(5) Suponha que  $d = 0$ . Assim, pela condição  $d \equiv g \pmod{2}$  temos que  $g$  é um número par. Logo, pelo Teorema 4.2.9 o contorno minimal da aplicação  $f$  possui  $g+2$  pontos duplos e nenhuma cúspide, ou seja,  $(C, D) = (0, g+2)$ . Agora, suponha que  $d \neq 0$ . Assim, pelo Teorema 4.2.3, o contorno minimal da aplicação  $f$  possui  $d+g+2$  pontos duplos e nenhuma cúspide, ou seja,  $(C, D) = (0, d+g+2)$ . Portanto, o contorno minimal de uma aplicação  $f : M_g \rightarrow S^2$ , onde o par  $(d, g)$  satisfaz  $d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$  exceto para  $(d, g) = (1, 1)$ , satisfaz  $(C, D) = (0, d+g+2)$ .

(6) Suponha que  $d = 0$ . Pela condição  $d \not\equiv g \pmod{2}$  temos que  $g$  é um número ímpar. Logo, pelo Teorema 4.2.9, o contorno minimal da aplicação  $f$  possui duas cúspides e  $g+3$  pontos duplos, ou seja,  $(C, D) = (2, g+1)$ . Agora, suponha que  $d \neq 0$ . Pelo Teorema 4.2.5 o contorno minimal da aplicação  $f$  possui duas cúspide e  $d+g+2$  pontos duplos, ou seja,  $(C, D) = (2, d+g+1)$ . Portanto, o contorno minimal de uma aplicação  $f : M_g \rightarrow S^2$ , onde o par  $(d, g)$  satisfaz  $d \leq g$  e  $d \not\equiv g \pmod{2}$ , exceto  $(d, g) = (1, 2)$ , satisfaz  $(C, D) = (2, d+g+1)$ .  $\square$

**Corolário 4.2.11.** *O número  $C + D$  para um contorno minimal de  $f$  é algum*

dos itens abaixo:

$$C + D = \begin{cases} 2d & \text{se } d \geq 2 \text{ e } g = 0 \\ 2d + 2 & \text{se } d \geq g, \\ d + g + 2 & \text{se } d \leq g \text{ e } d \equiv g \pmod{2}, \\ d + g + 3 & \text{se } d < g \text{ e } d \equiv g \pmod{2}. \end{cases}$$

**Demonstração:** Tomando  $(C, D)$  como no Teorema 4.2.10, podemos encontrar o número  $C + D$  para um contorno minimal.  $\square$

Apresentaremos um resultado de unicidade do contorno minimal.

**Proposição 4.2.12.** *Sejam  $d \leq g$ ,  $d \equiv g \pmod{2}$  e  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau  $d$  com contorno irredutível. A forma de um contorno minimal da aplicação  $f$  é única a menos que seja  $(g, d) = (1, 1)$ .*

**Demonstração:** Sejam  $d \leq g$ ,  $d \equiv g \pmod{2}$  e  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de grau  $d$  com contorno irredutível. Pelo Teorema 4.2.10, o par  $(C, D)$  para um contorno minimal de  $f$  satisfaz  $(C, D) = (0, d + g + 2)$ , tendo este um único ponto duplo negativo, denotado por  $p_0$ , e  $d + g + 1$  pontos positivo. Logo, pela Proposição 3.2.11, o contorno contém dois laços iniciando e terminando em  $p_0$  e pela Proposição 3.2.15, os laços em cada ponto positivo é único. Portanto, a forma do contorno minimal de  $f$  é única, exceto para  $(g, d) = (1, 1)$ , pois neste caso tem duas formas de contornos minimais, pelo Teorema 4.1.13.  $\square$

**Exemplo 4.2.13.** A Figura 4.14 ilustra possíveis contornos minimais de aplicações de superfícies orientadas na esfera (ver [26]).

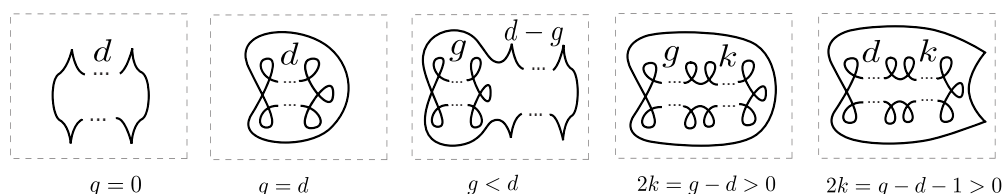


Figura 4.14: Contornos minimais na esfera

## 4.2.2 Um pouco mais sobre contornos minimais

A seguir apresentaremos alguns resultados referentes aos contornos minimais de aplicações entre superfícies, as provas destes resultados são omitidas.

### Pignoni [37]: aplicações de superfícies fechadas no plano

Em 1991, Pignoni introduz a noção de contorno minimal de uma aplicação suave entre superfícies e estudou este de uma aplicação suave de uma superfície fechada no plano. O resultado deste estudo é:

Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação suave. Então, o número  $C + D$  de um contorno minimal de  $f$  é um dos itens abaixo:

$$c + n = \begin{cases} g + 2 & \text{se } M \text{ é orientável e } g \text{ é par,} \\ g + 3 & \text{se } M \text{ é orientável e } g \text{ é ímpar,} \\ (g + 4)/2 & \text{se } M \text{ não é orientável e } g \text{ é par e } g/2 \text{ é par,} \\ (g + 6)/2 & \text{se se } M \text{ não é orientável e } g \text{ é par e } g/2 \text{ é ímpar,} \\ (g + 7)/2 & \text{se se } M \text{ não é orientável e } g \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

### Demoto [6]: aplicações da esfera na esfera.

Em 2005, Demoto estudou o contorno minimal de uma aplicação estável da esfera na esfera e obteve o seguinte resultado. Seja  $f : S^2 \rightarrow S^2$  uma aplicação suave com grau  $d \geq 2$ . Um contorno minimal de  $f$  possui exatamente  $2d$  cúspides e não possui pontos duplos.

### Atsushi Kamenosono & Takahiro Yamamoto [17]: aplicações de superfícies fechadas na esfera.

Em 2009, os autores estudaram o contorno minimal para uma aplicação de uma superfície fechada na esfera. Nesta dissertação apresentamos os resultados de [6, 17] onde mostram este resultados para uma superfície fechada e orientada (Teorema 4.2.10). O resultado para um contorno minimal de uma aplicação de uma superfícies fechada e não orientada  $F_g \rightarrow S^2$  é o seguinte:

Seja  $h : F_g \rightarrow S^2 (g \geq 1)$  uma aplicação suave de uma superfície não orientada na esfera de grau módulo dois  $d_2$ . O número  $C + D$  para um contorno minimal de  $h$  é um dos itens:

$$(C, D) = \begin{cases} (3, 0) & \text{se } (d_2, g) = (1, 1), \\ (4, 0) \text{ ou } (0, 4) & \text{se } (d_2, g) = (1, 2), \\ (1, (g + 5)/2) & \text{se } d_2 = 1 \text{ e } g \text{ é ímpar exeto } (d_2, g) = (1, 1), \\ (0, (g + 6)/2) & \text{se } d_2 = 1 \text{ e } g \text{ é par exeto } (d_2, g) = (1, 2), \\ (3, (g + 1)/2) & \text{se } d_2 = 0 \text{ e } g \text{ é ímpar,} \\ (0, (g + 4)/2) & \text{se } d_2 = 1, g \text{ é par, e } g/2 \text{ é ímpar,} \\ (2, (g + 2)/2) & \text{se } d_2 = 1, g \text{ é par, e } g/2 \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

### Fukuda & Takahiro Yamamoto [8]: Contorno aparente de aplicações estáveis na esfera

Em 2011, os autores estudam aplicações de superfícies fechadas e orientadas na esfera e para cada inteiro  $\mu \geq 1$ , em uma dada classe de homotopia com  $\mu$  componentes da curva de dobra, encontram o menor número  $C + D$ . Seja  $f_0 : M \rightarrow S^2$  uma aplicação suave de uma superfície fechada e  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, a qual é homotópica a  $f_0$  e cujo contorno consiste de  $\mu$  componentes. Então, chamamos  $\gamma(f)$  um **contorno  $\mu$ -minimal de  $f_0$**  se o número  $C + D$  para  $\gamma(f)$  é o menor entre os contornos de aplicações estáveis as quais são homotópicas a  $f_0$  e cujo contorno consiste de  $\mu$  componentes. O resultado que apresenta o número  $(C, D)$  de uma aplicação  $\mu$ -minimal é o seguinte: Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de grau  $d$  cujo contorno consiste de  $\mu$  componentes. Então, o contorno  $\gamma(f)$  é  $\mu$ -**minimal** se, e somente

se o par  $(C, D)$  para  $\gamma(f)$  é um dos itens embaixo:  
 $g = 0$  :

$$(C, D) = \begin{cases} (2(|d| - \mu + 1), 0) & \text{se } 1 \leq \mu \leq |d| + 1, \\ (2, 0) & \text{se } \mu \geq |d| + 2, \mu \equiv d \pmod{2}, \\ (0, 0) & \text{se } \mu \geq |d| + 2, \mu \not\equiv d \pmod{2}, \end{cases}$$

$g = 1$  :

$$(C, D) = \begin{cases} (2(|d| - \mu), 4) \text{ ou } (2(|d| - \mu) + 4, 0) & \text{se } 1 \leq \mu \leq |d|, \\ (2, 2) & \text{se } (d, \mu) = (0, 1), \\ (2, 0) & \text{se } \mu \geq |d| + 1, \mu \not\equiv d \pmod{2} \text{ exceto } (d, \mu) = (0, 1), \\ (0, 0) & \text{se } \mu \geq |d| + 1, \mu \equiv d \pmod{2}, \end{cases}$$

$g = 2$  :

$$(C, D) = \begin{cases} (2(|d| - \mu - 1), 6) & \text{se } 1 \leq \mu \leq |d| - 1, \\ (2, 4) \text{ ou } (6, 0) & \text{se } \mu = |d|, \\ (0, 4) & \text{se } \mu = |d| + 1, \\ (2, 2) & \text{se } (d, \mu) = (0, 2), \\ (2, 0) & \text{se } \mu \geq |d| + 2, \mu \equiv d \pmod{2} \text{ exceto } (d, \mu) = (0, 2), \\ (0, 0) & \text{se } \mu \geq |d| + 2, \mu \not\equiv d \pmod{2}, \end{cases}$$

$g \geq 3$  :

$$(C, D) = \begin{cases} (2(|d| - g - \mu + 1), 2 + 2g) & \text{se } 1 \leq \mu \leq |d| - g + 1, \\ (2, |d| + g - \mu + 2) & \text{se } |d| - g + 2 \leq \mu < |d| + g - 1 \text{ e } d + g \equiv \mu \pmod{2}, \\ (0, |d| + g - \mu + 3) & \text{se } |d| - g + 2 \leq \mu \leq |d| + g - 1 \text{ e } d + g \not\equiv \mu \pmod{2}, \\ (2, 2) & \text{se } (d, \mu) = (0, g), \\ (2, 0) & \text{se } \mu \geq |d| + g, \mu \equiv d + g \pmod{2} \text{ exceto } (d, \mu) = (0, g), \\ (0, 0) & \text{se } \mu \geq |d| + g, \mu \not\equiv d + g \pmod{2}. \end{cases}$$

**Takahiro Yamamoto [46]: aplicações entre superfícies fechadas e orientadas.**

Em 2017, Yamamoto estudou o contorno aparente de aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas, cujo contorno singular consiste de uma componente. Se mostra o seguinte resultado que indica o par  $(C, D)$  para um contorno minimal de uma aplicação suave  $M_g \rightarrow M_h$ .

Sejam  $g, h$  inteiros não negativos com  $h \geq 1$ ,  $d$  um inteiro não negativo satisfazendo  $d \leq r(g, h)$  e  $f : M_g \rightarrow M_h$  uma aplicação estável cujo conjunto singular consiste de uma componente. Então, o contorno  $\gamma(f)$  é minimal de grau  $d$  se, e somente se, o para  $(C(f), D(f))$  é um dos itens abaixo;  
 $h = 1$

$$(C, D) = \begin{cases} (a) (0, 0) & \text{se } d = 0 \text{ e } g = 0, \\ (b) (2, 2) & \text{se } d = 0 \text{ e } g = 1, \\ (c) (2, 0) & \text{se } d \neq 0 \text{ e } g = 1, \\ (d) (0, g - 2) & \text{se } g \geq 2 \text{ é par e para qualquer } d, \\ (e) (2, g - 3) & \text{se } g \geq 3 \text{ é ímpar e para qualquer } d, \end{cases}$$

$h \geq 2$

$$(C, D) = \begin{cases} (f) (2, 2) & \text{se } d = 0 \text{ e } g \text{ é impar satisfazendo } 1 \leq g \leq 2h - 1, \\ (g) (2, 0) & \text{se } d = 0 \text{ e } g \text{ é impar satisfazendo } g \geq 2h + 1 \text{ ou,} \\ & \text{se } d \geq 1 \text{ e } g > d(h - 1), g \not\equiv d(h - 1) \pmod{2} \\ (h) (0, 0) & \text{Outros casos,} \end{cases}$$

onde para inteiros  $g \geq 0$  e  $h \geq 1$ , se define

$$r(g, h) = \begin{cases} 0 & \text{se } g = 0, h \geq 1, \\ \infty & \text{se } g \geq 1, h = 1, \\ \left[ \frac{g-1}{h-1} \right] & \text{outros casos,} \end{cases}$$

onde  $\left[ \frac{g-1}{h-1} \right]$  é o máximo inteiro o qual não excede  $\frac{g-1}{h-1}$ .

# Apêndice A

## Fórmulas Plucker

Neste apêndice, apresentamos resultados onde se relaciona o número de rotação tangente duplo (Definição 1.6.11) e as singularidades e pontos duplos de uma curva plana.

Para uma curva fechada e suave plana  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  as mais evidentes características topológicas são as cúspides e os pontos duplos. Existem diversas equações que descrevem o número e natureza destes. Estas são chamadas Plucker equations, após as dadas no último centenário por Plucker para curvas algébricas no plano projetivo complexo de dimensão 2. Antes de iniciar em detalhe com este tipos de equações, vamos apresentar algumas construções e definições encontradas em Quine [38]. A seguir veremos formas de ver as retas no plano projetivo bidimensional.

- 1) Uma reta em  $\mathbb{RP}^2$  pode ser vista como um conjunto de retas que passam pela origem em  $\mathbb{R}^3$  contidas num mesmo plano.
- 2) Uma forma alternativa para pensar em  $\mathbb{RP}^2$  é como a esfera  $S^2$  em  $\mathbb{R}^3$  com seus pontos antipodais identificados. Assim uma reta em  $\mathbb{RP}^2$  é então um grande círculo na esfera.
- 3) O conjunto  $\mathbb{R}^2$  pode ser visto como subconjunto de  $\mathbb{RP}^2$  ao identificas o ponto  $(x_1, x_2)$  em  $\mathbb{R}^2$  com o ponto  $(x_1, x_2, 1)$  em  $\mathbb{RP}^2$ . Os pontos em  $\mathbb{RP}^2$  que não estão em  $\mathbb{R}^2$  são então da forma  $(x_1, x_2, 0)$ . Estes pontos estão numa reta chamada a reta no infinito e é denotada por  $l_\infty$ . Assim podemos pensar em  $\mathbb{RP}^2$  como sendo  $\mathbb{R}^2$  junto com a reta no infinito.

**Definição A.0.1.** *Uma reta em  $\mathbb{RP}^2$  determina um plano em  $\mathbb{R}^3$ ; o vetor normal a este plano determina um ponto em outra cópia do espaço projetivo denotado por  $\mathbb{RP}^{2*}$ . Isto nos dá uma correspondência um a um entre as retas em  $\mathbb{RP}^2$  e os pontos em  $\mathbb{RP}^{2*}$  chamada a **correspondência dual**.*

Esta correspondência pode ser descrita de outra forma: Uma reta em  $\mathbb{RP}^2$  representada por  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$  em  $\mathbb{R}^3$ , corresponde ao ponto  $a = (a_1, a_2, a_3)$  em  $\mathbb{RP}^{2*}$ . Dizemos que  $a \cdot x = 0$  (produto interno) é a equação da



reta em  $\mathbb{RP}^2$  correspondente ao ponto  $a$  em  $\mathbb{RP}^{2*}$ . Algumas vezes  $a$  é chamado de conjunto de coordenadas para a reta  $a \cdot x = 0$ .

**Exemplo A.0.2.** O ponto  $e_3 = (0, 0, 1)$  em  $\mathbb{RP}^{2*}$  é um conjunto de coordenadas para  $l_\infty$  em  $\mathbb{RP}^2$ .

Algumas vezes é conveniente pensar numa direção nas retas em  $\mathbb{RP}^2$ . Indicar uma direção nas retas é o mesmo como especificar um sentido anti-horário no correspondente plano em  $\mathbb{R}^3$  ou dando o vetor normal no plano orientado. (Esta é a regra padrão da mão direita).

**Definição A.0.3.** Dizemos que  $a \in \mathbb{R}^3$  determina a direção da reta se este está na direção do seu vetor normal.

Veja que  $a$  e  $-a$  são os mesmos pontos em  $\mathbb{RP}^{2*}$ , mas determinam diferentes direções na reta  $a \cdot x = 0$ . Quando  $a$  indique uma direção então  $a$  é chamado de um ponto orientado em  $\mathbb{RP}^{2*}$ . Existe também uma correspondência dual entre pontos de  $\mathbb{RP}^2$  e retas em  $\mathbb{RP}^{2*}$ .

**Definição A.0.4.** A *correspondência dual* se define como segue: Uma reta em  $\mathbb{RP}^{2*}$  é vista como um conjunto de retas em  $\mathbb{RP}^2$ . O conjunto de retas  $a \cdot x = 0$  em  $\mathbb{RP}^2$  tal que  $a \cdot b = 0$  é justamente o conjunto de retas atravessando o ponto  $b$ . Portanto podemos ter um conjunto orientado de retas, está sendo a mesma como um ponto orientado em  $\mathbb{RP}^2$ .

As operações fundamentais são

- 1) Encontrar a reta que junta dois pontos distintos,
- 2) Encontrar o ponto de interseção de duas retas distintas.

**Proposição A.0.5.** As operações fundamentais são equivalentes.

**Demonstração:** Sejam  $a$  e  $b$  pontos diferentes em  $\mathbb{RP}^2$ , o ponto dual à reta que passa por  $a$  e  $b$  é denotado por  $a \wedge b$ . Se  $a$  e  $b$  são vistos como vetores de  $\mathbb{R}^3$ , este é exatamente o produto vetorial. Portanto, se  $a$  e  $b$  são pontos diferentes em  $\mathbb{RP}^{2*}$ ,  $a \wedge b$  denota o ponto da interseção das retas  $a \cdot x = 0$  e  $b \cdot x = 0$ .  $\square$

## Curvas fechadas em $\mathbb{RP}^2$

Seja  $S^1$  o círculo unitário em  $\mathbb{R}^2$ . Uma aplicação diferenciável  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  é chamada uma curva fechada. Para desenhar uma curva fechada, pense esta como sendo uma curva em  $\mathbb{R}^3$  que pode atravessar  $l_\infty$  em um número de lugares.

**Exemplo A.0.6.** A Figura [A.1](#) ilustra uma curva fechada em  $\mathbb{RP}^2$ . As retas pontilhadas são retas tangentes à curva nos pontos em  $l_\infty$ .

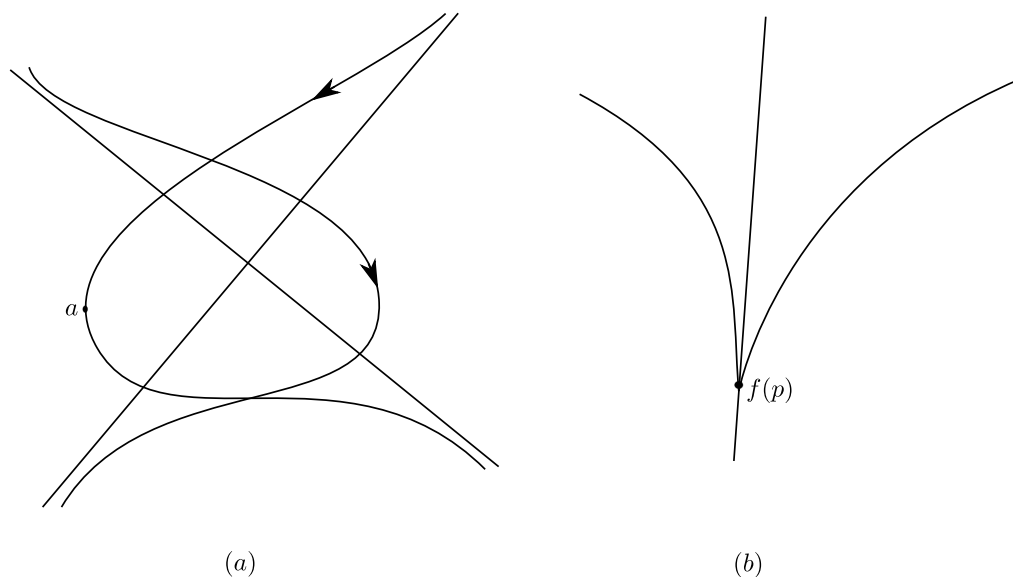


Figura A.1: Curva fechada no plano projetivo  $\mathbb{R}P^2$

Para visualizar o cruzamento da curva, podemos alterar as coordenadas (projeto) para que  $l_\infty$  vá para uma reta finita.

Estamos interessados no seguinte:

- 1) Cúspides de  $f$ , isto é, pontos  $f(p)$  tal que o diferencial de  $f$  em  $p$  é zero mas a derivadas de segunda ordem não são todas zero.
- 2) Pontos duplos, isto é ponto  $s f(p)$  tal que  $f(p) = f(q)$  com  $p \neq q$  e  $f(p)$  tem exatamente duas preimagens.

Em geral assumimos que as únicas singularidades de  $f$  são cúspides e os únicos pontos múltiplos são pontos duplos. Também assumimos que as cúspides são distintas aos pontos duplos e que as retas tangentes nos pontos duplos são diferentes. Toda curva diferenciável está "próxima" a uma satisfazendo estas condições.

**Definição A.0.7** (Curva dual). Dada uma curva fechada  $f$ , defina a **curva dual de  $f$**  como a curva fechada  $\hat{f}$  dada por  $\hat{f}(p) = b$ , onde  $b \cdot x = 0$  é a reta tangente em  $f(p)$ . Por reta tangente em  $f(p)$  entendemos pela posição limite da reta secante  $(f(p) \wedge f(q)) \cdot x = 0$  quando  $q$  se aproxima de  $p$ .

**Observação A.0.8.** Incluso numa cúspide uma reta tangente está definida. (Ver Figura [A.1](#))

Intimamente relacionado a curva dual é a aplicação secante. Todas as Plucker equations na seguinte seção, são provadas observando a aplicação secante.

Seja  $\hat{D}$  o conjunto de pares  $(p, q)$  tal que  $f(p) = f(q)$  e  $p \neq q$ . Seja  $\Delta$  a diagonal; isto é, o conjunto de pares  $(p, q)$  tal que  $p = q$ .

**Definição A.0.9.** A *aplicação secante*  $s$  de  $S^1 \times S^1 \setminus (\Delta \cup \hat{D})$  a  $\mathbb{R}P^{2*}$  é definida por  $s(p, q) = f(p) \wedge f(q)$

**Observação A.0.10.** Podemos ver a aplicação secante como uma aplicação de  $I \times I \setminus (\Delta \cup \hat{D})$ , onde  $\hat{D}$  e  $\Delta$  são definidos com  $p$  e  $q$  em  $I$ , onde  $I$  é o intervalo unitário  $[0, 1]$ . Usando a aplicação  $t \rightarrow (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  de  $\mathbb{R}$  a  $S^1$ , se pode pensar uma curva fechada como uma aplicação  $f : I \rightarrow \mathbb{R}P^2$

Sejam  $T \subset I \times I$  o triângulo formado pelo conjunto de pares  $(p, q)$  tal que  $p \leq q$  e  $K$  o conjunto de pontos  $(p, p)$  em  $\Delta$  tal que  $f(p)$  é uma cúspide

A aplicação secante  $s$  pode ser estendida continuamente a  $T \setminus (K \cup \hat{D})$ , definido  $s(p, p) = \hat{f}(p)$  para  $(p, p)$  que não está em  $K$ . Assim a restrição da aplicação secante a  $\Delta$  é essencialmente a curva dual.

Se  $a$  é um ponto orientado em  $\mathbb{R}P^2$  e  $f$  é uma curva fechada em  $\mathbb{R}P^2$ , considere a aplicação  $f \wedge a$  de  $S^1$  na reta orientada  $a \cdot x = 0$  em  $\mathbb{R}P^{2*}$ . Esta reta orientada é topologicamente o mesmo que uma cópia orientada de  $S^1$ . Assim podemos falar sobre o grau da aplicação  $f \wedge a$  de  $S^1$  em  $S^1$ , que se denota  $n(f, a)$  ou  $n(a)$ .

**Definição A.0.11.** Sejam  $f$  uma curva fechada em  $\mathbb{R}P^2$ , um ponto orientado  $a$  em  $\mathbb{R}P^2$  e  $p$  um ponto no domínio  $S^1$  de  $f$  tal que  $f(p) = a$ , definimos  $f \wedge a$  sendo a reta tangente.

Se  $f$  é uma curva em  $\mathbb{R}^2$ , então  $n(f, a)$  tem uma interpretação familiar. Se  $a$  não está na curva,  $n(f, a)$  é duas vezes o winding number de  $f$  ao redor de  $a$ . Se  $a$  está na curva,  $n(f, a)$  é duas vezes a medida do winding number ao redor da componente adjacente do complemento da curva. Portanto se  $b$  é um ponto orientado em  $\mathbb{R}P^{2*}$ , e  $f$  é uma curva em  $\mathbb{R}^2$  sem cúspides,  $n(\hat{f}, e_3)$  tem uma interessante interpretação. Considere a aplicação de Gauss  $g : S^1 \rightarrow S^1$  que envia a  $p$  ao vetor tangente unitário  $\hat{f}$  em  $p$ . O grau da aplicação de Gauss é algumas vezes chamada tangent turning number, ou rotation index. Acontece que  $n(\hat{f}, e_3)$  é duas vezes o tangent turning number. Para ver isto, note que  $\hat{f} \wedge p$  é a interseção de  $l_\infty$  e a reta que passa pela origem e é paralela à reta tangente em  $p$ . Assim "winding number" e "Número de rotação tangente" são os mesmos devido a correspondência dual. Estaríamos mais corretos, de fato, se falarmos tangent turning ao redor de uma reta orientada. O usual tangent turning number é então justamente o tangent turning number a  $l_\infty$  orientado por  $e_3$

## Pullcker equations

A mais simples das equações pullcker a discutir é a Umlaufsatz. Este teorema remonta a Riemann, mais sua prova moderna é devida a Hopf [16].

**Teorema A.0.12.** Se  $f$  é uma curva fechada em  $\mathbb{R}^2$  sem cúspides ou pontos duplos, então  $n(f, e_3) = \pm 2$ , isto é, o índice de rotação é  $\pm 1$ .

**Demonstração:** Reparametrizando e mudando de coordenadas, podemos assumir que  $f(0) = e_3$  e que a imagem de  $f$  em  $\mathbb{R}^2$  está em um dois semiplanos

determinados pela reta tangente a  $f$  em  $e_3$ . Observemos a aplicação  $s \wedge e_3$  que envia o par  $(p, q)$  à interseção da secante com a reta no infinito. Para  $0 \leq t \leq 1$ , seja  $\gamma_1$  a curva dada por  $(0, t)$ ,  $\gamma_2$  a curva dada por  $(1, t)$ , e  $\Delta$  a curva dada por  $(t, t)$ . Podemos escrever  $\partial T = \Delta - \gamma_1 - \gamma_2$ , onde  $\partial T$  denota o bordo do triangulo atravessado no sentido anti-horário. Já que  $\hat{D}$  e  $K$  são vazios,  $s$  se estende a todo  $T$ . Agora  $s \wedge e_3 |_{\partial T}$  sendo uma aplicação de  $S^1$  a  $l_\infty (= S^1)$  tem um grau bem definido. Como  $s$  se estende a  $T$ , seu grau é zero. Agora

$$\begin{aligned} \deg(s \wedge e_3 |_{\gamma_1}) &= \deg(s \wedge e_3 |_{\gamma_2}) = \deg(s \wedge e_3) = n(e_3) \\ \deg(s \wedge e_3 |_{\Delta}) &= \deg(\hat{f} \wedge e_3) = \hat{n}(e_3), \end{aligned}$$

onde  $\hat{n}(e_3) = n(\hat{f}, e_3)$ . Portanto

$$\begin{aligned} \deg(s \wedge e_3 |_{\partial T}) &= \deg(s \wedge e_3 |_{\Delta - \gamma_1 - \gamma_2}) \\ &= \deg(s \wedge e_3 |_{\Delta}) - \deg(s \wedge e_3 |_{\gamma_1}) - \deg(s \wedge e_3 |_{\gamma_2}) \\ &= n(e_3) - \hat{n}(e_3) - \hat{n}(e_3) = n(e_3) - 2\hat{n}(e_3) = 0 \end{aligned}$$

□

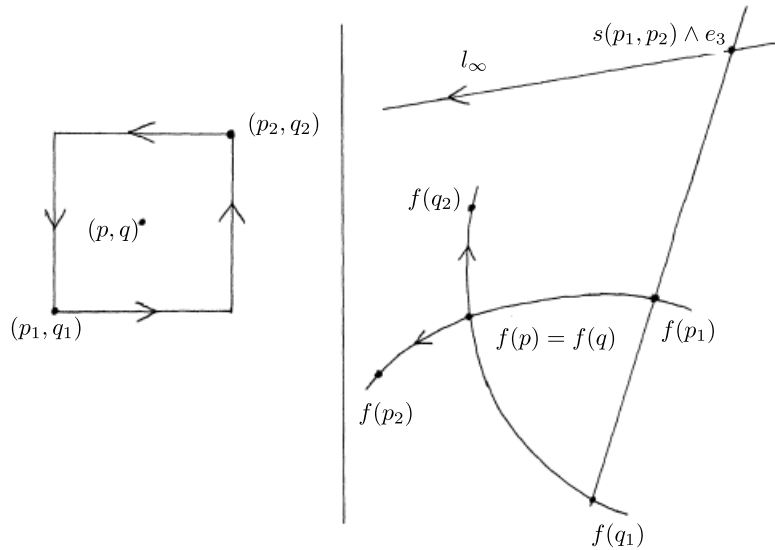


Figura A.2: Pontos Duplos

A Umlaufsatz pode ser generalizada permitindo a presença de cúspides e pontos duplos. Sejam  $(p, q) \in D$  e  $\gamma$  o bordo atravessado no sentido anti-horário de um pequeno quadrado centrado em  $(p, q)$ .

Podemos mostrar que  $\deg(s \wedge e_3 |_{\gamma}) = \pm 2$ . Vejamos isto, trace a progressão de  $s \wedge e_3$  em  $l_\infty$  como  $(p, q)$  atravessa o bordo do quadrado. (ver Figura [A.2](#)) De fato, se  $v_1$  e  $v_2$  são vetores tangentes à curva em  $p$  e  $q$ , respetivamente, então  $\deg(s \wedge e_3 |_{\gamma}) = -2\epsilon$ , onde  $\epsilon = \pm 1$  da a orientação do par  $(v_1, v_2)$ . Agora escrevamos  $\delta_{p,q} = \deg(s \wedge e_3 |_{\gamma})$  onde  $(p, q) \in D$  e  $\gamma$  como descrito atrais. Escreva

$\delta = \sum \delta_{p,q}$  onde a soma é sobre todos os  $(p,q) \in D$ , notemos que  $\delta$  depende da parametrização, isto é, este depende na escolha do ponto inicial  $f(0)$ . Com esta preparação, nós agora temos a seguinte generalização do Umlausfsatz.

**Teorema A.0.13.** *Seja  $f$  uma curva fechada em  $\mathbb{R}^2$  sem cúspides. Suponha que o ponto inicial  $a$  não é um ponto duplo. Então  $\delta = \hat{n}(e_3) - 2n(a)$ , onde a orientação de  $a$  é escolhida tal que  $e_3 \cdot a > 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $B$  a união disjunta de quadrados em  $T$ , cada um contendo um ponto de  $D$  em seu interior. Como antes, vejamos a aplicação  $s \wedge e_3$  em  $T$ .

$$\delta = \deg((s \wedge e_3) |_{\partial B}) = \deg((s \wedge e_3) |_{\partial T}).$$

Assim,

$$\deg((s \wedge e_3) |_{\gamma_1}) = \deg((s \wedge f) \wedge e_3) = \deg(f \wedge a),$$

onde a equação depende do fato que  $e_3 \cdot a > 0$ . Da mesma forma

$$\deg((s \wedge e_3) |_{\gamma_2}) = \deg((f \wedge a)).$$

Já que

$$\deg((s \wedge e_3) |_{\Delta}) = \hat{n}(e_3),$$

temos

$$\begin{aligned} \delta &= \deg(s \wedge e_3 |_{\partial T}) = \deg(s \wedge e_3 |_{\Delta - \gamma_1 - \gamma_2}) \\ &= \deg(s \wedge e_3 |_{\Delta}) - \deg(s \wedge e_3 |_{\gamma_1}) - \deg(s \wedge e_3 |_{\gamma_2}) \\ &= n(e_3) - \hat{n}(e_3) - \hat{n}(e_3) = n(e_3) - 2\hat{n}(e_3). \end{aligned}$$

□

Agora se apresenta o resultado anterior para cúspides. Suponha que  $f(p)$  é uma cúspide. Seja  $\gamma_\epsilon$  a interseção de  $T$  com o bordo, orientado no sentido anti-horário, de um pequeno quadrado centrado no ponto  $(p,p)$  e lados  $\epsilon$  (ver Figura A.3). Embora  $s \wedge e_3 |_{\gamma_\epsilon}$  não seja uma curva fechada em  $S^1$ , esta chegaria a ser fechada quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Se define o grau desta curva limite como sendo  $k_p$ . O inteiro  $k_p$  será  $\pm 1$ , dependendo da cúspide. (ver Figura A.3) O número  $k_p$  não depende do ponto inicial. Pondo  $k = \sum k_p$ , onde a soma percorre sobre todo  $p$  tal que  $f(p)$  é uma cúspide.

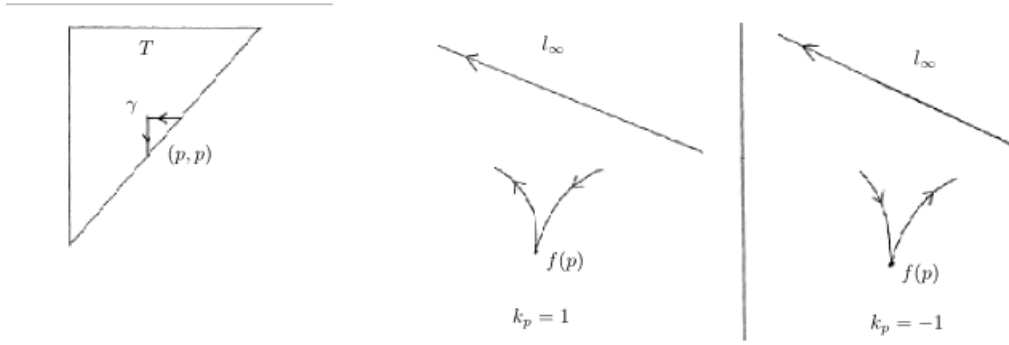


Figura A.3: Cúspides

**Teorema A.0.14.** *Seja  $f$  uma curva fechada em  $\mathbb{R}^2$  sem cúspides. Suponha que o ponto inicial  $a$  não é um ponto duplo ou cúspide. Então,  $\delta + k = \hat{n}(e_3) - 2n(a)$ , onde a orientação de  $a$  é escolhida tal que  $e_3 \cdot a > 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $B$  a união disjunta de quadrados em  $T$ , cada um contendo um ponto de  $\hat{D}$  em seu interior. Como antes, vejamos a aplicação  $s \wedge e_3$  em  $T$ .

$$\delta + k = \deg((s \wedge e_3) |_{\partial B \cup \gamma_\epsilon}) = \deg((s \wedge e_3) |_{\partial T}).$$

Assim,

$$\deg((s \wedge e_3) |_{\gamma_1}) = \deg((s \wedge f) \wedge e_3) = \deg(f \wedge a),$$

onde a equação depende do fato que  $e_3 \cdot a > 0$ . Da mesma forma

$$\deg((s \wedge e_3) |_{\gamma_2}) = \deg((f \wedge a)).$$

Já que

$$\deg((s \wedge e_3) |_{\Delta}) = \hat{n}(e_3),$$

temos

$$\begin{aligned} \delta + k &= \deg(s \wedge e_3 |_{\partial T}) = \deg(s \wedge e_3 |_{\Delta - \gamma_1 - \gamma_2}) \\ &= \deg(s \wedge e_3 |_{\Delta}) - \deg(s \wedge e_3 |_{\gamma_1}) - \deg(s \wedge e_3 |_{\gamma_2}) \\ &= n(e_3) - \hat{n}(e_3) - \hat{n}(e_3) = n(e_3) - 2\hat{n}(e_3). \end{aligned}$$

□

# Referências Bibliográficas

- [1] O. Arlie Petters, H. Levine e J. Wambsganss, *Singularity Theory and Gravitational Lensing*.III. Title. IV. Series, 1961.
- [2] V. I. Arnold, *Topological Invariants of the Plane Curves and Caustic*, University Lecture Series 5, AMS Providenci, 1994.
- [3] J. Bretas, *Singularidades de Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas e orientadas em  $S^2$* , Dissertação (Mestrado em Matemática), Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2011.
- [4] T. Brocker, e K. Janich, *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982.
- [5] K. Burns e M. Gidea, *Differential Geometry and Topology: With a view to dynamical system*. Chapman Hall: Boca Raton, 2005.
- [6] S. Demoto, *Stable maps between 2-spheres with a connected fold curve*, Hiroshima Math. J. 35, 2005. 93-113.
- [7] J. M. Eliashberg, *On Singularities of Folding Type*, Math. USSR-Izvestija. 4, 1970. 1119-1134.
- [8] T. Fukuda e T. Yamamoto, *Apparent contours of stable maps into the sphere*, Journal of Singularities 3, 2011. 113-125.
- [9] M. Golubitsky e V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [10] V. Goryunov, *Local Invariants of Mappings of Surface into three-space*, 2006.
- [11] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M. C. Romero Fuster, *Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data Topology and Its Appl.*154, 2007. 166-175.
- [12] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M. C. Romero Fuster. *Global aspects of the classification of the stable maps of compact surfaces in the plane*, Rev. Semin. Iberoam. Mat. Singul. Tortesillas 3, 2005.
- [13] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M.C. Romero Fuster, *Fold maps from the sphere to the plane*. Experimental Maths 15, 2006. 491-497

- 
- [14] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M.C. Romero Fuster, *Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere*, J. Singularities, 2, 2010.
- [15] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M. C Fuster Romero, *Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint*, Proceedings of the 6th Workshop on Real e Complex Singularities. Lecture notes in Pure and Applied Mathematics, 232, Marcel and Dekker, 2003.
- [16] H. Hopf, *Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven*, Compositio Math., 2, 1935. 50-62.
- [17] A. Kamenosono e T. Yamamoto, *The minimal numbers of singularities of stable maps between surfaces*, Topology Appli. 156, 2009. 2390-2405.
- [18] N. Kuiper, *Immersiones with minimal total absolute curvature*, in: Colloque de Geometric Differentielle Globale, Bruxelles, 1958 (Centre Belge de Recherches Mathematiques, Louvaine, 1959). 75-78.
- [19] D. Machado, *Invariante global de aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano*, Dissertação (Mestrado em Matemática), Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2010.
- [20] E. L. Lima, *Curso de Análise*. Projeto Euclides. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [21] G. P. Marques, *Um Teorema Global para Singularidades de Aplicações entre Superfícies*, Dissertação (Mestrado em Matemática), Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015.
- [22] J. Martínez Alfaro , C. Mendes de Jesus e M. C Romero Fuster. *Global classifications and graphs*. Em: M. Manoel, M. C. Romero Fuster, C. T. C. Wall. (Org.). Real and Complex Singularities. 1ed. New York. : Cambridge University Press. v. 1, 2010. 246-267.
- [23] W. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer, 1991.
- [24] C. Mendes de Jesus, *Invariantes Topológicos de aplicações genéricas de superfícies compactas orientáveis no plano*, Tese de Doutorado, PUC-RIO, 2001.
- [25] C. Mendes de Jesus, *Graphs of stable maps between closed orientable surfaces*, Comp. Appl. Math, 2016.
- [26] C. Mendes de Jesus, *Invariants of maps between closed surfaces*, preprint 2017.
- [27] C. Mendes de Jesus e M.C. Romero-Fuster, *Graphs of stable maps from closed surfaces to the projective plane* Topology and Its Appl, 234, 2018. 298-310.



- 
- [28] C. Mendes de Jesus e M. C. Romero Fuster *Stable gauss maps on surfaces from a global viewpoint*, Bulletin Brazilian Mathematical Society 42, no.1, 2011.
- [29] C. Mendes de Jesus, R. Oset Sinha e M. C. Romero Fuster, *Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to 3-space*, Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, 2009. 267.
- [30] Catarina M. de J. Sánchez e Gleison Pereira Marques. *Teorema de Quine em Teoria de Singularidades*. In: CNMAC, Gramando. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 5.2017
- [31] J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Based on Notes by David W. Weaver, The University Press of Virginia. Charlottesville, 1965.
- [32] L. Hernández, *Apuntes de Geometría y Topología*.53, 2007. Disponível em: <<https://www.unirioja.es/cu/luhernan/gdfolder/gd.pdf>>. Acesso em: 22/01/2018
- [33] J. Lee, *Introduction to smooth Manifolds*, vol. 1, Springer, 2002.
- [34] H. Levine, *Mappings of manifolds into the plane*, Amer. J. Math. 88, 1966. 357-365.
- [35] H. Levine *Computing the Euler characteristic of a manifold with boundary*, Proc. Am. Math. Soc. 123, 1995. 2563-2567
- [36] T. Ohmoto, F. Aicardi, *First Order Local Invariants of Apparent Coutours*, Topology, 45, 2006.
- [37] R. Pignoni, *Projections of surfaces with a connected fold curve*, Topology Appl., 49 (1), 1993. 55-74.
- [38] J. R. Quine, *Plucker equations for curves*, Amer. Math. Monthly 88, 1981. 21-29.
- [39] J. R. Quine, *A global theorem for singularities of maps between oriented 2- manifolds*. Trans. AMS 236, 1978. 307-314.
- [40] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv.28 1954, 1786.
- [41] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*. (French) Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6, 1955-1956. 43-87.
- [42] V. A. Vassiliev, *Complements of Discriminants of Smooth Maps*, Topology and Applications, AMS, Providenci, RI: Amer. Math. Soc. 1992.
- [43] H. Whitney, *On singularities of mappings of euclidean spaces, I. Maps of the plane into plane*, Ann, of Math. (2) 62, 1955.

- [44] H. Whitney, *Mappings of the plane into the plane*, Ann. Math., 62, 1955. 374.
- [45] H. Whitney, *On regular families of curves*, Bull. Amer. Math. Soc. 47, 1941, 145-147.
- [46] T. Yamamoto, *Apparent contours of stable maps between closed surface*, Kodai Math. J.40, 2017. 358378.