SERGINEI JOSÉ DO CARMO LIBERATO

ALGUMAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO CONJUNTO DE JULIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2014

SERGINEI JOSÉ DO CARMO LIBERATO

ALGUMAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO CONJUNTO DE JULIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de Fevereiro de 2014.

Carlos Maria Carballo

André Junqueira da Silva Corrêa

Kennedy Martins Pedroso
(Coorientador)

Juan Valentín Mendoza Mogollón
(Coorientador)

Alexandre Miranda Alves
(Orientador)

"É melhor tentar e falhar, que preocupar-se a ver a vida passar. É melhor tentar, ainda que em vão, que sentir-se fazendo nada até o final. Eu prefiro na chuva caminhar, que em dias tristes em casa me esconder. Prefiro ser feliz, embora louco, que em conformidade viver".

Martin Luther King.

"A entrada para a mente do homem é o que ele aprende, a saída é o que ele realiza. Se sua mente não for alimentada por um fornecimento contínuo de novas ideias que ele põe a trabalhar com um propósito e, se não houver uma saída por uma ação, sua mente torna-se estagnada. Tal mente é um perigo para o indivíduo que a possui e inútil para a comunidade".

Jeremias Whipple Jenks.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus que me concedeu mais esta vitória. A minha família pelo apoio em todos os momentos difíceis (meus pais Ana e Francisco, meus irmãos Sergiana, Sergio, Afonso e Antônio José), ao meu orientador Alexandre pela paciência, companheirismo e profissionalismo durante estes dois anos.

Não posso deixar de agradecer também aos meus amigos de Mestrado que tornaram esta caminhada mais amena e divertida, a minha turma: Rondinei, Thiago, Aline, Priscila, Filipe (Tilú), Renno, Carlos, Luiz Henrique, Lívia e também o membro pro tempore Diego, as turmas de 2011: Samara, Débora, Victor, Michele, Robledo, Guemael, Michely, Alana Nunes, Alana Cavalcante, Maisa, Anna Paula e Gustavo, a turma de 2013: Lázaro, Anderson, Ygor, Glelson, Cris, Lizeth, Flávio, Sabrina e Marcelo.

Rendo homenagens também ao Matheus e ao Gustavo que foram meus amigos de república nestes dois anos, ao pessoal do 2331 que serão sempre como minha família, a Karine, Mislene e Afonso Júnior pela amizade e bons momentos compartilhados. Agradeço a todos os meus professores do Departamento de Matemática que contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional, principalmente a Catarina, o Alexandre e o Rogério pelos conselhos e pela amizade.

Aos meus coorientadores Juan Valentín Mendoza Mogollón e Kennedy Martins Pedros pelas profícuas contribuições dadas a essa dissertação. Aos professores Dr André Junqueira da Silva Corrêa e o Dr Carlos Maria Carballo por aceitarem fazer parte da banca examinadora deste trabalho.

Afinal agradeço a todos que de alguma forma estavam torcendo por mim, mesmo a ditância, mais esta vitória em minha vida não é só minha é de todos nós.

Agradeço CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Agradecimentos **iii**

Resumo **vi**

Abstract **vii**

Introdução **1**

1 Conceitos Preliminares **3**

1.1 Tópicos em Variáveis Complexas 3

1.2 Alguns Resultados de Teoria da Medida 19

1.2.1 Medida e Dimensão de Hausdorff 22

2 Conjuntos de Julia e de Fatou, Funções de Böttcher e Polinômios de Faber **24**

2.1 Preliminares de Dinâmica Complexa 24

2.2 Conjuntos de Julia e Fatou 27

2.3 Propriedades dos Conjuntos de Julia e Fatou 31

2.4 As Coordenadas de Böttcher no Infinito 35

2.4.1 Coeficientes das Funções de Böttcher 40

2.5 Polinômios de Faber e Coeficientes de Garabedian-Schiffer 43

3 Aspectos Geométricos e a Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia **46**

3.1 Aspectos Geométricos do Conjunto de Julia Cheio 47

3.2 A Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia 51

Considerações Finais **60**

Referências Bibliográficas **61**

Índice Remissivo **63**

Resumo

LIBERATO, Serginei José do Carmo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2014. **Algumas Propriedades Geométricas do Conjunto de Julia** . Orientador: Alexandre Miranda Alves. Coorientadores: Juan Valentín Mendoza Mogollón e Kennedy Martins Pedroso.

Neste trabalho estudamos algumas propriedades geométricas do Conjunto de Julia e do e Conjunto de Julia Cheio. Além disso, procuramos uma forma de "mensurar" o conjunto de Julia, para isso utilizamos a medida de Hausdorff e determinamos uma cota inferior para a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia.

Abstract

LIBERATO, Serginei José do Carmo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, february, 2014. **Algumas Propriedades Geométricas do Conjunto de Julia**. Adviser: Alexandre Miranda Alves. Co-Advisers: Juan Valentín Mendoza Mogollón and Kennedy Martins Pedroso.

In this work we study some geometric properties of Julia sets and filled-in Julia sets of polynomials. In addition, we seek a form of "measure"the Julia set, for this we use the Hausdorff measure and determine a lower bound to the Hausdorff dimension of the Julia set.

Introdução

O campo da dinâmica complexa analítica tem sofrido um rápido desenvolvimento nos últimos 20 anos. Depois de um período de relativa dormência, o campo de estudo resurgiu em 1980 devido a algumas imagens, bastante intrigantes, obtidas com o auxílio de computadores do conjunto de Mandelbrot ou Connectedness Locus (O Conectedness Locus $\mathcal{M}_n$ da família de polinômios de grau n consiste de todos os parâmetros c, tais que o conjunto de Julia de $P_c(z) = z^n + c$ é conexo, ou equivalentemente se a órbita de cada ponto crítico de $P_c(z)$ é limitada), assim como a novos avanços na matemática preconizados por Douady, Hubbard, Sullivan e outros.

O campo experimentou dois períodos de evolução de curta duração, mas com um crescimento vigoroso e profícuo. As suas origens remontam aos finais do século XIX e início do século XX. Nesta altura, matemáticos como Leau, Schröder, Koenings, Böttcher, entre outros, interessaram-se pelo comportamento das funções complexas quando iteradas.

O trabalho inicialmente focava-se no comportamento das mesmas junto aos pontos fixos. Nos anos 1918-20, uma dramática mudança ocorreu quando, graças aos esforços de dois matemáticos franceses, Julia e Fatou, se começou a estudar não apenas o comportamento local das funções mas também o comportamento global das mesmas, ao estudar a dinâmica das funções fora dos pontos fixos. Por vezes, os resultados das iterações eram quase previsíveis e outras vezes o comportamento assumia-se como altamente instável, o que agora conhecemos como comportamento caótico. Em memória da contribuição dada por estes dois matemáticos franceses no estudo da dinâmica complexa, designamos o conjunto estável no plano complexo de conjunto de Fatou, enquanto que a região caótica é conhecida por conjunto de Julia.

Numa série de trabalhos, nos anos vinte, Fatou e Julia, descreveram de forma fascinante muitas das propriedades destes conjuntos para transformações racionais. Mais tarde, Baker estendeu o trabalho de Julia e Fatou a outras classes de funções, mostrando durante a sua investigação que outros tipos de comportamento estável podem ocorrer para funções inteiras e funções holomorfas.

O segundo maior período de atividade da dinâmica complexa começou em 1980, neste ano Mandelbrot usou gráficos obtidos por computador para estudar a dinâmica complexa. A sua descoberta do conjunto de Mandelbrot catapultou a área e promoveu o interesse de outros matemáticos em retomar os estudos neste campo. Numa rápida sucessão de

eventos, verificou-se a introdução de transformações quase-conformes, o que permitiu a Sullivan provar o teorema dos domínios não errantes, que veio completar a classificação de dinâmicas estáveis, classificação essa que foi iniciada por Fatou e Julia. Com o aparecimento do espaço dos parâmetros para polinômios quadráticos, introduzido por Douady, surge o desenvolvimento de técnicas que permitiram a classificação de quase todas as dinâmicas quadráticas, ficando por resolver a questão da conectividade do conjunto de Mandelbrot.

Logo após estes trabalhos estendeu-se o estudo de outros tipos de sistemas dinâmicos complexos, incluindo transformações racionais e polinômios de grau superior, que surgem do método de Newton, e as funções inteiras e holomorfas.

No nosso trabalho estudamos algumas propriedades geométricas do conjunto de Julia e do conjunto de Julia Cheio.

No capítulo 1 em um primeiro momento introduzimos os conceitos de Análise Complexa como funções holomorfas, condições de Cauchy-Riemann, Teorema Integral de Cauchy, Teorema de Green, Fórmula Analítica de Green, entre outros resultados de integração Complexa. Em um segundo momento estudamos alguns resultados de Teoria da Medida, como o conceito de σ-álgebra e a medida de Hausdorff;

No capítulo 2 apresentamos alguns resultados gerais de dinâmica, os conjuntos de Julia e de Fatou e as propriedades inerente a eles, além disso apresentamos o Teorema de Böttcher e suas implicações para o estudo dos conjuntos de Julia e de Julia Cheio, também apresentamos uma forma de estimarmos os coeficientes da função inversa a função dada pelo Teorema de Böttcher, e finalizamos o capítulo com estudando um pouco da teoria de polinômios de Faber;

No capítulo 3 tratamos aspectos geométricos do conjunto de Julia e do conjunto de Julia Cheio, mais especificamente apresentamos condições necessárias para que o conjunto de Julia Cheio de um polinômio mônico e centrado seja conexo. Além disso, estimamos a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste primeiro capítulo estamos interessados em apresentar alguns aspectos gerais da teoria de funções complexas, para isto faremos uso das referências bibliográficas [6], [9], [11] e [17].

1.1 Tópicos em Variáveis Complexas

Definição 1.1. *Seja f uma função complexa $f : G \to \mathbb{C}$, com $G \subseteq \mathbb{C}$ aberto, dizemos que f é derivável em z_0 se o limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, e o denotamos $f'(z_0)$.

Se f é derivável em todo $z \in G$ dizemos que f é derivável em G ou que f é holomorfa em G.

Exemplo 1.2. *:*

1. *$f(z) = a, \forall z \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ é holomorfa. De fato,*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{a - a}{z - z_0} = 0,$$

Daí f é holomorfa e $f'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

2. *$g(z) = z$ é holomorfa. De fato,*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1,$$

Daí f é holomorfa e $f'(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

3. *$h(z) = \overline{z}$ não é holomorfa. De fato, ao aproximar-se de $z_0 = x_0 + iy_0$ pela reta $z = (x + x_0) + iy_0$ com $x \to 0$, temos*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{x \to 0} \frac{(x + x_0) - iy_0 - (x_0 - iy_0)}{(x + x_0) + iy_0 - (x_0 + iy_0)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Por outro lado ao aproximar-se de $z_0 = x_0 + iy_0$ pela reta $z = x_0 + i(y - y_0)$ com $y \to 0$, temos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{y \to 0} \frac{x - i(y + y_0) - (x_0 - iy_0)}{x_0 + i(y - y_0) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Portanto $h(z) = \overline{z}$ não é holomorfa.

4. *$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ é holomorfa.*
De fato,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots z_0^{n-1}) = n z_0^{n-1}$$

Observação 1.3. *:*

1. *O limite $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ é equivalente a $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.*

2. *As funções polinomiais são holomorfas.*

Definição 1.4. *Um* domínio *é um subconjunto de $\mathbb{C}$ que é aberto e conexo.*

Teorema 1.5. *Se f for holomorfa em um domínio G então f é contínua em G.*

Demonstração. Seja $z_0 \in G$, temos que mostrar que $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), \forall z_0 \in G$. Como f é holomorfa temos que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, assim

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

o que acarreta o resultado. □

Agora veremos que para determinar se uma aplicação f é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$, é suficiente sabermos se a parte real e a parte imaginária de f admitem derivadas parciais de primeira ordem em $z_0 = (x_0, y_0)$, e se essas derivadas verificam as condições de Cauchy-Riemann que serão apresentadas a seguir. Seja $f : G \to \mathbb{C}$ sendo G um domínio e escrevemos

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

sendo $u : G \to \mathbb{R}$, $v : G \to \mathbb{R}$.

Teorema 1.6. *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ e $z_0 = x_0 + iy_0$. Uma condição necessária e suficiente para que f seja derivável em z_0 é que u e v possuam derivadas parciais contínuas em (x_0, y_0), satisfazendo as condições de Cauchy-Riemann dadas abaixo*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Além disso, se $f'(z_0)$ existe então

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Demonstração. Por definição

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Se $z = x + iy_0$, obtemos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{z \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y_0) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por outro lado, se $z = x_0 + iy$, obtemos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Como o limite existe é único, de (1.1) e (1.2), tem-se que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Daí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

E mais, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Agora se supondo que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann e são de classe C^1, temos que existem funções ε_1 e ε_2 definidas em torno de $(0,0)$ satisfazendo que para todo $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ suficientemente pequeno

$$u(x_0+r, y_0+s) - u(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)r + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)s + \varepsilon_1(r,s),$$

$$v(x_0+r, y_0+s) - v(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)r + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)s + \varepsilon_2(r,s),$$

e

$$\lim_{(r,s)\to(0,0)} \frac{\varepsilon_1(r,s)}{\sqrt{r^2+s^2}} = \lim_{(r,s)\to(0,0)} \frac{\varepsilon_2(r,s)}{\sqrt{r^2+s^2}} = 0$$

Colocando $h = r + is$ e utilizando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos

$$\begin{aligned}
f(z_0+h) - f(z_0) &= u(x_0+r, y_0+s) - u(x_0,y_0) + i(v(x_0+r,y_0+s) - v(x_0,y_0)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)r + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)s + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)r + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)s + \varepsilon_1(r,s) + i\varepsilon_2(r,s) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)r - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)s + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)r + i\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)s + \varepsilon_1(r,s) + i\varepsilon_2(r,s) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(r+si) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(r+si) + \varepsilon_1(r,s) + i\varepsilon_2(r,s) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right)h + \varepsilon_1(r,s) + i\varepsilon_2(r,s)
\end{aligned}$$

Daí

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\right] = \lim_{h=r+si\to 0}\left[\frac{\varepsilon_1(r,s)}{r+si} + i\frac{\varepsilon_2(r,s)}{r+si}\right] = 0,$$

pois

$$\left|\frac{\varepsilon_j(r,s)}{r+si}\right| = \frac{|\varepsilon_j(r,s)|}{\sqrt{r^2+s^2}} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad (r,s)\to 0, \quad j = 1,2.$$

O que mostra que f é derivável em z_0 e

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

□

Corolário 1.7. *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfa em um domínio G. Se $f'(z) = 0$ em G, então f é constante.*

Demonstração. De fato, tem-se $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0$ em G. Pelas equações de Cauchy-Riemann conclui-se que $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$ em G. Resulta $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$ em G, portanto u e v são constantes, e daí f é constante. □

Definição 1.8. *Seja G um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, a um elemento de G e $f : G\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ uma aplicação holomorfa. Se existir uma aplicação holomorfa $g : G \to \mathbb{C}$, $g(a) \neq 0$ e um inteiro não negativo n tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$ para todo z em $G \setminus \{a\}$, então a é denominado um polo de f de ordem m.*

Definição 1.9. *Dizemos que uma aplicação f é* meromorfa *num aberto $U \subset \mathbb{C}$, se existe um conjunto discreto $\Gamma \subset U$ tal que f é holomorfa em $U \setminus \Gamma$ e os pontos de Γ são polos de f.*

Definição 1.10. *Uma aplicação meromorfa e um a um é dita aplicação univalente.*

Exemplo 1.11. *As seguintes aplicações são univalentes:*

1. $f(z) = z$;
2. $f(z) = \frac{1}{z}$

Definição 1.12. *Uma função $f : G \to \mathbb{C}$ que tem a propriedade que o ângulo é preservado e também*

$$\lim_{z \to a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|}$$

existe é chamada aplicação conforme. Se f é analítica e $f'(z) \neq 0$ para algum z então f é conforme.

Definição 1.13. *A função racional da forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad - bc \neq 0$ é chamada transformação de Möbius.*

Se f é uma transformação de Möbius então $f^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$ também é uma transformação de Möbius, pois $ad - bc \neq 0$ e além disso

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(z)) &= f\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) = \frac{a\dfrac{dz-b}{-cz+a}+b}{c\dfrac{dz-b}{-cz+a}+d} = \frac{adz-ab-bcz+ab}{cdz-cb-cdz+ad} \\ &= \frac{(ad-bc)z}{ad-bc} = z = f^{-1}(f(z)) \end{aligned}$$

Daí temos que $f^{-1}(z)$ é a inversa da aplicação f. Sejam $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ e $g(z) = \dfrac{rz+s}{tz+w}$ transformações de Möbius, então $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \dfrac{(ar+bt)z+(as+bw)}{(cr+dt)z+(cs+dw)}$ é uma transformação de Möbius, pois $(ar+bt)(cs+dw)-(as+bw)(cr+dt) = (ad-bc)(wr-st) \neq 0$. Portanto as transformações de Möbius tem estrutura de grupo.

Exemplo 1.14. *A função $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ é uma transformação de Möbius.*

Os resultados apresentados podem ser encontrados em ([6]) e ([9]).

Definição 1.15. *Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $f(t) = u(t) + iv(t)$. Definimos a integral complexa de f por*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Propriedades:

i) $\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt$

ii) $\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$

iii) $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

iv) Se $c \in \mathbb{C}, c = a + bi$:

$$c\int_a^b f(t)dt = (a+bi)\left(\int_a^b u(t)dt + \int_a^b v(t)dt\right) = \int_a^b (au-bv)dt + i\int_a^b (bu+av)dt$$

e

$$\int_a^b cf(t)dt = \int_a^b (a+bi)(u+iv)dt = \int_a^b (au-bv)dt + i\int_a^b (bu+av)dt$$

Portanto

$$c\int_a^b f(t)dt = \int_a^b cf(t)dt$$

Definição 1.16. *Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável f de classe C^∞, e seu traço é o conjunto $\{f(t) : t \in [a,b] \subset \mathbb{R}\}$.*

Definição 1.17. *Uma função $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é de variação limitada se existe $M > 0$ tal que para toda partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ temos que*

$$\nu(\gamma, P) = \max_{1\leq k\leq n}\{|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|\} \leq M.$$

A variação total é

$$\nu(\gamma) = \sup_P \nu(\gamma, P).$$

Definição 1.18. *Uma curva é retificável se ela é de variação limitada.*

Definição 1.19 (**Integral de Riemann-Stieltjes**)**.** *O número*

$$I = \int_\gamma f = \int_\gamma f(\gamma(t))d\gamma(t)$$

é dito a integral de f sobre γ.

Proposição 1.20. *Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é de classe C^1 em $[a,b]$ então γ é retificavel e*

$$\nu(\gamma) = \int_a^b \gamma'(t)dt$$

Demonstração. Dada $P = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b\}$ temos

$$\begin{aligned}
\nu(\gamma, P) &= \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\
&= \sum_{k=1}^n |\int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)dt| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|dt = \int_a^b |\gamma'(t)|dt
\end{aligned}$$

Definida para funções contínuas sobre γ que são de classe C^1 em $[a,b]$. □

Definição 1.21. *Dada f contínua em γ e γ de classe C^1 em $[a,b]$ definimos a integral de f sob a curva γ por*

$$\int_\gamma f d\gamma = \int_\gamma f = \int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemplo 1.22. *Se* $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *e* $\gamma(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ *então*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f dz &= \int_0^{2\pi} f(re^{it})(re^{it})' dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2i\pi\end{aligned}$$

Definição 1.23. *Seja* $f : G \to \mathbb{C}$*, com* G *aberto, e* f *contínua. Dizemos que* $F : G \to \mathbb{C}$ *é uma primitiva de* f *se* F *é holomorfa e* $F' = f$*.*

Proposição 1.24. *Seja* $f : G \to \mathbb{C}$ *contínua em* G*, onde* G *é um domínio (aberto e conexo). Se* F *é uma primitiva de* f *então* $F + K$ *também o é, mais ainda qualquer outra primitiva de* f *é da forma* $F + K$*, onde* K *é uma constante.*

Demonstração. Se H é outra primitiva de f então $H - F$ é holomorfa e

$$(H - F)'(z) = H'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

Então $H - F = K$, com K constante. □

Definição 1.25. *Uma função* $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é dita analítica se para todo* $a \in G, \exists r$ *máximo tal que* $B_r(a) \subset G$ *e*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \ \forall z \in B_r(a).$$

Teorema 1.26 (**Teorema Integral de Cauchy**)**.** *Se* $f : G \to \mathbb{C}$*, com* G *um domínio simplesmente conexo (ou seja,* G *é aberto, conexo, e sem buracos, no sentido que qualquer curva fechada de* G *delimita uma região inteiramente contida em* G*), e* f *analítica. Então* $\int_\gamma f dz = 0$ *para toda curva* γ *de Jordan, regular, inteiramente contida em* G*.*

Observação 1.27. γ *ser uma curva de Jordan significa que* γ *é uma curva fechada e simples (ou seja,* γ *é uma aplicação injetora).*

Demonstração. (Teorema Integral de Cauchy): Ver referência [6]. □

Proposição 1.28. *Se* $f : G \to \mathbb{C}$ *é analítica então* f *possui uma primitiva, mais ainda se* γ *é um caminho fechado em* $B(a) \subset G$ *então* $\int_\gamma f dz = 0$*.*

Demonstração. Dado $a \in G, \exists r > 0$ tal que $B_r(a) \subset G$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \ \forall z \in B_r(a)$$

e considere $F : B_r(a) \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

Sabemos que para n grande: $\dfrac{|z-a|}{n+1} \leq \dfrac{r}{n+1} < 1$, então

$$\left|\frac{a_n(z-a)^{n+1}}{n+1}\right| = |a_n(z-a)^n| \left|\frac{z-a}{n+1}\right| \leq |a_n(z-a)^n|$$

Então F está bem definida (raio de convergência r) e $F' = f$.

□

Teorema 1.29. *Dada $f : G \to \mathbb{C}$ contínua e G um domínio simplesmente conexo, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f possui uma primitiva*
2. *$\int_\gamma f dz = 0$, para todo caminho fechado $\gamma \subset G$*
3. *$\int_\sigma f dz$ só depende dos extremos z_1 e z_2 de qualquer caminho σ contido em G, que liga z_1 a z_2.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (3) : Sejam $\sigma(t) = x(t) + iy(t), t \in (a,b)$; $f(z) = u + iv$, $F(z) = N + iM$ e $z_1 = \sigma(a) = x(a) + iy(a)$, $z_2 = \sigma(b) = x(b) + iy(b)$. Sabemos que $F' = f$ e

$$F' = \frac{\partial N}{\partial x} + i\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - i\frac{\partial N}{\partial y}$$

Então

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial x} & = u = \dfrac{\partial M}{\partial y} \\ & e \\ -\dfrac{\partial N}{\partial y} & = v = \dfrac{\partial M}{\partial x} \end{cases}$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f dz &= \int_a^b (u(t)x'(t) - v(t)y'(t))dt + i\int_a^b (u(t)y'(t) + v(t)x'(t))dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial N}{\partial x}x'(t) - \frac{\partial N}{\partial y}y'(t)\right)dt + i\int_a^b \left(\frac{\partial M}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial M}{\partial x}x'(t)\right)dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}(N(x(t), y(t)))dt + i\int_a^b \frac{d}{dt}(M(x(t), y(t)))dt \\
&= N(x(t), y(t))|_a^b + iM(x(t), y(t))|_a^b \\
&= N(x(b), y(b)) - N(x(a), y(a)) + iM(x(b), y(b)) - iM(x(a), y(a)) \\
&= N(x(b), y(b)) + iM(x(b), y(b)) - (N(x(a), y(a)) + iM(x(a), y(a))) \\
&= F(x(b) + iy(b)) - F(x(a) + iy(a)) \\
&= F(z_2) - F(z_1)
\end{aligned}
$$

$(1) \Rightarrow (2)$: Como em $(1) \Rightarrow (3)$ temos $z_1 = z_2$ segue o resultado.

$(2) \Rightarrow (3)$: Sejam z_1 e z_2 em G. Seja γ um caminho que liga z_1 a z_2 e σ um caminho que liga z_2 a z_1 ambos os caminhos definidos em G. Logo $\gamma - \sigma$ é um caminho fechado em G, que é simplesmente conexo, assim

$$\int_{\gamma-\sigma} f dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma f dz - \int_\sigma f dz = 0,$$

então $\int_\gamma f dz = \int_\sigma f dz$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Agora fixe $z_0 \in G$, e defina

$$
\begin{aligned}
F : G &\to \mathbb{C} \\
z &\mapsto F(z)
\end{aligned}
$$

por $F(z) = \int_\gamma f dz$, onde γ é o caminho que liga z_0 a z. F está bem definida por hipótese, pois a integral está bem definida.

Afirmação: $F'(z) = f(z), \forall z \in G$

De fato, como G é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset G$. Assim para $h \in \mathbb{C}$ com $|h| < r, z + h \in B_r(z) \subset G$. Mais ainda, temos que $\sigma(t) = z + th$, com $t \in [0, 1]$ está contido em $B_r(z) \subset G$, logo temos

$$
\begin{aligned}
F(z+h) &= \int_{\gamma+\sigma} f(w)dw = \int_\gamma f(w)dw + \int_\sigma f(w)dw \\
&= F(z) + \int_\sigma f(w)dw
\end{aligned}
$$

Então

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_\sigma f(w)dw$$

Por outro lado,

$$\int_\sigma dw = \int_0^1 1\sigma'(t)dt = h1 = h$$

é daí temos que

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int_\sigma f(w)dw - f(z) = \frac{1}{h}\left[\int_\sigma f(w)dw - f(z)h\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_\sigma f(w)dw - f(z)\int_\sigma dw\right] = \frac{1}{h}\left[\int_\sigma f(w)dw - \int_\sigma f(z)dw\right] \\
&= \int_\sigma \frac{f(w)-f(z)}{h}dw
\end{aligned}$$

Como f é contínua dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|w-z| < \delta$ então $|f(w)-f(z)| < \epsilon$. Logo tomando $\overline{\delta} = \min\{r, \delta\}$ e se $h < \overline{\delta}$, temos $|f(w)-f(z)| < \epsilon$, assim dado $\epsilon > 0$ existe $\overline{\delta} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
h < \overline{\delta} \Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\int_\sigma \frac{f(w)-f(z)}{h}dw\right| \leq \\
&\leq \int_\sigma \frac{|f(w)-f(z)|}{|h|}|dw| \\
&< \frac{\epsilon}{|h|}\int_\sigma |dw| = \frac{\epsilon}{|h|}|h| = \epsilon
\end{aligned}$$

Então $F'(z) = f(z)$. □

Nos próximos resultados mostraremos que se $G \subset \mathbb{C}$ é um domínio simplesmente conexo e $f : G \to \mathbb{C}$ é holomorfa, então existe uma representação de f ao longo de caminhos fechados contidos em G.

Teorema 1.30 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Sejam $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfa no domínio simplesmente conexo G e γ um caminho fechado qualquer contido em G. Para todo z no interior da região delimitada por γ, tem-se*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z},$$

denominada fórmula integral de Cauchy.

Demonstração. De fato, sendo G aberto, para cada z no interior de γ existe um disco

fechado de centro z e raio $\rho > 0$ contido no interior de γ. Seja Γ a fronteira deste disco e suponhamos que γ e Γ sejam caminhos orientados no mesmo sentido. A função $\xi \to \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ é holomorfa em $G - I(\Gamma)$ (G menos o interior de Γ). Como anteriormente temos

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

Uma representação paramétrica de Γ é dada por $\xi = z + \rho e^{it}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Daí

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(\xi + \rho e^{it})dt,$$

da qual obtem-se

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} - f(z)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z + \rho e^{it}) - f(z)|dt$$

Sendo f contínua em G, por ser holomorfa, segue-se que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $|f(z + \rho e^{it} - f(z)| < \varepsilon$, para todo $\rho < \delta$. Resulta que a fórmula anterior implica na fórmula integral de Cauchy.

Observemos que a fórmula integral de Cauchy, nos diz que se $f : G \to \mathbb{C}$ for holomorfa no domínio simplesmente conexo G, então o seu valor $f(z)$ em todo z no interior da região delimitada por um caminho fechado γ qualquer contido em G, é obtido através do conhecimento de f sobre γ.

Como f é holomorfa em G e como $f : G \to \mathbb{C}$ é contínua segue que

$$z \to \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

é uma função contínua em $(G - \gamma)$. □

Teorema 1.31. *Seja $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, com g um domínio, então f é analítica, ou seja dado $a \in G$, existe $B_r(a) \subset G$ tal*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n, \ \forall z \in B_r(a).$$

Demonstração. Dado $a \in G, \exists R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$. Considere r tal que $0 < r < R$, daí $B(a, r) \subset B(a, R)$ e f é holomorfa em $\overline{B(a, r)}$. Logo pela fórmula integral de Cauchy, temos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)dw}{w - z}, \quad \text{onde} \quad \gamma = \partial B(a, r), \quad \forall z \in B(a, r)$$

Agora note que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\left(\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right)$$

Como $(z-a) < r$ e $|w-a| = r$, temos que $\left|\dfrac{z-a}{w-a}\right| < 1$, assim

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n, \quad \forall z \in B(a,r)$$

ou seja,

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}, \quad \forall z \in B(a,r)$$

daí

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\right)dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\right)dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}dw\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right)(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \end{aligned}$$

onde

$$a_n = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Portanto f é analítica.

□

Observação 1.32. *Se f é analítica então f é holomorfa em G.*

Daí segue os dois resultados seguintes, estes podem ser consultados em detalhes em [6], [9] e [17].

Teorema 1.33. *Seja $f : (G-\gamma) \to \mathbb{C}$ definida por*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - z},$$

com $\varphi : G \to \mathbb{C}$ contínua e holomorfa em $(G-\gamma)$, então a derivada é igual a

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2}.$$

Corolário 1.34. *Nas condições do teorema anterior, a função f definida por*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

possui derivadas de todas as ordens, sendo a derivada de ordem n dada por

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi,$$

para todo z em $(G - \gamma)$.

Teorema 1.35 (Teorema de Morera)**.** *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função contínua no domínio simplesmente conexo G. Se*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

para todo caminho fechado contido em G, segue-se que f é holomorfa em G.

Demonstração. Como $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ para todo caminho contido em G, temos que se $z_0 \in G$, a integral

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = 0$$

depende somente de z. daí

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = 0$$

está definida em G e é derivável, com $\varphi'(z) = f(z)$. Portanto, f é igual a derivada de uma função holomorfa, φ, logo holomorfa, e segue o teorema.

□

Teorema 1.36 (Teorema de Liouville)**.** *Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa em todo $\mathbb{C}$ então f é constante.*

Demonstração. Seja z_0 um ponto qualquer de $\mathbb{C}$ e $D(0, \rho)$ um disco aberto com centro na origem contendo z_0 em seu interior. Representamos por γ a fronteira de $D(0, \rho)$. Sendo f holomorfa em $\mathbb{C}$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi,$$

pela fórmula integral de Cauchy. Tem-se também,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi}d\xi.$$

Assim

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|z_0||f(\xi)|}{|\xi - z_0||\xi|}|d\xi|$$

Como f é limitada em $\mathbb{C}$, existe uma constante $K > 0$ tal que $|f(z)| < K$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Consequentemente,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{K|z_0|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|d\xi|}{|\xi - z_0||\xi|}.$$

Temos que $\xi \in \gamma$, logo $|\xi - z_0| \geq \rho - |z_0|$, portanto

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{K|z_0|}{(\rho - |z_0|)}.$$

Sendo $K, |z_0|$ números independentes de ρ. Fazendo $\rho \to \infty$ na expressão anterior temos que para todo $z_0 \in \mathbb{C}, f(z_0) = f(0)$ o que mostra que f é constante em $\mathbb{C}$.

□

Teorema 1.37 (Teorema do Módulo Máximo)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto conexo. Suponhamos que exista $z_0 \in U$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo z numa vizinhança de z_0. Então f é constante em U.*

Demonstração. Seja $z_0 \in U$, e suponhamos que $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\theta_0}$. Consideremos a função $g(z) = e^{-i\theta_0} f(z)$. Temos que $|g(z)| = |f(z)| \leq |f(z_0)| = g(z_0)$ para todo z numa vizinhança de z_0. Escrevamos $g(z) = u(z) + iv(z)$, onde $u = \text{Re}g$ e $v = \text{Im}g$. Como $g(z_0) \in \mathbb{R}$(pois $g(z_0) = e^{-i\theta_0} f(z_0) = e^{-i\theta_0} e^{i\theta_0} |f(z_0)|$), temos que $u(z_0) = g(z_0)$ e $v(z_0) = 0$. Agora seja $r > 0$ tal que $\overline{D}_r(z_0) \subset U \subset \mathbb{C}$ e tomemos $\gamma_r(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$. Pela fórmula integral de Cauchy podemos escrever

$$\begin{aligned} u(z_0) &= g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Igualando as partes reais, obtemos

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \tag{1.3}$$

Afirmação: A hipótese do teorema e a igualdade acima implicam que $u(z_0) = u(z_0 + re^{i\theta}), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$.

De fato, seja $h(\theta) = u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta})$. Assim temos

$$u(z) \leq |u(z)| \leq |g(z)| \leq g(z_0) = u(z_0), \quad \forall z \in V$$

Obtemos que $h(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Note que se $h(\theta_1) > 0$ para algum $\theta_1 \in [0, 2\pi]$, então teríamos $h(\theta) > 0$ para θ em um intervalo contendo θ_1, pois h é contínua. O que implica

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta}))d\theta \\ &= u(z_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta \end{aligned}$$

o que gera uma contradição com a igualdade 1.3. Concluimos que $u(z_0+re^{i\theta}) = u(z_0)$, $\forall\theta \in [0, 2\pi]$ e todo $r > 0$ tal que $\overline{D}_r(z_0) \subset V \subset \mathbb{C}$. Daí obtemos que u é uma constante em um disco aberto $D \subset \mathbb{C}$, com centro em z_0. Por outro lado as relações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Portanto v é também constante em D, ou seja, $g = u + iv$ é constante em D. Como $f(z) = e^{i\theta_0}g(z)$, concluimos que f também é constante em D, logo constante em U, uma vez que U é conexo e f é analítica.

□

Corolário 1.38 (Princípio do Máximo)**.** *Seja G um domínio limitado de $\mathbb{C}$. Se $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfa em G e contínua no fecho $\overline{G}$. O máximo de $|f|$ é assumido em um ponto da fronteira de ∂G.*

Demonstração. Suponhamos que $|f|$ assume máximo no interior de G, digamos em $a \in \text{int}G$, assim

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta$$

e assim temos

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a)|d\theta = |f(a)|$$

Portanto $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|d\theta = |f(a)|$ e como $0 \leq |f(a+re^{i\theta})| \leq |f(a)|$, daí $f(a+re^{i\theta}) = f(a), \forall r \in [0, 2\pi]$. Como $|f|$ é contínua, então temos que f é localmente constante, e do fato de G ser conexo e f contínua segue que f é constante, o que é um absurdo, logo o máximo de f não pode ocorrer no interior de G. □

Agora apresentaremos a fórmula analítica de Green para área de uma região, usaremos este resultado no capítulo 3. Os resultados desta seção podem ser encontrados em [13],

onde os itens abaixo são demonstrados. Seja Σ como a classe das funções do seguinte tipo

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \quad (|z| > 1) \quad \text{e} \quad b_i \in \mathbb{R}$$

Definição 1.39. *O índice de uma curva fechada suave por partes C em relação a um ponto $w \notin C$ é definido por*

$$\chi(C, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{u - w} du.$$

Observação 1.40. *O índice é uma constante em cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus C$. Daí temos os seguintes resultados:*

Teorema 1.41 (Fórmula analítica de Green)**.** *Seja C uma curva suave por partes homologa a zero com respeito a um domínio $H \subset \mathbb{C}$. Se $h(w)$ é holomorfa em H então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \overline{h(w)} h'(w) dw = \frac{1}{\pi} \int \int_H \chi(C, w) |h'(w)|^2 d\Omega$$

onde $d\Omega$ é um elemento de área.

A curva C ser homologa a 0 significa que o índice da curva satisfaz $\chi(C, w) = 0$ para $w \notin H$, assim em alguma vizinhança de ∂H. Com base neste teorema temos o seguinte corolário

Corolário 1.42. *Sejam $g \in \Sigma$ e $H(r)$ todo o domínio de $C : g(re^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Se $h(w)$ é analítica em $H(r_0)$ para algum $r_0 > 1$ então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \overline{h(w)} h'(w) dw = \frac{1}{\pi} \int \int_{H(r)} |h'(w)|^2 d\Omega \quad (1 < r < r_0)$$

1.2 Alguns Resultados de Teoria da Medida

Nesta seção usaremos as referências [7], [12], [15] e [16], .

Sejam Ω um conjunto qualquer, $A \subset \Omega$ um subconjunto de Ω e $A^C = \Omega \setminus A$. Denotemos por 2^Ω o conjunto das partes de X, onde X é um conjunto qualquer.

Definição 1.43. *Seja Ω um conjunto. Uma sigma-álgebra (σ-álgebra) é uma família de subconjuntos de Ω, denotada por $\mathcal{F}$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$;

ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^C \in \mathcal{F}$;

iii) Se $A_n \in \mathcal{F}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

O par ordenado $(\Omega, \mathcal{F})$ é chamado espaço mensurável. Cada elemento da σ-álgebra é chamado conjunto mensurável.

Observação 1.44. *Quando $(\Omega, \mathcal{F})$ é um espaço topológico, a sua σ-álgebra é chamada σ-álgebra de Borel de Ω, e é denotada por $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{F})$. Os elementos de $\mathcal{B}$ são denominados subconjuntos de Borel.*

Observação 1.45. *Pelas Leis de De Morgan uma σ-álgebra é fechada em relação a interseção.*

Exemplo 1.46. *São conjuntos de Borel em $\mathbb{R}$*

1. *Os conjuntos com um único elemento;*
   De fato, seja $a \in \mathbb{R}$ então $\{a\} = \cap_{i=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a\right] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pois cada elemento da interseção pertence a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. *Conjuntos Contáveis;*
   De fato, pois um conjunto contável é a união contável de conjuntos com um único elemento.

Definição 1.47. *Chamamos μ uma medida em $\mathbb{R}^n$ se μ é uma função não negativa, possivelmente ∞, tal que para cada subconjunto de $\mathbb{R}^n$, μ satisfaz:*

ı) $\mu(\emptyset) = 0$

ı) $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subset B$

ı) Se $A_1, A_2, \cdots$, é uma sequência contável de conjuntos disjuntos então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

onde os A_i são conjuntos de Borel. Chamamos $\mu(A)$ de medida do conjunto A.

Observação 1.48. *Como consequência da definição anterior, se um conjunto A pode ser expresso como a união disjunta $A = B \cup (A \setminus B)$ então*

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

Similarmente, se $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ é uma sequência de conjuntos de Borel então

$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

Dessa forma, note que se $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = A_1 \bigcup (A_2 \setminus A_1) \bigcup (A_3 \setminus A_2) \bigcup \cdots$ *com esta união disjunta*

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty}(A_{i+1} - A_i) \\
&= \mu(A_1) + \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\
&= \lim_{k\to\infty}\mu(A_k)
\end{aligned}$$

Mais geralmente, podemos mostrar que se $\delta > 0$, A_δ *são conjuntos de Borel que crescem quando* δ *decresce, ou seja,* $A_{\delta'} \subset A_\delta$ *para* $0 < \delta < \delta'$*, então*

$$\lim_{\delta\to 0}\mu(A_\delta) = \mu\left(\bigcup_{\delta>0} A_\delta\right)$$

Definição 1.49. *Uma medida de um subconjunto limitado* A *de* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $0 < \mu(A) < \infty$ *será chamada distribuição de massa.*

Definição 1.50. *Por um espaço de medida* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *significa um espaço* $(\Omega, \mathcal{F})$ *junto com uma medida* μ *definida sobre* $\mathcal{F}$*.*

Definição 1.51. *Se* $\mu(\Omega) = 1$ *dizemos que* μ *é uma probabilidade e o espaço* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *é chamado espaço de probabilidade.*

Observação 1.52. *:*

1. *Na topologia fraca estrela uma medida* $\mu_n \to \mu$ *em* $M(X)$ *se, e somente se,* $\forall f \in C(X) \int f' d\mu_n \to \int f d\mu$*, onde* $M(X)$ *é a coleção de todas as medidas de probabilidade definidas sobre o espaço mensurável* $(X, \mathcal{B}(X))$ *e* $C(X)$ *conjunto de aplicações contínuas de* X *para* X*.*

2. *Se* $\mu_n, \mu \in M(X), n \geq 1$*, pode-se provar as seguintes equivalências*

   i) $\mu_n \to \mu$ *na topologia fraca estrela.*

   ii) Para cada subconjunto fechado F *de* X*,* $\lim_{n\to\infty} \sup \mu_n(F) \leq \mu(F)$*.*

   iii) Para cada subconjunto aberto U *de* X*,* $\lim_{n\to\infty} \inf \mu_n(U) \geq \mu(U)$*.*

   iv) Para cada $A \in \mathcal{B}$ *com* $\mu(\partial A) = 0, \mu_n(A) \to \mu(A)$*.*

1.2.1 Medida e Dimensão de Hausdorff

Em 1918, Hausdorff introduziu a medida $t-$dimensional $m_t(E)$ de um conjunto E e definiu a dimensão de Hausdorff de E.

Denotamos por $D(w,r)$ o círculo de centro w e raio r, e para um conjunto A, denotamos o diâmetro de A por

$$|A| = \sup\{|z-w| : z, w \in A.\}$$

Seja E algum subconjunto de $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (a esfera de Riemann) e t um número positivo. Para cada $\delta > 0$, consideremos as possíveis coberturas $\{A_j\}$ de E por conjuntos de diâmetro menor do que δ. Nosso objetivo será minimizar a soma $\sum_j |A_j|^t$, para isso definamos:

$$m_t^\delta(E) = \inf\left\{\sum_j |A_j|^t : |A_j| < \delta, E \subset \bigcup_j A_j\right\}$$

Definição 1.53. *Quando δ decresce, a classe de tais coberturas de E diminuem e definimos a medida t-dimensional $m_t(E)$ de E por*

$$m_t(E) = \lim_{\delta \to 0} m_t^\delta(E) = sup_{\delta>0} m_t^\delta(E)$$

Observe que tal limite sempre existe, e daí $m_t(E)$ é chamado medida t-dimendional de Hausdorff

O seguinte resultado nos permitirá definir a dimensão de Hausdorff.

Lema 1.54. *Se $0 \leq m_t(E) < +\infty$ e $t < T$, então $m_T(E) = 0$*

Demonstração. Suponha que a família $\{A_j\}$ satisfaz $E \subset \bigcup_j A_j$ e $|A_j| < \delta$, então

$$m_T^\delta(E) \leq \sum_j |A_j|^T \leq \delta^{T-t} \sum_j |A_j|^t$$

Variando $\{A_j\}$ sobre todas tais coberturas de E, obtemos

$$m_T^\delta(E) \leq \delta^{T-t} m_t^\delta(E),$$

e fazendo $\delta \to 0$, obtemos que $m_T(E) = 0$. □

Definição 1.55. *Uma consequência imediata do lema anterior é a existência de um número não negativo $d(E)$ tal que*

$$m_t(E) = \begin{cases} +\infty & se \quad t < d(E) \\ 0 & se \quad t > d(E) \end{cases}$$

tal número $d(E)$ é denominado a dimensão de Hausdorff de E.

Observação 1.56. *Denotamos a dimensão de Hausdorff* $d(E)$ *por* $d(E) = Dim_H(E)$.

Observação 1.57. *Note que não fizemos afirmações sobre o tamanho de* $d(E)$*, então* $d(E) = Dim_H(E)$ *pode assumir qualquer valor no intervalo* $[0, \infty]$.

Observação 1.58. *Note que se trocarmos o conjunto* E *por bolas a definição e o resultados de medida não são alterados.*

Capítulo 2

Conjuntos de Julia e de Fatou, Funções de Böttcher e Polinômios de Faber

Neste capítulo usaremos as seguintes referências [2], [5], [8], [10], [13] e [14] e para apresentar a teoria de conjuntos de Julia e de Fatou e algumas de suas propriedades, e também introduziremos o conceito de Connectedness Locus. Por último apresentaremos o Teorema de Böttcher e a teoria de polinômios de Faber que nos auxiliará a trabalhar com Conjunto de Julia Cheio no capítulo 3.

2.1 Preliminares de Dinâmica Complexa

Primeiramente estamos interessados em apresentar alguns resultados gerais de dinâmica, e na próxima seção começaremos a trabalhar sobre a esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definição 2.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $f : S \to S$ uma aplicação, onde $\widehat{\mathbb{C}}$ é a esfera de Riemann. Definimos a n-ésima iterada de f como a composição de f n-vezes consigo mesma*

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f.$$

Definição 2.2. *Um ponto w é um* ponto periódico *de uma aplicação f se ele é um ponto fixo de alguma iterada f^m, ou seja, $f^m(w) = w$.*

Definição 2.3. *Considere a* órbita periódica*:*

$$f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \cdots \mapsto z_{m-1} \mapsto z_m = z_0$$

para uma aplicação holomorfa $f : S \to S$. Se os pontos $z_1, \cdots z_{m-1}, z_m$ são todos distintos então o inteiro $m \geq 1$ é chamado período.

Definição 2.4. *Um ponto z_0 é pré-periódico, de período n, se z_0 não é periódico, mas existe um $n > 0$ tal que $f^{n+i}(z_0) = f^i(z_0)$, com $i > 0$, ou seja, $f^i(z_0)$ é periódico para $i > 0$, com i inteiro positivo.*

Definição 2.5. *Suponha z_0 um ponto periódico de período m, de uma função holomorfa f, isto é, $f^m(z_0) = z_0$, para algum $m \in \mathbb{N}$. O número $\lambda = (f^m)'(z_0) = f'(z_1) \cdot f'(z_2) \cdots f'(z_m)$ é chamado* multiplicador *de f em z_0, onde $z_i = f^i(z_0)$. O ponto periódico z_0 é classificado da seguinte forma:*

- *z_0 é super-atrator se $|\lambda| = 0$;*
- *z_0 é atrator se $0 < |\lambda| < 1$;*
- *z_0 é repulsor se $|\lambda| > 1$;*
- *z_0 é indiferente se $|\lambda| = 1$.*

Exemplo 2.6. *Se $f(z) = z^2$ então f tem três pontos fixos, a saber: zero, a unidade e o infinito. Assim os multiplicadores são:*

- *$\lambda = |f'(0)| = 2 \cdot 0 = 0$, portanto 0 é superatrator;*
- *$\lambda = |f'(1)| = 2 \cdot 1 = 2$, portanto 1 é repulsor;*
- *$\lambda = |f'(\infty)| = 2 \cdot \infty = \infty$, mas nesse caso especial ∞ é atrator, e não repulsor. De fato, a definição anterior dever ser vista com cautela no caso em que o ponto no infinito é períodico sobre uma aplicação racional, $f^m(\infty) = \infty$. Neste caso o multiplicador λ não é igual ao limite de $z \to \infty$ da derivada de $f^m(z)$, mas o inverso deste número. Detalhes podem ser vistos na referência [2].*

Em 1884 G. Koenings provou o seguinte teorema de linearização, que nos dá uma forma de estudar o comportamento de uma função f qualquer a partir de uma aplicação conforme, ver referência [5].

Teorema 2.7. *Suponha que f tem um ponto fixo atrator em z_0, com multiplicador λ satisfazendo $0 < \lambda < 1$. Então existe uma aplicação conforme $\xi = \varphi(z)$ de uma vizinhança de z_0 sobre uma vizinhança de 0 que conjuga $f(z)$ com a função linear $g(\xi) = \lambda\xi$. A conjugação é única, a menos de multiplicação por um fator constante não nulo.*

Demonstração. Suponhamos $z_0 = 0$. Definamos $\varphi_n(z) = \lambda^{-n} f^n(z) = z + b_{n+1} z^{n+1} \cdots$, então φ_n satisfaz

$$\varphi_n \circ f = \lambda^{-n} f^{n+1} = \lambda \varphi_{n+1}$$

Assim se $\varphi_n \to \varphi$ então $\varphi \circ f = \lambda\varphi$ e temos que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda\xi$ e φ é uma conjugação. Mostaremos a convergência citada acima, ou seja, que $\varphi_n \to \varphi$. Note que para $\delta > 0$ pequeno, temos

$$|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2, \quad |z| \leq \delta \ \text{ e } \ C > 0 \ \text{ constante.}$$

Assim $|f(z)| \leq |\lambda||z| + C|z|^2 \leq (|\lambda| + C\delta)|z|$, e por indução com $|\lambda| + C\delta < 1$,

$$|f^n(z)| \leq (\lambda + C\delta)^n |z|, \quad |z| \leq \delta.$$

Escolhamos δ pequeno de forma que se $\rho = \dfrac{(|\lambda| + C\delta)^2}{\lambda} < 1$, obtemos

$$|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| = \left| \frac{f^n(f(z)) - \lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{C|f^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{\rho^n C|z|^2}{|\lambda|}$$

para $|z| \leq \delta$. Desta forma $\varphi_n(z)$ converge uniformemente para $|z| \leq \delta$, e existe a conjugação.

Para provarmos a unicidade é suficiente mostrarmos que alguma conjugação de $f(z) = \lambda z$ sobre si mesma é uma constante multiplicada por z. De fato, suponhamos que $\varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ seja tal conjugação, então $\varphi(\lambda z) = \lambda\varphi(z)$. Fazendo as substituições temos que $a_n \lambda^n = \lambda a_n$, daí obtemos que $a_n = 0$ se $n \geq 2$, portanto $\varphi(z) = a_1 z$. □

Em 1904 Böttcher foi o primeiro a provar a existência da conjugação no caso superatrator, ver [5] (os outros casos do Teorema de Böttcher serão discutidos adiante).

Teorema 2.8. *Suponha que f tem um ponto fixo superatrator em z_0, e que*

$$f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \cdots, a_p \neq 0, p \geq 2.$$

Então existe uma conjugação $\xi = \varphi(z)$ de uma vizinhança de z_0 sobre uma vizinhança de 0 que conjuga $f(z)$ para ξ^p. A função conjugação é única a menos de multiplicação por uma $(p-1)$- ésima raiz da unidade.

Demonstração. Suponha $z_0 = 0$. Para $|z|$ pequeno existe uma constante $C > 1$ tal que $|f(z)| \leq C|z|^p$. Por indução, escrevendo $f^{n+1} = f^n \circ f$ e usando que $p \geq 2$, encontramos que

$$|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}, \quad |z| \leq \delta$$

então $f^n(z) \to 0$.

Fazendo a mudança de variável $w = cz$ onde $c^{p-1} = \dfrac{1}{a_p}$ então temos a conjugada de f da forma $f(w) = w^p + \cdots$, assim assumimos $a_p = 1$. Queremos uma conjugação da forma $\varphi(z) = z + \cdots$ tal que $\varphi(f(z)) = \varphi(z)^p$, que é equivalente a condição que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \xi^p$. Seja

$$\varphi_n(z) = (f^n(z))^{p^{-n}} = (z^{p^n} + \cdots)^{p^{-n}} = z(1 + \cdots)^{p^{-n}},$$

que esta bem definida em uma vizinhança da origem, e as φ_n's satisfazem

$$\varphi_{n-1} \circ f = (f^{n-1} \circ f)^{p^{-n+1}} = \varphi_n^p,$$

assim se $\varphi_n \to \varphi$ então φ satisfaz $\varphi \circ f = \varphi^p$ e dessa forma é uma solução. Mostremos agora que $\{\varphi_n\}$ converge, escrevamos $f^{n+1} = f \circ f^n$ e note que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} &= \left(\frac{\varphi_1 \circ f^n}{f^n}\right)^{p^{-n}} = (1 + \mathcal{O}(|f^n|))^{p^{-n}} \\ &= 1 + \mathcal{O}(p^{-n})\mathcal{O}(|z|)^{p^n} C^{p^n}) = 1 + \mathcal{O}(p^{-n}) \end{aligned}$$

Se $|z| \leq \dfrac{1}{C}$. Assim o produto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$$

converge uniformemente para $|z| \leq c < \dfrac{1}{C}$, o que implica que $\{\varphi_n\}$ converge, o que garante a existência almejada. □

Os dois resultados anteriores nos dão uma base para enunciarmos o Teorema de Böttcher na seção 4, este resultado nos dará uma forma mais geral de determinarmos as funções conjugação.

Definição 2.9. *Um ponto periódico $z_0 = f^n(z_0)$ é chamado* parabólico *se o módulo do multiplicador λ em z_0 é igual a 1, desde que f^m não seja a aplicação identidade. Mais geralmente, se λ é uma raiz da unidade nenhuma iterada de f é a aplicação identidade.*

Definição 2.10. *Se $\mathcal{O}$ é uma órbita periódica atratora de período m, definimos a* bacia de atração *dessa órbita como sendo o conjunto aberto $\mathcal{A} \subset S$ consistindo de todos os pontos $z \in S$ para os quais as sucessivas iteradas $f^m(z), f^{2m}(z), \cdots$, convergem para algum ponto de $\mathcal{O}$.*

2.2 Conjuntos de Julia e Fatou

Para estudarmos os conjuntos de Julia e de fatou precisamos primeiramente da definição de família normal.

Definição 2.11. *Seja $\mathcal{F}$ uma coleção de aplicações da esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ para a esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. $\mathcal{F}$ será chamada* normal *se cada sequência de aplicações de $\mathcal{F}$ contém ou uma subsequência que converge localmente uniformemente ou uma subsequência que diverge localmente uniformemente em $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Teorema 2.12. *Uma família $\mathcal{F}$ de funções analíticas uniformemente limitadas em um domínio G é normal.*

Demonstração. Seja o disco unitário $D = \{z : |z| < 1\}$ e seja $f \in G$ satisfazendo $|f| \leq N$ para algum $N \in \mathbb{R}$. Se $|f| < r < 1$ usando as desigualdades de Cauchy temos $f'(z) \leq \dfrac{N}{1-r}$. Considerando G coberto por discos segue o resultado. □

Teorema 2.13 (**Teorema de Montel**). *Seja $\mathcal{F}$ uma família de aplicações analíticas definidas em domínio S, e $f : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação que omite três diferentes valores. Isto é, assuma que existem três pontos distintos $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ tais que $f(S) \subset \widehat{\mathbb{C}} \backslash \{a, b, c\}$ para cada $f \in \mathcal{F}$. Então $\mathcal{F}$ é uma família normal.*

Lema 2.14. *Se $M = \widehat{\mathbb{C}} \backslash \{0, 1\}$ é a esfera perfurada três vezes, então M^{∞}(cobertura de M) é conformalmente equivalente ao disco unitário D.*

Demonstração. Já que D é conformalmente equivalente à parte superior do plano $H = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, é suficiente encontrar uma aplicação cobertura de H sobre M. Construiremos tal aplicação, a função modular, como segue: Seja $E = \left\{ z : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1, \left| z - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}$. Então pelo teorema da transformação de Riemann existe uma aplicação ψ de E para H fixando $0, 1, \infty$. Denote E^* a reflexão de E sobre o círculo $\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$. Pelo princípio de reflexão de Schwarz, extendemos ψ para uma aplicação conforme de $E \cup E^*$ para $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Continuando a reflexão extendemos ψ a todos $\{0 < \mathrm{Re}(z) < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ tomando os valores em $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \{0, 1\}$. Por reflexão das linhas verticais $\{\mathrm{Re}(z) = n\}$ para n inteiro, extendemos ψ para todo H. Por construção temos que ψ é uma transformação cobertura de H sobre M. □

Demonstração. (do Teorema de Montel)
Assumindo que S é um disco, e por composição por uma transformação de Möbius, assumimos que as funções em $\mathcal{F}$ não asssumem os valores $0, 1$, e ∞. Seja $M = \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$. Pelo Lema anterior existe uma aplicação cobertura $\psi : D \to M$. Seja $\widehat{f} : S \to D$ o levantamento de $f \in \mathcal{F}$, tal que $\widehat{f} \circ \psi = f$. Então $\{\widehat{f} : f \in \mathcal{F}\}$ é uma família normal, pois é uma família normal limitada, portanto $\mathcal{F}$ é uma família normal. □

Definição 2.15. *Seja $\widehat{\mathbb{C}}$ a esfera de Riemann, que é uma superfície de Riemann compacta, e $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa e $f^n : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ a n-ésima iterada. O domínio de normalidade da coleção de iteradas f^n é chamado* Conjunto de Fatou *para f. O seu complementar é chamado de* Conjunto de Julia.
Notação: *$J = J(f)$ para conjunto de Julia e $\widehat{\mathbb{C}} \setminus J$ ou $F = F(f)$ para o conjunto de Fatou.*

Exemplo 2.16. *Considere $f(z) = z^2$, então $f^n(z) = z^{2^n}$. Como f^n converge para 0 em $\{|z| < 1\}$ e converge para ∞ em $\{|z| > 1\}$ o Conjunto de Julia de f é o círculo unitário $\{|z| = 1\}$, e seu complementar $F(f)$ é o conjunto de Fatou.*

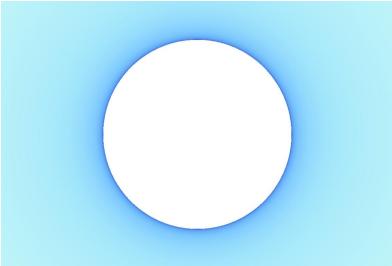

Figura 2.1: Conjunto de Julia de $f(z) = z^2$.

Agora apresentaremos alguns figuras que representam o conjunto de Julia para algumas aplicações, estas figuras forma obtidas utilizando o sofware fraqtive.

Exemplo 2.17. *Considere $f(z) = z^2 + i$, então a figura abaixo representa o conjunto de Julia de f.*

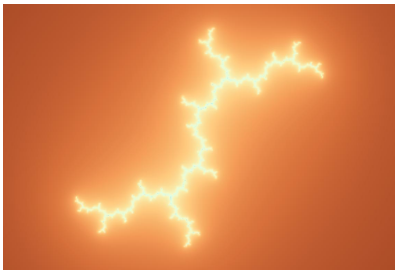

Figura 2.2: Conjunto de Julia de $f(z) = z^2 + i$.

Exemplo 2.18. *Agora considere $f(z) = z^2 - 0.55i + 0.6$, então a figura abaixo representa o conjunto de Julia de f .*

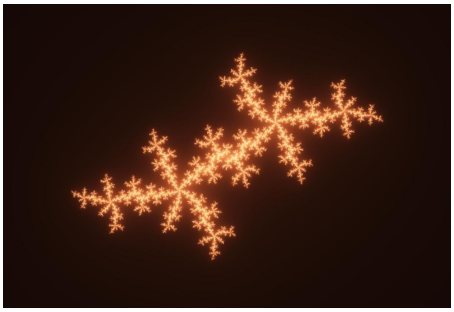

Figura 2.3: Conjunto de Julia de $f(z) = z^2 - 0.55i + 0.6$.

Exemplo 2.19. *Considere $f(z) = z^2 - 2$. Se usarmos o homeomorfismo $g(z) = z + \dfrac{1}{z}$ em $g : D \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$ então $g(z^2) = f(g(z)), \forall z$, e daí $z \mapsto z^2$ e $z \mapsto z^2 - 2$ são topologicamente conjugadas. Portanto o conjunto de pontos que escapam para infinito é $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$, assim o conjunto de Julia é o intervalo do eixo real $[-2, 2]$.*

Figura 2.4: Conjunto de Julia de $f(z) = z^2 - 2$.

Definição 2.20. *Seja $P : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ um polinômio complexo mônico de grau $d \geq 2$. Denotamos por P^n a n-ésima iterada de P. O Conjunto de Julia Cheio de P é definido por*

$$K(P) = \{z : P^n(z), \text{ não tende para } \infty\}$$

Observação 2.21. *Com a definição de conjunto de Julia Cheio e com a definição do conjunto de Julia, observamos que o conjunto de Julia é o bordo do conjunto de Julia Cheio.*

Exemplo 2.22. *Sejam os polinômios de* ***Tchebychev*** *T_k definidos pela seguinte forma de recorrência*

$$T_{k+1} = zT_k(z) - T_{k-1}(z), \ k = 1, \ 2, \cdots$$

e $T_0(z) = 2$, $T_1(z) = z$, daí temos

$$\begin{aligned} T_2(z) &= z^2 - 2 \\ T_3(z) &= z^3 - 3z \\ T_4(z) &= z^4 - 4z^2 + 2 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

O conjunto de Julia Cheio $K(T_k)$ é o intervalo $[-2, 2]$. Desta forma $K(T_k) = J(T_k)$, e daí o conjunto de Julia Cheio tem interior vazio (ver referência [2]).

Exemplo 2.23. *Para o polinômio $P_0(z) = z^d$ o conjunto de Julia Cheio $K(P_0)$ é o disco unitário fechado, e o conjunto de Julia $J(P_0)$ é o círculo unitário.*
De fato, como $P_0(z) = z^d$, então $P_0^n(z) = z^{d^n}$. Assim $P_0^n(z)$ converge para 0 em $\{|z| < 1\}$ e converge para ∞ em $\{|z| > 1\}$, portanto o Conjunto de Julia Cheio é o conjunto $\{z : |z| < 1\}$, e o conjunto de Julia é o círculo unitário $\{|z| = 1\}$.

Definição 2.24. *O* Conectedness Locus *$\mathcal{M}_n$ de uma família de polinômios de grau n consiste de todos os parâmetros c, tais que o conjunto de Julia de $P_c(z)$ é conexo, ou equivalentemente se a órbita de cada ponto crítico de $P_c(z)$ é limitada.*

No próximo exemplo apresentamos o Connectedness Locus de algumas famílias de polinômios, novamente utilizamos o sofware fraqtive.

Exemplo 2.25. *Considere $P_c(z) = z^n + c$, então o Connectedness Locus é o conjunto representado na figura abaixo:*

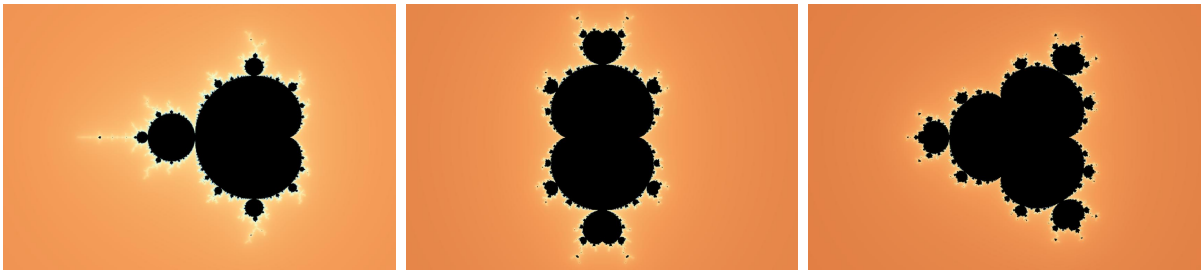

Figura 2.5: Connectedness Locus para $n = 2, n = 3$ e $n = 4$, respectivamente.

2.3 Propriedades dos Conjuntos de Julia e Fatou

Nesta seção apresentaremos uma série de propriedades dos conjuntos de Julia e de Fatou, o que nos permitirá compreender o comportamento dinâmico de uma aplicação holomorfa. Antes de tratarmos as propriedades do Conjunto de Julia e de Fatou precisamos da seguinte teorema que pode ser encontrado em [11]:

Teorema 2.26. *Seja $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ uma função racional, onde P e Q não possuem raízes comuns. Coloquemos $k = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$. Valem as seguintes propriedades*

a) Para todo $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ a equação $f(z) = z_0$ possui k soluções, contadas com multiplicidade.

b) Existe um subconjunto finito $C(f) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ com no máximo $2k - 2$ elementos, tal que $\widehat{\mathbb{C}} - C(f) = \{z_0 : \text{a equação } f(z) = z_0 \text{ possui } k \text{ soluções distintas}\}$.

c) O conjunto $C(f)$ é vazio se, e somente se, $k = 1$.

Assim diremos que k é o grau de f e $C(f)$ é o conjunto de valores críticos de f, além disso um ponto $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} - C(f)$ é chamado valor regular de f.

Proseguimos agora com as propriedades dos Conjuntos de Julia e Fatou.

Teorema 2.27 (Lema da Invariância). *O Conjunto de Julia $J = J(f)$ de uma aplicação holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ é totalmente invariante sobre f. Isto é, z pertence a J se, e somente se, $f(z)$ pertence a J. O mesmo vale para o conjunto de Fatou.*

Demonstração. Primeiramente note que $f^{-1}(F) \subseteq F$. Agora suponha que $z_0 \in F(f)$, e que $f^{n_j+1} = f^{n_j} \circ f$ converge uniformemente em uma vizinhança de z_0. Como f é analítica

ela aplica uma vizinhança de z_0 em uma vizinhança de $f(z_0)$, e além disso f^{n_j} converge uniformemente em uma vizinhança de $f(z_0)$, pois $z_0 \in F(f)$. Segue que $f(z_0) \in F(f)$, e daí $f(F) \subseteq F$, e portanto F é completamente invariante. □

Teorema 2.28 (**Lema da Iteração**). *Seja uma aplicação holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Para todo $k > 0$, o Conjunto de Julia $J(f^k)$ da k-ésima iterada coincide com o Conjunto de Julia $J(f)$.*

Demonstração. O conjunto de Julia de f coincide com o conjunto de Julia de f^k, pois se f^k é normal sobre um conjunto aberto U então f^{nk} também é normal sobre U. Por outro lado se f^{nk} é normal sobre U então f^k também é normal sobre U, e daí segue o resultado. □

Lema 2.29. *Cada órbita periódica atratora está contida no Conjunto de Fatou de f. De fato, toda bacia de atração $\mathcal{A}$ para uma órbita periódica atratora está contida no conjunto de Fatou. Além disso, cada órbita periódica repulsora está contida no conjunto de Julia.*

Demonstração. Primeiro considere um ponto fixo $z_0 = f(z_0)$ com multiplicador λ. Se $|\lambda| > 1$, então nenhuma sequência de iteradas de f pode convergir uniformemente próximo de z_0, como a primeira derivada de f^n em z_0 é λ^n, temos que f se aproxima do infinito quando $n \to \infty$.
Se $|\lambda| < 1$ e escolhendo $|\lambda| < c < 1$ temos pela expansão de Taylor que

$$|f(z) - f(z_0)| < c|z - z_0|,$$

para z suficientemente próximo de z_0. Desta forma as sucessivas iteradas de f restritas a uma vizinhança de z_0 convergem uniformemente para a função constante $z \to z_0$, como um ponto periódico de f é um ponto fixo de alguma iteração f^n segue o resultado. □

Corolário 2.30. *As órbitas periódicas repulsoras são densas no Conjunto de Julia.*

Lema 2.31. *Cada ponto periódico parabólico pertence ao Conjunto de Julia.*

Demonstração. Seja w um parâmetro local de uniformização com $w = 0$ correspondedo ao ponto periódico. Assim alguma iterada f^n corresponde a uma transformação local do w-plano com uma série de potências da forma $w \mapsto w + a_q w^q + a_{q+1} w^{q+1} + \cdots$, onde $q \geq 2, a_q \neq 0$. Daí a derivada de ordem q de f^{mk} em 0 é igual a $q!ka_q$ que tende a infinito a medida que $k \to \infty$. Pelo Teorema da Convergência Uniforme de Weierstrass, segue que nehuma subsequência de f^{mk_j} pode convergir localmente de forma uniforme a medida que $k_j \to \infty$. □

Antes de seguirmos para a próximo teorema precisamos da definição de grande órbita

Definição 2.32. *Chamamos grande órbita de um ponto z sobre $f : S \to S$ ao conjunto $GO(z, f)$ consistindo de todos os pontos $z' \in S$ cuja órbita eventualmente intercepta a órbita de z. Assim z e z' tem a mesma grande órbita se, e somente se, $f^m(z) = f^n(z')$ para alguma escolha de $m \geq 0$ e $n \geq 0$. Um ponto $z \in S$ será chamado grande órbita finita ou excepcional sobre f se sua grande órbita $GO(z, f) \subset S$ é um conjunto finito.*

Similarmente a esta definição temos:

Definição 2.33. *O conjunto dos pontos de $\widehat{\mathbb{C}}$ que tem grande órbita finita será denotado por $\varepsilon(f)$.*

Teorema 2.34 (Transitividade)**.** *Seja z_1 um ponto arbitrário do conjunto de Julia $J \subset \widehat{\mathbb{C}}$ e seja N uma vizinhança arbitrária de z_1 . Então a união U de imagens futuras $f^n(N)$ contém todo o conjunto de Julia, e contém todos os pontos de $\widehat{\mathbb{C}}$; à exceção de, no máximo dois pontos*

Demonstração. Primeiramente note que o conjunto complementar $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ pode conter no máximo dois pontos, pois se $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ contém mais de dois pontos, usando que $f(U) \subset U$, obtemos pelo Teorema de Montel 2.13 que U deve estar contido no conjunto de Fatou, que é impossível, já que $z_1 \in U \cap J$. Novamente usando que $f(U) \subset U$, temos que alguma pré-imagem de um ponto $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ deve pertencer ao conjunto finito $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$. Seguindo com este argumento que alguma pré-imagem de iterada z é periódica, assim z é ele mesmo periódico e com grande órbita finita. Assim o conjunto $\varepsilon(f)$ de grande órbita finita é disjunta de J, segue que $J \subset U$. Finalmente, se N é pequeno o suficiente então $N \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \varepsilon(f)$, segue que $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \varepsilon(f)$. □

Lema 2.35. *Se f é uma aplicação racional de grau 2 ou mais, então o Conjunto de Julia $J = J(f)$ é não vazio.*

Demonstração. Suponha que $J = \emptyset$, então f^n é uma família normal sobre toda $\widehat{\mathbb{C}}$, e então existe uma subsequência $\{n_j\}$ tal que $f^{n_j}(z) \to g(z)$ para alguma função analítica g de $\widehat{\mathbb{C}}$ para $\widehat{\mathbb{C}}$. Se g é constante então a imagem de f^{n_j} está contida em uma pequena vizinhança de um valor constante, o que é impossível, pois f^n converge em $\widehat{\mathbb{C}}$. Se g é não constante então f^{n_j} tem o mesmo número de zeros de g, o que é impossível já que f^n tem grau d^n. □

Corolário 2.36. *Se o Conjunto de Julia contém um ponto interior, então ele deve ser igual a toda a esfera de Riemann.*

Demonstração. Se J tem um ponto interior z_1, então escolhendo uma vizinhança $N \subset J$ de z_1 a união $U \subset J$ de imagens futuras de N é densa, portanto $\overline{U} = \widehat{C}$, e como J é fechado segue que $J = \widehat{\mathbb{C}}$. □

Corolário 2.37. *Se $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ é a bacia de atração de alguma órbita periódica atratora, então o bordo topológico $\partial\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$ é igual a todo o Conjunto de Julia. Cada componente do Conjunto de Fatou F ou coincide com alguma componente conexa da bacia $\mathcal{A}$ ou é disjunta de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Se N é alguma vizinhança de um ponto do conjunto de Julia, então $f^n(N)$ intercepta $\mathcal{A}$, e daí o próprio N intercepta $\mathcal{A}$, e assim temos que $J \subset \overline{\mathcal{A}}$. Mas J é disjunto de $\mathcal{A}$ então $J \subset \partial\mathcal{A}$. Por outro lado, se N é uma vizinhança de um ponto de $\partial\mathcal{A}$ então alguma iterada $f^n|_N$ deve ter uma descontinuidade entre $\mathcal{A}$ e $\partial\mathcal{A}$, e assim $\partial\mathcal{A} \subset J$.
Finalmente, note que alguma componente conexa do conjunto de Fatou intercepta $\mathcal{A}$, uma vez que não pode interceptar o bordo de $\mathcal{A}$, deve coincidir com alguma componente de $\mathcal{A}$. Portanto segue o resultado. □

Corolário 2.38. *Se z_0 é um algum ponto do conjunto de Julia $J = J(f)$, então o conjunto*

$$\{z \in \mathbb{C}; f^n(z) = z_0 \quad \textit{para algum} \quad n \geq 0\}$$

é denso em $J(f)$.

Demonstração. Primeiramente note que $z_0 \notin \varepsilon(f)$, pois $z_0 \in J(f)$. Pelo teorema 2.34 temos que se $z_1 \in J(f)$ então ele pode ser aproximado por fechados arbitrários que contém z que pertence ao conjunto formado pelas órbitas passadas de z_0. □

Corolário 2.39. *Se f é uma aplicação racional de grau 2 ou mais, então $J(f)$ não tem pontos isolados.*

Demonstração. Seja $z_0 \in J$ e U uma vizinhança aberta de z_0. Assumiremos que z_0 não é periódico e escolhemos z_1 com $f(z_1) = z_0$, então $f^n(z_0) \neq z_1$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Desde que $z_1 \in J$, as iteradas passadas de z_1 são densas em J, então existe um $\xi \in U$ com $f^m(\xi) = z_1$, assim $\xi \in J \cap U$ e $\xi \neq z_0$, assim z_0 não é isolado.
Agora suponha $f^n(z_0) = z_0$ para algum n minimal. Se z_0 é a única solução de $f^n(z_0) = z_0$ então z_0 deveria ser um ponto fixo superatrator de f^n contradizendo que $z_0 \in J$. Portanto existe $z_1 \neq z_0$ com $f^n(z_1) = z_0$, além disso $f^j(z_0) \neq z_1$ para $0 \leq j \leq n$, pois caso contrário isto asseguraria que $0 \leq j \leq n$ e daí $f^j(z_0) = f^{n+j}(z_0) = f^n(z_1) = z_0$ contradizendo a minimalidade de n. Assim como anteriormente z_1 deveria ter uma pré-imagem em $U \cap J$ que não pode ser z_0. □

Corolário 2.40. *Para toda aplicação racional de grau 2 ou mais, o Conjunto de Julia J ou é conexo ou tem uma quantidade não enumeravél de componentes conexas.*

Definição 2.41. *Um espaço topológico X é de Baire se cada intersecção enumerável de abertos densos de X é também densa. Será conveniente dizer que uma propriedade de pontos no espaço de Baire X é genérica para x, se é válida para todos os pontos de alguma interseção enumerável de subconjuntos abertos densos de X.*

Teorema 2.42. *Para uma escolha genérica de um ponto $z \in J = J(f)$, a órbita futura*

$$\{z, f(z), f^2(z), \cdots\}$$

é densa em J.

Demonstração. Para cada $j > 0$ podemos cobrir J por um número finito de conjuntos abertos N_{jk} de diâmetro menor do que $\frac{1}{j}$ usando a métrica esférica. Para cada N_{jk} seja U_{jk} a união das pré-imagens de iteradas de $f^{-n}(N_{jk})$. Segue do corolário 2.38 que o fechado $\overline{U_{jk} \cap J}$ é igual a todo o conjunto de Julia, em outras palavras, $U_{jk} \cap J$ é um subconjunto denso do conjunto de Julia.
Agora se z pertence a interseção desses conjuntos, então a órbita de z intercepta cada N_{jk} e por isso é denso em J. □

Teorema 2.43. *Seja f uma aplicação racional de grau maior ou igual 2, e seja E um subconjunto compacto da esfera de Riemann com a propriedade que para todo $z \in F(f)$, a sequência $\{f^n(z) : n \geq 1\}$ não acumula em nenhum ponto de E. Então dado algum conjunto U que contém $J(f)$ temos que $f^{-n}(E) \subset U$ para n suficientemente grande.*

Demonstração. Suponhamos que a conclusão seja falsa, ou seja, existe alguma vizinhança aberta de U de J, e para n em alguma sequência $\{n_1, n_2, \cdots\}$ os pontos $z_n \in f^{-n}(E)$ mas não pertence a U. Sem perda de generalidade, supomos que $z_n \to w$, como U é aberto e $w \notin U$, temos que $w \in F$ pois $J \subset U$.

Agora seja $\epsilon > 0$ positivo, existe $\delta > 0$ tal que se $|z_n - w| < \delta$ implica que $|f^n(z_n) - f^n(w)| < \epsilon$ e como $f^n(z_n) \in E$, assim a mostramos que $f^n(w)$ se acumula em E contradizendo a hipótese. □

2.4 As Coordenadas de Böttcher no Infinito

Agora estudaremos uma forma mais fácil de trabalharmos com o conjunto de Julia Cheio, para isso faremos uso do teorema de Böttcher.

Daremos primeiramente a versão geral do Teorema de Böttcher e depois analisaremos o caso especial para o conjunto de Julia Cheio.

Teorema 2.44 (Teorema de Böttcher)**.** *Suponha f um polinômio mônico, existe uma mudança de coordenadas holomorfa $w = \phi(z)$, com $\phi(0) = 0$, que conjuga f com a aplicação $w \mapsto w^n$ em uma vizinhança de zero. Além disso ϕ é unica, a menos de multiplicação por uma $(n-1)$-raiz da unidade.*

Dessa forma f é conjugada a uma aplicação ϕ, na vizinhança de um ponto fixo, ou seja:

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \mapsto w^n \quad \text{com} \quad n \geq 2.$$

Demonstração. **Prova da Existência:** Primeiramente escolhamos uma solução c da equação $c^{n-1} = a_n$, então a aplicação conjugação $cf\left(\frac{z}{c}\right)$ têm coeficiente lider, coeficiente de maior grau, igual a $+1$. Assim assumimos, sem perda de generalidade, que tal aplicação tem a forma $f(z) = z^n(1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \cdots)$, ou de forma resumida

$$f(z) = z^n(1 + \eta(z)) \quad com \quad \eta(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \cdots$$

Escolhemos um raio $0 < r < \frac{1}{2}$ que seja pequeno o suficiente tal que $\eta(z) < \frac{1}{2}$ sobre o disco D_r de raio r. Então f aplica o disco sobre si mesmo, com $|f(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^n \leq \frac{3}{4}|z|$ e com $f(z) \neq 0$ para $D_r \setminus \{0\}$. A k-ésima iterada f^k também aplica D_r sobre si mesmo, e segue indutivamente que ela (f^k) tem a forma $f^k(z) = z^{n^k}(1 + n^{k-1}b_1 z +$ (termos de grau menor)).
A idéia da prova a seguinte, tome

$$\phi_k(z) = \sqrt[n^k]{f^k(z)} = z^{n^k}(1 + n^{k-1}b_1 z + (\text{termos de grau menor}))^{\frac{1}{n^k}} = z\left(1 + \frac{b_1}{z} + \cdots\right),$$

onde a expressão da direita provém de uma escolha explícita da n^k-raiz da unidade. Assim $\phi_k(f(z)) = \phi_{k+1}(z)^n$. Mostraremos que a função ϕ_k converge uniformemente para a função limite $\phi : D_r \to D$. Para provarmos a convergência façamos a substituição $z = e^Z$, onde Z esta definido em relação ao semi-plano esquerdo de H_r definido pela desigualdade $\mathrm{Re}(Z) < \log r$. Então a aplicação f do disco D_r sobre si mesmo corresponde a uma aplicação $F(Z) = \log f(e^Z)$ de H_r sobre si mesmo. Tomando $\eta = \eta(e^Z) = b_1 e^Z + b_2 e^Z + \cdots$, com $|\eta| < \dfrac{1}{2}$, temos que podemos escrever

$$\begin{aligned} F(Z) &= \log(e^{nZ}(1+\eta)) = nZ + \log(1+\eta) \\ &= nZ + \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{3} - + \cdots\right) \end{aligned}$$

onde a expressão anterior provém de uma escolha explicíta do ramo do logaritmo que estamos usando.

Note que $F : H_r \to H_r$ é uma função holomorfa bem definida, assim de $|\eta| < \dfrac{1}{2}$ temos

$$|F(Z) - nZ| = |\log(1+\eta)| < \log 2 < 1 \tag{2.1}$$

para todo Z neste semi-plano. Similarmente a aplicação $\phi_k(z) = f^n(z)^{\frac{1}{n^k}}$ para $|z| < r$ corresponde a uma aplicação

$$\Phi_k(Z) = \log \phi_k(e^Z) = \frac{F^k(Z)}{n^k},$$

que é definida e holomorfo sobre H_r. Por 2.1, temos

$$|\Phi_{k+1}(Z) - \Phi_k(Z)| = \frac{|F^{k+1}(Z) - nF^k(Z)|}{n^{k+1}} < \frac{1}{n^{k+1}}.$$

Assim a aplicação exponencial do semi-plano sobre D reduz distâncias, e segue que

$$|\phi_{k+1}(Z) - \phi_k(Z)| < \frac{1}{n^{k+1}}$$

para $|z| < r$. Portanto, quando $r \to \infty$ a sequência de aplicações holomorfas $z \mapsto \phi_k(z)$, sobre o disco $|z| < r$, converge uniformemente para a aplicação holomorfa limite $\phi(z)$, e satis faz a identidade $\phi(f(z)) = (\phi(z))^n$.

Prova da Unicidade: Neste caso é suficiente estudar o caso especial $f(z) = z^n$. Se a aplicação da forma $\phi(z) = c_1 z + c_k z^k +$ (termos de menor grau) conjuga $z \mapsto z^n$ sobre si mesmo, então a série

$$\phi(z) = c_1 z^n + c_k z^{nk} + \cdots$$

deve ser igual a

$$(\phi(z))^n = c_1^n z^n + n c_1^{n-1} c_k^{n+k-1} + \cdots ,$$

com $nk > n + k - 1$. Comparando os coeficientes, encontramos $c_1^{n-1} = 1$ e que os coeficientes restantes se anulam, o que prova o resultado.

□

Agora apresentaremos a versão do teorema de Böttcher para o conjunto de Julia cheio, tal resultado será de fundamental importância nos resultados sequentes.

Teorema 2.45. *Para toda função polinomial P de grau ao menos 2 o conjunto de Julia Cheio $K \subset \mathbb{C}$ é compacto, com complemento conexo, com bordo topológico ∂K igual ao conjunto de Julia $J = J(P)$ e com interior igual a união de todas as componentes limitadas U do conjunto de Fatou $F(P)$. Assim K é igual a união de todas as tais U juntamente com J. Sendo alguma destas componentes conexas U necessariamente simplesmente conexa.*

Demonstração. Note que $\dfrac{P(z)}{z^d}$ converge para a_d quando $|z| \to \infty$ ($P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots a_1 + a_0$). Assumindo convenientemente que $a_d = 1$ podemos escolher uma constante $r_0 \geq 2$ tal que

$$\sum_{i=0}^{d-1} \frac{a_i}{z^{d-i}} = \left| \frac{P(z)}{z^d} - 1 \right| < \frac{1}{2} \quad \text{para} \quad |z| > r_0$$

e segue que

$$|P(z)| > \frac{|z^d|}{2} > 2|z| \quad \text{para} \quad |z| > r_0.$$

Segue daí que algum z, com $|z| > r_0$ pertence a $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\infty)$ do ponto no infinito. Assim podemos identificar K com o complemento $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}$. Assim K é compacto, e segue pelo corolário 2.37 que $\partial K = \partial \mathcal{A}$ é igual ao conjunto de Julia de P.

Mostremos que $\mathcal{A}$ é conexo. Seja U uma componente conexa limitada do conjunto de Fatou $\mathbb{C} \setminus J$, então $|P^d(z)| \leq r_0$ para cada $z \in U$, isto pelo Princípio do Módulo Máximo, desta forma cada componente limitada de $\mathbb{C} \setminus J$ está contida no conjunto de Julia Cheio K, e a única componente ilimitada pode ser identificada com $\mathbb{C} \setminus K = \mathbb{C} \cap \mathcal{A}(\infty)$.

Similarmente se Γ é uma curva fechada simples situada em uma componente limitada de U, e se V é a componente limitada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ então segue do princípio do módulo máximo que $V \subset K$. Em particular, V não pode conter algum ponto de $J = \partial K$, pelo Teorema de Montel, então segue que $V \subset U$, o que mostra que U é simplesmente conexa. $\square$

Teorema 2.46 (Teorema de Böttcher Conjunto de Julia Cheio)**.** *Seja P um polinômio de grau $d \geq 2$. Se o conjunto de Julia Cheio $K = K(P)$ contém todos os pontos críticos finitos de P então ambos K e $J = \partial K$ são conexos, e além disso o complemento de K é conformalmente isomorfo ao exterior do disco unitário $\overline{D}$ por um isomorfismo*

$$\widehat{\phi} : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C} \setminus \overline{D}$$

que conjuga P em $\mathbb{C} \setminus K$ com a d-ésima série de potências $\omega \to \omega^d$. Por outro lado, se ao menos um ponto crítico de P pertence a $\mathbb{C} \setminus K$ então ambos K e J tem incontáveis componentes conexas.

Demonstração. A prova será baseada no seguinte: para estudar o comportamento de P próximo do infinito fazemos a substituição usual $\xi = \dfrac{1}{z}$ e consideramos a função racional $F(\xi) = \dfrac{1}{P\left(\frac{1}{z}\right)}$. Novamente consideramos que P é mônico. Da igualdade assintótica $P(z) \sim z^d$ quando $z \to \infty$ segue que $F(\xi) = \xi^d$ quando $\xi \to 0$. Existe uma associação com a aplicação de Böttcher

$$\phi(\xi) = \lim_{k \to \infty} F^k(\xi)^{\frac{1}{d^k}} \in D$$

Assim $\widehat{\phi}$ aplica alguma vizinhança de infinito biholomorficamente sobre o infinito, com $\widehat{\phi} \sim z$ quando $|z| \to \infty$, e $\widehat{\phi}$ conjuga a aplicação polinomial de grau d com a d-ésima série de potências, de forma que $\widehat{\phi}(f(z)) = \widehat{\phi}(z)^d$.

De fato, suponha primeiro que não existe outro ponto crítico além do infinito na bacia de atração $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\infty)$, então a aplicação de Böttcher se estende para um isomorfismo conforme

$$\mathbb{C} \setminus K \cong \mathbb{C} \setminus \overline{D}$$

Seja $\widehat{\psi}$ a inversa de $\widehat{\phi}$. Agora cada anel

$$A_{1+\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 1 + \varepsilon\}$$

aplica sobre $\widehat{\psi}(A_{1+\varepsilon}) \subset \mathbb{C} \setminus K$ o fecho $\overline{\widehat{\psi}(A_{1+\varepsilon})}$ é compacto conexo que contém o conjunto de Julia $J = \partial A$, segue que a interseção

$$J = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\widehat{\psi}(A_{1+\varepsilon})}$$

é também conexo, e segue do Teorema 2.45 que K é conexo. Agora suponha que há ao menos um ponto crítico em $\mathbb{C} \setminus K$, então a conclusão do lema anterior se traduz no seguinte: existe um menor número $r > 1$ tal que a inversa de $\widehat{\phi}$ próxima do infinito se estende a um isomorfismo

$$\widehat{\psi} : \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r \to^{\cong} U \subset \mathbb{C} \setminus K$$

Além disso,o bordo ∂U do conjunto aberto $U = \widehat{\psi}(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r)$ é um subconjunto conexo em $\mathbb{C} \setminus K$ que contém ao menos um ponto crítico de P.

Mostraremos que o fecho $\overline{U}$ separa o plano em dois ou mais conjuntos abertos limitados, com cada contendo incontavéis pontos do conjunto de Julia. Seja c um ponto crítico em ∂U, então o valor crítico correspondente $v = P(c)$ pertence a U, com $|\widehat{\phi}(v)| = r^d > r$. Considere o raio infinito $R \subset \mathbb{C} \setminus D_r$ consistindo de os produtos $t\widehat{\phi}(v)$ com $t \geq 1$. A imagem $R' = \widehat{\phi}(R) \subset U$ é chamada raio externo do ponto v, associado com o conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$.

Agora consideremos todas as imagens $P^{-1}(R') \subset \overline{U}$, a interseção $U \cap P^{-1}(R')$ consiste de d raios externos distintos, correspondendo a d compontentes distintas do conjunto $\sqrt[d]{R} \subset \mathbb{C} \setminus D_r$. Cada um desses d raios externos R'_j é alguma solução z da equação $f(z) = v$. Mas esta equação tem ao menos duas soluções no ponto crítico c, então ao menos dois destes raios externos R'_1 e R'_2 serão levados em c. Como a união $R'_1 \cup R'_2 \subset \overline{U}$ dividimos o plano em dois conjuntos abertos conexos, que chamaremos V_0 e V_1.

Note agora que cada uma das imagens $P(V_0)$ e $P(V_1)$ contém todos os pontos do plano complexo, exceto possivelmente os pontos de R'. De fato, cada $P(V_k)$ é um conjunto aberto. Se $\widehat{z} \in \mathbb{C}$ é um ponto limite de $P(V_k)$, então podemos escolher uma sequência de pontos $z_j \in V_k$ tal que as imagens $P(z_j)$ convergem para $\widehat{z}$. O z_j certamente deve ser limite de uma sequência, então podemos escolher uma subseqência que converge para algum ponto $z' \in \mathbb{C}$. Agora $z' \notin V_k$ desde que $P(z') = \widehat{z}$ é um ponto limite e P uma aplicação aberta, assim segue que $z' \in \partial V_k = R'_1 \cup R'_2$ e $\widehat{z} \in R'$. Se $\mathbb{C} \setminus R'$ é conexo implica que

$$P(V_k) \supset \mathbb{C} \setminus R' \supset K$$

Agora sejam $J_0 = J \cap V_0$ e $J_1 = J \cap V_1$. Assim segue que

$$P(J_0) = P(J_1) = J$$

e note que J_0 e J_1 são conjuntos disjuntos compactos com $J_0 \cup J_1 = J$. Similarmente podemos dividir cada J_k em dois conjuntos disjuntos $J_{k0} = J_k \cap P^{-1}(J_0)$ e $J_{k1} = J_k \cap P^{-1}(J_1)$ com $P(J_{kl}) = J_l$, continuando indutivamente, podemos dividir J em 2^{q+1} conjuntos compactos disjuntos

$$J_{k_0 \cdots k_q} = J_{k_0} \cap P^{-1}(J_{k_1}) \cap \cdots \cap P^q(J_{k_q})$$

com $P(J_{k_0 \cdots k_q}) = J_{k_1 \cdots k_q}$. Similarmente para alguma sequência infinita $k_0, k_1, k_2, \cdots$ de zeros e uns, seja $J_{k_0 k_1 k_2 \cdots}$ a interseção da sequência

$$J_{k_0} \supset J_{k_0 k_1} \supset J_{k_0 k_1 k_2} \supset \cdots$$

Cada tal interseção é compacta e não vazia. Seguindo este caminho obtemos incontavéis subconjuntos não vazios que a união é o conjunto J. Cada componente conexa de J deve estar contida exatamente em um desses conjuntos, então J tem infinitas componentes conexas. A prova para o conjunto de Julia Cheio é análoga. □

Observação 2.47. *Da proposição anterior vemos que se o Conjunto de Julia Cheio é conexo, a inversa de $\widehat{\phi}(z) = \phi_p(z)$ denotada por ψ_p é uma função meromorfa univalente definida sobre D e tem a forma*

$$\psi_p(z) = z + \frac{b_0}{z^0} + \frac{b_1}{z^1} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots, \textit{para } |z| > 1.$$

2.4.1 Coeficientes das Funções de Böttcher

O resultado seguinte nos mostra uma forma de relacionar os coeficientes da inversa da função meromorfa obtida pelo teorema de Böttcher, e os coeficientes de um polinômio que tem conjunto de Julia Cheio conexo.

Teorema 2.48. *Seja P um polinômio mônico de grau d com conjunto de Julia Cheio conexo, para $|z| > 1$ seja*

$$\psi_P(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

a função de Bóttcher de P, e

$$P(\psi_P(z)) = \sum_{k=-d}^{\infty} c_k z^{-k}$$

Então

$$1 + \sum_{k=-d}^{\infty} k|c_k|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2$$

Demonstração. Seja C_r a imagem de $\psi_p(z)$ do círculo $|z| = r > 1$, e E_r o interior de C_r.

Então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\int_{|z|=r}\overline{P(\psi_P(z))}P'(\psi_P(z))\psi_P'(z)dz &\overset{1}{=} \frac{1}{2i}\int_{C_r}\overline{P(w)}P'(w)dw \\
&\overset{2}{=} \frac{1}{2i}\int\int_{E_r}|P'(w)|^2dudv \\
&\overset{3}{=} -\frac{1}{2i}\int_0^r\int_0^{2\pi}\sum_{k=-d}^{\infty}k|c_k|^2|z^{2k}|\cdot\frac{|z|}{|z|^2}dudv \\
&= -\pi\sum_{k=-d}^{\infty}k|c_k|^2r^{-2k}.
\end{aligned}$$

Na expressão acima usamos,

1. a substituição $w=\psi_P(z)$, daí $dw=\psi_P'(z)dz$,
2. o Corolário 1.42 da Fórmula Analítica de Green do capítulo 1, e
3. as igualdades

$$|P'(w)| = \overline{P(w)}P'(w) = -\sum_{k=-d}^{\infty}k|c_k|^2|z^{-2k}|z^{-1} = -\sum_{k=-d}^{\infty}k|c_k|^2|z^{2k}|\cdot\frac{|z|}{|z|^2}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\int_{|z|=r}\overline{P(\psi_P(z))}P'(\psi_P(z))\psi_P'(z)dz &= \frac{1}{2i}\int_{|z|=r}\overline{\psi_P(z^d)}\psi_P'(z^d)dz^{d-1}dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(r^de^{-itd}+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_n}r^{-nd}e^{itnd}\right)\cdot \\
&\quad\cdot\left(r^de^{itd}-\sum_{n=1}^{\infty}nb_nr^{-nd}e^{-itnd}\right)dt \\
&= \pi\left(r^{2d}-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2nd}\right).
\end{aligned}$$

Acima usamos que $\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi}f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$, com $\gamma\in[0,2\pi]$, pois z pode ser escrito como $z=re^{it}$,com $t\in[0,2\pi]$.

Fazendo $r\to 1$, segue a demonstração.

□

Exemplo 2.49. *Seja $P(z)=z^2+c$, com $c\in\mathbb{C}$. Determinemos os coeficientes da aplicação de Böttcher $\psi_P(z)$, para isso utilizaremos o teorema 2.48, assim $(\psi_P(z))^2+c=$*

$\psi_P(z^2)$, e com isso mostraremos que os coeficientes da função meromorfa univalente $\psi_P(z)$ são

$$b_0 = 0, \quad b_{2n} = 0, \ (n = 1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$$

Além disso se supormos que $c \in M$, onde M é o Connectedness Locus de P, temos

$$b_1 = -\frac{c}{2}, \ b_3 = -\frac{c}{4} - \frac{c^2}{8}, \ \cdots .$$

De fato, por um lado temos que

$$\psi_P(z^2) = z^2 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-2n}, \tag{2.2}$$

por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
(\psi_P(z))^2 + c &= \left(z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \right)^2 + c \\
&= (z + b_0)^2 + 2(z + b_0) \sum_{n=1}^{\infty} b^n z^{-n} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \right)^2 + c \\
&= z^2 + 2b_0 z + b_0^2 + 2(z + b_0) \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \right)^2 + c \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Igualando os termos z das expressões 2.2 e 2.3, respectivamente, temos

$$0 = 2b_0 \Rightarrow b_0 = 0$$

Igualando os termos constantes das expressões 2.2 e 2.3, respectivamente, temos

$$b_0 = b_0^2 + c + 2b_1 \Rightarrow b_1 = -\frac{c}{2}$$

Igualando os termos que têm potência z^{-1} das expressões 2.2 e 2.3, respectivamente, temos

$$0 = 2b_2 + 2b_0 \Rightarrow b_2 = 0$$

Seguindo de maneira similar temos que todos os b_i, com i par se anulam, pois todos as potências z^{-j} se anulam na expressão de $\psi_P(z^2)$, e na expressão de $(\psi_P(z))^2 + c$ dependem de $b_0 = 0$.
Igualando os termos que têm potência z^{-2} das expressões 2.2 e 2.3, respectivamente, temos

$$b_1 = 2b_3 + 2b_0 b_2 + b_1^2 \Rightarrow b_3 = -\frac{c}{4} - \frac{c^2}{8}$$

Igualando os termos que têm potência z^{-4} das expressões 2.2 e 2.3, respectivamente, temos

$$b_2 = 2b_5 + 2b_0b_4 + b_2^2 + b_1b_3 \Rightarrow b_5 = -\frac{b_1b_3}{2} \Rightarrow b_5 = -\frac{c^2}{8} - \frac{c^3}{16}$$

e assim por diante.

Exemplo 2.50. *Mais geralmente se $P(z) = z^d + c$, com $c \in \mathbb{C}$, os coeficientes da função meromorfa univalente $\psi_P(z)$ são*

$$b_0 = b_2 = \cdots b_{d-2} = 0$$

e

$$b_{nd} = b_{nd+1} = \cdots b_{(n+1)d+1} = 0, (\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

Se supormos que $c \in M_d$, onde M_d é o Connectedness Locus, temos

$$b_{d-1} = -\frac{c}{d},\ b_{2d-1} = -\frac{c}{d^2} - \frac{d-1}{2d^2}c^2,\ \cdots$$

Teorema 2.51. *Seja $P(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + a_{d-2}z^{d-2} + \cdots + a_0$ um polinômio mônico de grau $d \geq 2$ com conjunto de Julia Cheio conexo. Seja*

$$\psi_P(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

dada sobre $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Então

$$b_0 = -\frac{a_{d-1}}{d},\ \text{ e } b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{d-1}{d^2}\right)a_{d-1}^2 - \frac{a_{d-2}}{d}\ \cdots$$

Demonstração. Ver referência [19]. □

Observação 2.52. *Se, em particular, $P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \cdots + a_0$ é mônico e centrado então $b_0 = 0$.*

2.5 Polinômios de Faber e Coeficientes de Garabedian-Schiffer

Os resultados desta subseção podem ser consultados na referência [14].

Definição 2.53. *Seja Σ a família de funções $g(z) = z + b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots$ que são univalentes para $|z| > 1$. Seja $E = E(g)$ o complemento compacto da imagem de $\{g(z) : |z| > 1\}$. Os coeficientes de Faber $b_{kl}(l, k = 1, 2, \cdots)$ relativos ao polinômio g, são*

definidos por

$$\log\frac{g(\xi)-g(z)}{\xi-z} = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}\xi^{-k}z^{-l} \qquad |z|>1, \quad |\xi|>1$$

e satisfazem $b_{kl}=b_{lk}, \quad b_{k1}=b_k$. *Os polinômios de Faber* $\phi_k(w)=w^k+\cdots$ *são definidos por*

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi)-w} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi_k(w)}{\xi^{k+1}}$$

e satisfazem

$$\phi_k(g(z)) = z^k + k\sum_{l=0}^{\infty} b_{kl}z^{-l} \quad |z|>1$$

Agora seja

$$h(w)=\prod_{p=1}^{n}(w-v_p)^{\alpha_p} \quad (\alpha_1>0,\cdots,\alpha_n>0,\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1)$$

com $v_p\in E$, definimos os polinômios $\Psi_k(w)=w^{k-1}+\cdots$ por

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi)-w}\frac{1}{h(g(w))} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Psi_k(w)}{\xi^{k+1}} \tag{2.4}$$

de maneira similar aos polinômios de Faber podemos escrever

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi)-g(z)}\frac{h(g(z))}{h(g(w))} - \frac{z}{\xi(\xi-z)} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} kc_{kl}z^{-l}\xi^{-k-1} \tag{2.5}$$

pois as funções são ambas analíticas quando $\{1<|z|\leq\infty, 1<|\xi|\leq\infty\}$ e tem dois zeros quando $\xi=\infty$. Daí podemos escrever

$$h(g(z))\Psi_k(g(z)) = z^k + k\sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}z^{-l} \quad |z|>1$$

Os números $c_{kl}(k=1,2,\cdots;l=1,2,\cdots)$ não precisam ser simétricos em k e l. No caso $n=1$ encontramos que

$$\Psi_k(w) = \frac{\phi_k(w)-\phi_k(v_1)}{w-v_1}, \quad c_{kl}=b_{kl}$$

O que generaliza os coeficientes de Faber. Escolhendo $h(w)=\sqrt{(w-u)(w-v)}, \quad u,v\in$

E, definamos

$$\Psi_0(w) = 2\log(\sqrt{w-u} + \sqrt{w-v}) - \log(v-u)$$

Normalisando por $\Psi_0(v) = 0$ podemos escrever

$$\Psi_0(g(z)) = \log z + \sum_{l=0}^{\infty} c_{0l} z^{-l}$$

E daí integrando 2.5 em relação a ξ obtemos

$$\begin{aligned}
\log\frac{g(\xi)-g(z)}{\xi - z} &+ \log[(v-u)\xi z] \\
&- 2\log[\sqrt{(g(\xi)-v)(g(z)-u)} + \sqrt{(g(z)-v)(g(\xi)-u)}] \\
&= \log\frac{g(z)-g(\xi)}{(z^{-1}-\xi^{-1})(g(z)+g(\xi))} = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}\xi^{-k}z^{-l}
\end{aligned}$$

Agora os números c_{kl} são definidos para $k, l = 0, 1, 2, \cdots$ e que satisfazem $c_{kl} = c_{lk}$ são chamados *coeficientes de Garabedian-Schiffer.*

Capítulo 3

Aspectos Geométricos e a Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia

Neste capítulo nosso objeto de estudo serão as propriedades geométricas do conjunto de Julia Cheio, para isso usaremos principalmente a referência [19]. Para termos resultados mais gerais primeiramente definiremos polinômio centrado, e mostraremos que qualquer polinômio pode ser conjugado a um polinômio centrado. Portanto obteremos nossos resultados para polinômios centrados e estes serão válidos para qualquer polinômio mediante a uma conjugação.

Definição 3.1. *Um polinômio é dito centrado se a soma de suas raízes se anulam.*

Observação 3.2. *Pelas relações de Girard temos que o polinômio* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ *é centrado, se é somente se, o termo* $a_{n-1} = 0$.
De fato, as relações de Girard dizem que se $r_1, r_2, \cdots, r_n$ *são as raízes de* $P(z)$ *então* $a_{n-1} = \dfrac{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}{a_n}$, *daí como* $P(z)$ *é centrado segue que* $a_{n-1} = 0$.
Por outro lado, se $a_n - 1 = 0$, *das relações de Girard, temos que* $0 = \dfrac{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}{a_n} \Rightarrow r_1 + r_2 + \cdots + r_n = 0$, *ou seja,* $P(z)$ *é um polinômio centrado.*

Lema 3.3. *Dado um polinômio complexo* $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \;\; a_m \neq 0$ *existe um polinômio centrado* $g(z) = b_m z^m + b_{m-2} z^{m-2} + \cdots + b_1 z + b_0, \;\; b_m \neq 0$ *e uma translação* $h(z) = z + c$, *com* $c = \dfrac{a_{m-1}}{m a_m}$ *de forma que* f *e* g *são conjugados.*

Demonstração. De fato, usando o binômio de Newton para desenvolvermos as potências de $(z - c)$, e colocando $h^{-1}(z) = z - c$ temos

$$
\begin{aligned}
hfh^{-1}(z) &= hf(z-c) \\
&= h(a_m(z-c)^m + a_{m-1}(z-c)^{m-1} + \cdots + a_1(z-c) + a_0) \\
&= a_m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} z^{m-k}(-c)^k + a_{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} z^{m-1-k}(-c)^k + \cdots + a_1(z-c) + a_0 + c \\
&= a_m z^m - \frac{m! a_m}{1!(m-1)!} z^{m-1} c + \\
&+ a_m \left[\frac{m!}{2!(m-2)!} z^{m-2} c^2 + \cdots + \frac{m!}{(m-1)!1!} z(-c)^{m-1} + \frac{m!}{m!0!} z^0 (-c)^m \right] + \\
&+ a_{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1)!0!} z^{m-1} + a_{m-1} \left[-\frac{(m-1)!}{1!(m-2)!} z^{m-2} c + \cdots + \frac{(m-1)!}{(m-1)!0!} z^0 (-c)^m \right] + \\
&+ \cdots + a_1 z + c(1-a_1) + a_0 \\
&= a_m z^m + (-m a_m c + a_{m-1}) z^{m-1} + \\
&+ a_m \left[\frac{m!}{2!(m-2)!} z^{m-2} c^2 + \cdots + \frac{m!}{(m-1)!1!} z(-c)^{m-1} + \frac{m!}{m!0!} z^0 (-c)^m \right] + \\
&+ a_{m-1} \left[-\frac{(m-1)!}{1!(m-2)!} z^{m-2} c + \cdots + \frac{(m-1)!}{(m-1)!0!} z^0 (-c)^m \right] + \\
&+ \cdots + a_1 z + c(1-a_1) + a_0
\end{aligned}
$$

Daí basta tomar $b_m = a_m, \cdots, c = \dfrac{a_{m-1}}{m a_m}$, daí temos que $g(z) = a_m z^m + \cdots + \dfrac{a_{m-1}}{m a_m}$ é conjugado a $f(z)$ por $h(z)$. $\square$

Observação 3.4. *Dado uma aplicação racional R e uma aplicação de Möbius h, então*

$$d(J(hRh^{-1})) = d(h(J(R))) = d(J(R)),$$

daí a dimensão de Hausdorff de R e h coincidem, portanto a conjugação preserva resultados referentes a medida de Hausdorff (ver [2] pag. 248).

A observação anterior é crucial para o desenvolvimento deste capítulo, pois todos os resultados aqui obtidos exigem que os polinômios sejam centrados, mas com esta observação temos que os resultados são válidos para qualquer polinômio complexo.

3.1 Aspectos Geométricos do Conjunto de Julia Cheio

Dados dois polinômios e seus conjuntos de Julia Cheios surge naturalmente a questão: se existe uma relação de inclusão entre seus conjuntos de Julia Cheio, existe alguma relação entre tais polinômios? Para responder esta questão temos o seguinte teorema.

Teorema 3.5. *Suponha que P_1 e P_2 são polinômios mônicos com grau $d_1 \geq 2$ e $d_2 \geq 2$, respectivamente, e $K(P_1) \subset K(P_2)$ então $d_2 \leq d_1$.*

Demonstração. Suponha $A_1 = \widehat{\mathbb{C}} - K(P_1)$ e $A_2 = \widehat{\mathbb{C}} - K(P_2)$ os domínios de φ_{P_1} e φ_{P_2} dados pelo teorema de Böttcher, daí:

$$\varphi_{P_1}(P_1(z)) = (\varphi_{P_1}(z))^{d_1}; \quad \varphi_{P_2}(P_2(z)) = (\varphi_{P_2}(z))^{d_2}$$

Portanto

$$d_1 = \frac{\log|\varphi_{P_1}(P_1(z))|}{\log|\varphi_{P_1}(z)|}; \quad d_2 = \frac{\log|\varphi_{P_2}(P_2(z))|}{\log|\varphi_{P_2}(z)|}$$

Por $K(P_1) \subset K(P_2)$ e

$$\frac{\varphi_{P_1}(z)}{z} \to 1 \quad (z \to \infty); \quad \frac{\varphi_{P_2}(z)}{z} \to 1 \quad (z \to \infty),$$

pois $\varphi_{P_1}(z)$ e z tendem a infinito quando $z \to \infty$, o mesmo acontece com $\varphi_{P_2}(z)$ e z.

Conseguimos que:

$$\frac{\varphi_{P_1}(z)}{\varphi_{P_2}(z)} \to 1 \quad (z \to \infty)$$

Daí $\varphi_{P_1}(z) \sim \varphi_{P_2}(z)$ ($\varphi_{P_1}(z)$ pode ser aproximado por $\varphi_{P_2}(z)$) para z suficientemente grande.

Agora seja $z_0 \in A_1$ e $z_0 \notin A_2$, assim $P_1^n(z_0) \to \infty$ mas $P_2^n(z_0) \not\to \infty$. Daí podemos encontrar z_1 suficientemente grande tal que

$$|\log\varphi_{P_2}(P_2(z_1))| \leq |\log\varphi_{P_1}(P_1(z_1))|$$

e como

$$\varphi_{P_1}(z_1) \sim \varphi_{P_2}(z_1)$$

Temos que $d_2 \leq d_1$. □

Com o objetivo de estudar algumas propriedades geométricas do conjunto de Julia Cheio necessitamos da definição dos polinômios de Faber e dos coeficientes de Garabedian-Schiffer que foram definidos na seção 2.5, e também podem ser encontrados em [14].

Até o final desta seção usaremos principalmente a referência [19]

Teorema 3.6. *Suponha que $P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \cdots + a_0$ é um polinômio centrado e mônico com $K(P)$ conexo, então*

$$\mathrm{Diam}(K(P)) \leq \sqrt{8\left(1 + \left|\frac{a_{d-2}}{d}\right|\right)},$$

onde $\mathrm{Diam}(K(P))$ *representa o diâmetro do conjunto* $K(P)$.

Demonstração. Supondo que

$$\varphi_p(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots \quad \text{para} \quad |z| > 1$$

Sejam $u, v \in K(P)$ (note que $K(P) \subset E$) números complexos distintos, colocamos

$$g(z) = \sqrt{\frac{\varphi_p(z) - u}{\varphi_p(z) - v}} = 1 + \frac{v-u}{2} z^{-1} + \cdots ,$$

isto decorre integrando 2.4 em relação a ξ, tomando $h(g(\xi)) = (g(\xi) - u)^{\frac{1}{2}}(g(\xi) - v)^{\frac{1}{2}}$, com $|\xi|$ suficientemente grande e lembrando que $\Psi_k(w) = w^{k-1} + w^k + \cdots$ (isto pode ser consultado em [14]).

Para $|z|$ suficientemente grande, temos que os coeficientes de Garabedian-Schiffer definidos na seção 2.5

$$c_{kl} = c_{kl}(u, v) \quad (k, l = 0, 1, 2, \cdots),$$

que são obtidos da função geradora

$$\log \frac{g(z) - g(\xi)}{(z^{-1} - \xi^{-1})(g(z) + g(\xi))} = -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} \xi^{-k} z^{-l}$$

Para $|z|$ e $|\xi|$ suficientemente grandes, depois de alguns cálculos, obtemos

$$c_{11} = b_1 - \frac{1}{8}(u - v)^2$$

e daí, pelo seguinte lema (que pode ser consultado em [14]), conseguimos

Lema 3.7. *Sejam* $g \in \Sigma$ *e* $u, v \in E$. *Sejam* $\lambda_0, \cdots, \lambda_m$ *números complexos não todos nulos. Então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \sum_{l=0}^{m} c_{kl} \lambda_l \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k} + 2\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda_0} \sum_{l=0}^{m} c_{0l} \lambda_l \right]$$

e a igualdade vale se, e somente se, $\mathrm{area}(E) = 0$.

Escolhendo $\lambda_l = 0$ para $j \neq l$ obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |c_{kl}|^2 \leq \frac{1}{l} \quad (l = 1, 2, \cdots)$$

e segue que

$$|c_{kl}| \leq \frac{1}{\sqrt{kl}} \quad (k, l = 1, 2, \cdots)$$

em particular temos $c_{11} \leq 1$, e assim

$$|u - v| \leq \sqrt{8(1 + |b_1|)}$$

Temos que o diâmetro de $K(P)$ é definido por

$$\mathrm{Diam}(K(P)) = \sup\{|u - v| : u, v \in K(P)\},$$

satisfaz

$$\mathrm{Diam}(K(P)) \leq \sqrt{8(1 + |b_1|)}$$

e usando o teorema anterior, sabemos que $b_1 = -\dfrac{a_{d-2}}{d}$ e assim

$$\mathrm{Diam}(K(P)) \leq \sqrt{8\left(1 + \left|\frac{a_{d-2}}{d}\right|\right)}$$

□

Para a demonstração da próxima proposição precisaremos de dois resultados preliminares:

Lema 3.8. *Seja $g \in \Sigma$ (conjunto das funções do tipo $z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$, com $|z| > 1$) então $|b_1| \leq 1$.*

Demonstração. Na demonstração do Teorema 2.48 temos

$$\mathrm{area}(K(P)) = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right).$$

Como

$$\mathrm{area}(K(P)) \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1 \Rightarrow |b_1|^2 \leq 1,$$

portanto obtemos $|b_1| \leq 1$ e daí temos o resultado do lema. □

Lema 3.9. *Seja $g \in \Sigma$ e $w \in K(P)$ então*

$$g^*(z) = \sqrt{g(z^2) - w} = z + \frac{1}{2}(b_0 - w)z^{-1} + \cdots + b_n z^{-(2n+2)} + \cdots \tag{3.1}$$

é uma função ímpar em Σ.

Demonstração. Note que a função $z^{-2}(g(z^2) - w)$ é análitica e par em seu domínio (que é conexo). Assim a função ímpar

$$\begin{aligned} g^*(z) &= z\sqrt{z^{-2}(g(z^2) - w)} = z\left[1 + (b_0 - w)z^{-2} + \cdots + b_n z^{-2n-2} + \cdots\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= z + (b_0 - w)z^{-1} + \cdots \end{aligned}$$

é analítica em $1 < |z| < \infty$ e tem a expansão 3.1. Se $g^*(z_2) = g^*(z_1)$ então $g(z_2^2) = g(z_1^2)$, e desde que $g(z)$ é univalente segue que $z_2 = \pm z_1$. É impossível de acontecer $z_2 = -z_1$, pois $g^*(-z_1) = -g(z_1) \neq g^*(z_1)$, daí $g^*(z)$ é univalente em $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. □

Proposição 3.10. *Suponha P um polinômio mônico e centrado de grau $d \geq 2$ com conjunto de Julia Cheio $K(P)$ conexo. Então*

$$K(P) \subset \{w : |w| \leq 2\}.$$

Demonstração. Como $g \in \Sigma$ dos lemas 3.8 e 3.9 temos que $|b_1| \leq 1$ e

$$\frac{|b_0 - w|}{2} \leq 1 \Rightarrow |b_0 - w| \leq 2,$$

isto para qualquer $w \in K(P)$, portanto $K(P) \subset \{w : |w - b_0| \leq 2\}$ e da observação 2.52 temos que $b_0 = 0$, daí

$$K(P) \subset \{w : |w| \leq 2\}.$$

□

Definição 3.11. *Dizemos que z escapa sob iteração por P se $P^n(z) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Se existe um $R > 0$ tal que se $|z| > R$, então z escapa, tal R é chamado raio de escape. Para $P(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + a_{d-2}z^{d-2} + \cdots + a_0$, o valor*

$$R = \frac{1 + |a_d| + \cdots + |a_1| + |a_0|}{|a_d|}$$

é um raio de escape.

Observação 3.12. *Nas condições da proposição 3.10 temos que 2 é um raio de escape para todo polinômio mônico, centrado e com grau maior ou igual a dois.*

3.2 A Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia

Agora apresentaremos uma estimativa para a dimensão de Hausdorff de um conjunto. Geralmente não é difícil estabelecer uma cota superior para um dado conjunto, mas cota inferior já se apresenta mais trabalhosa. Assim para determinarmos uma cota inferior para o conjunto de Julia utilizaremos a medida de Haussdorff, para isso utilizaremos as referências [2] e [16].

Seja f uma aplicação racional de grau d, onde $d \geq 2$, e suponha que $\infty \in F(f)$. Então f não tem polos em J e $|f'(z)|$ alcança seu máximo em J. Como J contém um ciclo repulsor $\{z_1, z_2, \cdots, z_m\}$ e como

$$|f'(z_1) \cdots f'(z_m)| = |(f^m)'(z_1)| > 1,$$

temos

$$K_0 = \max\{|f'(z)| : z \in J\}.$$

Antes de demonstrarmos o teorema principal desta seção precisamos do seguinte lema auxiliar, no qual utilizaremos a definição de medida de Hausdorff estudada no capítulo 1

Lema 3.13. *Suponha que μ é uma medida de probabilidade de um subconjunto E de $\mathbb{C}$, e para constantes positivas c, t e r_0*

$$\mu(D(z,r)) \leq cr^t,$$

onde $D(z,r)$ é o disco de centro z e raio r, sempre que $z \in E$ e $0 < r < r_0$. Então $\mathrm{Dim}_H(E) \geq t$, onde $\mathrm{Dim}_H(E)$ é a dimensão de Hausdorff do conjunto E.

Demonstração. Tome algum número positivo δ, e fazendo $\delta \to 0$ quando calcularmos a dimensão de Hausdorff assumimos que $\delta < \dfrac{r_0}{2}$. Consideremos alguma cobertura de E por discos $D(w_k, r_k), k = 1, 2, \cdots$, com $r_k < \delta$. Para cada disco $D(w_k, r_k)$ sobre E selecionamos um ponto ξ_j na intersecção e criamos o disco $D(\xi_j, \rho_j)$ onde $\rho_j = 2r_j \leq r_0$. Dessa forma E está na união dos novos discos criados, e como

$$\begin{aligned} 1 = \mu(E) &\leq \sum_j \mu(D(\xi_j, \rho_j)) \\ &\leq c\sum_j \rho_j^t \\ &\leq c\sum_k (2r_k)^t \\ &\leq c\sum_k [\mathrm{diam} D(w_k, r_k)]^t \end{aligned}$$

Encontramos que $m_t^\delta(E) \geq c^{-1}$. Fazendo $\delta \to 0$, obtemos que $m_t(E) \geq c^{-1}$ e assim $\mathrm{Dim}_H(E) \geq t$. □

Teorema 3.14. *Seja f uma aplicação racional de grau d, onde $d \geq 2$. Se $\infty \in F(f)$, $F(f)$ é o conjunto de Fatou de f, então a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia $J(f)$ satisfaz que*

$$\mathrm{Dim}_H(J) \geq \frac{\log(d)}{\log K_0}.$$

Demonstração. A idéia para demonstrarmos o teorema 3.14 é encontrar um ponto $\xi \in F(f)$ tal que para cada n, a aplicação $f^{-n}(\xi)$ tem precisamente d^n elementos, e quando $n \to \infty$ temos que $f^{-n}(\xi)$ acumula em J. Antes de seguirmos com a prova, denotamos $\mathrm{dist}[U, V] = \{\inf\{d(u,v), u \in U, v \in V\}\}$ como a distância euclidiana dos conjuntos U e V, e $\mathrm{card}(E)$ a cardinalidade do conjunto E.

Como $\infty \in F(f)$ podemos selecionar um número positivo δ tal que cada polo de f está a uma distância de pelo menos 2δ de J. Agora temos

$$J(\delta) = \{z : \text{dist}[z, J] < \delta\},$$

e

$$K(\delta) = \sup\{|f'(z)| : z \in J(\delta)\}$$

desta forma, $1 < K_0 < K(\delta) < +\infty$ e

$$K(\delta) \to K_0 \quad \text{quando} \quad \delta \to 0$$

provaremos que

$$\text{Dim}_H(J) \geq \frac{\log(d)}{\log K(\delta)}$$

e obteremos o resultado desejado fazendo $\delta \to 0$. Para selecionarmos ξ adequadamente, escolhemos um disco compacto E em $F(f)$ de forma que possamos aplicar o teorema 2.43, capítulo 2.

Agora tomamos ξ para algum ponto de E que a órbita não intercepta a órbita de nenhum ponto crítico. Então para cada n, $f^{-n}(\xi)$ tem precisamente d^n elementos. Do teorema 2.43, existe um inteiro m tal que $f^{-n}(z) \subset J(\delta)$ sempre que $n \geq m$, e substituindo ξ por algum ponto em $f^{-m}(\xi)$ e reclassificando, podemos assumir que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\xi) \subset J(\delta)$$

Agora introduziremos várias grandezas que serão necessárias para a prova:

a) $f^{-n}(\xi) = \{\xi_n(i) : i = 1, \cdots, d^n\}$;

b) $d_n = \text{dist}[J, f^{-n}(\xi)]$, então $d_0 = \text{dist}[J, \xi]$ e;

c) uma distribuição de probabilidade uniforme μ_n de $f^{-n}(\xi)$

Note que μ_n leva uma massa de d^{-n} sobre cada $\xi_n(i)$, e para algum E,

$$\mu_n(E) = d^{-n}\text{card}\{i : \xi_n(i) \in E\}$$

e daí temos que $d_n < \delta$. Daí pelo Teorema 2.43 implica que $d_n \to 0$ quando $n \to \infty$, e agora mostraremos que tal convergência não é tão rápida (isto é, os conjunto $f^{-n}(\xi)$ não se aproximam de J tão rapidamente).

Lema 3.15. *Na notação anterior, $d_n \leq K d_{n+1}$, e então*

$$d_0 \leq d_1 K \leq d_2 K^2 \leq \cdots .$$

Note que $K = K(\delta)$, ou seja, o K depende de δ, mas por uma abuso de notação usaremos K em vez de $K(\delta)$.

Demonstração. Tome algum $z \in J$ e algum $\xi_{n+1}(i)$, então ou

i) $\delta \leq |z - \xi_{n+1}(i)|$; ou

ii) $|z - \xi_{n+1}(i)| \leq \delta$

Se (i) é valida, então

$$d_n < \delta < K\delta \leq K|z - \xi_{n+1}(i)|$$

Se (ii) é valida, então o segmento que liga z a ξ_{n+1} está inteiramente contido em $J(\delta)$ e então $|f'| \leq K$ sobre este segmento. Como $f(z)$ e $f(\xi_{n+1}(i))$ estão em J e $f^{-n}(\xi)$ respectivamente, temos

$$d_n \leq |f(z) - f(\xi_{n+1}(i))| \leq K|z - \xi_{n+1}(i)|.$$

Em ambos os casos, temos

$$d_n \leq K|z - \xi_{n+1}(i)|,$$

e fazendo z e ξ_{n+1} variarem obtemos $d_n \leq Kd_{n+1}$ □

A prova do teorema é mais fácil quando não há pontos críticos em J, então mostramos o teorema sob esta suposição (não haver pontos críticos), e subsequentemente consideraremos uma mudança necessária nesta demonstração para obtermos o caso geral. O importante será que parte da prova deste caso continuará válida no caso geral.

A afirmação anterior diz que para cada $z \in J$, existe um inteiro positivo r_z tal que f é univalente sobre $D(z, r_z)$. Agora os discos $D(z, r_z), z \in J$, formam uma cobertura aberta do conjunto compacto J, então pelo Teorema de Cobertura de Lebesgue, existe um número positivo τ tal que f é univalente para cada disco $D(z, \tau), z \in J$. fazendo τ decrescer, se necessário, assumimos que $\tau < \delta$, e agora escolhemos um inteiro positivo q tal que

$$d_0/K^q < \tau < \delta.$$

O próximo resultado diz que de alguma forma, $f^{-n}(\xi)$ deve ter uma distribuição uniforme próximo de J.

Lema 3.16. *Se não há pontos críticos em J, para todo $z \in J$, e para todos inteiros n e m satisfazendo $n \geq 1, m \geq q$ há no máximo d^{n+q-m} pontos de $f^{-n}(\xi)$ em $D(z, d_0/K^m)$, assim*

$$\text{card}(D(z, d_0/K^m) \cap f^{-n}(\xi)) \leq d^{n+q-m} \tag{3.2}$$

Demonstração. Mostraremos que (3.2) vale para todo $z \in J$ e para todo $n \geq 1$, por indução sobre m para $m \geq q$. Agora se a desigualdade anterior é válida para todo $z \in J$ e todo $n \geq 1$ quando $m = q$, neste caso limite superior é d^n. Agora assumimos que a afirmação é verdadeira quando $q \leq m \leq M$ e provaremos que para todo $z \in J$ e todo $n \geq 1$,

$$\text{card}(D(z, d_0/K^{M+1}) \cap f^{-n}(\xi)) \leq d^{n+q-(M+1)}$$

Primeiro suponha que $n = 1$, então pelo lema anterior (e como $K > 1$),

$$d_0/K^{M+1} \leq d_0/K \leq d_1 = \text{dist}[J, f^{-1}(\xi)],$$

e então neste caso nenhum dos pontos $\xi_1(i)$ estão dentro de uma distância d_0/K^{M+1} de J, e a desigualdade é valida pois o lado esquerdo da desigualdade é zero.

Agora suponha que $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$. Neste caso,

$$d_0/K^{M+1} < d_0/K^q < \tau < \delta,$$

então f é univalente no disco $D(z, d_0/K^{M+1})$ e $|f'| \leq K$. Isto significa que f é uma aplicação univalente de $D(z, d_0/K^{M+1})$ em $D(f(z), d_0/K^M)$, e então pontos distintos de $f^{-n}(\xi)$ em $D(z, d_0/K^{M+1})$ são aplicados sobre pontos distintos de $f^{-(n-1)}(\xi)$ em $D(f(z), d_0/K)$. Assim usando a hipótese de indução (e $n - 1 \geq 1$), temos

$$\begin{aligned} \text{card}(D(z, d_0/K^{M+1}) \cap f^{-n}(\xi)) \leq \text{card}(D(z, d_0/K^M) \cap f^{-(n-1)}(\xi)) &\leq \\ &\leq d^{(n-1)+q-M} \\ &= d^{n+q-(M+1)} \end{aligned}$$

Isto prova o lema quando $n = 1$ e quando $n \geq 2$, e então a prova do lema está completa. □

Podemos reescrever o lema anterior em termos de medida de probabilidade μ_n e obtemos

$$\mu_n(D(z, d_0/K^M)) \leq d^q/d^m,$$

Mostraremos que para $r < \dfrac{d_0}{K}$,

$$\mu_n(D(z, r)) \leq (d^{q+1} d_0^{-t}) r^t, \quad \text{onde} \quad t = \frac{\log d}{\log K}. \tag{3.3}$$

Se $r < \dfrac{d_0}{K}$, existe algum inteiro positivo m tal que $\dfrac{d_0}{K^{m+1}} < r < \dfrac{d_0}{K^m}$, e então como

$K^t = d$, temos

$$\begin{aligned}
\mu_n(D(z,r)) &\leq \mu_n(D(z, \frac{d_0}{K^m})) \\
&\leq \frac{d^q}{d^m} \\
&\leq \frac{d^q}{K^{mt}} \\
&\leq d^q \left(\frac{rK}{d_0}\right)^t \\
&\leq \left(\frac{d^{q+1}}{d_0^t}\right) r^t.
\end{aligned}$$

o que demonstra 3.3.

Observe que a medida de probabilidade μ_n é distribuida uniformemente sobre $f^{-n}(\xi)$, e fazendo $n \to \infty$ obtemos que alguma subsequência de $\{\mu_n\}$ converge fracamente para a medida de probabilidade μ sobre J, isto decorre da observação 1.52. Assim para todo $z \in J$ e todo $r \in \left(0, \frac{d_0}{K}\right)$, temos

$$\mu(D(z,r)) \leq \left(\frac{d^{q+1}}{d_0^t}\right) r^t$$

e pelo lema 3.13, temos que

$$\mathrm{Dim}_H(J) \geq \frac{\log d}{\log K}$$

o que completa a prova no caso em que f não tem pontos críticos em J.

Agora discutiremos as mudanças necessárias para provarmos o caso geral. Assumindo agora que f tem pontos críticos em J então seja

$$C = \{c_1, \cdots, c_k\}$$

o conjunto de tais pontos críticos. Assim f, e também f^m, tem derivada zero para cada c_j e nenhuma iterada f^m fixa algum c_j. Deduzimos que para cada j, $f^n(c_j)$ encontra-se fora de C sempre que n é suficientemente grande, e então existe algum inteiro p tal que $f^p(C)$ é disjunto de C.

Escolha algum positivo ρ satisfazendo as condições

a) os discos $D(c_j, 2\rho)$ são dois a dois disjuntos

b) $|(f^p)'(z)| \leq 1$ para cada $D(c_j, 2\rho)$

c) $4\rho < \mathrm{dist}[f^p(C), C]$

e definamos

$$H = J - \bigcup D(c_j, \rho),$$

então H é um subconjunto compacto de J e $H \cap C = \emptyset$. Segue que existe um número positivo τ tal que se $z \in H$, então f é univalente sobre o disco $D(z, \tau)$. Finalmente, nossa escolha do inteiro q é modificada ao levarmos a presença de C em conta e aqui escolhemos q tal que

$$\frac{d_0}{K^q} < \min\{\tau, \rho, \delta\}, \quad q > p.$$

Com esta modificação e o lema 3.17, dado a seguir, sendo válido a prova segue exatamente como a anterior.

□

Mostremos o caso geral do lema 3.16 que será dado pelo lema 3.17:

Lema 3.17. *Para todo $z \in J$, e para todos inteiros n e m satisfazendo $n \geq 1, m \geq q$ há no máximo d^{n+q-m} pontos de $f^{-n}(\xi)$ em $D(z, d_0/K^m)$, assim*

$$\text{card}(D(z, d_0/K^m) \cap f^{-n}(\xi)) \leq d^{n+q-m} \tag{3.4}$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre m para $m \geq q$ e como antes a desiguadade é valida quando $m = q$. Asssumimos que a desigualdade é válida para $z \in J$, para todo $n \geq 1$, e para todo m com $q \leq m \leq M$, e procedemos mostrando que

$$\text{card}\left(D\left(z, \frac{d_0}{K^{m+1}}\right) \cap f^{-n}(\xi)\right) \leq d^{n+q-(M+1)} \tag{3.5}$$

Primeiro supomos que $1 \leq n \leq M + 1$. Então por 3.15

$$\frac{d_0}{K^{M+1}} \leq \frac{d_0}{K^n} \leq d_n$$

Então

$$\text{card}\left(D\left(z, \frac{d_0}{K^{M+1}}\right) \cap f^{-n}(\xi)\right) \leq \text{card}(D(z, d_n) \cap f^{-n}(\xi)) = 0$$

pela definição de d_n.

Assim podemos assumir que $n > M + 1$ então $n > M + 1 > q > p$. Quando $z \in H$, 3.5 segue da hipótese de indução, exatamente como antes, então podemos assumir que $z \in \bigcup D(c_j, \rho)$. De (a) z na verdade está em um dos discos $D(c_j, \rho)$, digamos $D(c_1, \rho)$. Note que

$$\frac{d_0}{K^{M+1}} \leq \frac{d_0}{K^q} < \rho,$$

e usando (b), encontramos que f^p aplica $D\left(z, \frac{d_0}{K^{M+1}}\right)$ sobre $D\left(f^p(z), \frac{d_0}{K^{M+1}}\right)$. Observe que ao menos d^p pontos em $D\left(z, \frac{d_0}{K^{M+1}}\right)$ podem-se aplicar em algum ponto dado em $D\left(f^p(z), \frac{d_0}{K^{M+1}}\right)$ e disto segue que

$$\text{card}\left(D\left(z, \frac{d_0}{K^{M+1}}\right) \cap f^{-n}(\xi)\right) \leq d^p \text{card}\left(D\left(f^p(z), \frac{d_0}{K^{M+1}}\right) \cap f^{-(n-p)}(\xi)\right)$$

Agora de (c), $f^p(z)$ esta em H, e como já temos derivado da desigualdade para pontos $z \in H$, deduzimos que

$$\text{card}\left(D\left(z, \frac{d_0}{K^{M+1}}\right) \cap f^{-n}(\xi)\right) \leq d^p d^{(n-p)+q-(M+1)}$$

o que completa a prova. □

Usando o teorema 3.14 e sabendo que dada uma aplicação racional f, podemos escolher uma aplicação de Möbius tal que $\infty \in f(gfg^{-1})$, pois J e $g(J)$ tem a mesma dimensão, temos

Corolário 3.18. *Se grau de f é maior ou igual a 2, então $Dim_H(J) > 0$.*

Teorema 3.19. *Seja $P(z) = z^d + c$ $(d \geq 2)$ com $K(P)$ conexo, então a dimensão de Hausdorff do conjunto de Julia satisfaz*

$$\frac{\log d}{\log d + (d-1)\log 2} \leq Dim_H(J(P)).$$

Demonstração. Primeiro note que $P'(z) = dz^{d-1}$, daí

$$\log(P'(z)) = \log d + (d-1)\log(z)$$

Como um raio de escape de $P(z)$ é 2 $(a_{2-1} = a_1 = 0)$, temos

$$K_0 = \max_{z \in J(P)} \log|P'(z)| \leq \log d + (d-1)\log 2.$$

Portanto

$$\frac{1}{\log d + (d-1)\log 2} \leq \frac{1}{K_0} \Rightarrow \frac{\log d}{\log d + (d-1)\log 2} \leq \frac{\log d}{K_0} \leq \text{Dim}_\text{H}(\text{J(P)}).$$

□

Exemplo 3.20. *Seja $P(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante pertencente ao Connectdness Locus de P. Uma estimativa da dimensão de Hausdorff de $P(z)$ é $\frac{1}{2}$, pois de acordo com*

o teorema anterior, temos

$$\frac{\log(2)}{\log(2)+(2-1)\log(2)} = \frac{\log(2)}{2\log(2)} = \frac{1}{2} \leq \mathrm{Dim}_H(J(P)).$$

Exemplo 3.21. *Seja $P(z) = z^5 + c$, onde c é uma constante pertencente ao Connectdness Locus de P, uma estimativa da dimensão de Hausdorff de $P(z)$ é $\dfrac{\log(5)}{\log(5)+4\log(2)}$, pois de acordo com o teorema anterior, temos*

$$\frac{\log(5)}{\log(5)+(5-1)\log(2)} = \frac{\log(5)}{\log(5)+4\log(2)} \leq \mathrm{Dim}_H(J(P)).$$

Considerações Finais

Neste trabalho investigamos propriedades geométricas do conjunto de Julia e do conjunto de Julia Cheio, para muitos de nossos resultados precisamos usar como hipótese de que os polinômios em exame fossem centrados. A limitação referida foi transpassada com o argumento que todo polinômio pode ser conjugado a um polinômio com esta especial característica, ser centrado. Como a conjugação preserva propriedades geométricas os resultados obtidos valem para qualquer polinômio, sendo este centrado ou não. É importante notar também que a estimativa da dimensão de Hausdorff obtida no desenvolvimento do trabalho depende apenas do grau do polinômio.

Referências Bibliográficas

[1] Atela, Pau; Hun, Jun. *Commuting Polynomials and Polynomials with Same Julia Set*, 1995.

[2] Beardon, Alan F. *Iteration of Irational Functions, Complex Analytic Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 2000.

[3] Cabral, João Manuel Gonçalves. *Dinâmica Holomorfa: Conjuntos de Julia e de Mandelbrot*, Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica- Universidade dos Açores, Ponta Delgada, Portugal, 2002.

[4] Cabral, João Manuel Gonçalves. *Estudo Analítico e Simbolico das Bifurcações para a Família de Aplicações Racionais de Grau 2*, Tese (Doutorado em Matemática)- Universidade dos Açores, Ponta Delgada, Portugal, 2009.

[5] Carleson, Lennart; Gamelin, Theodore W. *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1992.

[6] Conway, John B. *Function of One complex Variable*, Second Edition, Springer-Verlag, 1978.

[7] Falconer, Kenneth. *Fractal Geometry*, Second edition, Wiley, 2009.

[8] Gabber V. *On the Iteration of Rational Functions. Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 84, 497-505, 1978.

[9] Medeiros, Luiz Adauto da Justa. *Introdução as Funções Complexas*, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1972.

[10] Milnor, John. *Dynamics One Complex Variable*, Princeton University Press, Annals of Mathematics Studies, Vol. 60.

[11] Neto, Alcides. *Funções Complexas de uma Variável Complexa*, Projeto Euclides, IMPA, 2008.

[12] Ruffino, Paulo. *Uma Iniciação aos Sistemas Dinâmicos Estocásticos*, IMPA, 2009.

[13] Pommerenke, Ch. *Univalent Functions*. Vandenhoeck and Ruprecht, Gottingen, 1975.

[14] Pommerenke, Ch. *On the Grunsky Inequalities for Univalent Functions, Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 35, 234-244, 1969.

[15] Rogers, C. A. *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1970.

[16] Royden, H. L.; Fitzpatick, P. M. *Real Analysis*. Fourth Edition, China Machine Press, 2010.

[17] Soares, Marcio G. *Cálculo em uma Variável Complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2012.

[18] Sofware Fraqtive. Disponível em http://fraqtive.mimec.org/. Acesso em 21 de janeiro de 2014.

[19] Yang, Guoxiao. *Some Geometrics Properties of Julia Sets and filled-in Julia Sets of Polynomials, Complex Variables, Theory and application: An International Journal*, 383-391, 2002.

[20] Zireh, Ahmad. *Hausdorff Dimension of the Julia Set for Complex Polynomial $z(z^d + c)$, International Journal of Math Analysis*, Vol. 2, número 1, 5-9, 2008.

Índice Remissivo

órbita periódica, 24

A Dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia, 51
aplicação conforme, 7
aplicação univalente, 7
Aspectos Geométricos do Conjunto de Julia Cheio, 47

bacia de atração, 27

coeficientes de Faber, 43
Conectedness Locus, 1, 30
Conjunto de Fatou, 28
Conjunto de Julia, 1, 28
Conjunto de Julia Cheio, 30
conjunto mensurável, 20
conjuntos de Borel, 20

dimensão de Hausdorff, 22
distribuição de massa, 21
domínio, 4

espaço de Baire, 34
espaço de medida, 21
espaço de probabilidade, 21
espaço mensurável, 20

Fórmula analítica de Green, 19
fórmula integral de Cauchy, 13

grande órbita, 33
grande órbita finita, 33
grau de uma aplicação racional, 31

holomorfa, 3

integral complexa, 8

medida, 20
medida t-dimensional de Hausdorff, 22
meromorfa, 7
multiplicador, 25

polinômio centrado, 46
polinômios de Faber, 44
polinômios de Tchebychev T_k, 30
ponto parabólico, 27
ponto periódico, 24
ponto pré-periódico, 25
Princípio do Máximo, 18

raio de escape, 51
raio externo, 39

sigma álgebra, 19

Teorema de Böttcher, 35
Teorema de Liouville, 16
Teorema de Montel, 28
Teorema de Morera, 16
Teorema Integral de Cauchy, 10
transformação de Möbius, 7

valor crítico de uma aplicação racional, 31