SAMARA LEANDRO MATOS DA SILVA

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM VISCOSIDADE VARIÁVEL NA FORMA NÃO-ESTACIONÁRIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

T
S586e
2013

Silva, Samara Leandro Matos da, 1988-
Equações de Navier-Stokes com viscosidade variável na forma não-estacionária / Samara Leandro Matos da Silva. – Viçosa, MG, 2013.
viii, 81 f. : il. ; 29 cm.

Inclui apêndices.
Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. [80]-81.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Galerkin, Método de. 3. Operadores monótonos. 4. Navier-Stokes, Equações de. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.353

SAMARA LEANDRO MATOS DA SILVA

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM VISCOSIDADE VARIÁVEL NA FORMA NÃO-ESTACIONÁRIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 16 de Julho de 2013.

Margareth da Silva Alves

Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Anderson Luis Albuquerque de Araujo
(Orientador)

Dedico este trabalho á minha mãe Stelia,
pelo exemplo de força e determinação.

Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.

Charles Chaplin

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Stelia, que sempre me fez querer ser uma pessoa melhor, na tentativa de me fazer digna de ser sua filha. Todas as conquistas na minha vida são graças a você. Agradeço também a minha irmã, que sempre me ajudou e a Ana Luiza e o Abrão Lucas por fazerem de cada férias uma brincadeira.

Ao meu orientador, professor Anderson Luís Albuquerque de Araújo, pela imensa paciência durante esse ano de trabalho, pelos ensinamentos e a ótima orientação, que levo comigo como um exemplo que quero seguir.

Aos amigos que fiz no mestrado. Meus veteranos: Alana Nunes, Alana Cavalcante, Anna Paula, Gustavo, Michely e em especial ao Maks que me acolheu com muito carinho em sua casa. Minha turma: Maisa, Michele, Victor e em especial aos pregos (como eu) Guemael e Débora. Meus calouros: Aline, Carlos, Filipe, Lívia, Luiz, Priscila, Renno, Serginei e meus irmãozinhos Rondinei e Thiago. Agradeço a todos pelos momentos juntos nos churrascos, jogos de cs, nas gordisses, nas saídas para os botecos e para as festas.

Aos amigos que fiz ao longo da vida e que sempre elevaram uma prece e um pensamente positivo em meu favor. Em especial a Pauliana que nunca esqueceu de mim e a Kênia e Andréia que sempre estiveram presentes.

As professoras Dr^{a} Margareth da Silva Alvese e Dr^{a} Bianca Morelli Rodolfo Calsavara por aceitarem fazer parte da banca examinadora deste trabalho.

Aos professores que tive ao longo da graduação e do mestrado, que me deram exemplo do tipo de professora que quero e que não quero ser. Ao meu orientador da graduação, professor Francisco Aurilo, que nunca deixou de me orientar e sempre me incentivou a seguir na vida acadêmica. A professora Simone, por cuidar dos pregos e pelo ótimo desemprenho na coordenação do curso.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Resumo

SILVA, Samara Leandro Matos da, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, Julho de 2013. **Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável na Forma não-Estacionária**. Orientador: Anderson Luís Albuquerque de Araújo.

O objetivo principal desde trabalho é estudar a equação de Navier-Stokes não-estacionária (1)-(3). Mostraremos a existência, para $n \leq 4$, e unicidade, para $n \leq 3$, quando $\nu = \nu_0 + \nu_1||u||^2$, com $\nu_0, \nu_1 > 0$ constantes positivas. Também provaremos a existência, para $n \leq 4$, quando $\nu = M(a(u))$, onde $a(u) = ||u||^2$ e M é uma função contínua e diferenciável. Para tanto, utilizaremos o Método de Galerkin acoplado com argumentos de compacidade e ponto fixo.

Abstract

SILVA, Samara Leandro Matos da, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, July, 2013. **Navier-Stokes equations with variable viscosity in Form Non-Stationary**. Adiviser: Anderson Luís Albuquerque de Araújo.

The main objective of this work is to study the Navier-Stokes non-stationary (1) - (3). We will show the existence, for $n \leq 4$ and uniqueness, for $n \leq 3$ when $\nu = \nu_0 + \nu_1||u||^2$ with $\nu_0, \nu_1 > 0$ are positive constants. Also prove the existence, for $n \leq 4$ when $\nu = M(a(u))$, where $a(u) = ||u||^2$ and M is a continuous function and differentiable. To do so, we use the Galerkin method coupled with arguments for compactness and fixed point.

Sumário

Introdução **1**

1 Conceitos Preliminares **4**

1.1 Notações e espaços funcionais 4

1.2 Método de Galerkin 7

1.3 Resultados auxiliares 8

1.4 Teoremas de imersões de Sobolev e compacidade 13

1.4.1 Desigualdades de interpolação 14

1.5 Derivada generalizada de funções vetoriais 14

1.6 Formas lineares e suas propriedades 16

1.7 Caracterização do gradiente de uma distribuição 20

1.8 Operador monótono e hemicontínuo 25

2 Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável na Forma Estacionárias **34**

2.1 Existência 34

2.2 Unicidade 40

3 Equação de Navier-Stokes com viscosidade variável na Forma Não-Estacionária **42**

3.1 Existência 42

3.2 Unicidade 57

4 Equação de Navier-Stokes Não-Estacionária com Viscosidade Variável do Tipo Não Local Mais Geral **61**

4.1 Existência 61

Considerações Finais **68**

Apêndice A: Dedução das Equações de Navier-Stokes **69**

A.1 Derivada Material e Teorema do Transporte 70

A.2 Conservação da Massa e Fluidos Incompressíveis 73

A.3 Conservação do momento 74

A.4 Fluidos não-viscosos e Equação de Euler 77

A.5 Equação de Navier-Stokes 77

Referêcias Bibliográficas **80**

Introdução

O estudo de equações que descrevem o comportamento de fluidos teve um grande avanço com Leonard Euler (1707-1783), que foi considerado o responsável pela formulação matemática do escoamento de fluidos invíscido (quando não é considerada a viscosidade). Essas equações são chamadas equações de Euler. Depois disso, vários estudos foram feitos para introduzir o termo de viscosidade nestas equações. Neste sentido, o francês Claude Navier (1785-1836) e o inglês George Stokes (1819-1903) obtiveram os melhores resultados, no que é conhecida hoje como as Equações de Navier-Stokes.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \nabla p = f \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{2}$$

$$u = 0 \tag{3}$$

Sendo $u = u(u_1, u_2, ..., u_n)$ um vetor tal que $u_i = u_i(x, t)$, onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0,\ t \in \mathbb{R}$. Onde u descreve o campo de velocidade do fluido, f é a densidade das forças externas, $p = p(x, t)$ é a pressão no ponto (x, t) e ν representa a viscosidade do fluido.

Estas equações não possuem solução algébrica regular, excetuando-se para casos muito específicos. J.L. Lions [16], R. Temam [26] e O. A. Ladyzhenskaya [11], entre muitos outros, contribuíram para o desenvolvimento dos aspectos matemáticos e numéricos das equações de Navier-Stokes, analisando questões de existência, unicidade (alguns casos) das soluções de problemas estacionários e de evolução. Metodologicamente, estas contribuições matemáticas formam a conhecida *teoria clássica das equações de Navier-Stokes*.

A análise matemática de (1)-(3) foi feita primeiramente por J. Leray em 1934 [12]. Depois foi investigado por O. A. Ladyzhenskaya [11], em 1963; J. L. Lions [16], em 1969; R. Temam [26], em 1979; L. Tartar [25], em 1999 e muitos outros matemáticos.

Os problemas que serão analisados neste trabalho seguem a mesma linha do trabalho proposto por O. A. Ladyzhenskaya [11]. O qual é supor que em (1)-(3) o termo de viscosidade ν é uma função de u.

O problema, quando ν é da forma $\nu = \nu_0 + \nu_1||u||^2,\ \nu_0, \nu_1 > 0$, são constantes positivas, foi investigado por J. L. Lions [16] em um domínio cilíndrico $Q =$

$\Omega\times]0,T[\subset\mathbb{R}^{n+1}$, mais precisamente, ele investigou o problema misto:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(\nu_0+\nu_1||u||^2)\Delta u+\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\nabla p=f \quad \text{em} \quad Q \tag{4}$$

$$\operatorname{div} u=0 \quad \text{em} \quad Q \tag{5}$$

$$u=0 \quad \text{em} \quad S \tag{6}$$

$$u(x,0)=u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{7}$$

Para o caso $\nu_1=0$ a análise foi feita por J. L. Lions [16] e G. Prodi [17]. O caso não cilíndrico de (4)-(7) foi investigado por Araújo, Miranda e Medeiros [1], de forma semelhante.

Seja Ω um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suposta regular. O problema estacionário correspondente ao problema de evolução (4)-(7) consiste em determinar u e p satisfazendo:

$$-(\nu_0+\nu_1||u||^2)\Delta u+\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\nabla p=f \quad \text{em} \quad \Omega \tag{8}$$

$$\operatorname{div} u=0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{9}$$

$$u=0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \tag{10}$$

Quando $\nu_1=0$, a análise matemática de (8)-(10) foi feita por J. L. Lions [16] e R. Temam [26]. Uma outra referência é a dissertação de M. M. Arnoud [2].

Seguindo a linha de J. L. Lions [16] e o modelo proposto por O. A. Ladyzhenskaya [11], formulamos um problema onde ν depende de u e generaliza em parte os casos apresentados anteriormente, ou seja, estudaremos o modelo não-estacionário com viscosidade mais geral definido por

$$\frac{\partial u}{\partial t}-M(a(u))\Delta u+\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\nabla p=f \quad \text{em} \quad Q \tag{11}$$

$$\operatorname{div} u=0 \quad \text{em} \quad Q \tag{12}$$

$$u=0 \quad \text{em} \quad S \tag{13}$$

$$u(x,0)=u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{14}$$

Nas últimas décadas as equações de Navier-Stokes e suas variantes foram bastante estudadas tanto do ponto de vista matemático quanto numérico. A análise matemática destes problemas de evolução tem como base a teoria linear das equações diferenciais parabólicas e a teoria clássica das equações de Navier-Stokes. O método de Galerkin, as imersões de Sobolev, estimativas a priori, argumentos de compacidade, teoremas de ponto fixo, teoria de regularidade, teoria de semigrupos, entre outros, são ferramentas essenciais para a resolução de tais problemas.

Neste trabalho investigaremos os resultados de existência e unicidade (alguns casos) para dois problemas do tipo Navier-Stokes com viscosidade variável. Usaremos o Método de Galerkin acoplado com argumentos de compacidade e ponto fixo.

Para tornar o texto mais dinâmico este trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 descreveremos as notações, espaços funcionais, alguns resultados clássicos da teoria de equações diferenciais e resultados de monotonicidade e hemicontinuidade que serão usados no trabalho.

No Capítulo 2 mostraremos a existência e unicidade, para $n \leq 4$, do problema (8)-(10). Seguindo as mesmas ideias usadas por J. L. Lions [16] e M. M. Arnoud [2].

No Capítulo 3 mostraremos a existência, para $n \leq 4$ e unicidade, para $n \leq 3$ do problema (4)-(7), que foi proposto por J. L. Lions [16]. Usaremos algumas ideias usadas por C. C. V. Pinheiro [23] que fez um estudo para um problema semelhante envolvendo o operador p-laplaciano e a dissertação de mestrado de R. M. S. Neto [22].

No Capítulo 4 mostraremos a existência, para $n \leq 4$, do problema (11)-(14), seguindo as mesmas ideias dos capítulos anteriores e alguns resultados para operadores monótonos encontrados em L. A. Medeiros [19].

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo iremos relembrar algumas definições de espaços funcionais e resultados importantes para o estudo dos capítulos 2, 3 e 4 que vão desde as desigualdades clássicas usadas no estudo de EDP's aos teoremas de imersões contínuas e compactas nos espaços de Sobolev. Por último serão apresentados alguns resultados para operadores monótonos e hemicontínuos.

1.1 Notações e espaços funcionais

Nesta seção vamos mostrar as notações e definições de espaços funcionais utilizados neste trabalho. Para maiores detalhes sobre estes espaços consultar [5], [20] e [26]. Usaremos as seguintes notações:

* $\mathbb{R}^n$ representará o espaço euclidiano n-dimensional;
* Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com medida de Lebesgue $|\Omega|$ e fronteira $\partial\Omega$;
* Q representará o cilindro $\Omega \times (0,T)$;
* $S = \partial\Omega \times (0,T)$ representará a superfície lateral do cilindro Q;
* $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{n}$ denotará o operador gradiente;
* $\operatorname{div} u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ denotará o divergente de u;
* $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ representará o operador Laplaciano;
* $|x| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e $|\nabla u| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ denotam, respectivamente, a norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$ e a norma do vetor gradiente.

Vamos definir a seguir os espaços funcionais necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua. O suporte de u, que será denotado por* $\text{supp}(u)$*, é definido como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Se este conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^n$ então dizemos que u possui suporte compacto.*

Definição 1.2. *$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro não-negativo ou $m = \infty$). Denotaremos por $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.*

Definição 1.3. *O conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que têm suporte compacto, sendo que esse suporte depende de φ, são denotadas por $C_0^\infty(\Omega)$.*

Definição 1.4. *Uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^n}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero quando existe $K \subset \Omega$ compacto tal que:*

- $\text{supp}\, \varphi_\nu \subset K, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;
- *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$D^\alpha \varphi_\nu \to 0 \quad \textit{uniformemente em } K,$$

onde D^α denota o operador derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

com $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definição 1.5. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω.*

Definição 1.6. *Seja $1 \leq p \leq +\infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω, com norma*

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \textit{para} \quad 1 \leq p < +\infty$$

e

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \quad p = \infty.$$

Definição 1.7. *Seja m um inteiro positivo e $1 \leq p \leq +\infty$. Denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço de Banach (com m inteiro) das funções $u(.)$ em $L^p(\Omega)$ com derivadas generalizadas de ordem $\leq m$ que pertencem a $L^p(\Omega)$ e cuja norma é dada por*

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)}.$$

Para o caso particular, quando $p = 2$, a notação dos espaços de Sobolev será $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$. Para $\Omega = (0, L)$, temos o espaço de Hilbert $H^1(0, L) = W^{1,2}(0, L)$ definido por

$$H^1(0, L) = \{u \in L^2(0, L); u' \in L^2(0, L)\}$$

com a norma definida por

$$||u||_{H^1(0,L)} = \left(\int_0^L |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^L |u'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

induzida pelo produto interno

$$(u, v)_{H^1(0,L)} = \int_0^L (u(t), v(t))dt + \int_0^L (u'(t), v'(t))dt.$$

Definição 1.8. *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,*

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Definição 1.9. *Supondo $1 \leq p < +\infty$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, denotamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

No estudo das equações de Navier-Stokes precisaremos dos espaços de funções vetoriais com n componentes de alguns dos espaços definidos acima. Representaremos por $\mathbb{L}^p(\Omega)$ o espaço das funções vetoriais $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, tal que $u_i \in L^p(\Omega)$, ou seja, $\mathbb{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^n$. Consideraremos esses espaços, quando normados, com a norma do produto usual. Desse modo, definimos os espaços

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathbb{D}(\Omega); \operatorname{div} \varphi = 0\}$$

e

$$V = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad H = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \tag{1.1}$$

onde $\mathbb{D}(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))^n$ e $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^n$. Definimos o produto interno e a norma em V, respectivamente, como

$$((u, v)) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)dx \tag{1.2}$$

e

$$||u||^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx.$$

Definamos o produto interno e a norma em H, respectivamente, como

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_i(x)v_i(x)dx$$

e

$$|u|^2 = \sum_{i=1}^n \int_\Omega |u_i(x)|^2 dx.$$

Definição 1.10. *Seja H um espaço de Hilbert. Uma sequência $(e_n) \subset H$ é dita base Hilbertiana de H se satisfaz as seguintes condições:*

- $|e_n| = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}; \quad (e_n, e_m) = 0 \quad \forall\ m \neq n;$
- *o espaço vetorial gerado por $\{e_1, e_2, ...\}$ é denso em H.*

Proposição 1.11. *Sejam H um espaço de Hilbert e $(e_n)_{n\in N}$ uma base Hilbertiana de H. Então*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n, \quad \forall\ u \in H.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [5] p. 143. □

1.2 Método de Galerkin

Boris Grigoryevich Galerkin nasceu em 20 de fevereiro de 1871 (04 de Março no calendário atual) em Polotsk, atualmente localizada na Bielo-Rússia. Em 1893 entrou no Instituto Tecnológico de St. Peterburgo, onde estudou matemática e engenharia, concluindo seus estudos em 1899. Em março de 1909 tornou-se professor neste mesmo instituto.

Em 1915, Galerkin publicou um artigo, intitulado *Sterzhni i plastinki Riady v nekotorykh voprosah uprugogo ravnovesia sterzhnei i plastinok*, no qual apresentava um método de integração aproximada de Equações Diferencias Parciais, que ficou conhecido como Método de Galerkin. Este trabalho ficou famoso mundialmente e apesar de quase 100 anos é largamente usado, como por exemplo, no estudo de equaçãos diferenciais parciais não lineares. Faleceu em 12 de julho de 1945. Nesta época, Galerkin era chefe do Instituto de Mecânica da Academia de Ciências Soviética. Maiores informações sobre a biografia de Galerkin podem ser obtidas em [4] e [24].

Vamos dar uma ideia geral de como funciona o Método de Galerkin. Sejam E um espaço de Hilbert e $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ uma base hilbertiana de E. Definamos como E_m o subespaço gerado pelos m primeiros vetores de $(w_k)_{k=1}^{\infty}$. Considere a equação de operadores

$$Fu = y$$

definida em E. Para resolvermos esta equação utilizando o Método de Galerkin devemos considerar o problema aproximado

$$Fu_m = y_m \quad \text{em} \quad E_m.$$

O primeiro passo deste método é mostrar a existência de uma sequência $(u_m) \in E_m$ que satisfaça o problema aproximado. Depois, devemos mostrar que a sequência de soluções aproximadas é limitada em E. Pelo Teorema 1.31 garantimos a existência de uma subsequência (u_{mj}) de (u_m) que converge fracamente para u.

Utilizando as propriedades de F e da construção de Galerkin mostramos que essa subsequência converge em algum sentido para uma solução fraca do problema em questão.

1.3 Resultados auxiliares

Os resultados a seguir serão utilizados nos Capítulos 2, 3 e 4. Não faremos as demonstrações de todos os resultados, mas serão indicadas as respectivas referências bibliográficas.

Proposição 1.12 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ onde $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e $||fg||_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)}||g||_{L^q(\Omega)}$.*

Demonstração. Ver R.G. Bartle [3], p. 56. □

Proposição 1.13 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver R.G. Bartle [3], p. 56. □

Uma variação da desigualdade de Young que será muito utilizado neste trabalho é dada pelo seguinte corolário.

Corolário 1.14. *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para todo $\varepsilon > 0$ tem-se*

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} ab &= (q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} ab \\ &= \left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}}\right)\left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b\right) \end{aligned}$$

aplicando a desigualdade de Young segue

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{1}{p}\left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}}\right)^p + \frac{1}{q}\left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b\right)^q \\ &= \frac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}} a^p + \varepsilon b^q \quad \forall\ \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Tomando $c(\varepsilon) = \dfrac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}}$ temos

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q \quad \forall\ \varepsilon > 0.$$

□

Proposição 1.15. *Sejam números reais $a, b \geq 0$ e $p \geq 1$, então*

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Demonstração. Usando as propriedades do máximo obtemos

$$\begin{aligned}(a+b)^p &\leq (2\max\{a,b\})^p \\ &= 2^p \max\{a^p, b^p\} \\ &\leq 2^p(a^p+b^p).\end{aligned}$$

□

Lema 1.16 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Sejam u, v duas funções contínuas não negativas tais que para $t_0 \leq t$ e $\beta \geq 0$ e $\alpha \geq 0$ tem-se que se*

$$u(t) \leq \beta + \alpha \int_{t_0}^{t} v(x)u(x)dx \tag{1.3}$$

então

$$u(t) \leq \beta e^{\alpha \int_{t_0}^{t} v(x)dx}.$$

Em particular quando $\beta = 0$ temos $u \equiv 0$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e definamos

$$w(t) := \beta + \varepsilon + \alpha \int_{t_0}^{t} v(x)u(x)dx.$$

Como u, v são funções contínuas, a função w é continuamente diferenciável. De (1.3) temos $u(t) \leq w(t)$ e

$$w(t_0) = \beta + \varepsilon > 0,\ w(t) \geq \beta + \varepsilon > 0.$$

Daí,

$$w'(t) = \alpha v(t)u(t) \leq \alpha v(t)w(t)$$

logo,

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq \alpha v(t).$$

Integrando em $[t_0, t]$ obtemos

$$\int_{t_0}^{t} \frac{w'(x)}{w(x)}dx \leq \alpha \int_{t_0}^{t} v(x)dx$$

que implica

$$\ln(w(t)) - \ln(w(t_0)) \leq \alpha \int_{t_0}^{t} v(x)dx.$$

Logo

$$\frac{w(t)}{w(t_0)} \leq e^{\alpha \int_{t_0}^{t} v(x)dx},$$

ou seja,

$$w(t) \leq w(t_0)e^{\alpha \int_{t_0}^{t} v(x)dx}.$$

Como $u(t) \leq w(t)$ e $w(t_0) = \beta + \varepsilon$ segue que

$$u(t) \leq (\beta + \varepsilon)e^{\alpha \int_{t_0}^{t} v(x)dx},$$

e fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$u(t) \leq \beta e^{\alpha \int_{t_0}^{t} v(x)dx},$$

como queríamos mostrar. Se $\beta = 0$, pela desigualdade acima, temos $u \equiv 0$. □

Lema 1.17 (Combinação Linear)**.** *Seja $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto L.I. de vetores de um espaço normado X (de qualquer dimensão). Então existe $C > 0$, tal que para todo coleção de escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tem-se*

$$||\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n|| \geq C(|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n|)$$

Demonstração. Ver E. Kreyszig Bartle [10], p. 72. □

Teorema 1.18 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Seja B a bola fechada de centro O e raio 1 em $\mathbb{R}^n$. Toda aplicação contínua $f : B \to B$ possui (pelo menos) um ponto fixo.*

Demonstração. Ver E. L. Lima [15], p. 445. □

Lema 1.19 (Lema do Ângulo Agudo)**.** *Seja $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua tal que para um $\rho > 0$ conveniente se tenha $\langle P(\xi), \xi \rangle \geq 0$ para todo $||\xi|| = \rho$. Então existe $\xi \in \mathbb{R}^n$, com $||\xi|| \leq \rho$, tal que $P(\xi) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos $P(\xi) \neq 0$ para todo $||\xi|| \leq \rho$. Seja

$$\begin{aligned} f : \overline{B(0,\rho)} &\to \overline{B(0,\rho)} \\ \xi &\mapsto -\rho\frac{P(\xi)}{||P(\xi)||}. \end{aligned}$$

Notemos que f é contínua, pois é o quociente de aplicações contínuas. Considere também,

$$\begin{aligned} g : \overline{B(0,1)} &\to \overline{B(0,1)} \\ \xi &\mapsto -\frac{P(\rho\xi)}{||P(\rho\xi)||} \end{aligned}$$

que também é contínua.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, Teorema 1.18, existe $\xi_0 \in \overline{B(0,1)}$ tal que

$$g(\xi_0) = \xi_0$$

ou seja,

$$\xi_0 = -\frac{P(\rho\xi_0)}{||P(\rho\xi_0)||}.$$

Assim, $\xi_1 = \rho\xi_0$ é ponto fixo de f. De fato,

$$f(\xi_1) = -\rho\frac{P(\xi_1)}{||P(\xi_1)||} = -\rho\frac{P(\rho\xi_0)}{||P(\rho\xi_0)||} = \rho\xi_0 = \xi_1.$$

Temos $||\xi_1|| = \rho$

$$\begin{aligned}\langle P(\xi_1), \xi_1\rangle &= \left\langle P(\xi_1), -\rho\frac{P(\xi_1)}{||P(\xi_1)||}\right\rangle = -\frac{\rho}{||P(\xi_1)||}\langle P(\xi_1), P(\xi_1)\rangle \\ &= -\frac{\rho}{||P(\xi_1)||}||P(\xi_1)||^2 = -\rho||P(\xi_1)||\end{aligned}$$

Como supomos $P(\xi_0) \neq 0$, para todo $||\xi|| = \rho$ e por hipótese, $\rho > 0$, temos

$$\langle P(\xi_1), \xi_1\rangle < 0,$$

o que contradiz nossa hipótese. □

Teorema 1.20 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre a uma função real mensurável f. Se existe função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f dx = lim \int f_n dx.$$

Demonstração. Ver R.G. Bartle [3], p. 44. □

Para enunciar o Teorema de Carathéodory vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Teorema 1.21 (Teorema de Caratheodory)**.** *Seja $f : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t_0 \in (a,b)$ e $x_0 \in \Omega$, mensurável em t para cada x fixo e contínua em x para cada t fixo. Se para cada compacto $K \subset (a,b) \times \Omega$ existe uma função m_K, integrável no sentido de Lebesgue, tal que*

$$||f(t,x)|| \leq m_K(t), \quad \forall\ (t,x) \in K,$$

então existe uma solução $x(t)$ maximal local de (1.4) sobre algum intervalo

$$|t - t_0| \leq \beta,\ \beta > 0.$$

Demonstração. Ver E. A. Coddington e N. Levinson [7], p. 43. □

Teorema 1.22. *Seja f_n uma sequência que converge para f em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência f_{nk} de f_n que converge quase sempre para f em Ω.*

Demonstração. Ver R.G. Bartle [3], p. 75. □

Teorema 1.23 (Teorema de Representação de Riesz-Fréchet)**.** *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot\,,\cdot)$ e norma $||\cdot||$. Dado $\phi \in H'$, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\langle \phi, v \rangle_{H',H} = (f, v), \quad \forall\ v \in H.$$

Além disso,

$$||f|| = ||\phi||_{H'}.$$

Demonstração. Ver M. M. Cavalcanti e V. N Cavalcanti [6], p. 156. □

Lema 1.24. *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e (f_ν) uma sequência de funções de $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, tal que $f_\nu(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω e*

$$\int_\Omega |f_\nu(x)|^p dx \leq M < \infty, \quad \forall\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Então $f_\nu \to f$ fracamente em $L^p(\Omega)$

Demonstração. Ver J. L. Lions [16]. □

Lema 1.25. *Seja D um aberto limitado de $\mathbb{R}^{d+1}$, d um inteiro positivo, g_m e g funções de $L^q(D)$, $1 < q < \infty$, tais que*

$$||g_m||_{L^q(D)} \leq c, \ (c > 0 \quad \textit{constante})$$

$$g_m \to g \quad \textit{quase sempre em} \quad D.$$

Então,

$$g_m \to g \quad \textit{fracamente em} \quad L^q(D).$$

Demonstração. Ver J. L. Lions [16]. □

Proposição 1.26. *Sejam E um espaço de Banach, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de E e $\sigma(E, E')$ a topologia fraca em E. Então :*

i) $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$ se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$, para todo $f \in E'$.

ii) Se $x_n \to x$ fortemente em E, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente.

iii) $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$, então $||x_n||$ é limitada e $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.

iv) $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \to f$ fortemente em E', então $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Ver H. Brezis [5] p. 58. □

1.4 Teoremas de imersões de Sobolev e compacidade

Nesta seção serão enunciados os teoremas de imersões de Sobolev e os resultados de compacidade que foram utilizando neste trabalho. Não faremos a demonstração destes resultados, mas deixaremos indicada as referências das mesmas.

Teorema 1.27. *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1. Então as seguintes emersões são contínuas:*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad para \quad p < n, \ \forall\ q \in [1, p^*], \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad para \quad p = n, \ \forall q \in [p, +\infty), \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^\infty(\Omega) \quad para \quad p > n, \end{aligned}$$

com $p^* = \dfrac{np}{n-p}$.

Demonstração. Ver L. A. da J. Medeiros [20] p. 75. □

Teorema 1.28. *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1. Então as seguintes imersões são compactas:*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad para \quad p < n, \ \forall q \in [1, p^*), \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad para \quad p = n, \ \forall q \in [p, +\infty), \\ W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^\infty(\Omega) \quad para \quad p > n. \end{aligned}$$

com $p^* = \dfrac{np}{n-p}$.

Demonstração. Ver L. A. da J. Medeiros [20] p. 79. □

Teorema 1.29 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante C (dependendo da medida de Ω e de p) tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver H. Brezis [5] p. 218. □

Como consequência da desigualdade acima, a expressão $||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)}$. Em $H_0^1(\Omega)$ a expressão

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx$$

define um produto interno que induz a norma $||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ equivalente a norma de $||u||_{H^1(\Omega)}$.

Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach com $B_0 \subset B \subset B_1$. Considere o seguinte espaço

$$W(B_0, B_1) = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{P_1}(0, T; B_1)\}$$

com $T > 0$ finito e $1 < p_0, p_1 < \infty$.

$W(B_0, B_1)$ é um espaço de Banach com norma

$$||u||_{W(B_0,B_1)} = ||u||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + ||u'||_{L^{P_1}(0,T;B_1)}.$$

Teorema 1.30. *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach com B_0 e B espaços reflexivos tais que $B_0 \subset B \subset B_1$ com as inclusões contínuas e a inclusão $B_0 \subset B$ compacta. Se $1 < p_0, p_1 < \infty$, então $W \subset L^{p_0}(0, T; B)$ é uma imersão compacta.*

Demonstração. Ver J. L Lions [16]. □

Teorema 1.31 (Teorema de compacidade fraca)**.** *Seja B um espaço de Banach reflexivo. Se a sequência $(w_k)_{k=1}^{\infty} \subset B$ é limitada. Então existe uma subsequência $(w_{kj})_j^{\infty}$ de $(w_k)_{k=1}^{\infty} \subset B$ tal que w_{kj} converge fracamente para algum $u \in B$.*

Demonstração. Ver H. Brezis [5] p. 70. □

1.4.1 Desigualdades de interpolação

Lema 1.32. *Se $n = 2$, para qualquer aberto Ω,*

$$||v||_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}} ||v||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} ||\nabla v||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Ver R. Temam [26] p. 291. □

Lema 1.33. *Se $n = 3$, para qualquer aberto Ω,*

$$||v||_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} ||v||^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)} ||\nabla v||^{\frac{3}{4}}_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Ver R. Temam [26] p. 296. □

1.5 Derivada generalizada de funções vetoriais

A seguir vamos apresentar o conceito de derivada fraca de uma função vetorial.

Lema 1.34. *Seja X um espaço de Banach e X' seu dual. Sejam u e g funções de $L^1(a, b; X)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) u é quase sempre a primitiva de g,

$$u(t) = \xi + \int_a^t g(s)ds, \quad \xi \in X,\ \ q.s.\ t \in [a, b];$$

ii) Para cada $\phi \in \mathcal{D}((a,b))$,

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)dt, \qquad \left(\phi' = \frac{d\phi}{dt}\right);$$

iii) Para cada $\eta \in X'$

$$\frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle = \langle \eta, g(t)\rangle,$$

no sentido das distribuições sobre (a,b).

Demonstração. Ver R. Temam [26], p. 250. □

Em vista do Lema 1.34 podemos enunciar a seguinte definição:

Definição 1.35. *A função g dada no Lema 1.34 é chamada derivada fraca de u e será representada pelos símbolos usuais, isto é,*

$$g = u' = \frac{du}{dt}.$$

Sejam H e V dois espaços de Hilbert com produtos internos e normas $(\cdot\,,\cdot\,)$, $|\cdot|$, $((\cdot\,,\cdot\,))$ e $||\cdot||$, respectivamente, e sejam V' e H' os duais de V e H, respectivamente. Suponhamos que $V \subset H$ com imersão densa e contínua. Identificando H com o seu dual H' pelo Teorema de Representação de Riesz-Fréchet (Teorema 1.23), temos que H pode ser identificado com um subespaço de V' e as seguintes inclusões são densas e contínuas:

$$V \subset H \cong H' \subset V'. \tag{1.5}$$

Maiores informações sobre essas imersões podem ser encontradas em [6], p. 158.

Considere o seguinte espaço normado:

$$\Lambda(0,T) = \{v \in L^2(0,T;V); v' \in L^2(0,T;V')\}$$

com a norma

$$||v||_{\Lambda(0,T)} = \left(\int_0^T ||v(t)||^2 + ||v'(t)||^2_{V'}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $\Lambda(0,T)$ é um espaço de Hilbert e pelo Lema 1.34 um elemento de $\Lambda(0,T)$ coincide q.s. com uma função de $C([0,T];V')$. De fato, temos que coincide q.s. com uma função de $C([0,T];H)$, como prova o lema a seguir:

Lema 1.36. *Sejam V e H espaços de Hilbert tais que (1.5) vale. Se* $u \in W(0,T)$, *então* $u \in C([0,T];H)$. *Além disso,*

i) a seguinte igualdade vale no sentido das distribuições em $(0,T)$*:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = \langle u'(t), u(t)\rangle,$$

ii) A seguinte fórmula de Green vale para todo $u, v \in W(0,T)$:

$$\int_0^T (\langle u'(t), v(t)\rangle + \langle u(t), v'(t)\rangle)\, dt = \langle u(T), v(T)\rangle - \langle u(0), v(0)\rangle.$$

Demonstração. Ver R. Temam [26], p. 261. □

1.6 Formas lineares e suas propriedades

Nesta seção vamos definir as forma lineares usadas neste estudo e apresentaremos algumas de suas propriedades. Ao longo desta seção denotaremos por V o fecho algébrico de $\mathcal{V}$ em $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, como definido em (1.1).

Definição 1.37. *Consideremos a forma bilinear em* V *definida como o produto interno em* V*, Definição 1.2. Isto é,*

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) dx.$$

Em particular, temos

$$a(u,u) = ||u||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx.$$

Proposição 1.38. *A forma bilinear* $a(u,v)$ *como definida acima é contínua em* $V \times V$*.*

Demonstração. Sejam $u, v \in V$, então $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}, \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right| dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) dx \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C||u||||v|| \end{aligned} \tag{1.6}$$

Portanto, $a(u,v)$ é contínua em $V \times V$. □

Podemos associar a forma $a(u,v)$ a um operador linear e contínuo $A : V \to V'$ do seguinte modo: para cada $u \in V$, a aplicação $v \mapsto a(u,v)$ de V em $\mathbb{R}$ é linear e contínua, logo pelo Teorema de Representação de Riesz-Fréchet (Teorema 1.23) existe um único $\xi_u \in V'$ que identifica $v \in V$ com $a(\cdot\,, v) \in V'$.

Representaremos por A o operador $u \mapsto \xi_u$ de V em V'. Portanto, pelas propriedades de $a(u,v)$ temos A é linear e contínuo. De fato, pela continuidade de $a(u,v)$ tem-se

$$|\xi_u(v)| = |\langle \xi_u, v\rangle| = |a(u,v)| \leq C||u||||v||,$$

e logo

$$||A(u)||_{V'} = \sup \frac{|\langle \xi_u, v\rangle|}{||v||} \leq C||u||,$$

o que implica $||A||_{\mathcal{L}(V,V')} \leq C$.

Reciprocamente, dado um operador linear e contínuo $A \in \mathcal{L}(V,V')$ podemos associar a A uma forma bilinear contínua $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definindo

$$a(u,v) = \langle A(u), v\rangle \quad \forall\ u, v, \in V.$$

Como $a(u,v)$ é o produto interno de V então $A : V \to V'$ é o isomorfismo canônico de V em V'.

Se a forma bilinear $a(u,v)$ é coerciva, ou seja, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,v) \geq \alpha||u||^2,$$

então temos o seguinte resultado.

Teorema 1.39 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Se $a : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva, então $A : V \to V'$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Ver H. Brezis [5] p. 140. □

Definição 1.40. *Consideremos $b(u,v,w)$ a forma trilinear em V*

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) w_i(x) dx$$

Proposição 1.41. *A forma trilinear $b(u,v,w)$ tem as seguintes propriedades:*

i) é contínua em $V \times V \times V$ para $n \leq 4$;

ii) $b(u,v,v) = 0,\ \forall\ u, v \in V$;

iii) $b(u,v,w) = -b(u,w,v),\ \forall\ u, v, w \in V$.

Demonstração. i) Primeiro mostraremos a continuidade de $b(u,v,w)$ em

$$V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n).$$

O espaço $V \cap (L^n(\Omega))^n$ tem norma

$$||v||_{V\cap(L^n(\Omega))^n} = (||v||^2 + ||v||^2_{(L^n(\Omega))^n})^{\frac{1}{2}}$$

com

$$||v||^2_{(L^n(\Omega))^n} = \sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2_{L^n(\Omega)}.$$

Consideramos $u, v \in V$ e $w \in V \cap (L^n(\Omega))^n$. Logo, $u_i \in H_0^1(\Omega)$ e $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$.

Tomando $p = 2$ no Teorema 1.27, temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ com $q = \dfrac{2n}{n-2}$. Se $n > 2$ segue

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1$$

e $u_i \in L^q(\Omega)$, $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ e $w_i \in L^n(\Omega)$. Assim,

$$|b(u,v,w)| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |u_j| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| |w_i| \, dx.$$

Usando a Desigualdade de Hölder, Proposição 1.12, obtemos

$$\begin{aligned} |b(u,v,w)| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega |u_j|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |w_i|^n \, dx \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} ||u_j||_{L^q(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{L^n(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, temos $||u_j||_{L^q(\Omega)} \leq C||u_j||_{H_0^1(\Omega)}$, daí

$$|b(u,v,w)| \leq C \sum_{i,j=1}^{n} ||u_j||_{H_0^1(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{L^n(\Omega)}.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy relativamente ao índice j segue que

$$|b(u,v,w)| \leq C \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ||u_j||^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} ||w_i||_{L^n(\Omega)}$$

mas,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_\Omega |\nabla v_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = |\nabla v_i|_{L^2(\Omega)} = ||v_i||_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

logo,

$$|b(u,v,w)| \leq C||u|| \sum_{i=1}^{n} ||v_i||_{H_0^1(\Omega)} ||w_i||_{L^n(\Omega)}.$$

Pela Desigualdade de Cauchy relativamente ao índice i, temos

$$|b(u,v,w)| \leq C||u|| \left(\sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||w_i||^2_{L^n(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Logo

$$|b(u,v,w)| \leq C||u||||v||||w||_{(L^n(\Omega))^n}$$

O que mostra que $b(u,v,w)$ é contínua em

$$V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n).$$

Para $n \leq 4$ temos $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$. De fato, que $V \cap (L^n(\Omega))^n \subset V$ é imediato. Pelo Teorema 1.27 temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega) \quad \text{quando} \quad n \leq \frac{2n}{n-2},$$

ou seja, $n \leq 4$.

Seja $u \in V$,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega) \Rightarrow V \subset (H_0^1(\Omega))^n \hookrightarrow (L^n(\Omega))^n.$$

Logo, $u \in (L^n(\Omega))^n$ e daí $u \in V \cap (L^n(\Omega))^n$. Portanto, $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$ para $n \leq 4$.

Assim, $|b(u,v,w)| \leq C||u||||v||||w||, \quad \forall\ u,v,w \in V.$

ii) Sejam $u, v \in V$ temos

$$\begin{aligned} b(u,v,v) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) v_i(x) dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j(x) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i(x))^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x)(v_i(x))^2 dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x)(v_i(x))^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div}(u)(v_i(x))^2 dx = 0. \end{aligned}$$

iii) Sejam $u, v, w \in V$. Pelo item ii) temos

$$b(u, v+w, v+w) = 0.$$

Como $b(u,v,w)$ é linear segue

$$b(u, v+w, v+w) = b(u,v,w) + b(u,v,v) + b(u,w,w) + b(u,w,v) = 0.$$

Usando novamente o item ii) concluímos que

$$b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0,$$

ou seja,

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v).$$

□

Do mesmo modo que foi feito para a forma bilinear $a(u,v)$ podemos associar a forma $b(u,v,w)$ um operador linear contínuo $B : V \to V'$ do seguinte modo: para cada $u \in V$ a função $w \mapsto b(u,u,w)$ é linear e contínua, logo existe um único elemento $\xi(u) \in V'$ tal que

$$\langle \xi(u), w\rangle = b(u,u,w) \quad \forall\ w \in V.$$

Representaremos por $B(u)$ o operador $w \mapsto \xi(u)$ de V em V'.

Lema 1.42. *Para todo $u \in V$ a forma linear $B(u)$ definida por $v \mapsto \langle B(u), v\rangle = b(u,u,v)$ é contínua sobre V, ou seja, $Bu \in V'$ e*

$$||Bu||_{V'} \leq C||u||^2. \tag{1.7}$$

Demonstração. Fixando $u \in V$, resulta que a aplicação Bu definida por $v \mapsto \langle Bu, v\rangle = b(u,u,v)$ é linear e contínua em V, pelo item (i). Resulta que

$$|\langle Bu, v\rangle| = |b(u,u,v)| \leq C||u||^2||v||.$$

Logo

$$\sup_{||v||=1} |\langle Bu, v\rangle| \leq C||u||^2.$$

Portanto,

$$||Bu||_{V'} \leq C||u||^2, \quad \forall\ u \in V.$$

□

1.7 Caracterização do gradiente de uma distribuição

A seguir apresentaremos as formulações fracas para as equações de Navier-Stokes. Antes, vamos apresentar uma propriedade importante para o gradiente da pressão.

Seja p uma distribuição em Ω, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então para qualquer $v \in \mathcal{V}$ temos

$$\langle \nabla p, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i}, v_i \right\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle p, \frac{\partial}{\partial x_i} v_i \right\rangle = -\langle p, \operatorname{div} v\rangle = 0, \tag{1.8}$$

A recíproca dessa propriedade é verdadeira e consiste no resultado a seguir, cuja demonstração não faremos. Maiores informações podem ser obtidas em ([26], p. 14).

Proposição 1.43. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, 2, ..., n$. Então*

$$f = \nabla p$$

para algum $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se,

$$\langle f, v\rangle = 0 \quad \forall\ v \in \mathcal{V}.$$

Primeiro definiremos a formulação fraca para o problema (8)-(10). Consideremos $u \in (C^2(\overline{\Omega}))^n$ e $p \in C^1(\overline{\Omega})$ soluções clássicas de (8)-(10). Fazendo o produto escalar de $v \in \mathcal{V}$ com (8) obtemos

$$\left\langle -(\nu_0 + \nu_1||u||^2)\Delta u, v \right\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right\rangle + \langle \nabla p, v \rangle \ = \ \langle f, v \rangle , \quad \forall \ v \ \in \ \mathcal{V}.$$

Mas, usando integração por partes obtemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle -(\nu_0 + \nu_1||u||^2)\Delta u, v \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle -(\nu_0 + \nu_1||u||^2)\Delta u_i, v_i \right\rangle \\
&= -(\nu_0 + \nu_1||u||^2) \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}(x), v_i \right\rangle \\
&= -(\nu_0 + \nu_1||u||^2) \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}(x) v_i(x) dx \\
&= -(\nu_0 + \nu_1||u||^2) \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega -\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) dx \\
&= (\nu_0 + \nu_1||u||^2) a(u, v) \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right\rangle &= \left\langle \sum_{i,j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, v_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx \\
&= b(u, u, v). \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

De (1.8), (1.9) e (1.10) temos

$$(\nu_0 + \nu_1||u||^2) a(u, v) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle , \quad \forall \ v \in \mathcal{V}. \qquad (1.11)$$

Como $\mathcal{V}$ é denso em V concluímos que (1.11) vale para $v \in V$. Logo, podemos definir solução fraca do problema (8)-(10) do seguinte modo:

Definição 1.44. *Considere $f \in V'$. Então a função $u \in V$ é chamada solução fraca do problema (8)-(10) quando satisfaz*

$$(\nu_0 + \nu_1||u||^2) a(u, v) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall \ v \in V.$$

A Proposição 1.43 garante que para encontrarmos uma solução do problema (8)-(10) basta achar uma solução fraca no sentido da definição acima. De fato, Suponha que exista $u \in V$ tal que

$$\left\langle -(\nu_0 + \nu_1||u||^2)\Delta u, v \right\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right\rangle = \langle f, v \rangle , \quad \forall \ v \in V.$$

Como $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$, temos em particular

$$\left\langle -(\nu_0 + \nu_1||u||^2)\Delta u + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - f, v \right\rangle = 0, \quad \forall\ v \in \mathcal{V}.$$

Pela Proposição 1.43 existe $\tilde{p} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$-(\nu_0 + \nu_1||u||^2)\Delta u + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - f = \nabla \tilde{p},$$

no sentido de distribuição. Tomando $p = -\tilde{p}$ segue

$$-(\nu_0 + \nu_1||u||^2)\Delta u + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - f = -\nabla p, \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

ou seja,

$$-(\nu_0 + \nu_1||u||^2)\Delta u + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \nabla p = f, \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Obteremos uma formulação fraca para o os problema (4)-(7). Temos a seguinte caracterização para os espaços V e H. (Veja [26], Teoremas 1.4 e 1.6).

$$V = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n; \operatorname{div} u = 0\},$$

$$\mathcal{V} = \{u \in (\mathcal{D}'(\Omega))^n; \operatorname{div} u = 0\}$$

e

$$H = \{u \in (L^2(\Omega))^n; \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),\ u.n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

Problema 1.45. *Sejam $f \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$ e $u_0 \in H$. Determinar*

$$u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^4(0,T;V) \quad e \quad p \in \mathcal{D}'(Q)$$

tais que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1||u||^2)\Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \nabla p = f \quad em \quad \mathcal{D}'(Q) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Problema 1.46. *Sejam $f \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$ e $u_0 \in H$. Determinar*

$$u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^4(0,T;V)$$

tal que

$$\langle u'(t), v\rangle + (\nu_0 + \nu_1||u(t)||^2)a(u(t),v) + b(u(t),u(t),v) = \langle f(t), v\rangle \quad em\ \mathcal{D}'(0,T),\ \forall\ v \in V,$$

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Afirmação 1.47. *O Problema 1.45 é equivalente ao Problema 1.46.*

Demonstração. (Problema 1.45 $\Rightarrow$ Problema 1.46). Supondo inicialmente, $u \in (C^2(\overline{Q}))^n$ e $p \in C^1(\overline{Q})$. Multiplicando e integrando em Ω a equação do Problema 1.45 por $v \in V$, temos que

$$\int_\Omega u' \cdot u dx - \nu_0 \int_\Omega \Delta u \cdot v dx + \nu_1 \int_\Omega -||u(t)||^2 \Delta u \cdot v dx + \int_\Omega \sum_{j=1}^n u_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) v(x) dx + \int_\Omega \nabla p \cdot v dx = \int_\Omega f \cdot v dx.$$

Agora, usando a identidade de Green, obtemos que

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v dS + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

Lembrando que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

com $u = (u_1.u_2, ..., u_n)$ e $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, obtemos,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = a(u(t), v).$$

Tem-se também que

$$\nu_1 \int_\Omega -||u(t)||^2 \Delta u(t) \cdot v dx = \nu_1 \int_\Omega \mathcal{A}(u(t)) v dx = \langle \mathcal{A}(u(t)), v \rangle$$

e

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) v dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) v_i dx = b(u(t), u(t), v(t)).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(p, \operatorname{div} v) &= \int_\Omega p \cdot (\operatorname{div} v) dx = \int_\Omega p \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dx = \sum_{j=1}^n \int_\Omega p \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dx \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_{\partial\Omega} p v_j n_j dS - \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_j} v_j dx \right) \\
&= -\int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial x_j} v_j dx = \int_\Omega (-\nabla p) \cdot v dx = (-\nabla p, v).
\end{aligned}$$

Como $v \in V$ temos que $\operatorname{div} v = 0$, e segue que $(p, \operatorname{div} v) = (-\nabla p, v) = 0$. Portanto,

$$\langle u', v \rangle + \nu_0 a(u(t), v) + \langle \mathcal{A}(u(t)), v \rangle + b(u(t), u(t), v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall\ v \in V \quad (1.12)$$

e $u(x, 0) = u_0$.

(Problema 1.46 $\Rightarrow$ Problema 1.45). Usando o seguinte resultado de J. L. Lions [16], Remarque 6.6

Teorema 1.48 (De Rham)**.** *Se $f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in (\mathcal{D}'(Q))^n$ é tal que $\langle f, \varphi\rangle = 0$ em $\mathcal{D}'(0,T)$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}$, então existe $p \in \mathcal{D}'(Q)$ tal que $f = \nabla p$.*

Para $v \in V$ resulta que

$$\langle u', v\rangle + \nu_0 a(u(t), v) + \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle + b(u(t), u(t), v) - \langle f, v\rangle = 0.$$

Seja L definida por

$$\langle L, \varphi\rangle = \langle u', \varphi\rangle + \nu_0 a(u(t), \varphi) + \langle \mathcal{A}u(t), \varphi\rangle + b(u(t), u(t), \varphi) - \langle f, \varphi\rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{V}$, assim $L \in \mathcal{D}'(Q)$ e $\langle L, \varphi\rangle = 0$ em $\mathcal{D}'(0,T)$ para todo $\varphi \in \mathcal{V}$. Logo, pelo Teorema de Rham, existe $p \in \mathcal{D}'(Q)$ tal que $L = -\nabla p$.

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 ||u(t)||^2)\Delta u + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \nabla p = f, \quad \text{em } \mathcal{D}'(Q)$$

e $u(x,0) = u_0$. □

Podemos definir a solução fraca para o problema (4)-(7) como:

Definição 1.49. *Considere $f \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$ e $u_0 \in H$. Uma função $u \in L^4(0,T;V)$ é denominada solução fraca do problema (4)-(7) quando satisfaz*

$$\langle u'(t), v\rangle + (\nu_0 + \nu_1 ||u(t)||^2) a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = \langle f(t), v\rangle \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall\, v \in V.$$

e $u(x,0) = u_0$

Novamente, por argumentos análogo, podemos definir a solução fraca para o problema (11)-(14), uma vez que

$$\begin{aligned}
\langle -M(a(u))\Delta u, v\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle -M(a(u))\Delta u_i, v_i\rangle \\
&= -M(a(u)) \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}(x), v_i \right\rangle \\
&= -M(a(u)) \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}(x) v_i dx \\
&= M(a(u)) \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) dx \\
&= M(a(u)) a(u, v) \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Definição 1.50. *Considere $f \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$. Então a função $u \in L^4(0,T;V)$ é chamada solução fraca do problema (11)-(14) quando satisfaz*

$$\langle u'(t), v\rangle + M(a(u(t))) a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = \langle f(t), v\rangle \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall\, v \in V$$

e

$$u(x,0) = u_0.$$

1.8 Operador monótono e hemicontínuo

Nesta seção apresentaremos os dois operadores estudados neste trabalho e os seus respectivos resultados para monotonicidade e hemicontinuidade. Primeiramente, vamos enunciar dois resultados auxiliares de convexidade que serão utilizados nesta seção.

Proposição 1.51. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se f' é crescente, então f é convexa.*

Demonstração. Seja $x_1 < x_2$ e $\lambda, \mu > 0$ com $\lambda + \mu = 1$. Tomando

$$\begin{aligned} L &= \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) - f(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ &= \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) - (\lambda + \mu) f(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ &= \lambda[f(x_1) - f(\lambda x_1 + \mu x_2)] + \mu[f(x_2) - f(\lambda x_1 + \mu x_2). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Pelo Teorema do Valor Médio existem y_1 e y_2 com

$$x_1 < y_1 < \lambda x_1 + \mu x_2 < y_2 < x_2$$

tais que

$$f'(y_1) = \frac{f(\lambda x_1 + \mu x_2) - f(x_1)}{\lambda x_1 + \mu x_2 - x_1} = \frac{f(\lambda x_1 + \mu x_2) - f(x_1)}{\mu(x_2 - x_1)}$$

e

$$f'(y_2) = \frac{f(x_2) - f(\lambda x_1 + \mu x_2)}{x_2 - \lambda x_2 - \mu x_1} = \frac{f(x_2) - f(\lambda x_1 + \mu x_2)}{\lambda(x_2 - x_1)}.$$

Daí,

$$f(x_1) - f(\lambda x_1 + \mu x_2) = -\mu(x_2 - x_1) f'(y_1) \tag{1.15}$$

e

$$f(x_2) - f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda(x_2 - x_1) f'(y_2). \tag{1.16}$$

Substituindo (1.15) e (1.16) em (1.14) temos

$$\begin{aligned} L &= \lambda[-\mu(x_2 - x_1) f'(y_1)] + \mu[\lambda(x_2 - x_1) f'(y_2)] \\ &= \lambda\mu(x_2 - x_1)[f'(y_2) - f'(y_1)]. \end{aligned}$$

Como f' é crescente, segue $L \geq 0$, isto é,

$$\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) - f(\lambda x_1 + \mu x_2) \geq 0$$

$$\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

Portanto, f é convexa. □

Proposição 1.52. *Sejam $f(x) = x^p$, com $x \geq 0$ e $p \geq 2$, e $g(u) = ||u||$, então $f \circ g$ é convexa.*

Demonstração. Derivando f temos

$$f'(x) = px^{p-1} \geq 0, \quad \forall\ x \geq 0.$$

Logo, f é crescente. Derivando f novamente obtemos

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \geq 0, \quad \forall\ x \geq 0.$$

Logo, f' é crescente e pela Proposição 1.51, segue que f é convexa. Dados u, v segue, pela desigualdade triangular, que

$$||(1-\lambda)u + \lambda v|| \leq ||(1-\lambda)u|| + ||\lambda v|| = (1-\lambda)||u|| + \lambda||v||, \quad \forall\ \lambda \in [0,1].$$

Logo, g é convexa. Daí,

$$\begin{aligned}(f \circ g)((1-\lambda)u + \lambda v) &= f(||(1-\lambda)u + \lambda v||) \\ &\leq f((1-\lambda)||u|| + \lambda||v||) \\ &= ((1-\lambda)||u|| + \lambda||v||)^p \\ &\leq (1-\lambda)||u||^p + \lambda||v||^p \\ &= (1-\lambda)(f \circ g)(u) + \lambda(f \circ g)(v)\end{aligned}$$

Portanto, $f \circ g$ é convexa. □

Definição 1.53. *Seja $\mathcal{A} : V \to V'$ um operador tal que, para todos $u, v, w \in V$, a aplicação*

$$\lambda \to \langle \mathcal{A}(u + \lambda v), w\rangle$$

é continua de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então $\mathcal{A}$ é dito hemicontínuo.

Proposição 1.54. *Se um operador $\mathcal{A} : V \to V'$ é contínuo, então é hemicontínuo.*

Demonstração. Seja $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e (λ_n) uma sequência de números reais tais que

$$\lambda_n \to \lambda_0, \quad n \to \infty.$$

Logo, para todo $x, y, z \in V$, temos que

$$x + \lambda_n y \to x + \lambda_0 y.$$

Como $\mathcal{A}$ é contínuo obtemos

$$\begin{aligned}|\langle \mathcal{A}(x + \lambda_n y), z\rangle - \langle \mathcal{A}(x + \lambda_0 y), z\rangle| &= |\langle \mathcal{A}(x + \lambda_n y) - \mathcal{A}(x + \lambda_0 y), z\rangle| \\ &\leq c||\mathcal{A}(x + \lambda_n y) - \mathcal{A}(x + \lambda_0 y)||_{V'}||z||_V.\end{aligned}$$

Portanto, a aplicação $\lambda \to \langle \mathcal{A}(u + \lambda v), w\rangle$ é hemicontínua. □

Definição 1.55. *Seja $\mathcal{A} : V \to V'$ um operador tal que, para todos $u, v \in V$, tem-se*

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle \geq 0.$$

Então $\mathcal{A}$ é dito monótono.

Definição 1.56. *Dizemos que um funcional $J : V \to \mathbb{R}$ é Gateaux-diferenciável em $u \in V$ se*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = J'(u).v, \quad \forall\ v \in V.$$

Teorema 1.57. *Se $v \to J(v)$ é Gateaux-diferenciável sobre V e convexo, a aplicação $u \to J'(u)$ de $V \to V'$ é monótona.*

Demonstração. Por convexidade temos, para todo $\lambda \in (0, 1)$ que

$$J((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)J(u) + \lambda J(v)$$

que implica

$$J(u - \lambda u + \lambda v) \leq J(u) - \lambda J(u) + \lambda J(v).$$

Logo

$$\frac{1}{\lambda}\left[J(u + \lambda(v - u)) - J(u)\right] \leq J(v) - J(u).$$

Aplicando o limite quando $\lambda \to 0$ na desigualdade acima obtemos

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}\left[J(u + \lambda(v - u)) - J(u)\right] \leq \lim_{\lambda \to 0}[J(v) - J(u)],$$

o que implica

$$J'(u)(v - u) \leq J(v) - J(u),$$

ou seja,

$$J'(u)(u - v) \geq J(u) - J(v). \tag{1.17}$$

Usando novamente a convexidade do funcional J, mas desta vez trocando u e v de lugares temos

$$\frac{1}{\lambda}\left[J(v + \lambda(u - v)) - J(v)\right] \leq J(u) - J(v),$$

o limite quando $\lambda \to 0$ na desigualdade nos dá

$$J'(v)(u - v) \leq J(u) - J(v). \tag{1.18}$$

De (1.17) e (1.18) temos que

$$J'(u)(u - v) \geq J(u) - J(v) \geq J'(v)(u - v)$$

que implica

$$J'(u)(u - v) \geq J'(v)(u - v).$$

Logo,

$$J'(u)(u - v) - J'(v)(u - v) \geq 0,$$

ou seja,

$$(J'(u) - J'(v))(u - v) \geq 0.$$

O que conclui a demonstração de que a aplicação $u \to J'(u)$ é monótona. □

Seja $a(u,v)$ a forma bilinear dada na Definição 1.37. Vamos representar por $a(u)$ a forma quadrática $a(u,u) = ||u||^2$.

Seja $M(\lambda),\ \lambda > 0$ uma função contínua e derivável, com

$$M(\lambda) \geq m_0 > 0,\ \frac{d}{d\lambda}M(\lambda) \geq 0 \text{ e } M(\lambda) \leq \alpha\lambda + \beta. \tag{1.19}$$

A aplicação $-M(a(u))\Delta u$ definida de V em V' aplica conjuntos limitados de V em conjuntos limitados de V'. De fato, definindo $-M(a(u))\Delta u = M(a(u))\Lambda u$, com $-\Delta = \Lambda$, temos

$$||M(a(u))\Lambda u|| = \sup_{\substack{||v||=1 \\ v\in V}} |\langle M(a(u))\Lambda u, v\rangle| = \sup_{\substack{||v||=1 \\ v\in V}} M(a(u))|a(u,v)| \leq M(a(u))||u||. \tag{1.20}$$

Lema 1.58. *A aplicação $u \to M(a(u))\Lambda u$ de V em V' é monótona. (Com $\Lambda = -\Delta$).*

Demonstração. A função

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\lambda M(s)ds$$

é crescente, pois $\varphi'(\lambda) = M(\lambda) > 0$, e também é convexa pois $\varphi''(\lambda) = M'(\lambda) \geq 0$.

Temos que

$$\phi(v) = \varphi(a(v)) = \int_0^{a(v)} M(s)ds,$$

é convexa. De fato, dado $0 < \theta < 1$, temos

$$\begin{aligned} \phi(\theta u + (1-\theta)v) &= \varphi(a(\theta u + (1-\theta)v)) \\ &\leq \varphi(\theta a(u) + (1-\theta)a(v)) \\ &\leq \theta\varphi(a(u)) + (1-\theta)\varphi(a(v)) \\ &= \theta\phi(u) + (1-\theta)\phi(v). \end{aligned}$$

pois φ é crescente e convexa. Portanto, ϕ é convexa e também Gateaux-diferenciável. De fato,

$$\begin{aligned} \langle \phi'(u), v\rangle &= \frac{d}{d\lambda}\phi(u+\lambda v)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\varphi(a(u+\lambda v))\Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda}\int_0^{a(u+\lambda v)} M(s)ds\Big|_{\lambda=0} \\ &= M(a(u+\lambda v))\frac{d}{d\lambda}a(u+\lambda v)\Big|_{\lambda=0} \\ &= 2M(a(u))a(u,v) \\ &= \langle 2M(a(u))\Lambda u, v\rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi'(u) = 2M(a(u))\Lambda u.$$

Pelo Teorema 1.57 segue que $M(a(u))\Lambda u$ é monótono. □

Lema 1.59. *A aplicação $u \to M(a(u))\Lambda u$ de V em V' é hemicontínua.*

Demonstração. Seja $v \in V$ e

$$u_n \to u, \quad \text{em} \quad V.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\langle M(a(u_n))\Lambda u_n - M(a(u))\Lambda u, v\rangle &= M(a(u_n))a(u_n,v) - M(a(u))a(u,v)\\ &= M(a(u_n))a(u_n,v) - M(a(u))a(u,v)\\ &+ M(a(u))a(u_n,v) - M(a(u))a(u_n,v)\\ &= [M(a(u_n)) - M(a(u))]a(u_n,v)\\ &+ M(a(u))[a(u_n,v) - a(u,v)].\end{aligned}$$

Logo, usando (1.6) e o fato de M ser contínua, temos

$$\begin{aligned}|\langle M(a(u_n))\Lambda u_n - M(a(u))\Lambda u, v\rangle| &\leq |M(a(u_n)) - M(a(u))||a(u_n,v)|\\ &+ |M(a(u))||a(u_n,v) - a(u,v)|\\ &\leq c_1|M(a(u_n)) - M(a(u))|||u_n||v||\\ &+ |M(a(u))||a(u_n - u, v)|\\ &\leq c_1|M(a(u_n)) - M(a(u))|||u_n||v||\\ &+ |M(a(u))|||u_n - u||||v||. \qquad (1.21)\end{aligned}$$

Temos $u_n \to u$ em V, ou seja, $\lim_{n\to\infty} ||u_n - u|| = 0$ e existe c_3 tal que $||u_n|| \leq c_3$, $\forall\ n$.

Notemos que $a(u) = ||u||^2$ e usando a desigualdade $|\,|||u_n|| - ||u|||\leq ||u_n - u||$, concluímos que $\lim_{n\to\infty} ||u_n|| = ||u||$. Como $f(x) = x^2$ é contínua, temos que

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n||^2 = ||u||^2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a(u_n) = a(u).$$

Como M é contínua temos que

$$\lim_{n\to\infty} M(a(u_n)) = M(a(u)).$$

De (1.21) e das convergências anteriores obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \langle M(a(u_n))\Lambda u_n - M(a(u))\Lambda u, v\rangle = 0, \quad \forall\ v \in V.$$

ou seja,

$$M(a(u_n))\Lambda u_n \to M(a(u))\Lambda u, \quad \text{em} \quad V'.$$

Portanto, a aplicação

$$u \mapsto M(a(u))\Lambda u, \quad \text{de} \quad V \quad \text{em} \quad V'$$

é contínua. A hemicontinuidade segue da Proposição 1.54. □

Para o caso particular quando $M(a(u)) = \nu_1||u||^2$ temos, usando integração por partes e o fato de $u = 0$ na fronteira de Ω, que

$$\begin{aligned}
\nu_1||u||^2 a(u,v) &= \nu_1||u||^2 \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)dx \\
&= \nu_1||u||^2 \left\langle \sum_{i,j=1}^{n} -\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}(x), v_i \right\rangle \\
&= \nu_1||u||^2 \langle -\Delta u, v\rangle \\
&= \langle -\nu_1||u||^2\Delta u, v\rangle \\
&= \langle \mathcal{A}u, v\rangle \quad \forall v \in V
\end{aligned} \tag{1.22}$$

onde $\mathcal{A}u = -\nu_1||u||^2\Delta u$.

A aplicação $\mathcal{A}u$ definida de V em V' leva conjuntos limitados de V em conjuntos limitados de V'. De fato,

$$\begin{aligned}
||\mathcal{A}u||_{V'} &= \sup_{\substack{||v||=1 \\ v\in V}} |\langle \mathcal{A}u, v\rangle| = \sup_{\substack{||v||=1 \\ v\in V}} |\nu_1||u||^2 |a(u,v)| \\
&= \sup_{\substack{||v||=1 \\ v\in V}} |\nu_1||u||^2 \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)dx \right| \\
&\leq \sup_{\substack{||v||=1 \\ v\in V}} |\nu_1||u||^2 \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right| dx \\
&\leq \sup_{\substack{||v||=1 \\ v\in V}} |\nu_1||u||^2 ||u||||v|| \\
&\leq \nu_1||u||^3.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Sabemos que $a(u,u) = ||u||^2$, daí

$$\langle \mathcal{A}u, u\rangle = \nu_1||u||^2 a(u,u) = \nu_1||u||^4. \tag{1.24}$$

Lema 1.60. *Seja o funcional $J : V \to \mathbb{R}$ definido por*

$$Ju = \frac{\nu_1}{4}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx \right)^2, \quad \forall\ u \in V.$$

Então a derivada $J'v$ é monótona e dada por

$$\langle J'u, v\rangle = \langle \mathcal{A}u, v\rangle \quad \forall\ u, v, \in V$$

onde $\mathcal{A}u = -\nu_1||u||^2\Delta u$.

Demonstração. Para utilizar o Teorema 1.57 devemos mostrar que J é Gateaux-diferenciável e convexo. Primeiro mostraremos que J é de Gateaux-diferenciável. Temos que

$$\frac{J(u+\lambda v)-J(u)}{\lambda} =$$

$$= \frac{\nu_1}{4\lambda}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i+\lambda v_i)\right)^2 dx\right)^2 - \frac{\nu_1}{4\lambda}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx\right)^2$$

$$= \frac{\nu_1}{4\lambda}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\lambda\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^2 - \frac{\nu_1}{4\lambda}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx\right)^2$$

definimos

$$\theta(\lambda) = \left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega (a+\lambda b)^2\, dx\right)^2,$$

onde $a = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)$ e $b = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)$.

Como

$$\theta(0) = \left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a^2 dx\right)^2,$$

temos

$$\frac{J(u+\lambda v)-J(u)}{\lambda} = \frac{\nu}{4}\frac{\theta(\lambda)-\theta(0)}{\lambda}.$$

Derivando θ obtemos

$$\begin{aligned}
\theta'(\lambda) &= 2\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega (a+\lambda b)^2\, dx\right)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega (a+\lambda b)^2\, dx\right)\\
&= 2\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega (a+\lambda b)^2\, dx\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial\lambda}(a+\lambda b)^2\, dx\right)\\
&= 2\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega (a+\lambda b)^2\, dx\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n} 2\int_\Omega (a+\lambda b)\, b dx\right).
\end{aligned}$$

Logo, para $\lambda = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\theta'(0) &= 4\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a^2 dx \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a.b dx\\
&= 4\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) dx\\
&= 4||u||^2\langle -\Delta u, v\rangle\\
&= 4\langle -||u||^2\Delta u, v\rangle.
\end{aligned}$$

Usando a definição de derivada no ponto, temos que

$$\frac{\nu}{4}\theta'(0) = \frac{\nu}{4}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\theta(\lambda)-\theta(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u+\lambda v)-J(u)}{\lambda} = \langle J'u, v\rangle.$$

Como este limite existe, concluímos que J é Gateaux-diferenciável e

$$\begin{aligned}\langle J'u, v\rangle &= \frac{\nu}{4}\theta'(0) = \frac{\nu}{4}4\langle -||u||^2\Delta u, v\rangle \\ &= \nu\langle -||u||^2\Delta u, v\rangle \\ &= \langle \mathcal{A}u, v\rangle.\end{aligned}$$

Falta agora mostrarmos que J é convexo. Temos, pela Proposição 1.52, que

$$\tilde{J}u = \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx$$

é convexo. Como $Ju = \frac{\nu}{4}(\tilde{J}u)^2$ segue, usando a convexidade de $\tilde{J}$ e da função quadrática, que

$$\begin{aligned}J((1-\lambda)u + \lambda v) &= \frac{\nu}{4}[\tilde{J}((1-\lambda)u + \lambda v)]^2 \\ &\leq \frac{\nu}{4}[(1-\lambda)\tilde{J}u + \lambda\tilde{J}v]^2 \\ &\leq \frac{\nu}{4}[(1-\lambda)(\tilde{J}u)^2 + \lambda(\tilde{J}v)^2] \\ &= \frac{\nu}{4}[(1-\lambda)Ju + \lambda Jv\end{aligned}$$

Logo J é convexo. Pelo Teorema 1.57 temos que o operador $J' = \mathcal{A}$ é monótono. □

Lema 1.61. *O operador $\mathcal{A} : V \to V'$ definido por*

$$\mathcal{A}u = -\nu||u|^2\Delta u$$

é hemicontínuo.

Demonstração. Queremos mostrar que a aplicação

$$\lambda \to \langle \mathcal{A}(u + \lambda v), w\rangle$$

é contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Seja $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e (λ_n) uma sequência de números reais tais que,

$$\lambda_n \to \lambda_0, \quad n \to \infty.$$

Temos que

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{A}(u + \lambda_n v), w\rangle = \\ &= \langle -\nu||(u + \lambda_n v)|^2\Delta(u + \lambda_n v), w\rangle \\ &= -\nu_1\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx\right)\end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^1(\Omega)$$

e

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \in L^1(\Omega)$$

uma vez que

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \quad \forall\ u, v, w \in V.$$

Portanto,

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 \to \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega$$

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \to \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega$$

Além disso, usando a Proposição 1.15, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 &\leq \left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| + |\lambda_n| \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|\right)^2 \\
&\leq \left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| + c_1 \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|\right)^2 \\
&\leq 4\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 + c_2 \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2\right)
\end{aligned}$$

q.t.p. em Ω. E

$$\left|\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \leq \left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| + c_3 \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|\right) \left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|$$

q.t.p. em Ω.

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.20, temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx \to \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx \to \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx.$$

Usando as convergências anteriores, concluímos que,

$$\langle \mathcal{A}(u + \lambda_n v), w\rangle \to \langle \mathcal{A}(u + \lambda_0 v), w\rangle.$$

Portanto, $\mathcal{A}u = -\nu_1 ||u||^2 \Delta u$ é hemicontínuo. □

Capítulo 2

Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável na Forma Estacionárias

Neste capítulo apresentaremos um teorema para existência e um teorema para unicidade de solução para o problema de equações

$$-(\nu_0 + \nu_1||u||^2)\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \nabla p = f \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.2}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \tag{2.3}$$

Este problema foi investigado por J. L. Lions [16] e R. Temam [26]. Uma outra referência é a dissertação de M. M. Arnoud [2].

2.1 Existência

Teorema 2.1 (Solução fraca)**.** *Suponhamos $n \leq 4$. Se $f \in V'$, então existe uma solução fraca, $u \in V$, do problema (2.1)-(2.3) no sentido da Definição 1.44.*

Demonstração. : Seja (w_ν) uma base Hilbertiana de V, como definida em (1.10) e solução do seguinte problema espectral

$$((u, v)) = \lambda(u, v), \ \forall \ v \in V.$$

Sejam (w_ν) os auto-valores do problema anterior e V_m o subespaço gerado pelos m primeiros vetores dessa base.

Vamos considerar o problema aproximado

$$\nu_0 a(u_m, v) + \langle \mathcal{A}u_m, v\rangle + b(u_m, u_m, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V_m. \tag{2.4}$$

Devemos mostrar que o problema acima possui uma solução $u_m \in V_m$.

Seja $\xi = (\xi_i), 1 \leq i \leq m$ tal que os ξ_i são as coordenadas do vetor u_m de V_m. Logo, escrevendo u_m como combinação linear dos vetores da base temos

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i. \tag{2.5}$$

Vamos definir o vetor $\eta = (\eta_i), 1 \leq i \leq m$ dado por

$$\eta_i = \nu_0 a(u_m, w_i) + \langle \mathcal{A}u_m, w_i \rangle + b(u_m, u_m, w_i) - \langle f, w_i \rangle. \tag{2.6}$$

A aplicação $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definida por $P(\xi) = \eta$ é contínua. De fato, substituindo (2.5) e (1.22) em (2.6) e utilizando o Teorema de Pitágoras obtemos

$$\begin{aligned}
\eta_i &= \nu_0 a\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j, w_i\right) + \left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j\right), w_i \right\rangle \\
&+ b\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j, \sum_{k=1}^{m} \xi_k w_k, w_i\right) - \langle f, w_i \rangle \\
&= \nu_0 \sum_{j=1}^{m} \xi_j a\left(w_j, w_i\right) + \nu_1 \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j \right\|^2 \sum_{j=1}^{m} \xi_j a(u_j, w_i) \\
&+ \sum_{k,j=1}^{m} \xi_j \xi_k b\left(w_j, w_k, w_i\right) - \langle f, w_i \rangle \\
&= \nu_0 \sum_{j=1}^{m} \xi_j a\left(w_j, w_i\right) + \nu_1 \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 ||w_j||^2 \sum_{j=1}^{m} \xi_j a(u_j, w_i) \\
&+ \sum_{k,j=1}^{m} \xi_j \xi_k b\left(w_j, w_k, w_i\right) - \langle f, w_i \rangle.
\end{aligned}$$

Da última igualdade podemos concluir que η_i é um polinômio na variável ξ. Como todo polinômio é contínuo e η_i é a i-ésima função coordenada de η, temos que η é contínua. Fazendo o produto interno entre η e ξ obtemos

$$\begin{aligned}
(P(\xi), \xi) &= \sum_{i=1}^{m} \xi_i \eta_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \xi_i \left[\nu_0 a(u_m, w_i) + \langle \mathcal{A}u_m, w_i \rangle + b(u_m, u_m, w_i) - \langle f, w_i \rangle\right] \\
&= \nu_0 a(u_m, u_m) + \langle \mathcal{A}u_m, u_m \rangle + b(u_m, u_m, u_m) - \langle f, u_m \rangle
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Lembrando, de (1.41) e (1.24), que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}u_m, u_m \rangle &= \nu_1 ||u_m||^2 a(u_m, u_m) \\
&= \nu_1 ||u_m||^4,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$b(u_m, u_m, u_m) = 0 \tag{2.9}$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} \langle f, u_m \rangle &= \left\langle f, \frac{u_m}{||u_m||} \right\rangle ||u_m|| \leq \left| \left\langle f, \frac{u_m}{||u_m||} \right\rangle \right| ||u_m|| \\ &\leq \left(\sup_{\substack{||v||=1 \\ v \in V_m}} |\langle f, v \rangle| \right) ||u_m|| = ||f||_{V'} ||u_m||. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Concluímos que

$$(P(\xi), \xi) \geq \nu_0 ||u_m||^2 + \nu_1 ||u_m||^4 - ||f||_{V'} ||u_m||_V.$$

Como f é um funcional contínuo temos $||f||_{V'} \leq c$, segue que

$$(P(\xi), \xi) \geq \nu_0 ||u_m||^2 + \nu_1 ||u_m||^4 - c||u_m|| \geq \nu_0 ||u_m||^2 - c||u_m||.$$

Queremos utilizar o Lema do Ângulo Agudo, Lema 1.19, para mostrar que existe uma solução para (2.6). Para isso devemos ter $\nu_0 ||u_m||^2 - c||u_m|| \geq 0$. Pelo Lema da Combinação Linear, Lema 1.17, temos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$C_1 ||\xi|| \leq ||u_m||$$

e tomando $||\xi|| = \dfrac{c}{C_1 \nu_0}$ na desigualdade acima temos

$$\frac{c}{\nu_0} \leq C_1 ||\xi|| \leq ||u_m||$$

o que implica

$$\frac{c}{\nu_0} ||u_m|| \leq ||u_m||^2.$$

Logo,

$$\nu_0 ||u_m||^2 - c||u_m|| \geq 0.$$

Assim, escolhendo $\rho = \dfrac{c}{C_1 \nu_0}$, temos $(P(\xi), \xi) \geq 0$. Pelo Lema do Ângulo Agudo, Lema 1.19, existe $\xi \in \mathbb{R}^m, ||\xi|| \leq \rho$ tal que $P(\xi) = 0$. Isso implica que o sistema (2.6) tem uma solução $u_m \in V_m$ correspondente a este ξ.

Tomando $v = u_m$ em (2.4), temos

$$\nu_0 a(u_m, u_m) + \langle \mathcal{A} u_m, u_m \rangle + b(u_m, u_m, u_m) = \langle f, u_m \rangle.$$

De (2.8) e (2.10) obtemos

$$\begin{aligned} \nu_0 ||u_m||^2 + \nu_1 ||u_m||^4 &\leq ||f||_{V'} ||u_m|| \\ \nu_0 ||u_m|| + \nu_1 ||u_m||^3 &\leq ||f||_{V'} \\ \nu_0 ||u_m|| &\leq ||f||_{V'}. \end{aligned}$$

Logo

$$||u_m|| \leq \frac{1}{\nu_0}||f||_{V'}, \quad \forall\ m \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

isto é, (u_m) é limitada em V. Então podemos extrair uma subsequência, que continuaremos denotando de u_m, tal que

$$u_m \to u \quad \text{fracamente em} \quad V. \tag{2.12}$$

Usando (1.23), isto e, $||\mathcal{A}u_m||_{V'} \leq \nu_1||u_m||^3$, juntamento com (2.11), podemos concluir que $\mathcal{A}u_m$ é limitado, logo podemos extrair uma subsequência, que continuaremos denotando por $\mathcal{A}u_m$ tal que

$$\mathcal{A}u_m \to \chi \quad \text{fracamente em} \quad V'. \tag{2.13}$$

Pelo Teorema 1.28, sabemos que $H_0^1(\Omega)$ tem imersão compacta em $L^2(\Omega)$, segue-se deste fato que podemos extrair uma subsequência de (u_{mi}) denotada por u_{mi}, (onde u_{mi} denota a $i-$ésima entrada da sequência u_m, tal que

$$u_{mi} \to u_i \quad \text{forte em} \quad L^2(\Omega),$$

pelo Teorema 1.22 temos

$$u_{mi} \to u_i \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega.$$

Isso implica que

$$u_{mi}u_{mj} \to u_iu_j \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega. \tag{2.14}$$

Para $n \leq 4$, do Teorema 1.28, temos

$$u_{mi} \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega). \tag{2.15}$$

Portanto

$$|u_{mi}u_{mj}|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u_{mi}(x)u_{mj}(x)|^2dx = \int_\Omega |u_{mi}(x)|^2|u_{mj}(x)|^2dx.$$

Pela desigualdade de Young, Proposição 1.13, e de (2.15) segue que

$$\begin{aligned} |u_{mi}u_{mj}|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_{mi}(x)|^4dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_{mj}(x)|^4dx \\ &= \frac{1}{2}|u_{mi}(x)|^4_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}|u_{mj}(x)|^4_{L^4(\Omega)} \leq C_3. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Decorre de (2.14), (2.16) e do Lema 1.24 que

$$u_{mi}u_{mj} \to u_iu_j \quad \text{fracamente em} \quad L^2(\Omega). \tag{2.17}$$

Como

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_k} \in L^2(\Omega), \quad \text{pois} \quad w_j \in H_0^1(\Omega), \tag{2.18}$$

segue de (2.17) e (2.18) que

$$b(u_m, u_m, w_j) = -b(u_m, w_j, u_m),$$

$$-\sum_{k,j=1}^{n} \int_\Omega u_{mk} \frac{\partial w_j}{\partial x_k}(x) u_{mj}(x) dx \to -\sum_{kj=1}^{n} \int_\Omega u_k \frac{\partial w_j}{\partial x_k}(x) u_j(x) dx,$$

$$b(u_m, u_m, w_j) \to b(u, u, w_j). \tag{2.19}$$

Usando as convergências (2.12), (2.13) e (2.19), temos que

$$\nu_0 a(u, v) + \langle \chi, v \rangle + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall\ v \in V_m. \tag{2.20}$$

Usando a densidade de V_m em V, segue que

$$\nu_0 a(u, v) + \langle \chi, v \rangle + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall\ v \in V. \tag{2.21}$$

O próximo passo é mostrar que $\chi = \mathcal{A}u$. Para isso utilizaremos a monotonicidade do operador A. Pelo Lema 1.60, temos que

$$\langle \mathcal{A}u_m - \mathcal{A}v, u_m - v \rangle \geq 0, \forall\ v \in V,$$

ou seja,

$$\langle \mathcal{A}u_m, u_m \rangle - \langle \mathcal{A}u_m, v \rangle - \langle \mathcal{A}v, u_m - v \rangle \ \geq \ 0. \tag{2.22}$$

Usando $v = u_m$ na equação aproximada (2.4) obtemos,

$$\langle \mathcal{A}u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle - \nu_0 ||u_m||^2. \tag{2.23}$$

De (2.22) e (2.23), obtemos que

$$\langle f, u_m \rangle - \nu_0 ||u_m||^2 - \langle \mathcal{A}u_m, v \rangle - \langle \mathcal{A}v, u_m - v \rangle \geq 0. \tag{2.24}$$

De (2.12) sabemos que u_m converge fracamente para u em V. Pela Proposição 1.26 temos que

$$-\nu_0 ||u||^2 \ \geq \ \limsup -\nu_0 ||u_m||^2. \tag{2.25}$$

Tomando o lim sup em ambos os lados da desigualdade (2.24) e usando (2.25), juntamente com as convergências anteriores obtidas, temos

$$\limsup \langle f, u_m \rangle + \limsup(-\nu_0 ||u_m||^2) + \limsup \langle -\mathcal{A}u_m, v \rangle + \limsup \langle -\mathcal{A}v, u_m - v \rangle \geq 0,$$

que nos dá

$$\langle f, u \rangle - \nu_0 ||u||^2 - \langle \chi, v \rangle - \langle \mathcal{A}v, u - v \rangle \geq 0. \tag{2.26}$$

pois, o lim sup coincide com o limite da sequência quando está converge.

Por outro lado, tomando $v = u$ na equação (2.21), obtemos,

$$||u||^2 + \langle \chi, u \rangle = \langle f, u \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \chi, u \rangle = \langle f, u \rangle - \nu_0 ||u||^2. \tag{2.27}$$

Substituindo (2.27) em (2.26), segue que

$$\langle \chi, u \rangle - \langle \chi, v \rangle - \langle \mathcal{A}v, u - v \rangle \geq 0,$$

ou seja,

$$\langle \chi - \mathcal{A}v, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in V.$$

Considere $v = u - \lambda w$, com $w \in V$ arbitrário. Substituindo v na desigualdade acima obtemos

$$\lambda \langle \chi - \mathcal{A}(u - \lambda w), w \rangle \geq 0, \quad \forall\, w \in V. \tag{2.28}$$

Se $\lambda > 0$ em (2.28), temos que

$$\langle \chi - \mathcal{A}(u - \lambda w), w \rangle \geq 0, \quad \forall\, w \in V. \tag{2.29}$$

Mas o operador $\mathcal{A}$ é hemicontínuo, pelo Lema 1.61, temos que

$$\langle \chi - \mathcal{A}(u - \lambda w), w \rangle \to \langle \chi - \mathcal{A}u, w \rangle \quad \forall\, w \in V, \quad \lambda \to 0.$$

Dessa convergência e de (2.29), obtemos

$$\langle \chi - \mathcal{A}u, w \rangle \geq 0, \quad \forall\, w \in V. \tag{2.30}$$

Agora, se $\lambda < 0$ em (2.28), temos que

$$\langle \chi - \mathcal{A}(u - \lambda w), w \rangle \leq 0, \quad \forall\, w \in V. \tag{2.31}$$

Novamente, usando a hemicontinuidade do operador $\mathcal{A}$, temos que

$$\langle \chi - \mathcal{A}(u - \lambda w), w \rangle \to \langle \chi - \mathcal{A}u, w \rangle \quad \forall w \in V, \quad \lambda \to 0.$$

Dessa convergência e (2.31), obtemos

$$\langle \chi - \mathcal{A}u, w \rangle \leq 0, \quad \forall\, w \in V. \tag{2.32}$$

Logo, de (2.30) e (2.32) temos

$$\langle \chi - \mathcal{A}u, w \rangle = 0, \quad \forall\, w \in V.$$

Assim,

$$\mathcal{A}u = \chi \quad \text{em} \quad V'. \tag{2.33}$$

De (2.33) e (2.21) concluímos a prova da existência da solução. □

2.2 Unicidade

Teorema 2.2. *Se $n \leq 4$ e ν_0 é suficientemente grande ou f suficientemente pequeno, então existe uma única solução u do problema (2.1)-(2.3).*

Demonstração. : Para $n \leq 4$ sabemos, da Proposição 1.41, que a forma trilinear $b(u, v, w)$ é contínua em $V \times V \times V$, ou seja,

$$|b(u, v, w)| \leq c||u||||v||||w||, \tag{2.34}$$

onde c é uma constante positiva.

Sejam u e $\tilde{u}$ duas soluções diferentes de (2.4). Então, de acordo com a Definição 2.21, as mesmas satisfazem

$$\nu_0 a(u, v) + \langle \mathcal{A}u, v\rangle + b(u, u, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in V \tag{2.35}$$

e

$$\nu_0 a(\tilde{u}, v) + \langle \mathcal{A}\tilde{u}, v\rangle + b(\tilde{u}, \tilde{u}, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in V. \tag{2.36}$$

Considerando $w = u - \tilde{u}$ e subtraindo (2.36) de (2.35) chegamos a

$$\nu_0 a(u, v) - \nu_0 a(\tilde{u}, v) + \langle \mathcal{A}u, v\rangle - \langle \mathcal{A}\tilde{u}, v\rangle + b(u, u, v) - b(\tilde{u}, \tilde{u}, v) = 0,$$

ou seja,

$$\nu_0 a(w, v) + \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}\tilde{u}, v\rangle + b(u, u, v) - b(\tilde{u}, \tilde{u}, v) = 0. \tag{2.37}$$

Observe que

$$\begin{aligned} b(u, u, v) - b(\tilde{u}, \tilde{u}, v) = & \\ & b(u, u, v) - b(\tilde{u}, u, v) + b(u, u, v) - b(u, \tilde{u}, v) - b(u, u, v) \\ & + b(u, \tilde{u}, v) + b(\tilde{u}, u, v) - b(\tilde{u}, \tilde{u}, v) \\ = \ & b(u - \tilde{u}, u, v) + b(u, u - \tilde{u}, v) - [b(u, u, v) - b(u, \tilde{u}, v) \\ & - b(\tilde{u}, u, v) + b(\tilde{u}, \tilde{u}, v)] \\ = \ & b(w, u, v) + b(u, w, v) - [b(u, u - \tilde{u}, v) + b(\tilde{u}, \tilde{u} - u, v)] \\ = \ & b(w, u, v) + b(u, w, v) - [b(u, w, v) + b(\tilde{u}, -w, v)] \\ = \ & b(w, u, v) + b(u, w, v) - [b(u - \tilde{u}, w, v)] \\ = \ & b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) \end{aligned}$$

Logo, substituindo a igualdade acima em (2.37) obtemos

$$\nu_0 a(w, v) + \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}\tilde{u}, v\rangle + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0.$$

Fazendo $v = w$ na igualdade acima e usando a Proposição 1.41, concluímos que, $b(u, w, w) = b(w, w, w) = 0$, e portanto,

$$\nu_0 ||w||^2 + \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}\tilde{u}, w\rangle + b(w, u, w) = 0. \tag{2.38}$$

Além disso, da monotonicidade do operador $\mathcal{A}$ temos que

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}\tilde{u}, u - \tilde{u}\rangle \geq 0.$$

Logo, de (2.38) segue

$$\nu_0||w||^2 + b(w, u, w) \leq 0.$$

De (2.34), segue que

$$\nu_0||w||^2 \leq -b(w, u, w) \leq |b(w, u, w)| \leq c||w||^2||u||,$$

ou seja,

$$\nu_0||w||^2 \leq c||w||^2||u||. \tag{2.39}$$

Fazendo $u = v$ em (2.35) obtemos

$$\nu_0 a(u, u) + \langle \mathcal{A}u, u\rangle + b(u, u, u) = \langle f, u\rangle,$$

o que implica, usando (1.24), (2.10) e a Proposição 1.41, que

$$\nu_0||u||^2 + \nu_1||u||^4 \leq ||f||_{V'}||u||$$

Logo,

$$\nu_0||u||^2 \leq ||f||_{V'}||u||,$$

ou seja,

$$||u|| \leq \frac{1}{\nu_0}||f||_{V'}. \tag{2.40}$$

Substituindo (2.40) em (2.39),

$$\nu_0||w||^2 \leq \frac{1}{\nu_0}||f||_{V'}||w||^2,$$

ou seja

$$(\nu_0^2 - ||f||_{V'})||w||^2 \leq 0.$$

Se $\nu_0^2 > ||f||_{V'}$, isto é, se ν_0 é suficientemente grande ou $||f||_{V'}$ suficientemente pequeno, obtemos que

$$||w||^2 \leq 0.$$

Desse modo,

$$||w||^2 \leq 0 \Rightarrow ||w|| = 0 \Rightarrow w = 0,$$

isto é,

$$u - \tilde{u} = 0$$

Portanto $u = \tilde{u}$. Logo, para $n \leq 4$ a solução do problema (2.1)-(2.3) é única. □

Obsevação 2.3. *Para $n > 4$, ainda não se conhece a existência e nem a unicidade para o problema (2.1)-(2.3), ver por exemplo [16] e [26].*

Capítulo 3

Equação de Navier-Stokes com viscosidade variável na Forma Não-Estacionária

Neste capítulo usaremos o método de Galerkin e argumentos de compacidade para garantir a existência, para $n \leq 4$, e unicidade, para $n \leq 3$, de solução do problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 ||u||^2)\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \nabla p = f \quad \text{em} \quad Q \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{em} \quad Q \tag{3.2}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad S \tag{3.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.4}$$

Este problema foi proposto por J. L. Lions [16], um estudo para este problema foi feito na dissertação de mestrado de R. M. S. Neto [22] e C. C. V. Pinheiro [23] fez um estudo para um problema semelhante envolvendo o operador p-laplaciano.

3.1 Existência

Teorema 3.1. *Suponhamos $n \leq 4$. Dadas as funções $f \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$ e $u_0 \in H$, existe uma solução fraca u do problema (3.1)-(3.4), tal que*

$$u \in L^{\infty}(0,T;H) \cap L^{4}(0,T;V).$$

Demonstração. : Vamos considerar (v_ν) uma base Hilbertiana de V e solução do seguinte problema espectral

$$((u,v)) = \lambda(u,v).$$

Sejam (v_ν) os auto-valores do problema anterior, V_m o espaço gerado por $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ e o problema aproximado: para cada $m \in \mathbb{N}$ queremos obter $u_m \in V_m$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i = u_m(t) \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \langle u'_m(t), v_j\rangle + \nu_0 a(u_m(t), v_j) + \langle \mathcal{A}u_m(t), v_j\rangle &+ b(u_m(t), u_m(t), v_j) \\ &= \langle f(t), v_j\rangle \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \quad \text{em} \quad V_m. \tag{3.7}$$

onde u_{0m} é escolhido tal que $\lim_{m\to\infty} u_{0m} = u_0$ em H e g_{jm} uma função de $[0, T]$ em $\mathbb{R}$.

Queremos mostrar, a priori, a existência de solução $u_m(t)$ em $[0, t_m)$. Temos que,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)v_i, v_j \right\rangle + \nu_0 a\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_j\right) + \left\langle \mathcal{A}\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_j \right\rangle + \left\langle B\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i\right), v_j \right\rangle = \langle f(t), v_j\rangle,$$

como,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)(v_i, v_j) = g'_{jm}(t)$$

e

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_j\right) &= a(u_m(t), v_j) = ((u_m(t), v_j)) = \lambda_j(u_m(t), v_j) \\ &= \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_j\right) = \lambda_j g_{jm}(t). \end{aligned}$$

O problema aproximado (3.6) se torna

$$g'_{jm}(t) + \nu_0\lambda_j g_{jm}(t) + \left\langle \mathcal{A}\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_j \right\rangle + \left\langle B\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i\right), v_j \right\rangle = \langle f(t), v_j\rangle.$$

Temos que $[(v_\nu)]$ é denso em V, como V é denso em H resulta que (v_ν) é denso em H. Logo, se $u_0 \in H$ existirá

$$\xi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm}v_j \in [(v_\nu)]$$

tal que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm}v_j \to u_0 \quad \text{fortemente em} \quad H, \tag{3.8}$$

queremos também que

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0)v_j \to u_0 \quad \text{fortemente em} \quad H. \tag{3.9}$$

Resulta de (3.8) e (3.9), que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} v_j = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0)v_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{jm} - g_{jm}(0))v_j = 0,$$

como os v_j são linearmente independentes temos que,

$$\alpha_{jm} = g_{jm}(0).$$

Resulta do problema aproximado (3.6) que o sistema de equações diferencias ordinárias é dado por,

$$\begin{cases} g'_{jm}(t) + \nu_0\lambda_j g_{jm}(t) + \langle \mathcal{A} \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_j\rangle + \langle B\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i\right), v_j\rangle = \langle f(t), v_j\rangle \\ i = 1, ..., m \\ g_{jm}(0) = \alpha_{jm} \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix} + \nu_0[\lambda_1 \ ... \ \lambda_m] \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle \mathcal{A} \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle \mathcal{A} \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_m\rangle \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \langle B(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i), v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle B\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i\right), v_m\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(t), v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f(t), v_m\rangle \end{bmatrix}$$

com $\begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1m} \\ \vdots \\ \alpha_{mm} \end{bmatrix}$

Definindo-se, $Z(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}$, $G(Z(t)) = \begin{bmatrix} \langle \mathcal{A} \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle \mathcal{A} \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_m\rangle \end{bmatrix}$,

$D = \begin{bmatrix} \langle Bv_1, v_1\rangle & +...+ & \langle Bv_m, v_1\rangle \\ & \vdots & \\ \langle Bv_1, v_m\rangle & +...+ & \langle Bv_m, v_m\rangle \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} \langle f(t), v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f(t), v_m\rangle \end{bmatrix}$,

tem-se

$$Z'(t) + \lambda Z(t) + G(Z(t)) + DZ(t) = F,$$

ou seja

$$Z'(t) + [D + \lambda]Z(t) + G(Z(t)) = F$$

assim

$$Z'(t) = F - [D + \lambda]Z(t) - G(Z(t))$$

Define-se a função auxiliar,

$$\begin{aligned} h : [0,T] \times R^{2m} &\to R^{2m} \\ (t, Z) &\mapsto h(t,Z) = F - [D + \lambda]Z(t) - G(Z(t)) \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Z' &=& h(t,Z) \\ Z(0) &=& Z_0 \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Mostra-se que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Caratheodory, Teorema 1.21. Portanto, o sistema (3.10) possui uma solução maximal local $u_m(t)$ no intervalo $[0, t_m]$ para algum $t_m \leq T$. Se mostrarmos que $||u_m(t)||_H$ é limitada independente de m e t, teremos então que $t_m = T$, para todo m, ou seja, $u_m(t)$ é solução global. Multiplicando (3.6) por $g_{jm}(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle u'_m(t), v_j\rangle g_{jm}(t) + \nu_0 a(u_m(t), v_j) g_{jm}(t) + \langle \mathcal{A}u_m(t), v_j\rangle g_{jm}(t) \\ + b(u_m(t), u_m(t), v_j) g_{jm}(t) = \langle f(t), v_j\rangle g_{jm}(t), \end{aligned} \tag{3.11}$$

para $1 \leq j \leq m$.

Somando a equação acima para $j = 1, 2, ..., n$, temos que

$$\begin{aligned} \langle u'_m(t), u_m(t)\rangle + \nu_0 a(u_m(t), u_m(t)) + \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t)\rangle \\ + b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = \langle f(t), u_m(t)\rangle. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De (1.24) e (1.41) obtemos que

$$\langle u'_m(t), u_m(t)\rangle + \nu_0 ||u_m(t)||^2 + \nu_1 ||u_m(t)||^4 = \langle f(t), u_m(t)\rangle. \tag{3.13}$$

De (2.10) e usando a Desigualdade de Young, Proposição 1.14, temos que

$$\begin{aligned} 2\langle f(t), u_m(t)\rangle &\leq 2||f(t)||_{V'} ||u_m(t)|| \\ &\leq 2\left(C_1 ||f(t)||^{\frac{4}{3}}_{V'} + \frac{\nu_1}{2} ||u_m(t)||^4 \right). \end{aligned}$$

Segue, de (3.13), que

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + 2\nu_0 ||u_m(t)||^2 + 2\nu_1 ||u_m(t)||^4 \leq C_2 ||f(t)||^{\frac{4}{3}}_{V'} + \nu_1 ||u_m(t)||^4,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + 2\nu_0 ||u_m(t)||^2 + \nu_1 ||u_m(t)||^4 \leq C_2 ||f(t)||^{\frac{4}{3}}_{V'}. \tag{3.14}$$

Integrando (3.14) em $[0, t]$ com $t \in (0, T)$ obtemos que

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|u_m(s)|^2 ds + C_3 \int_0^t ||u_m(s)||^2 ds + \nu_1 \int_0^t ||u_m(s)||^4 ds \leq C_2 \int_0^t ||f(s)||^{\frac{4}{3}}_{V'} ds.$$

Segue de (3.7) que $||u_{0m}||$ é limitada por uma constante independente de m e

$$\begin{aligned} |u_m(t)|^2 + C_3 \int_0^t ||u_m(s)||^2 ds + \nu_1 \int_0^t ||u_m(s)||^4 ds &\leq C_2 \int_0^t ||f(s)||^{\frac{4}{3}}_{V'} ds + |u_{0m}|^2 \\ &\leq \int_0^t ||f(s)||^{\frac{4}{3}}_{V'} ds + C_4. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Logo, u_m é limitada por uma constante que independe de t e m, logo $t_m = T$. Portanto, $u_m(t)$ é solução global do problema (3.6). Temos que u_m é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;H)$. Fazendo $t = T$ em (3.15) temos

$$|u_m(T)|^2 + C_3 \int_0^T ||u_m(s)||^2 ds + \nu_1 \int_0^T ||u_m(s)||^4 ds \leq \int_0^T ||f(s)||_{V'}^{\frac{4}{3}} ds + C_4. \quad (3.16)$$

De (3.15) e (3.16) concluímos que

$$u_m \quad \text{é limitada em} \quad L^4(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \quad (3.17)$$

isto é, u_m é limitada em V, De (1.23), temos que

$$\int_0^T ||\mathcal{A}u_m(s)||_{V'}^{\frac{4}{3}} ds \leq \int_0^T (\nu_1 ||u_m(s)||^3)^{\frac{4}{3}} ds = \int_0^T \nu_1^{\frac{4}{3}} ||u_m(s)||^4 ds.$$

Como u_m é uniformemente limitada em $L^4(0,T;V)$ segue que

$$\mathcal{A}u_m \quad \text{limitada em} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'). \quad (3.18)$$

Se $w \in V$, temos que $\frac{\partial w_j}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Como $n \leq 4$, pela Proposição 1.41 temos que

$$\begin{aligned} |b(u_m(t), u_m(t), w)| &= |b(u_m(t), w, u_m(t))| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left| u_{mi}(t) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} u_{mj}(t) \right| dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n ||u_{mi}(t)||_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} ||u_{mj}(t)||_{L^4(\Omega)} dx \\ &\leq C_5 ||u_m(t)||^2 ||w||. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por outro lado, temos que

$$\langle Bu_m(t), w \rangle_{V' \times V} = b(u_m(t), u_m(t), w).$$

Pelo Lema 1.42 resulta que

$$||Bu_m(t)||_{V'} \leq C_6 ||u_m(t)||^2,$$

segue que

$$\int_0^T ||Bu_m(t)||_{V'}^2 dt \leq C_6 \int_0^T ||u_m(t)||^4 dt.$$

Desde que u_m é limitada em $L^4(0,T;V)$ tem-se que

$$Bu_m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;V').$$

Como

$$|a(u_m(t), w)| \leq ||u_m(t)|| ||w||, \quad (3.20)$$

segue que $Au_m \in L^4(0,T;V')$, pois

$$\langle Au_m(t), w\rangle_{V'\times V} = a(u_m(t), w) \leq ||u_m(t)||||w||,$$

o que implica

$$\sup_{\substack{||w||=1\\ w\in V}} |Au_m(t), w\rangle| \leq ||u_m(t)||.$$

Logo

$$||Au_m(t)||_{V'} \leq ||u_m(t)||,$$

e portanto,

$$\int_0^T ||Au_m(t)||^4_{V'}dt \leq \int_0^T ||u_m(t)||^4 dt \leq C_7,$$

pois $u_m \in L^4(0,T;V)$. Como $L^4(0,T;V') \hookrightarrow L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$, segue que

$$Au_m \quad \text{é limitada em} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,T;V').$$

Podemos escrever (3.6) na forma

$$u'_m(t) + \nu_0 Au_m(t) + \mathcal{A}u_m(t) + Bu_m(t) = f \tag{3.21}$$

Seja P_m o operador projeção ortogonal de V sobre V_m. O operador adjunto da projeção, $P^* : V' \to V'$, é uniformemente limitado em $\mathcal{L}(V';V')$.

De (3.5) e pela Proposição 1.11 temos

$$\begin{aligned} P^*_m(u'_m(t)) &= \sum_{k=1}^m (u'_m(t), v_k)v_k \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m g'_{im}(t)(v_i, v_k)\right) v_k \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como $v_1, v_2, ..., v_m$ formam uma base ortonormal, temos $(v_i, v_k) = 0$ sempre que $i \neq k$ e $(v_i, v_k) = 1$ sempre que $i = k$. Segue, de (3.22), que

$$P^*_m(u'_m(t)) = \sum_{k=1}^m g'_{km}(t)v_k = u'_m(t). \tag{3.23}$$

Logo, aplicando P^*_m em (3.21) obtemos que

$$u'_m(t) + \nu_0 P^*_m Au_m(t) + P^*_m \mathcal{A}u_m(t) + P^*_m Bu_m(t) = P^*_m f. \tag{3.24}$$

que implica

$$u'_m \quad \text{é limitada em} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'),$$

pois $P^*_m \mathcal{A}u_m(t)$ e $P^*_m f$ são uniformemente limitadas em $L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$ e $P^*_m Au_m(t)$ e $P^*_m Bu_m(t)$ são uniformemente limitados em $L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$.

Tomando $B_0 = V,\ B = H,\ B_1 = V',\ p_0 = 4$ e $p_1 = \frac{4}{3}$ no Teorema 1.30, temos que existe $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^4(0,T;V)$ e uma subsequência de u_m, que continuaremos chamando de u_m, tais que

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{fortemente em} \quad L^4(0,T;H) \tag{3.25}$$

Usando as estimativas (3.17) e (3.18) temos que

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u \quad \text{fraco-}* \text{ em} \quad L^\infty(0,T;H), && (3.26)\\ u_m &\rightharpoonup u \quad \text{fraco em} \quad L^4(0,T;V), && (3.27)\\ u'_m &\rightharpoonup u' \quad \text{fraco em} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'), && (3.28)\\ \mathcal{A}u_m &\rightharpoonup \chi \quad \text{fraco em} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'). && (3.29) \end{aligned}$$

onde χ depende de t.

De (3.25) temos que u_m converge forte em $L^4(0.T;H)$, em particular, converge forte em $L^2(0,T;H)$. Logo

$$u_{mi} \longrightarrow u_i \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q).$$

De (1.22), passando a uma subsequência, segue que

$$u_{mi} \longrightarrow u_i \quad \text{q.t.p. em} \quad Q. \tag{3.30}$$

Portanto, para $n \leq 4$

$$u_{mi} \in L^4(0,T;V) \hookrightarrow L^4(0,T;L^4(\Omega)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||u_{mi}(t)u_{mj}(t)||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T \left(\int_\Omega |u_{mi}(t)|^2 |u_{mj}(t)|^2 dx \right) dt \\ &\leq \int_0^T \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |u_{mi}(t)|^4 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_{mj}(t)|^4 dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2}||u_{mi}(t)||^4_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} + \frac{1}{2}||u_{mj}(t)||^4_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} \end{aligned}$$

Como, de (3.17), u_m é limitada em $L^4(0,T;V) \hookrightarrow L^4(0,T;L^4(\Omega))$ seque que

$$||u_{mi}u_{mj}||^4_{L^2(0.T;L^2(\Omega))} \leq C_8 \tag{3.31}$$

daí,

$$u_{mi}u_{mj} \quad \text{é limitado em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.32}$$

Usando o Lema 1.25, (3.30) e (3.31) temos que

$$u_{mi}u_{mj} \rightharpoonup u_i u_j \quad \text{fracamente em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.33}$$

Como, para $v = w_i \in V$ tem-se que

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega).$$

Considere $\theta(t) \in \mathcal{D}(0,T) \subset L^2(0,T)$. Assim,

$$\begin{aligned}\left\|\theta(t)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x)\right\|^2_{L^2(0.T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T \int_\Omega \left|\theta(t)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x)\right|^2 dxdt \\ &= \int_0^T |\theta(t)|^2 dt \int_\Omega \left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x)\right|^2 dx < \infty,\end{aligned}$$

ou seja, $\theta(t)\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j}(x) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Por (3.33) e pelo Teorema de Riesz, Teorema 1.23, para todo $\psi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, temos que

$$\int_0^T \int_\Omega u_{mi}u_{mj}\psi(x,t)dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega u_i u_j \psi(x,t)dxdt.$$

Tomando $\psi(x,t) = \theta(t)\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j}(x)$, segue que

$$\int_0^T \int_\Omega u_{mi}u_{mj}\theta(t)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x)dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega u_i u_j \theta(t)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x)dxdt.$$

Somando para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$ temos que

$$\sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega u_{mi}u_{mj}\theta(t)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x)dxdt \longrightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega u_i u_j \theta(t)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x)dxdt.$$

Como

$$\begin{aligned}\int_0^T b(u_m(t),u_m(t),w)\theta(t)dt &= -\int_0^T b(u_m(t),w,u_m(t))\theta(t)dt \\ &= -\int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_{mi}u_{mj}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}(x)dx\right)\theta(t)dt,\end{aligned}$$

concluímos que

$$\int_0^T b(u_m(t),u_m(t),w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T b(u(t),u(t),w)\theta(t)dt \quad \forall\ \theta \in \mathcal{D} \text{ e } \forall w \in V. \tag{3.34}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u_m'(t),w\rangle\theta(t)dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\langle u_m(t),w\rangle\theta(t)dt \\ &= \langle u_m(t),w\rangle\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T \langle u_m(t),w\rangle\theta'(t)dt \\ &= -\int_0^T \langle u_m(t),w\rangle\theta'(t)dt.\end{aligned}$$

De (3.27) temos que u_m converge fraco para u em $L^4(0,T;V)$. Logo,

$$\frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j} \rightharpoonup \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{fracamente em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Daí, pela definição de convergência fraca, temos

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}\phi(x,t)dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\phi(x,t)dt \quad \forall\ \phi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

escolhendo $\phi(x,t) = \theta(t)\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ temos que

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}\theta(t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\theta(t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)dxdt.$$

Somando $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n$ e como θ independe de x temos que

$$\int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)dx\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)dx\theta(t)dt.$$

Logo,

$$\int_0^T a(u_m(t),w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T a(u(t),w)\theta(t)dt \quad \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T). \tag{3.35}$$

De (3.29), temos que $\mathcal{A}u_m$ converge fraco para χ em $L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$. Logo,

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j\rangle\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \langle \chi(t), w_j\rangle\theta(t)dt. \tag{3.36}$$

Multiplicando a equação aproximada (3.6) por θ e integrando em $[0,T]$ temos, para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, que

$$\int_0^T \langle u_m'(t), v_j\rangle\theta(t)dt + \nu_0\int_0^T a(u_m(t),v_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), v_j\rangle\theta(t)dt + \int_0^T b(u_m(t),u_m(t),v_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), v_j\rangle\theta(t)dt. \tag{3.37}$$

Integrando por partes o primeiro termo obtemos

$$\int_0^T \langle u_m'(t), v_j\rangle\theta(t)dt = -\int_0^T \langle u_m(t), v_j\rangle\theta'(t)dt.$$

logo, podemos reescrever (3.37) como

$$-\int_0^T \langle u_m(t), v_j\rangle\theta'(t)dt + \nu_0\int_0^T a(u_m(t),v_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), v_j\rangle\theta(t)dt + \int_0^T b(u_m(t),u_m(t),v_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), v_j\rangle\theta(t)dt. \tag{3.38}$$

Fixando j e fazendo $m \to \infty$ temos, para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $j = 1, ..., m$, que

$$-\int_0^T \langle u(t), v_j\rangle \theta'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), v_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi(t), v_j\rangle \theta(t)dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), v_j\rangle \theta(t)dt. \quad (3.39)$$

Usando a densidade de $[V_m]$ em V temos que (3.39) vale para todo $v \in V$. Observando cada um dos termos da equação acima, vemos que

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle u(t), v\rangle \theta'(t)dt &= -\int_0^T \int_\Omega u(t)vdx\theta'(t)dt \\ &= -\int_\Omega \int_0^T u(t)\theta'(t)vdt \\ &= -\left\langle \int_0^T u(t)\theta'(t)dt, v \right\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_0 \int_0^T a(u(t), v)\theta(t)dt &= -\nu_0 \int_0^T \langle \Delta u(t), v\rangle \theta(t)dt \\ &= -\nu_0 \left\langle \int_0^T \Delta u(t)\theta(t)dt, v \right\rangle. \end{aligned}$$

isto é, u_m é limitada em V,

$$\int_0^T \langle \chi(t), v\rangle \theta(t)dt = \left\langle \int_0^T \chi(t)\theta(t)dt, v \right\rangle.$$

$$\int_0^T b(u(t), u(t), v)\theta(t)dt = \left\langle \int_0^T B(u(t))\theta(t)dt, v \right\rangle.$$

$$\int_0^T \langle f(t), v\rangle \theta(t)dt = \left\langle \int_0^T f(t)\theta(t)dt, v \right\rangle.$$

Logo, reescrevemos (3.39), como

$$-\left\langle \int_0^T u(t)\theta'(t)dt, v \right\rangle + \nu_0 \left\langle \int_0^T A(u(t))\theta(t)dt, v \right\rangle + \left\langle \int_0^T \chi(t)\theta(t)dt, v \right\rangle + \left\langle \int_0^T B(u(t))\theta(t)dt, v \right\rangle = \left\langle \int_0^T f(t)\theta(t)dt, v \right\rangle, \quad \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

ou seja,

$$-\langle u'(t), \theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \nu_0 \langle A(u(t)), \theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \langle \chi(t), \theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \langle B(u(t)), \theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} = \langle f(t), \theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}, \quad \text{em } V',\ \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

Logo,

$$u'(t) + \nu_0 A(u(t)) + \chi(t) + B(u(t)) = f(t) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T;V').$$

Como

$$u'(t) = -\nu_0 A(u(t)) - \chi(t) - B(u(t)) + f(t),$$

e $A(u) \in L^4(0,T;V')$, $\chi \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$, $B(u) \in L^\infty(0,T;V')$ e $f \in L^2(0,T;V')$ temos que $u' \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$.

Portanto,

$$u'(t) + \nu_0 A(u(t)) + \chi(t) + B(u(t)) = f(t) \quad \text{em} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'). \tag{3.40}$$

Devemos mostrar que $\chi(t) = \mathcal{A}u(t)$. De (3.16) temos, tomando $t = T$, que $|u_m(T)|^2 \leq C_8$. Em particular, é limitada em $L^2(\Omega)$. Logo,

$$u_m(T) \rightharpoonup \xi \quad \text{fracamente em} \quad L^2(\Omega).$$

Do Lema 1.60, temos que $\mathcal{A}u$ é um operador monótono. Então vale

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t) - \mathcal{A}\varphi(t), u_m(t) - \varphi(t)\rangle dt \geq 0, \quad \forall\ \varphi L^2(0,T;V). \tag{3.41}$$

Daí,

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), \varphi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi(t), u_m(t) - \varphi(t)\rangle dt \geq 0. \tag{3.42}$$

Por (3.6), multiplicando $g_{jm}(t)$ e somando para $j = 1, ..., m$, temos que

$$\int_0^T \langle u'_m(t), u_m(t)\rangle dt + \nu_0 \int a(u_m(t), u_m(t))dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t)\rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle dt. \tag{3.43}$$

Como

$$\int_0^T \langle u'_m(t), u_m(t)\rangle dt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 dt = \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_m(0)|^2,$$

substituindo em (3.43) e isolando o terceiro termo obtemos que

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t)\rangle dt = \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 - \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 - \nu_0 \int a(u_m(t), u_m(t))dt + \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle dt. \tag{3.44}$$

Substituindo (3.44) em (3.42), temos que

$$\frac{1}{2}|u_m(0)|^2 - \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 - \nu_0 \int a(u_m(t), u_m(t))dt + \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), \varphi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi(t), u_m(t) - \varphi(t)\rangle dt \geq 0. \quad (3.45)$$

Temos que $\xi = u(T)$. De fato, seja $\psi \in C^1([0,T])$ tal que $\psi(0) = 0$. Multiplicando (3.6) por ψ, integrando em $[0,T]$ e utilizando integração por partes obtemos

$$\langle u_m(t), v_j\rangle\psi(t)\Big|_0^T - \int_0^T \langle u_m(t), v_j\rangle\psi'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), v_j)\psi(t)dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), v_j\rangle\psi(t)dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v_j)\psi(t)dt = \int_0^T \langle f(t), v_j\rangle\psi(t)dt \quad (3.46)$$

que nos dá

$$- \int_0^T \langle u_m(t), v_j\rangle\psi'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), v_j)\psi(t)dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), v_j\rangle\psi(t)dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v_j)\psi(t)dt = \langle u_m(T), v_j\rangle + \int_0^T \langle f(t), v_j\rangle\psi(t)dt. \quad (3.47)$$

Utilizando o mesmo raciocínio feito em (3.38) e (3.39) obtemos

$$- \int_0^T \langle u(t), v\rangle\psi'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), v)\psi(t)dt + \int_0^T \langle \chi(t), v\rangle\psi(t)dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v)\psi(t)dt = \langle \xi, v\rangle + \int_0^T \langle f(t), v\rangle\psi(t)dt \quad (3.48)$$

Multiplicando (3.40) pela mesma ψ usada em (3.46), aplicando em v, integrando em $[0,T]$ e usando integração por partes obtemos

$$- \int_0^T \langle u(t), v\rangle\psi'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), v)\psi(t)dt + \int_0^T \langle \chi(t), v\rangle\psi(t)dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v)\psi(t)dt = \langle u(T), v\rangle + \int_0^T \langle f(t), v\rangle\psi(t)dt. \quad (3.49)$$

Subtraindo (3.48) de (3.49) temos

$$\langle \xi - u(T), v\rangle = 0, \quad v \in V.$$

Portanto

$$u(T) = \xi.$$

Usando a Proposição 1.26 temos que

$$-\frac{1}{2}|u(T)|^2 \geq \frac{1}{2}\limsup(-|u_m(T)|^2).$$

Aplicando o lim sup em (3.45) temos que

$$\begin{aligned}\limsup \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 + \limsup\left(-\frac{1}{2}|u_m(T)|^2\right) + \limsup\left(-\nu_0\int_0^T a(u_m(t),u_m(t))dt\right)\\ + \limsup\int_0^T \langle f(t),u_m(t)\rangle dt + \limsup\left(-\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t),\varphi(t)\rangle dt\right)\\ + \limsup\left(-\int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi(t),u_m(t)-\varphi(t)\rangle dt\right) \geq 0.\end{aligned}$$

Segue das convergências anteriores que

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle f(t),u(t)\rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 + \limsup\left(-\nu_0\int_0^T a(u_m(t),u_m(t))dt\right)\\ - \int_0^T \langle \chi(t),\varphi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi(t),u(t)-\varphi(t)\rangle dt \geq 0. \quad (3.50)\end{aligned}$$

Aplicando (3.40) em u, temos que

$$\langle u'(t),u(t)\rangle + \nu_0 a(u(t),u(t)) + \langle \chi(t),u(t)\rangle = \langle f(t),u(t)\rangle.$$

Integrando em $[0,T]$

$$\frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 + \nu_0\int_0^T a(u(t),u(t))dt + \int_0^T \langle \chi(t),u(t)\rangle dt = \int_0^T \langle f(t),u(t)\rangle dt,$$

o que nos fornece

$$\nu_0\int_0^T a(u(t),u(t)) + \int_0^T \langle \chi(t),u(t)\rangle dt = \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t),u(t)\rangle dt.$$

Substituindo em (3.50), temos que

$$\begin{aligned}\nu_0\int_0^T a(u(t),u(t))dt + \int_0^T \langle \chi(t),u(t)\rangle dt - \liminf\left(\nu_0\int_0^T a(u_m(t),u_m(t))dt\right)\\ - \int_0^T \langle \chi(t),\varphi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi(t),u(t)-\varphi(t)\rangle dt \geq 0. \quad (3.51)\end{aligned}$$

Como $a(u(t),u(t)) = ||u||_V^2$ e u_m converge fraco para u em $L^2(0,T;V)$, temos que

$$\nu_0\int_0^T ||u(t)||^2 dt - \liminf \nu_0\int_0^T ||u_m(t)||^2 dt \leq 0.$$

De (3.45) segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \chi(t), \varphi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi(t), u(t) - \varphi(t)\rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \chi(t), u(t) - \varphi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi(t), u(t) - \varphi(t)\rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \chi(t) - \mathcal{A}\varphi(t), u(t) - \varphi(t)\rangle dt \quad \forall\ \varphi \in L^4(0,T;V). \end{aligned}$$

Vamos considerar $\varphi(t) = u(t) - \lambda w(t)$, com $w \in L^4(0,T;V)$. Supondo que $\lambda > 0$ e substituindo φ na desigualdade acima temos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - \mathcal{A}(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle dt \geq 0. \tag{3.52}$$

Como $\mathcal{A}$ é um operador hemicontínuo, temos que

$$\int_0^T \langle \chi(t) - \mathcal{A}(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle \chi(t) - \mathcal{A}u(t), w(t)\rangle dt, \quad \forall\ w \in L^2(0,T;V) \text{ e } \lambda \to 0. \tag{3.53}$$

De fato, defina

$$g_\lambda(t) = \langle \chi(t) - \mathcal{A}(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle \quad \text{e} \quad g_0(t) = \langle \chi(t) - \mathcal{A}u(t), w(t)\rangle.$$

Pela hemicontinuidade de $\mathcal{A}$ temos que

$$\lim_{\lambda\to 0} g_\lambda(t) = g_0(t), \quad \text{q.t.p. em } t$$

e como $\lambda \to 0$, λ é limitado, digamos $|\lambda| \leq C_0$.

$$\begin{aligned} |g_\lambda(t)| &= |\langle \chi(t) - \mathcal{A}(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle| \\ &\leq ||\chi(t)||_{V'}||w(t)|| + ||\mathcal{A}(u(t) - \lambda w(t))||_{V'}||w(t)|| \\ &\leq ||\chi(t)||_{V'}||w(t)|| + ||u(t) - \lambda w(t)||^3||w(t)|| \\ &\leq ||\chi(t)||_{V'}||w(t)|| + 2^3(||u(t)||^3 + C_0^3||w(t)||^3)||w(t)|| \\ &= ||\chi(t)||_{V'}||w(t)|| + 2^3||u(t)||^3||w(t)|| + 2^3C_0^3||w(t)||^4. \end{aligned}$$

Como $\chi(t) \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$ e $u, w \in L^4(0,T;V)$, então pela desigualdade de Hölder e de Young, Proposições 1.12 e Corolário 1.14, temos que

$$||\chi(t)||_{V'}||w(t)|| + 2^3||u(t)||^3||w|| + 2^3C_0^3||w(t)||^4 \in L^1(0,T).$$

Portanto, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.20, que

$$g_0 \in L^1(0,T) \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda\to 0}\int_0^T g_\lambda(t)dt = \int_0^T g_0(t)dt,$$

o que prova (3.53).

Logo, de (3.52) e (3.53), obtemos que

$$\int_0^T \langle \chi(t) - \mathcal{A}u(t), w(t)\rangle dt \geq 0, \quad \forall\ w \in L^4(0,T;V). \tag{3.54}$$

Se $\lambda < 0$, então

$$\int_0^T \langle \chi(t) - \mathcal{A}(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle dt \leq 0. \tag{3.55}$$

Da hemicontinuidade de $\mathcal{A}$, utilizando o mesmo raciocínio feito em (3.53), segue que

$$\int_0^T \langle \chi(t) - \mathcal{A}u(t), w(t)\rangle dt \leq 0, \quad \forall\ w \in L^4(0,T;V). \tag{3.56}$$

De (3.54) e (3.56) concluímos que

$$\int_0^T \langle \chi(t) - \mathcal{A}u(t), w(t)\rangle dt = 0, \quad \forall\ w \in L^4(0,T;V).$$

Logo,

$$\langle \chi(t) - \mathcal{A}u(t), w(t)\rangle = 0, \quad \forall\ w \in L^4(0,T;V).$$

Portanto,

$$\chi(t) = \mathcal{A}u(t).$$

Por último vamos mostrar que vale a condição inicial (3.7). Seja $\psi \in C^1([0,T])$ tal que $\psi(T) = 0$. Multiplicando (3.6) por ψ e integrando em $[0,T]$ temos

$$\int_0^T \langle u_m'(t), v_j\rangle \psi(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), v_j)\psi(t)dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), v_j\rangle \psi(t)dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v_j)\psi(t)dt = \int_0^T \langle f(t), v_j\rangle \psi(t)dt. \tag{3.57}$$

Integrando por partes o primeiro termo de (3.57) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u_m'(t), v_j\rangle \psi(t)dt &= \langle u_m(t), v_j\rangle \psi(t)\Big|_0^T - \int_0^T \langle u_m(t), v_j\rangle \psi'(t)dt \qquad (3.58)\\ &= \langle u_m(0), v_j\rangle \psi(0) - \int_0^T \langle u_m(t), v_j\rangle \psi'(t)dt \\ &= \langle u_{0m}, v_j\rangle \psi(0) - \int_0^T \langle u_m(t), v_j\rangle \psi'(t)dt. \end{aligned}$$

Logo, de (3.57), segue que

$$-\int_0^T \langle u_m(t), v_j\rangle \psi'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), v_j)\psi(t)dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), v_j\rangle \psi(t)dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v_j)\psi(t)dt = \langle u_{0m}, v_j\rangle \psi(0) + \int_0^T \langle f(t), v_j\rangle \psi(t)dt. \tag{3.59}$$

Utilizando o mesmo raciocínio feito em (3.38) e (3.39) obtemos

$$-\int_0^T \langle u(t), v\rangle \psi'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), v)\psi(t)dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle \psi(t)dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v)\psi(t)dt = \langle u_0, v\rangle \psi(0) + \int_0^T \langle f(t), v\rangle \psi(t)dt. \quad (3.60)$$

Lembrando que por hipótese

$$\lim_{m\to\infty} u_{0m} = u_0.$$

Multiplicando (1.49) pela mesma ψ usada em (3.57), integrando em $[0, T]$ e usando integração por partes obtemos

$$-\int_0^T \langle u(t), v\rangle \psi'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), v)\psi(t)dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle \psi(t)dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v)\psi(t)dt = \langle u(0), v\rangle \psi(0) + \int_0^T \langle f(t), v\rangle \psi(t)dt. \quad (3.61)$$

Subtraindo (3.60) de (3.61) temos

$$\langle u(0) - u_0, v\rangle \psi(0) = 0, \quad v \in V.$$

Logo, para $\psi(0) \neq 0$ temos

$$\langle u(0) - u_0, v\rangle = 0, \quad v \in V.$$

Portanto

$$u(0) = u_0.$$

□

3.2 Unicidade

Teorema 3.2. *Para $n \leq 3$, o problema (3.1)-(3.4) tem uma única solução $u \in L^4(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.*

Demonstração. Suponhamos que u_1 e u_2 sejam soluções distintas do problema (3.1)-(3.4). Logo, as mesmas satisfazem (3.40), ou seja,

$$u_1'(t) + \nu_0 A u_1(t) + \mathcal{A}u_1(t) + B(u_1(t)) = f(t) \quad \text{e} \quad u_1(0) = u_0 \quad (3.62)$$

e

$$u_2'(t) + \nu_0 A u_2(t) + \mathcal{A}u_2(t) + B(u_2(t)) = f(t) \quad \text{e} \quad u_2(0) = u_0. \quad (3.63)$$

Subtraindo (3.63) de (3.62) obtemos

$$u_1'(t) - u_2'(t) + \nu_0 A(u_1(t) - u_2(t)) + \mathcal{A}u_1(t) - \mathcal{A}u_2(t) + B(u_1(t)) - B(u_2(t)) = 0$$

Tomando $w = u_1 - u_2$ e como A é linear segue que

$$w'(t) + \nu_0 Aw(t) + \mathcal{A}u_1(t) - \mathcal{A}u_2(t) + B(u_1(t)) - B(u_2(t)) = 0.$$

Logo,

$$\langle w'(t), w(t)\rangle + \nu_0\langle Aw(t), w(t)\rangle + \langle \mathcal{A}u_1(t) - \mathcal{A}u_2(t), w(t)\rangle \\ + \langle B(u_1(t)) - B(u_2(t)), w(t)\rangle = 0$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 + b(u_1(t), u_1(t), w(t)) - b(u_2(t), u_2(t), w(t)) = \\ - \langle \mathcal{A}u_1(t) - \mathcal{A}u_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle$$

Como $\mathcal{A}$ é um operador monótono temos $-\langle \mathcal{A}u_1(t) - \mathcal{A}u_2(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \leq 0$, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 + b(u_1(t), u_1(t), w(t)) - b(u_2(t), u_2(t), w(t)) \leq 0. \quad (3.64)$$

Por outro lado,

$$b(w(t), u_1(t), w(t)) = b(u_1(t), u_1(t), w(t)) - b(u_2(t), u_1(t), w(t)),$$

o que nos fornece

$$b(u_1(t), u_1(t), w(t)) = b(w(t), u_1(t), w(t)) + b(u_2(t), u_1(t), w(t)).$$

Assim,

$$b(u_1(t), u_1(t), w(t)) - b(u_2(t), u_2(t), w(t)) =$$

$$\begin{aligned} &= b(w(t), u_1(t), w(t)) + b(u_2(t), u_1(t), w(t)) - b(u_2(t), u_2(t), w(t)) \\ &= b(w(t), u_1(t), w(t)) + b(u_2(t), w(t), w(t)) \\ &= b(w(t), u_1(t), w(t)). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Portanto, de (3.64), segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 + b(w(t), u_1(t), w(t)) \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 \leq b(w(t), w(t), u_1(t)).$$

De (1.41) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 \leq C_1||u_1(t)||||w(t)||^2_{L^4(\Omega)}. \quad (3.66)$$

Para $n = 2$, usando a desigualdade de interpolação, Lema 1.32, temos que

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\nu_0||w(t)||^2 \leq C_2||u_1(t)|||w(t)|||w(t)||_{L^2(\Omega)}$$

Usando a desigualdade de Young, Corolário 1.14, obtemos que

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\nu_0||w(t)||^2 \leq \nu_0||w(t)||^2 + C_4|w(t)|^2||u_1(t)||^2$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq C_4|w(t)|^2||u_1(t)||^2. \tag{3.67}$$

Como $w \in W(0,T)$, pois $n = 2$, podemos integrar em $(0,t)$ e obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|w(s)|^2 ds \leq C_4 \int_0^t |w(s)|^2||u_1(s)||^2 ds,$$

o que nos fornece

$$|w(t)|^2 - |w(0)|^2 \leq C_4 \int_0^t |w(s)|^2||u_1(s)||^2 ds.$$

como $u_1(0) = u_2(0) - u(0)$ temos $|w(0)|^2 = 0$, logo

$$|w(t)|^2 \leq C_4 \int_0^t |w(s)|^2||u_1(s)||^2 ds. \tag{3.68}$$

A função $t \mapsto |w(t)|^2$ é contínua em $[0,T]$, pois $W(0,T) \subset C([0,T],H)$. Aplicando a desigualdade de Gronwall, Lema 1.16, obtemos que $|w(t)|^2 = 0$ em $[0,T]$, ou seja, $u_1(t) = u_2(t)$.

Para $n = 3$, usando a desigualdade de interpolação, Lema 1.33, temos que

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\nu_0||w(t)||^2 \leq C_5||u_1(t)|||w(t)|^{\frac{3}{2}}||w(t)||^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a desigualdade de Young, Corolário 1.14, obtemos que

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\nu_0||w(t)||^2 \leq \nu_0||w(t)||^2 + C_6||u_1(t)||^{\frac{4}{3}}|w(t)|^2,$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq C_6||u_1(t)||^{\frac{4}{3}}|w(t)|^2. \tag{3.69}$$

Como $w \in W(0,T)$, pois $n = 3$, podemos integrar em $(0,t)$ e obtemos que

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|w(s)|^2 ds \leq C_6 \int_0^t ||u_1(t)||^{\frac{4}{3}}|w(t)|^2 ds,$$

o que nos dá

$$|w(t)|^2 - |w(0)|^2 \leq C_6 \int_0^t |w(s)|^2||u_1(s)||^{\frac{4}{3}} ds.$$

como $u_1(0) = u_2(0) - u(0)$ temos $|w(0)|^2 = 0$, logo

$$|w(t)|^2 \leq C_6 \int_0^t |w(s)|^2 ||u_1(s)||^{\frac{4}{3}} ds. \tag{3.70}$$

A função $t \mapsto |w(t)|^2$ é contínua em $[0,T]$, pois $W(0,T) \subset C([0,T],H)$. Aplicando a desigualdade de Gronwall, Lema 1.16, obtemos que $|w(t)|^2 = 0$ em $[0,T]$, ou seja, $u_1(t) = u_2(t)$. □

Obsevação 3.3. *Para $n > 4$, ainda não se conhece a existência para o problema (3.1)-(3.4). E para $n > 3$ não se conhece a unicidade, pois não temos desigualdades de interpolação equivalentes as dadas nos Lema 1.32 e Lema 1.33.*

Capítulo 4

Equação de Navier-Stokes Não-Estacionária com Viscosidade Variável do Tipo Não Local Mais Geral

Neste capítulo apresentaremos um teorema para existência para o problema de equações abaixo para $n \leq 4$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - M(a(u))\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \nabla p = f \quad \text{em} \quad Q \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{em} \quad Q \tag{4.2}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad S \tag{4.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{4.4}$$

4.1 Existência

Teorema 4.1. *Supondo $n \leq 4$, a hipótese (1.19) e a condição*

$$\alpha\lambda - \beta_1 \leq M(\lambda) \leq \alpha\lambda + \beta_2 \tag{4.5}$$

onde α, β_1, β_2 são constantes positivas. Dadas as funções $f \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$ e $u_0 \in H$. Existe uma solução fraca u do problema (4.1)-(4.4), tal que

$$u \in L^{\infty}(0,T;H) \cap L^4(0,T;V).$$

Demonstração. : Seja (v_ν) uma base Hilbertiana de V e V_m o espaço gerado por $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Vamos considerar o seguinte problema aproximado: para cada

$m \in \mathbb{N}$ queremos obter $u_m \in V_m$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i = u_m(t) \quad (4.6)$$

$$\langle u'_m(t), v_j\rangle + M(a(u_m(t)))a(u_m(t), v_j) + b(u_m(t), u_m(t), v_j) = \langle f(t), v_j\rangle \quad (4.7)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \quad \text{em} \quad V_m \quad (4.8)$$

onde u_{0m} é escolhido tal que $\lim_{m\to\infty} u_{0m} = u_0$ em H e g_{jm} uma função de $[0, T]$ em $\mathbb{R}$.

De forma análoga ao que foi feito para o problema (3.1)-(3.4) obtemos que o problema (4.7) tem solução maximal local em algum intervalo $[0, t_m),\ 0 < t_m \leq T$.

Multiplicando (4.7) por $g_{jm}(t)$ obtemos

$$\langle u'_m(t), v_j\rangle g_{jm}(t) + M(a(u_m(t)))a(u_m(t), v_j)g_{jm}(t) + b((u_m(t), u_m(t), v_j)g_{jm}(t) = \langle f(t), v_j\rangle g_{jm}(t), \quad (4.9)$$

para $1 \leq j \leq m$.

Somando a equação acima, para $j = 1, 2, ..., n$, temos

$$\langle u'_m(t), u_m(t)\rangle + M(a(u_m(t)))a(u_m(t), u_m(t)) + b((u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = \langle f(t), u_m(t)\rangle, \quad (4.10)$$

ou seja,

$$2\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + M(a(u_m(t)))||u_m(t)||^2 \leq ||f(t)||_{V'}||u_m(t)|| \quad (4.11)$$

Usando (4.5) obtemos

$$2\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \alpha||u_m(t))||^4 - \beta_1||u_m(t)||^2 \leq ||f(t)||_{V'}||u_m(t)||.$$

o que implica

$$2\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \alpha||u_m(t))||^4 \leq \beta_1||u_m(t)||^2 + ||f(t)||_{V'}||u_m(t)|| \quad (4.12)$$

Usando a desigualdade de Young (1.14) temos

$$\beta_1||u_m(t)||^2 \leq c_1(\alpha)\beta_1^2 + \frac{\alpha}{4}||u_m(t)||^4$$

e

$$||f(t)||_{V'}||u_m(t)|| \leq c_2(\alpha)||f(t)||_{V'}^{\frac{4}{3}} + \frac{\alpha}{4}||u_m(t)||^4.$$

Segue, de (4.12), que

$$2\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \alpha||u_m(t))||^4 \leq c_1(\alpha)\beta_1^2 + \frac{\alpha}{4}||u_m(t)||^4 + c_2(\alpha)||f(t)||_{V'}^{\frac{4}{3}} + \frac{\alpha}{4}||u_m(t)||^4,$$

ou seja,

$$2\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}||u_m(t))||^4 \leq C_1(\alpha)\beta_1^2 + C_2(\alpha)||f(t)||_{V'}^{\frac{4}{3}}.$$

Integrando em $[0,t]$ com $t \in (0,T)$ obtemos

$$|u_m(t)|^2 + \alpha\int_0^t ||u_m(s))||^4 ds \leq C_3(\alpha)T\beta_1^2 + C_4(\alpha)\int_0^t ||f(s)||_{V'}^{\frac{4}{3}} ds + |u_0|^2. \quad (4.13)$$

Pela convergência $u_{0m\to u_0}$, temos que (u_{0m}) é limitada em $L^2(\Omega)$. Portanto, u_m é limitada por uma constante que independe de t e m, logo $t_m = T$. Logo, $u_m(t)$ é solução global do problema (4.7). Temos que u_m é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;H)$. Fazendo $t = T$ em (4.13) temos

$$|u_m(T)|^2 + \alpha\int_0^T ||u_m(s))||^4 ds \leq C_3(\alpha)T\beta_1^2 + C_4(\alpha)\int_0^T ||f(s)||_{V'}^{\frac{4}{3}} ds + C_0. \quad (4.14)$$

Logo,

$$u_m \quad \text{é limitada em} \quad L^4(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H). \quad (4.15)$$

De (1.20), tomando $\Lambda = -\Delta$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||M(a(u_m(s)))\Lambda u_m(s)||_{V'}^{\frac{4}{3}} ds &\leq \int_0^T [M(a(u_m(s)))||u_m(s)||]^{\frac{4}{3}} ds \\
&\leq \int_0^T [\alpha||u_m(t)||^3 + \beta_2||u_m(s)||]^{\frac{4}{3}} ds \\
&\leq 2^{\frac{4}{3}}\int_0^T \alpha^{\frac{4}{3}}||u_m(t)||^4 ds + \beta_2^{\frac{4}{3}}\int_0^T ||u_m(s)||^{\frac{4}{3}} ds \\
&\leq C_5\int_0^T ||u_m(t)||^4 ds + C_6.
\end{aligned}$$

Como u_m é uniformemente limitada em $L^4(0,T;V)$ segue que

$$M(a(u_m(t)))\Lambda u_m \quad \text{limitada em} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'). \quad (4.16)$$

Podemos escrever (4.7) na forma

$$u_m'(t) + M(a(u_m(t)))\Lambda u_m(t) + Bu_m(t) = f. \quad (4.17)$$

Seja P_m o operador projeção ortogonal de H sobre V_m. operador adjuntos da projeção, $P^* : V' \to V'$, é uniformemente limitado em $\mathcal{L}(V';V')$. Usando (3.23), temos que

$$u_m'(t) + P_m^*(M(a(u_m(t)))\Lambda u_m(t)) + P_m^* Bu_m(t) = P_m^* f, \quad (4.18)$$

que implica

$$u'_m \quad \text{é limitada em} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'),$$

pois $P_m^*(M(a(u_m(t)))\Lambda u_m(t))$ e $P_m^* f$ são uniformemente limitadas em $L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$ e temos que $P_m^* B u_m(t)$ e uniformemente limitado em $L^2(0,T;V')$.

Tomando $B_0 = V,\ B = H,\ B_1 = V',\ p_0 = 4$ e $p_1 = \frac{4}{3}$ no Teorema 1.30, temos que existe $u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^4(0,T;V)$ e uma subsequência de u_m, que continuaremos denotando de u_m, tais que

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^4(0,T;H). \tag{4.19}$$

Usando as estimativas (4.15) e (4.16) temos

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{fraco-}* \text{ em} \quad L^\infty(0,T;H,) \tag{4.20}$$

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{fraco em} \quad L^4(0,T;V), \tag{4.21}$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{fraco em} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'), \tag{4.22}$$

$$M(a(u_m(t)))\Lambda u_m \rightharpoonup \chi \quad \text{fraco em} \quad L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'). \tag{4.23}$$

Utilizando argumentos análogos aos dados para o problema (3.1)-(3.4) e as convergências (4.19) e (4.20)-(4.23) obtemos por passagem ao limite que

$$u'(t) + \chi(t) + Bu(t) = f(t), \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T;V'),$$

Como $\chi \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'),\ B \in L^2(0,T;V')$ e $f \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$ temos que $u' \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$. Portanto,

$$u'(t) + \chi(t) + Bu(t) = f(t), \quad \text{em } L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'). \tag{4.24}$$

Devemos mostrar agora que $M(a(u(t)))\Lambda u(t) = \chi(t)$. De (4.14) temos, tomando $t = T$, que $|u_m(T)|^2 \leq C$. Em particular, é limitada em $L^2(\Omega)$. Logo,

$$u_m(T) \rightharpoonup \xi \quad \text{francamente} \quad L^2(\Omega).$$

Do Lema 1.58 temos que $M(a(u(t)))\Lambda u$ é um operador monótono. Então vale

$$\int_0^T \langle M(a(u_m(t)))\Lambda u_m - M(a(\varphi(t)))\Lambda\varphi(t), u_m(t) - \varphi(t)\rangle dt \geq 0, \quad \forall\, \varphi \in L^4(0,T;V). \tag{4.25}$$

Daí,

$$\int_0^T \langle M(a(u_m(t)))\Lambda u_m, u_m(t)\rangle dt - \int_0^T \langle M(a(u_m(t)))\Lambda u_m, \varphi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle M(a(\varphi(t)))\Lambda\varphi(t), u_m(t) - \varphi(t)\rangle dt \geq 0. \tag{4.26}$$

Por (4.7), tomando $v_j = u_m$, em (4.7) e integrando em $[0,T]$ temos

$$\int_0^T \langle u'_m(t), u_m(t)\rangle dt + \int_0^T M(a(u_m(t)))a(u_m(t), u_m(t))dt = \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle dt. \tag{4.27}$$

Como

$$\int_0^T \langle u'_m(t), u_m(t)\rangle dt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 dt = \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_m(0)|^2,$$

substituindo em (4.27) e isolando o segundo termo obtemos

$$\int_0^T M(a(u_m(t)))a(u_m(t), u_m(t))dt = \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 - \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle dt. \tag{4.28}$$

Como

$$\langle M(a(u_m(t)))\Lambda u_m, u_m(t)\rangle = M(a(u_m(t)))a(u_m(t), u_m(t)).$$

Substituindo (4.28) em (4.26) temos

$$\frac{1}{2}|u_m(0)|^2 - \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle dt - \int_0^T \langle M(a(u_m(t)))\Lambda u_m, \varphi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle M(a(\varphi(t)))\Lambda\varphi(t), u_m(t) - \varphi(t)\rangle dt \geq 0 \tag{4.29}$$

Utilizando os argumentos análogo ao que foi feito no capítulo anterior mostra-se que $\xi = u(T)$ e usando a Proposição 1.26 obtemos que

$$-\frac{1}{2}|u(T)|^2 \geq \frac{1}{2}\limsup(-|u_m(T)|^2).$$

Aplicando o $\limsup$ em (4.29) segue que

$$\frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \chi(t), \varphi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle M(a(\varphi(t)))\Lambda\varphi(t), u(t) - \varphi(t)\rangle dt \geq .0 \tag{4.30}$$

Aplicando (4.24) em u temos

$$\langle u'(t), u(t)\rangle + \langle \chi(t), u(t)\rangle = \langle f(t), u(t)\rangle, \quad \text{em } L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$$

Integrando em $[0,T]$, concluímos que

$$\int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle dt + \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt, \quad \text{em } L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'),$$

que nos fornece

$$\int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle dt = \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt.$$

Substituindo a igualdade acima em (4.30) obtemos

$$\int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \chi(t), \varphi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle M(a(\varphi(t)))\Lambda\varphi(t), u(t) - \varphi(t)\rangle dt \geq 0,$$

o que implica

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(a(\varphi(t)))\Lambda\varphi(t), u(t) - \varphi(t)\rangle dt \geq 0.$$

Vamos considerar $\varphi(t) = u(t) - \lambda w(t)$, com $w \in L^4(0,T;V)$. Supondo que $\lambda > 0$ e substituindo φ na desigualdade acima temos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(a(\varphi(t)))\Lambda\varphi(t), u(t) - \varphi(t)\rangle dt \geq 0. \tag{4.31}$$

Como $M(a(u(t)))\Lambda$ é um operador hemicontínuo, temos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(a(u(t) - \lambda w(t)))\Lambda(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle dt \longrightarrow$$
$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(a(u(t)))\Lambda u(t), w(t)\rangle dt \forall\ w \in L^4(0,T;V) \text{ e } \lambda \to 0. \tag{4.32}$$

De fato, defina

$$g_\lambda(t) = \langle \chi(t) - M(a(u(t) - \lambda w(t)))\Lambda(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle$$

e

$$g_0(t) = \langle \chi(t) - M(a(u(t)))\Lambda u(t), w(t)\rangle.$$

Pela hemicontinuidade de $M(a(u(t)))\Lambda$ temos que

$$\lim_{\lambda\to 0} g_\lambda(t) = g_0(t), \quad \text{q.t.p. em } t$$

e como $\lambda \to 0$, λ é limitado, digamos $|\lambda| \leq C_0$. Temos, omitindo o argumento t para simplificar notação, que

$$\begin{aligned}
|g_\lambda(t)| &= |\langle \chi - M(a(u-\lambda w))\Lambda(u-\lambda w), w\rangle| \\
&\leq ||\chi||_{V'}||w|| + ||M(a(u-\lambda w))\Lambda(u-\lambda w)||_{V'}||w|| \\
&\leq ||\chi||_{V'}||w|| + M(a(u-\lambda w))||u-\lambda w||||w|| \\
&\leq ||\chi||_{V'}||w|| + M(a(u-\lambda w))(||u|| + C_0||w||)||w|| \\
&= ||\chi||_{V'}||w|| + M(a(u-\lambda w))(||u||||w|| + C_0||w||^2) \\
&\leq ||\chi||_{V'}||w|| + (\alpha||u-\lambda w||^2 + \beta_2)(||u||||w|| + C_0||w||^2) \\
&\leq ||\chi||_{V'}||w|| + (2^2||u||^2 + 2^2C_0^2||w||^2 + \beta_1)(||u||||w|| + C_0||w||^2) \\
&= ||\chi||_{V'}||w|| + 4||u||^3||w|| + 4C_0||u||^2||w||^2 + 4C_0^2||u||||w||^3 + 4C_0^2||w||^4 \\
&+ \beta_1||u||||w|| + \beta_1 C_0||w||^2
\end{aligned}$$

Como $\chi \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$ e $u, w \in L^4(0,T;V)$, então pela desigualdade de Hölder e de Young, Proposições 1.12 e Corolário 1.14, temos que

$$||\chi(t)||_{V'}||w(t)|| + 4||u(t)||^3||w(t)|| + 4C_0||u(t)||^2||w(t)||^2 + 4C_0^2||u(t)||||w(t)||^3 + 4C_0^2||w(t)||^4 + \beta_1||u(t)||||w(t)|| + \beta_1 C_0||w(t)||^2 \in L^1(0,T)$$

Portanto, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.20, que

$$g_0 \in L^1(0,T) \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda \to 0} \int_0^T g_\lambda(t)dt = \int_0^T g_0(t)dt,$$

o que prova (4.32).

Logo, de (4.31) e (4.32) obtemos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(a(u(t)))\Lambda u(t), w(t)\rangle dt \geq 0 \quad \forall\ w \in L^4(0,T;V). \tag{4.33}$$

Se $\lambda < 0$, então

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(a(a(u(t) - \lambda w(t))))\Lambda(a(u(t) - \lambda w(t))), w(t)\rangle dt \leq 0. \tag{4.34}$$

Da hemicontinuidade de $M(a(u(t)))\Lambda$ segue que

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(a(u(t)))\Lambda u(t), w(t)\rangle dt \leq 0 \quad \forall\ w \in L^4(0,T;V). \tag{4.35}$$

De (4.33) e (4.35) concluímos que

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(a(u(t)))\Lambda u(t), w(t)dt = 0, \quad \forall\ w \in L^4(0,T;V).$$

Portanto,

$$\chi(t) = M(a(u(t)))\Lambda u(t)$$

A demonstração para verificar que a condição inicial (4.8) é válida é totalmente análoga ao que foi feito para o problema (3.1)-(3.4). □

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos dois problemas do tipo Navier-Stokes com viscosidade variável. O primeiro deles foi o caso estacionário (2.1)-(2.3) e de evolução (3.1)-(3.4) com viscosidade na forma $\nu = \nu_0 + \nu_1||u||^2$, com $\nu_0, \nu_1 > 0$ constantes positivas. O caso estacionário desse problema foi investigado com o intuito de conhecermos as características e propriedades do operador envolvido. Para este caso mostramos a existência e unicidade da solução para $n \leq 4$. Para o problema de evolução mostramos a existência de solução para $n \leq 4$ e unicidade da mesma para $n \leq 3$.

O segundo problema estudado foi o caso de evolução com viscosidade variável mais geral (4.1)-(4.4). Onde mostrado a existência de solução pra $n \leq 4$. Para os problemas de evolução utilizamos o Método de Galerkin acoplado com argumentos de compacidade. No caso estacionário utilizamos este mesmo método com argumentos de ponto fixo.

Futuramente, é de nosso interesse aprofundar os estudos de modelos envolvendo as equações de Navier-Stokes. Principalmente para o caso de viscosidade variável mais geral, onde foi possível mostrar apenas a existência de solução.

Apêndice A:

Dedução das Equações de Navier-Stokes

Neste apêndice será mostrada a dedução das equações de Navier-Stokes para um fluido viscoso e incompressível. Este estudo foi realizado com base no trabalho de Melo e Neto [21]. Os fluidos, diferentes dos sólidos, tem a capacidade de escoamento. Podemos descrever esse movimento observando a trajetória de cada partícula ou a velocidade da partícula em um determinado ponto. Estas maneiras de descrever o comportamento de um fluido são chamadas, respectivamente, de descrição lagrangeana e descrição euleriana.

Mais formalmente, vamos considerar $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ a região no espaço ocupada por uma porção de fluido no instante $t = 0$. Na descrição lagrangeana temos a função fluxo $\phi(a, t)$ cuja curva descreve a trajetória da partícula que ocupa a posição a no instante $t = 0$, para cada $a_i \in \Omega_0$. E na descrição euleriana temos a velocidade $v(x, t)$ da partícula que, no instante t, ocupa a posição x.

Como sabemos, a velocidade é a derivada da posição em relação ao tempo. Logo, obtemos a seguinte relação

$$v(\phi(a, t), t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(a, t), \quad a \in \Omega_0, \tag{A.36}$$

uma vez que ϕ descreve a trajetória de uma partícula do fluido, temos $\phi_t(a) = x$, onde $\phi(a, t) = \phi_t(a)$ e x é a posição da partícula em um instante t. Supondo que exista ϕ e que a mesma seja invertível, podemos reescrever (A.36) como

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}[\phi(\phi_t^{-1}(x), t)]. \tag{A.37}$$

Conhecida a trajetória podemos obter a velocidade, através da relação (A.37). Do mesmo modo, se tivermos a velocidade podemos obter a trajetória $\phi(a, t)$ resolvendo-se, para cada $a \in \Omega_0$, a equação ordinária

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}c &= v(c, t) \\ c(0) &= a \end{cases} \tag{A.38}$$

onde $\phi(a,t)$ é definida como o valor da solução (A.38) no instante de tempo t.

Sempre que nos referirmos a função fluxo ϕ neste trabalho estaremos supondo que a mesma existe e possui todas as propriedades de diferenciabilidade e invertibilidade que forem necessárias. Isto é, se Ω_t é a região do espaço ocupada pelo fluido no instante t, admitimos que

$$\begin{array}{rccc} \phi_t: & \Omega_0 & \longrightarrow & \Omega_t \\ & x & \longmapsto & \phi(x,t) \end{array}$$

é diferenciável e possui inversa diferenciável.

A.1 Derivada Material e Teorema do Transporte

Seja $f(x,t)$, com $x \in \Omega_t$ e $c(t)$, uma trajetória. Definimos como derivada material, denotada por $\frac{Df}{Dt}$, a derivada, em relação ao tempo, da composta $f(c(t),t)$. Tomando $f(c(t),t) = f_c(t)$ e utilizando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} f_c'(t) &= \nabla f(c(t),t)\cdot \frac{d}{dt}c(t) + \frac{\partial}{\partial t}f(c(t),t)\frac{dt}{dt} \\ &= \nabla f(c(t),t)\cdot \upsilon(c(t),t) + \frac{\partial}{\partial t}f(c(t),t) \\ &= \left(\upsilon\cdot\nabla f + \frac{\partial}{\partial t}f\right)(c(t),t) \end{aligned}$$

onde $\cdot$ representa o produto interno e ∇ o operador gradiente. Logo, a derivada material de f é dada por

$$\frac{Df}{Dt} = \upsilon.\nabla f + \frac{\partial}{\partial t}f \tag{A.39}$$

Iremos enunciar e demonstrar um resultado de fundamental importância para este estudo, que é o Teorema do Transporte. Antes, no entanto, precisamos enunciar os seguintes resultados, necessários para a demonstração do mesmo.

Teorema A.2 (Teorema da Divergência)**.** *Seja X um campo de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ e $K \subset U$ um domínio com fronteira regular de classe C^k com $(k \geq 1)$, então vale a igualdade abaixo*

$$\int_{\partial K} \langle X, \nu\rangle = \int_K \operatorname{div} X dx$$

Demonstração. Ver E. L. Lima [14] p. 121. □

Teorema A.3 (Teorema de Mudança de Variável)**.** *Sejam $h: U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1, onde U e V são abertos de $\mathbb{R}$, e $f: h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável, onde X é um subconjunto compacto J-mensurável de U. Então vale a seguinte igualdade:*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x))\cdot |deth'(x)|dx. \tag{A.40}$$

Demonstração. Ver E. L. Lima [13] p. 139. □

De posse desses dois resultados podemos agora enunciar e demonstrar o Teorema do Transporte.

Teorema A.4 (Teorema do Transporte)**.** *Satisfeitas as hipóteses sobre a função fluxo ϕ mencionadas em (A.38) e sendo Ω_t uma região onde se pode aplicar o Teorema da Divergência, Teorema A.2, vale a seguinte fórmula:*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_t}\left(\frac{Df}{Dt} + f\,\mathrm{div}\,\upsilon\right)(x,t)dx \tag{A.41}$$

Demonstração. Aplicando a mudança de variável $x = \phi_t(y)$, na integral do primeiro membro da igualdade (A.41), segue, pelo Teorema de Mudança de Variável, Teorema A.3, que

$$\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y),t)|J(y,t)|dy \tag{A.42}$$

onde

$$J(y,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

Devemos observar que $J(y,0) = 1$ para todo $y \in \Omega_0$, pois neste caso a função trajetória é a identidade. E ainda, por hipótese, temos que ϕ_t é sempre invertível, logo $J(y,t)$ é sempre diferente de zero. Como o determinante é uma função contínua, concluímos que $J(y,t)$ é sempre positivo. Podemos reescrever (A.42) como

$$\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y),t)J(y,t)dy. \tag{A.43}$$

Substituindo (A.43) na derivada em (A.41) obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} f(\phi_t(y),t)J(y,t)dy, \tag{A.44}$$

cujo termos do segundo membro tem domínio de integração independente do tempo. Podemos trocar a ordem de integração e derivação, o que nos dá, utilizando a regra do produto para derivada, a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(x,t)dx &= \int_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial t}[f(\phi_t(y),t)]J(y,t)dy \\ &+ \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y),t)\frac{\partial}{\partial t}J(y,t)dy\end{aligned} \tag{A.45}$$

Na primeira integral do segundo membro da igualdade acima nos temos a derivada, em relação ao tempo, da composta de f com a trajetória ϕ_t, que é a derivada material de f. Logo, podemos reescrever essa integral como

$$\int_{\Omega_0}\frac{Df}{Dt}(\phi_t(y),t)J(y,t)dy$$

fazendo a mudança de variável $x = \phi_t(y)$ temos

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t}[f(\phi_t(y),t)]J(y,t)dy = \int_{\Omega_t} \frac{Df}{Dt}(x,t)dx. \tag{A.46}$$

Na última integral de (A.45) devemos obter

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} \tag{A.47}$$

no ponto (y,t). Utilizando o Teorema de Schwarz e de (A.37) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_i}{\partial y_j}(y,t) = \frac{\partial}{\partial y_j}\frac{\partial\phi_i}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial}{\partial t}[\upsilon_i(\phi(y,t),t)]$$

utilizando a regra da cadeia concluímos

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi_i}{\partial y_j}(y,t) = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}(\phi(y,t),t)\frac{\partial\phi_k}{\partial y_j}(y,t). \tag{A.48}$$

Substituindo (A.48) em (A.47) e utilizando as propriedades usuais dos determinantes obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{3}\begin{vmatrix} \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{3}\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^{3}\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_k}{\partial y_3} \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{A.49}$$

onde υ é calculada no ponto $(\phi_t(y),t)$ e as ϕ_i e suas derivadas no ponto (y,t).

Vamos analisar o primeiro dos três somatórios. Quando $k = 1$ temos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}\frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}\frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}\frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}J.$$

Quando $k = 2$ temos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = 0$$

pois o determinante de uma matriz com duas filas iguais é nulo. O mesmo acontece quando $k = 3$. Logo,

$$\sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_2} & \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} J$$

Utilizando raciocínio análogo no segundo e terceiro somatório de (A.49) concluímos que

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} J + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} J + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3} J = \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3} \right) J = J \operatorname{div} \upsilon$$

daí,

$$\int_{\Omega_0} f(\phi_t(y), t) \frac{\partial}{\partial t} J(y, t) dy = \int_{\Omega_0} f(\phi_t(y), t) [\operatorname{div} \upsilon(\phi_t(y), t)] J(y, t) dy.$$

Que através da mudança de variável $x = \phi_t(y)$ nos dá

$$\int_{\Omega_t} f(x, t) \operatorname{div} \upsilon(x, t) dx. \tag{A.50}$$

Substituindo (A.46) e (A.50) em (A.45) temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \frac{Df}{Dt}(x, t) dx + \int_{\Omega_t} f(x, t) \operatorname{div} \upsilon(x, t) dx, \tag{A.51}$$

e está demonstrado o resultado. □

Das propriedades do divergente sabemos

$$\operatorname{div}(f\upsilon) = \nabla f \cdot \upsilon + f \operatorname{div} \upsilon,$$

o que implica

$$f \operatorname{div} \upsilon = \operatorname{div}(f\upsilon) - \nabla f \cdot \upsilon. \tag{A.52}$$

Substituindo a igualdade acima e (A.39) em (A.41) obtemos uma nova formulação para o Teorema do Transporte (A.4)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\upsilon) \right) (x, t) dx. \tag{A.53}$$

A.2 Conservação da Massa e Fluidos Incompressíveis

Seja $\rho(x, t)$ a função que nos dá a densidade da porção de fluido que ocupa a região Ω_t no instante t. A variação da densidade em cada partição da nossa região

Ω é a razão dada pela variação da massa e a variação do volume do fluido que ocupa essa partição de Ω. A partir do mesmo raciocínio utilizado para a dedução da integral de Riemann obtemos que

$$\int_{\Omega} \rho(x,t)dx.$$

nos dá a massa do fluido que ocupa a região Ω_t no instante t.

Se supormos que a massa se mantém constante para todo $t \geq 0$ temos

$$\int_{\Omega_0} \rho(x,0)dx = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx.$$

Vamos assumir que ρ é pelo menos de classe C^1. Como a massa é constante para todo $t \geq 0$ sua derivada em relação ao tempo é nula. Aplicando o Teorema do Transporte na sua segunda formulação (A.53) para $f(x,t) = \rho(x,t)$ obtemos

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \upsilon)\right)(x,t)dx.$$

que é valida para todo aberto Ω_t. Logo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \upsilon) = 0 \tag{A.54}$$

chamada de *Equação de Conservação da Massa*.

Os fluidos que apresentam volume sempre constante são chamados incompressíveis, neste caso temos

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} dx = 0,$$

uma vez que o volume de qualquer porção de fluido se mantem constante para todo $t \geq 0$. Aplicando o Teorema do Transporte, Teorema A.4 para a função constante $f \equiv 1$ obtemos a igualdade

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{D1}{Dt} + 1 \operatorname{div} \upsilon\right) dx = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \upsilon dx,$$

que é válida para todo $t \geq 0$. Daí,

$$\operatorname{div} \upsilon = 0 \tag{A.55}$$

A.3 Conservação do momento

O momento linear de um corpo é o produto da massa pela velocidade do mesmo. Para fluido, utilizando o mesmo raciocínio feito para a conservação da massa, obtemos que o momento linear de uma porção de fluido que ocupa, no instante t, a região Ω_t é dado porção

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t)\upsilon(x,t)dx \tag{A.56}$$

A segunda lei de Newton nos diz que a força total atuando em um sistema é igual a massa vezes a aceleração, que é a derivada do momento linear. Para fluidos teremos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,t)\upsilon(x,t)dx$$

será igual a soma das forças internas e externas atuando sobre a porção de fluido que ocupa, no instante t, a região Ω_t.

Devemos determinar expressões para as forças externas e internas. Denotaremos por $f(x,t)$ o somatório das forças externas por unidade de massa que atuam na porção do fluido que ocupa a região Ω_t, no instante t, supondo que essas forças sejam conhecidas. Então, a força externa total é dada por

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t)f(x,t)dx$$

Para descrever as forças internar vamos desconsiderar ações a distância entre as partículas. Ou seja, estamos considerando apenas forças de contato. supondo ainda que exista um campo de tensões $\tau(x,t,n)$ que dê a força de contato por unidade de área atuando numa superfície perpendicular a n no ponto x, no instante t. Onde $\partial\Omega_t$ denota a fronteira da região Ω_t e n o vetor unitário normal a $\partial\Omega_t$. Então, as forças internas que atuam na porção do fluido que, no instante t, ocupa a região $\partial\Omega_t$ são dadas pela integral

$$\int_{\partial\Omega_t} \tau(x,t,n)dS_x.$$

A segunda lei de Newton pode então ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(x,t)\upsilon(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)f(x,t)dx + \int_{\partial\Omega_t} \tau(x,t,n)dS_x. \tag{A.57}$$

O resultado a seguir nos permitira descrever melhor o campo de tensão $\tau(x,t,n)$.

Teorema A.5 (Teorema de Cauchy)**.** *Sejam $a(x,t) \in C^1$ e $b(x,t), c(x,t,n) \in C^0$ funções escalares definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, todo $x, \in \Omega_t$ e todo vetor unitário n de x. São tais que a, b e c satisfazem a segunda lei de Newton, temos*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} a(x,t)dx = \int_{\Omega_t} b(x,t)dx + \int_{\partial\Omega_t} c(x,t,n)ds$$

onde n é o vetor unitário normal a $\partial\Omega_t$. Então existe um único campo de vetores $d(x,t)$ de Ω_t tal que

$$c(x,t,n) = d(x,t)n$$

Demonstração. ver J. E. Marsden e T. J. Hughes [18] p. 127. □

Aplicando o Teorema de Cauchy, Teorema A.5, para $a(x,t) = \rho(x,t)\upsilon(x,t)$, $b(x,t) = \rho(x,t)f(x,t)$ e $c(x,t,n) = \tau(x,t,n)$ garantimos a existência de uma função matricial $S(x,t)$ tal que

$$\tau(x,t,n) = S(x,t)n,$$

lembrando que pela 3ª lei de Newton (conhecida como lei de ação e reação) temos $-\tau(x,t,n) = \tau(x,t,-n)$.

A segunda lei de Newton fica expressa como, omitindo-se os argumentos (x,t),

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\upsilon dx = \int_{\Omega_t} \rho f dx + \int_{\partial\Omega_t} SndS_x. \tag{A.58}$$

Aplicando o Teorema do Transporte, Teorema A.4, na derivada da igualdade acima e usando (A.52) temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\upsilon dx &= \int_{\Omega_t} \left(\frac{D}{Dt}(\rho\upsilon) + \rho\upsilon \operatorname{div}\upsilon\right) dx \\
&= \int_{\Omega_t} \left(\frac{D\rho}{Dt}\upsilon + \frac{D\upsilon}{Dt}\rho + \rho\upsilon \operatorname{div}\upsilon\right) dx \\
&= \int_{\Omega_t} \left(\upsilon\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}\upsilon\right) + \rho\frac{D\upsilon}{Dt}\right) dx
\end{aligned} \tag{A.59}$$

pela equação de conservação da massa (A.54), temos que termo que multiplica υ é nulo. Basta verificar a equivalência entre as duas formulações para o Teorema do Transporte, Teorema A.4. Segue que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\upsilon dx = \int_{\Omega_t} \rho\frac{D\upsilon}{Dt} dx \tag{A.60}$$

Na integral de superfície aplicamos o Teorema da Divergência, Teorema A.2, que nos dá

$$\int_{\partial\Omega_t} SndS_x = \int_{\Omega_t} \operatorname{Div} S dx \tag{A.61}$$

onde $\operatorname{Div} S = (\operatorname{div} S_1, \operatorname{div} S_2, \operatorname{div} S_3)$ e cada S_i denota o i-éssimo vetor-linha de S. Substituindo (A.60) e (A.61) em (A.58) obtemos

$$\int_{\Omega_t} \rho\frac{D\upsilon}{Dt} dx = \int_{\Omega_t} \rho f dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{Div} S dx$$

que implica

$$\int_{\Omega_t} \left(\rho\frac{D\upsilon}{Dt} - \rho f - \int_{\Omega_t} \operatorname{Div} S\right) dx = 0$$

valida pra todo Ω_t. Obtemos então

$$\rho\frac{D\upsilon}{Dt} - \rho f - \int_{\Omega_t} \operatorname{Div} S = 0, \tag{A.62}$$

chamada *equação de conservação do momento.*

A.4 Fluidos não-viscosos e Equação de Euler

A viscosidade de um fluido está relacionada com a sua capacidade de escoar. Quanto mais viscoso o fluido maior sua resistência ao escoamento. Ao supormos que um fluido é não-viscoso estamos tomando por hipótese a ausência de atrito entre as moléculas. Isto é, as forças internas que agem no fluido atuam perpendiculares à superfície Ω_t. Logo, S_n deve ser sempre paralela ao vetor n, existe então uma função $p(x,t)$ tal que

$$S(x,t)n = -p(x,t)In$$

$$n[S(x,t) - p(x,t)I] = 0$$

$$S(x,t) - p(x,t)I = 0$$

$$S(x,t) = -p(x,t)I$$

onde I denota a matriz identidade e a função p é chamada pressão.

Observemos que

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p(x,t) & 0 & 0 \\ 0 & p(x,t) & 0 \\ 0 & 0 & p(x,t) \end{bmatrix}$$

calculando o divergente de S temos

$$\operatorname{Div} S = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} p(x,t), \frac{\partial}{\partial x_2} p(x,t), \frac{\partial}{\partial x_3} p(x,t) \right) = \nabla p \tag{A.63}$$

Supondo que o fluido seja incompressível, de (A.55) e da definição de derivada material (A.39) para $f = \upsilon$, segue

$$\frac{D\upsilon}{Dt} = (\upsilon \cdot \nabla)\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial t}. \tag{A.64}$$

Substituindo (A.64) na equação de conservação do momento (A.62) e de (A.55) obtemos

$$\begin{aligned} \rho(\upsilon \cdot \nabla)\upsilon + \rho\frac{\partial \upsilon}{\partial t} &= \rho f - \nabla p \\ \operatorname{div} \upsilon &= 0 \end{aligned} \tag{A.65}$$

A.5 Equação de Navier-Stokes

Na modelagem de fenômenos rais nem sempre podemos desconsiderar a viscosidade. Ao tentarmos incluir forçar de viscosidade as nossas hipóteses obtemos (MELO *apud* [9], [8]) uma aproximação para S dada por

$$S = -pI + \mu'(\operatorname{div} \upsilon)I + \mu(G + G^t), \tag{A.66}$$

onde μ' e μ são constantes, G^t é matriz transposta de G e

$$G = \nabla v = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Se supormos que o fluido é incompressível eliminamos o termo $\mu'(\operatorname{div} v)I$ em (A.66) e ainda obtemos que $\operatorname{Div}(G + G^t) = \Delta v$. De fato,

$$G^t = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

logo,

$$G + G^t = \begin{bmatrix} 2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & 2\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} & 2\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Calculando o divergente de $G + G^t$ obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}(G + G^t) \;=\; & \Bigg(2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ & \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3 \partial x_2}, \\ & \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\Bigg) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right),\right. \\
& \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right),\right. \\
& \left.\left.\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)\right)\right. \\
= & \left(\Delta v_1+\frac{\partial}{\partial x_1}(\operatorname{div} v), \Delta v_2+\frac{\partial}{\partial x_2}(\operatorname{div} v), \Delta v_3+\frac{\partial}{\partial x_3}(\operatorname{div} v)\right) \\
= & \Delta v
\end{aligned}
$$

Calculando o divergente de (A.66), lembrando que o divergente da soma é a soma dos divergentes, obtemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Div} S &= -\operatorname{Div}(pI)+\mu \operatorname{Div}(G+G^t) \\
&= -\nabla p+\mu\Delta v \qquad \text{(A.67)}
\end{aligned}
$$

Substituindo (A.67) na equação de conservação do momento (A.62) temos

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho f+\mu\Delta v-\nabla p.$$

usando a definição de derivada material para $f=v$, chegamos na equação

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho(v\cdot\nabla)v &= \mu\Delta v-\nabla p \qquad \text{(A.68)} \\
\operatorname{div} v &= 0 \qquad \text{(A.69)}
\end{aligned}
$$

conhecida como a *equação de Navier-Stokes* para um fluido viscoso e incompressível e a constante μ é chamada de coeficiente de viscosidade.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, G. M; MIRANDA, M. M; MEDEIROS, L.A. **On the Navier-Stokes Equation with Variable Viscosity in a Noncylindrical Domain.** Applicable Analysis, Vol.86, N.3, March 2007, 287-313.

[2] ARNOUD, M. M. **Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável na Forma Estacionária**. 2012. Dissertação(Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Pará, Belém. 2012.

[3] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: Wiley Classics. Wiley-Interscience. 1995.

[4] **BORIS Grigoryevich Galerkin**. Saint-Petersburg: Structural Mechanics and Theory of Elasticity Department, Saint-Petersburg State Polytechnical University. Disponível em: <http://smitu.cef.spbstu.ru/galerkin_en.htm>. Acesso em: 22 mai. 2013.

[5] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations**. Paris: Spinger, 2011.

[6] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. **Introdução à Análise Funcional.** Maringá: UEM/DMA, 2007.

[7] CODDINGTON, E.A; LEVINSON, N. **Theory of ordinary differential equations**. New York: McGraw-Hill Book Company. Inc, 1955.

[8] GURTIN, M; L, MARTINS. Cauchy's theorem in classical physics. **Arch. Rat. Mech**. Anal. 60 (1976) (305-324)

[9] KREISS, H; J, LORENZ. **Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations**. Academic-Press, 1989.

[10] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applicatins**. New Yourk: John Wiley & Sons. Inc, 1978.

[11] LADYZHENSKAYA, O.A. **The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow**. Gordon and Breach Science Publishers Inc, 1969.

[12] LERAY, J. **Essai sur les mouvements plans d?un liquide visqueux que limitent des parois**, J. Math Pures Appl. t. XIII(1934), 331-418.

[13] LIMA, E. L. **Análise Real Volume 2: Funções de n Variável**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004

[14] LIMA, E. L. **Análise Real Volume 3: Análise Vetorial**. Rio de Janeiro: IMPA, 2006

[15] LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol. 2**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011

[16] LIONS, J. L. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**. Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[17] LIONS, J. L; PRODI, G. **Un théorème d?existence et unicité dans les equations de Navier-Stokes en dimension 2**, C. R. Acad. Sci. Paris, 248 (1959, pp. 319-321), Ouvres Choisies de Jacques-Louis Lions, Vol.1-EDP-sciences, Paris, 2003, pp. 117.

[18] MARSDEN, J. E; HUGHES, T. J. **Mathematical Foundations of Elasticity**. New Jersey: Prentice-Hall, INC.

[19] MEDEIROS, L. A. **Applications of Monotony Method**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2005.

[20] MEDEIROS, L. A. da J; MIRANDA, M. A. M. **Espaços de Sobolev : Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000

[21] MELO, S. T; NETO, F, M. **Mecênica dos Fluidos e Equações Diferenciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. p. 1-11.

[22] NETO, R. M. S. **Sobre as Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável em um Domínio Cilíndrico**. 2008. Dissertação(Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Pará, Belém. 2008.

[23] PINHEIRO, C. C. V. **Análise matemática de uma equação parabólica fortemente não-linear do tipo Navier-Stokes**. 2012. Dissertação(Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Pará, Belém. 2012.

[24] REZENDE, V. **O Método de Galerkin**. 2005. Dissertação(Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá. 2005.

[25] TARTAR, L. **Partial Differential Equations Models in Oceanography**, Carnegie Mellon University-1999.

[26] TEMAM. R. **Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis**. New york: American Mathematical Society, 2001.