RAFAEL CAZAL SILVA

DISCUSSÃO SOBRE MORFISMOS IRREDUTÍVEIS NAS CATEGORIAS DOS COMPLEXOS E DE HOMOTOPIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2016

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

S586d
2016

Silva, Rafael Cazal, 1991-
Discussão sobre morfismos irredutíveis nas categorias dos complexos e de homotopia / Rafael Cazal Silva. - Viçosa, MG, 2016.
vii, 96f. ; 29 cm.

Orientador : Sônia Maria Fernandes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 95-96.

1. Categorias (Matemática). 2. Álgebra. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 512.62

RAFAEL CAZAL SILVA

DISCUSSÃO SOBRE MORFISMOS IRREDUTÍVEIS NAS CATEGORIAS DOS COMPLEXOS E DE HOMOTOPIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de Fevereiro de 2016

Abílio Lemos Cardoso Júnior

Viktor Bekkert

Sônia Maria Fernandes
(Orientadora)

Dedico este trabalho aos meus pais,
Paulo e Marifátima.

O êxito da vida não se mede pelo caminho que você conquistou, mas sim pelas dificuldades que superou no caminho.

Abraham Lincoln

Agradecimentos

Agradeço à Deus por tudo.

Aos meus pais, Paulo (*em memória*) e Marifátima, pela educação que me deram e por terem me mostrado ainda cedo a importância do estudo.

À minha orientadora, Sônia Fernandes, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções e incentivo. Enfim pela pessoa maravilhosa que é.

À minha namorada Diánis, por ter vivenciado todos os momentos durante esta caminhada e ter me ajudado a superar várias barreiras. Você foi essencial para a concretização deste sonho.

Aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Aos membros da banca pelas observações, sugestões e comentários.

Aos professores e funcionários do DMA - UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Ao IF Sudeste MG - Campus Rio Pomba, local onde fiz a graduação e pelo qual tenho um enorme carinho. Em especial, agradeço aos professores do Departamento de Matemática, Física e Estatística - DMAFE, por todo incentivo dado durante a graduação.

Ao amigo Marcos Coutinho, por ter compartilhado vários momentos da minha formação acadêmica desde a graduação e ter me apoiado em todos eles.

Ao amigo Marcelo Filardi, pelo suporte indispensável na minha chegada em Viçosa e pelos conselhos valiosos durante esta caminhada.

À todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

SILVA, Rafael Cazal, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2016. **Discussão sobre Morfismos Irredutíveis nas Categorias dos Complexos e de Homotopia**. Orientadora: Sônia Maria Fernandes.

Neste trabalho, caracterizamos e apresentamos algumas propriedades dos morfismos irredutíveis na categoria de complexos $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e na categoria homotópica $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$, onde $\mathcal{P}$ é a categoria dos módulos projetivos finitamente gerados sobre uma álgebra de Artin Λ e $\mathcal{I}$ é o ideal de $\mathcal{P}$ formado pelos morfismos radicais, de acordo com o artigo [9]. Com base no artigo [1], caracterizamos um certo tipo de triângulo distinguido em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ com os dois primeiros morfismos irredutíveis na categoria triangulada $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Estudamos também alguns resultados apresentados em [14] sobre morfismos irredutíveis na categoria homotópica $\mathcal{K}^{b}(\Lambda)$, sendo Λ uma álgebra de dimensão global finita.

Abstract

SILVA, Rafael Cazal, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, February, 2016. **Discussion about Irreducible Morphisms in Categories of Complexes and of Homotopy**. Adiviser: Sônia Maria Fernandes.

In this work, we characterize and present some properties of morphisms irreducible in complexes category $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ and in homotopic category $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$, where $\mathcal{P}$ is the category of finitely generated projective modules over an Artin algebra Λ and $\mathcal{I}$ is the ideal of $\mathcal{P}$ formed by radical morphisms, according with article [9]. Based on article [1], we characterize a certain type of distinguished triangle in $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ with the two first irreducible morphisms in the triangulated category $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. We also study some results presented in [14] about irreducible morphisms in homotopic category $\mathcal{K}^{b}(\Lambda)$, being Λ an algebra of finite global dimension.

Introdução

Seja Λ uma K-álgebra de Artin, o estudo das classes de isomorfismos dos Λ-módulos indecomponíveis é um dos principais objetivos na Teoria de Representações. Neste sentido, na década de 70, os matemáticos Maurice Auslander e Idun Reiten introduziram em [3] (veja também [4]) a noção de morfismos irredutíveis e as sequências quase cindidas, mais conhecidas como sequências de Auslander-Reiten, na categoria $mod\,\Lambda$ dos Λ-módulos finitamente gerados, as quais são fundamentais nessa categoria, uma vez que permitem descrever os módulos indecomponíveis e os morfismos irredutíveis entre os mesmos.

Mais tarde, as sequências de Auslander-Reiten foram estendidas para a categoria derivada limitada $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ de $mod\,\Lambda$, no caso em que Λ é uma álgebra de dimensão global finita, dando origem aos triângulos de Auslander-Reiten, cuja existência em tal categoria foi provada por Happel, o qual ainda descreveu os triângulos de Auslander-Reiten no caso de uma álgebra hereditária [13]. Mais geral, Krause provou a existência destes triângulos em categorias trianguladas compactamente geradas [18].

Recentemente, os triângulos de Auslander-Reiten e os morfismos irredutíveis na categoria derivada, e equivalentemente na categoria de homotopia (veja Teorema 2.21 e Observação 2.23), têm sido estudados. Em [14], Happel, Keller e Reiten mostraram a existência de morfismos irredutíveis, além de descreverem os triângulos de Auslander-Reiten, na categoria derivada limitada de módulos finitamente gerados sobre Anéis Gorenstein. Além disso, no caso de módulos sobre uma álgebra de dimensão finita, eles forneceram condições para a existência de morfismos irredutíveis na categoria derivada limitada $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Scherotzke em [?] analisou os triângulos de Auslander-Reiten nesta categoria, além de provar que existem morfismos irredutíveis cujo domínio ou contradomínio é nulo, no caso que Λ é uma álgebra simples. Mais ainda, ela mostrou que no quiver de Auslander-Reiten de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ não estão todos morfismos irredutíveis de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Bautista, Souto e Zuazua em [5] estudaram os morfismos irredutíveis terminando em um complexo perfeito e morfismos irredutíveis entre complexos não-perfeitos na categoria derivada limitada $\mathcal{D}^b(\Lambda)$.

Neste trabalho, destacamos os estudos de Giraldo e Merklen (veja [9]) sobre os morfismos irredutíveis nas categorias de complexos $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ e de homotopia $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, onde $\mathcal{P}$ é uma subcategoria plena Krull-Schmidt $\mathcal{P}$ fechada para somas e somandos diretos de uma categoria aditiva $\mathcal{A}$.

Com base em [9], caracterizamos e apresentamos algumas propriedades dos morfismos irredutíveis na categoria $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ formada pelos complexos radicais de $\mathcal{C}(\mathcal{P})$, onde $\mathcal{P}$ é a categoria dos Λ-módulos projetivos finitamente gerados e $\mathcal{I}$ é o ideal de $\mathcal{P}$ formado pelos morfismos radicais. Mostramos que os morfismos irredutíveis de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ são divididos em três formas (Proposição 3.8). Por último vemos que a caracterização dos morfismos irredutíveis de $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ segue o mesmo padrão de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e que são divididos de acordo com (Proposição 3.8) também. Conforme o préprint [1], utilizamos tais resultados para caracterizar os triângulos distinguidos com os dois primeiros morfismos irredutíveis na categoria triangulada $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ e estudar alguns resultados apresentados em [14] sobre morfismos irredutíveis em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$.

O texto é estruturado da seguinte forma:

No capítulo 1, damos algumas definições e resultados preliminares sobre Teoria de Categorias, Álgebra Homológica e Teoria de Representações utilizados ao longo do trabalho.

No capítulo 2, apresentamos os principais conceitos sobre Categorias Trianguladas e exibimos dois exemplos de tais categorias, a Categoria Homotópica de uma categoria aditiva e a Categoria Derivada de uma categoria abeliana.

Os conceitos dos capítulos anteriores são importantes para a compreensão dos capítulos seguintes. Alguns resultados são expostos rapidamente. Assumimos que o leitor tenha alguma familiaridade com esses assuntos.

No capítulo 3, conforme o artigo [9], caracterizamos e apresentamos algumas propriedades dos morfismos irredutíveis nas categorias de complexos $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e de homotopia $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Utilizando alguns resultados sobre complexos homotopicamente minimais foi possível mostrar que "as mesmas caracterização e propriedades" dos morfismos irredutíveis em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ podem ser utilizadas em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$.

No capítulo 4, estudamos os triângulos distinguidos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{p_f} X[1]$ na Categoria Triangulada Homotópica $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, onde C_f é o cone de f, para o caso que f é um morfismo irredutível. Usamos as Formas Standard (Proposição 3.3), para obter triângulos distinguidos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \longrightarrow X[1]$ de f, onde o complexo W possui uma expressão mais simples com relação ao C_f em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Por fim, utilizamos a Proposição 3.8 e o Teorema 3.18 para caracterizarmos tais triângulos para o caso em que g é um morfismo irredutível.

Ainda neste capítulo, estudamos alguns resultados de [15], dentre os quais discutimos sobre a indecomponibilidade do cone de um morfismo irredutível e a existência de morfismos irredutíveis em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Para o primeiro, consideramos que Λ é uma álgebra de dimensão global finita e usamos a estrutura triangulada da categoria derivada $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Para o segundo, mostramos que algumas proposições apresentadas em [15] são consequências de alguns resultados que exibimos. Por último, usando alguns lemas de [24], vemos uma outra condição suficiente para que o C_f seja indecomponível em uma categoria triangulada Krull-Schmidt qualquer.

Nos capítulos 3 e 4, denotamos por Λ uma álgebra de Artin associativa com unidade e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K. Todos os conceitos e resultados apresentados nesse texto levarão em consideração essa estrutura de Λ, mesmo sabendo que em alguns casos, valem em um contexto mais geral.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos todas as definições e resultados necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. As demonstrações de muitos resultados serão omitidas, mas indicaremos referências de textos para maiores detalhes.

1.1 Categorias

Nesta seção, introduzimos as principais definições e resultados sobre a Teoria de Categorias. Mais detalhes podem ser encontrados em [17], [25] e [26] .

Definição 1.1. *Uma **categoria** $\mathcal{C}$ é composta por:*

1. *Uma classe $obj(\mathcal{C})$ de **objetos**;*

2. *Um conjunto de **morfismos** $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para quaisquer objetos X e Y, cujos elementos são denotados por $f : X \longrightarrow Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$. Além disso, $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \cap Hom_{\mathcal{C}}(Z,W) = \emptyset$ sempre que $(X,Y) \neq (Z,W)$ em $\mathcal{C}$.*

3. *Uma **composição** associativa*

$$\begin{array}{rcl} \circ : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

*para quaisquer objetos X, Y e Z. Mais ainda, para cada objeto X de $\mathcal{C}$, existe um morfismo **identidade** 1_X em $Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ tal que*

$$f \circ 1_X = f \text{ e } 1_X \circ g = g$$

para todos $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)$.

Por simplicidade, ao longo deste texto denotaremos a composição $g \circ f$ de morfismos em $\mathcal{C}$ por gf.

Exemplo 1.2. 1. *A categoria Sets. Os objetos de Sets são conjuntos e os morfismos são funções.*

2. *A categoria Groups tem como objetos os grupos e os morfismos são os homomorfismos de grupos.*

3. *A categoria $Vect_K$, onde K é um corpo, cujos objetos são K-espaços vetoriais e os morfismos são transformações lineares.*

As composições de morfismos nestas categorias são as usuais.

Um **diagrama** numa categoria $\mathcal{C}$ é um grafo cujos vértices e as flechas são objetos e morfismos em $\mathcal{C}$, respectivamente. Dizemos que um diagrama em $\mathcal{C}$ é **comutativo** sempre que a composição de morfismos ao longo de caminhos com o mesmo início e fim são iguais. Por exemplo, se o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ W \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

é comutativo, temos $gf = hk$. Nos próximos capítulos, muitas vezes representaremos o morfismo identidade 1_X em $\mathcal{C}$ como o diagrama $X = X$.

Definição 1.3. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma* ***subcategoria*** *de $\mathcal{C}$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$obj(\mathcal{D})$ é uma subclasse de $obj(\mathcal{C})$;*

2. *$Hom_{\mathcal{D}}(X,Y) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todos $X, Y \in obj(\mathcal{D})$;*

3. *A composição de morfismos em $\mathcal{D}$ é a mesma de $\mathcal{C}$;*

4. *Para cada objeto X em $\mathcal{D}$, os morfismos identidade em $Hom_{\mathcal{D}}(X,X)$ e em $Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ coincidem.*

A subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ é dita ***plena*** *se $Hom_{\mathcal{D}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todos objetos X, Y de $\mathcal{D}$.*

Exemplo 1.4. *A categoria $vect_K$, cujos objetos são K-espaços vetoriais de dimensão finita, é uma subcategoria plena de $Vect_K$. A categoria Ab, a qual possui como objetos os grupos abelianos, é uma subcategoria plena de Groups.*

Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo em uma categoria $\mathcal{C}$. Se $Y = X$, f é dito um **endomorfismo** de X. Denotaremos $End_{\mathcal{C}}(X) = Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$.

Dizemos que f é um **monomorfismo** (resp. **epimorfismo**) se f pode ser cancelado à esquerda (resp., à direita), isto é, para cada par de morfismos $g_1, g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(W,X)$ (resp., $h_1, h_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$) tais que $fg_1 = fg_2$ (resp., $h_1 f = h_2 f$) implica que $g_1 = g_2$ (resp., $h_1 = h_2$).

O morfismo f é um **isomorfismo** se existe um morfismo $h : Y \longrightarrow X$ em $\mathcal{C}$, chamado *inverso* de f, tal que $hf = 1_X$ e $fh = 1_Y$. Neste caso, h é único e denotado por f^{-1}. Se além disso f é um endomorfismo, chamamos f de **automorfismo** de X. Se existe um isomorfismo entre objetos X e Y, dizemos que X e Y são isomorfos e denotamos $X \cong Y$.

Um objeto de uma categoria $\mathcal{C}$ é dito **objeto zero** e denotado por 0 se existem únicos morfismos $g : 0 \to X$ e $h : X \to 0$ em $\mathcal{C}$ para todo objeto X de $\mathcal{C}$. O objeto zero é único a menos de isomorfismos. Dizemos que $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ é um **morfismo zero** se f fatora através do objeto zero. Tal morfismo será denotado por 0 também.

O **produto** de objetos $X_1, \ldots, X_n$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é o conjunto $\{\prod_{j=1}^n X_j, p_k; 1 \leq k \leq n\}$, onde $\prod_{j=1}^n X_j = X_1 \times \ldots \times X_n$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $p_k \in Hom_{\mathcal{C}}(\prod_{j=1}^n X_j, X_k)$, tal que para cada objeto Z de $\mathcal{C}$ e cada conjunto $\{f_k \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, X_k)$, com $k = 1, \ldots, n\}$, existe um único $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, \prod_{j=1}^n X_j)$ tal que, para todo $k = 1, \ldots, n$, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, "f_k"] & \\ \prod_{j=1}^n X_j \arrow[r, "p_k"'] & X_k \end{tikzcd}$$

Dualmente, o **coproduto** (ou **soma direta**) de objetos $X_1, \ldots, X_n$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é o conjunto $\{\bigoplus_{j=1}^n X_j, i_k; 1 \leq k \leq n\}$, onde $\bigoplus_{j=1}^n X_j = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $i_k \in Hom_{\mathcal{C}}(X_k, \bigoplus_{j=1}^n X_j)$, tal que para cada $Z \in obj(\mathcal{C})$ e cada conjunto $\{f_k \in Hom_{\mathcal{C}}(X_k, Z)$, com $k = 1, \ldots, n\}$, existe um único $f \in Hom_{\mathcal{C}}(\bigoplus_{j=1}^n X_j, Z)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[dr, "f_k"'] & \bigoplus_{j=1}^n X_j \arrow[d, dashed, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

é comutativo, para todo $k = 1, \ldots, n$. Geralmente, $\bigoplus_{j=1}^n X_j$ é chamado a soma direta de $X_1, \ldots, X_n$ e cada i_k é dito uma **inclusão canônica**.

Definição 1.5. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita* ***aditiva*** *se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para quaisquer objetos X_1 e X_2 de $\mathcal{C}$ existe a soma direta $X_1 \oplus X_2$ em $\mathcal{C}$.*

2. *Para cada par de objetos (X, Y), uma operação binária $+$ é definida sobre o conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal que $(Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), +)$ é um grupo abeliano;*

3. *A composição $\circ$ de morfismos é bilinear, isto é,*

$$f(g + g') = fg + fg' \text{ e } (f + f')g = fg + f'g$$

para todos $f, f' \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $g, g' \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$;

4. *$\mathcal{C}$ tem um* ***objeto zero****.*

Exemplo 1.6. *As categorias Groups e $Vect_K$ são aditivas.*

Observação 1.7. *A condição 1 da definição 1.5 é equivalente a dizer que, para quaisquer $X_1, X_2 \in obj(\mathcal{C})$ existe $X_1 \oplus X_2 \in obj(\mathcal{C})$ e morfismos*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, shift left, "i_1"] & X_1 \oplus X_2 \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift left, "p_2"] & X_2 \arrow[l, shift left, "i_2"] \end{tikzcd}$$

tais que

$$i_1p_1 + i_2p_2 = 1_{X_1\oplus X_2} \text{ e } p_ji_k = \begin{cases} 1, & se\ j = k \\ 0, & se\ j \neq k \end{cases},\ com\ j,k \in \{1,2\}.$$

De fato, se o conjunto $\{X_1 \oplus X_2, i_1 : X_1 \longrightarrow X_1 \oplus X_2, i_2 : X_2 \longrightarrow X_1 \oplus X_2\}$ *é a soma direta de* X_1 *e* X_2*, então existem únicos morfismos* $p_1 : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow X_1$ *e* $p_2 : X_2 \oplus X_1 \longrightarrow X_2$ *tais que os diagramas*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "1_{X_1}"'] & X_1 \oplus X_2 \arrow[d, dashed, "p_1"] & X_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "0"] \\ & X_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "0"'] & X_1 \oplus X_2 \arrow[d, dashed, "p_2"] & X_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "1_{X_2}"] \\ & X_2 & \end{tikzcd}$$

são comutativos, isto é, $p_ji_k = \begin{cases} 1, & se\ j = k \\ 0, & se\ j \neq k \end{cases}$, *com* $j,k \in \{1,2\}$*. Assim, se* f *é um dos morfismos* $1_{X_1\oplus X_2}$ *e* $i_1p_1 + i_2p_2$*, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_1"'] & X_1 \oplus X_2 \arrow[d, dashed, "f"] & X_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "i_2"] \\ & X_1 \oplus X_2 & \end{tikzcd}$$

Pela unicidade de f*, segue que* $i_1p_1 + i_2p_2 = 1_{X_1\oplus X_2}$.

Reciprocamente, considere os diagramas em $\mathcal{C}$*,*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & X_1 \oplus X_2 \arrow[d, dashed, "f"] & X_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & Z & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & X_1 \oplus X_2 \arrow[d, dashed, "f'"] & X_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Definindo o morfismo $f = f_1p_1 + f_2p_2$ *em* $\mathcal{C}$*, mostra-se que primeiro diagrama é comutativo. Agora, suponha que o morfismo* f' *em* $\mathcal{C}$ *faz o segundo diagrama comutar, isto é,* $f'i_1 = f_1$ *e* $f'i_2 = f_2$*. Assim, temos* $f'i_1p_1 = f_1p_1$ *e* $f'i_2p_2 = f_2p_2$*. Somando membro a membro tais igualdades, obtemos* $f'(i_1p_1+i_2p_2) = f_1p_1+f_2p_2$*, isto é,* $f' = f_1p_1 + f_2p_2 = f$*. Isto mostra a unicidade de* f*.*

Logo, o conjunto $\{X_1 \oplus X_2, i_1 : X_1 \longrightarrow X_1 \oplus X_2, i_2 : X_2 \longrightarrow X_1 \oplus X_2\}$ *é a soma direta de* X_1 *e* X_2 *em* $\mathcal{C}$*.*

Este resultado pode ser estendido para uma soma direta de uma família finita de objetos em $\mathcal{C}$*. Neste caso, chamamos os morfismos* $p_k : \bigoplus_{j=1}^n X_j \to X_k$*, com* $1 \leq k \leq n$*, de* ***projeções canônicas****.*

Sejam X' e X objetos de uma categoria aditiva $\mathcal{C}$. Dizemos que X' é um **sub-objeto** de X, se existe um monomorfismo $u : X' \longrightarrow X$ em $\mathcal{C}$, chamado **inclusão de X' em X**. Se além disso existe um morfismo $p : X \longrightarrow X'$ em $\mathcal{C}$ tal que $pu = 1_{X'}$, X' é dito um **somando direto** de X. Por exemplo, pela Observação 1.7, X_1 e X_2 são somandos diretos de $X_1 \oplus X_2$, para quaisquer objetos X_1 e X_2 em uma categoria aditiva $\mathcal{C}$.

Definição 1.8. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Uma família $\mathcal{I}$ de morfismos em $\mathcal{C}$ é um **ideal à direita** (resp. **à esquerda**) se satisfaz as seguintes condições:*

1. *$\mathcal{I}(X,Y) = \mathcal{I} \cap Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é um subgrupo aditivo de $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$;*
2. *$\mathcal{I}(Z,Y)Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \subset \mathcal{I}(X,Y)$ (resp. $Hom_{\mathcal{C}}(Z,Y)\mathcal{I}(X,Z) \subset \mathcal{I}(X,Y)$)*

para todos objetos X, Y e Z em $\mathcal{C}$.

*Se $\mathcal{I}$ é ideal à direita e à esquerda de $\mathcal{C}$, dizemos que I é um **ideal bilateral**, ou simplesmente **ideal**, de $\mathcal{C}$.*

Pela definição 1.5, em uma categoria aditiva $\mathcal{C}$, cada conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é um grupo abeliano aditivo. A seguir, definiremos uma categoria onde tais conjuntos são espaços vetoriais.

Definição 1.9. *Seja K um corpo. Uma categoria $\mathcal{C}$ é uma K-**categoria** se, para quaisquer objetos X e Y de $\mathcal{C}$, o par $(Hom_{\mathcal{C}}(X,Y), \circ)$ é equipado com uma estrutura de K-espaço vetorial e $\circ$ é uma aplicação K-bilinear. Se além disso a dimensão $dim_K Hom(X,Y)$ é finita para quaisquer objetos X e Y, $\mathcal{C}$ é dita uma K-categoria Hom-**finita**.*

Exemplo 1.10. *A categoria $Vect_K$ (resp., $vect_K$) de todos os K-espaços vetoriais (resp., de todos os K-espaços vetoriais de dimensão finita) é uma K-categoria (resp., K-categoria Hom-finita).*

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. O **núcleo** de f é o par $(Ker\, f, u)$, onde $Ker\, f$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $u \in Hom_{\mathcal{C}}(Ker\, f, X)$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $f \circ u = 0$; e
2. para quaisquer objeto Z e morfismo $h : Z \longrightarrow X$ em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ h = 0$, existe um único morfismo $h' : Z \longrightarrow Ker\, f$ em $\mathcal{C}$ tal que $h = u \circ h'$, isto é, fazendo o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
Ker\ f \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "0"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
& Z \arrow[ul, dotted, "h'"] \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Por simplicidade, às vezes chamaremos o *núcleo* de f o objeto $Ker\, f$, enquanto u será denominado *morfismo núcleo* de f.

Observemos que o morfismo núcleo u é um monomorfismo. De fato, sejam $g_1, g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, Ker\, f)$ tais que $ug_1 = ug_2$. Fazendo $h = ug_1 = ug_2$ e usando a unicidade de h' no diagrama anterior segue que $g_1 = g_2$.

Similarmente, o **conúcleo** de f é o par $(Coker\, f, p)$, onde $Coker\, f$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $p \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Coker\, f)$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $p \circ f = 0$; e

2. para quaisquer objeto Z e morfismo $g : Y \longrightarrow Z$ em $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f = 0$, existe um único morfismo $g' : Coker\, f \longrightarrow Z$ em $\mathcal{C}$ tal que $g = g' \circ p$, isto é, fazendo o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & Coker\, f \arrow[dl, dotted, "g'"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Novamente, por simplicidade, às vezes chamaremos o *conúcleo* de f o objeto $Coker\, f$ e p o *morfismo conúcleo* de f. Analogamente, podemos mostrar que o morfismo conúcleo p é um epimorfismo.

Lema 1.11. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo em uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ com núcleo $(Ker\, f, u)$ e conúcleo $(Coker\, f, p)$. Então, f é um monomorfismo (resp., epimorfismo) se, e somente se, $Ker\, f = 0$ (resp, $Coker\, f = 0$).*

Demonstração. Provaremos apenas uma das afirmações pois são análogas. Suponha que f é um monomorfismo. Mostraremos que o par $(0, u : 0 \longrightarrow X)$ é o núcleo de f, onde 0 é objeto zero de $\mathcal{C}$.

Claramente $fu = 0$, ou seja, fu é um morfismo zero, pois $fu = fu1_0$. Agora, seja um morfismo $h : Z \longrightarrow X$ em $\mathcal{C}$ tal que $fh = 0$. Como f é um monomorfismo, $h = 0$, isto é, h é um morfismo zero. Assim, existe um morfismo $h' : Z \longrightarrow 0$ em $\mathcal{C}$ tal que $h = uh'$, isto é, fazendo o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "0"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
& Z \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "0"'] \arrow[ul, dotted, "h'"] &
\end{tikzcd}$$

Sabendo que 0 é objeto zero de $\mathcal{C}$, o morfismo h' é único. Logo, $Ker\, f = 0$.

Reciprocamente, sejam $g_1, g_2 : W \to X$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $fg_1 = fg_2$. Assim, $f(g_1 - g_2) = 0$. Como $Ker\, f = 0$, existe um único morfismo $h' : Z \longrightarrow 0$ em $\mathcal{C}$ tal que $g_1 - g_2 = uh'$, isto é, fazendo o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "0"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
& Z \arrow[u, "g_1 - g_2"] \arrow[ur, "0"'] \arrow[ul, dotted, "h'"] &
\end{tikzcd}$$

Desta forma, $g_1 - g_2$ é um morfismo zero, isto é, $g_1 - g_2 = 0$. Logo, $g_1 = g_2$. Portanto, f é um monomorfismo. $\square$

Definição 1.12. *Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita **abeliana** se, para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$:*

1. *existem o núcleo $(Ker\, f, u)$ e o conúcleo $(Coker\, f, p)$ de f;*

2. *o único morfismo $f' : Coker\, u \longrightarrow Ker\, p$ em $\mathcal{C}$ que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd} Ker\ f \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u'"'] & Y \arrow[r, "p"] & Coker\, f \\ & Coker\, u \arrow[r, dotted, "f'"'] & Ker\ p \arrow[u, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

comutar é um isomorfismo, onde $(Coker\, u, u')$ é conúcleo de u e $(Ker\, p, p')$ é o núcleo de p.

*O objeto $Ker\, p$ é chamado a **imagem** de f e denotado por $Im\ f$.*

Exemplo 1.13. *Seja a categoria aditiva $\mathcal{C} = Groups$. Para qualquer morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$, o núcleo de f é o par $(Ker\, f, u : Ker\, f \longrightarrow X)$, onde $Ker\, f = \{x \in X; f(x) = 0\}$ e u é homomorfismo inclusão, e o conúcleo de f é o par $(Coker\, f, p : Y \longrightarrow Coker\, f)$, onde $Coker\, f = \dfrac{Y}{Im\ f}$ e p é homomorfismo projeção. Além disso, pelo Primeiro Teorema de Isomorfismos de Grupos,*

$$Coker\, u = \frac{X}{Im\ u} = \frac{X}{Ker\ f} \cong Im\ f = Ker\ p$$

via o isomorfismo dado por $f'(x + Ker\ f) = f(x)$. Como f' faz o diagrama no item 2 da definição anterior comutar, $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana.

Definição 1.14. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um **funtor covariante** (resp., **funtor contravariante**) $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é uma função tal que:*

1. *se $X \in obj(\mathcal{C})$, então $F(X) \in obj(\mathcal{D})$;*

2. *se $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, então $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ (respectivamente, $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$);*

3. *se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ são morfismos em $\mathcal{C}$, então*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \text{ (respectivamente, } F(g \circ f) = F(f) \circ F(g));$$

4. *para todo $X \in obj(\mathcal{C})$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$.*

Exemplo 1.15. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. O **funtor identidade** $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é definido por $1_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $1_{\mathcal{C}}(f) = f$, para todo objeto X e todo morfismo f em $\mathcal{C}$.*

Exemplo 1.16. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e A um objeto em $\mathcal{C}$. O funtor covariante $Hom_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow Sets$ é definido por*

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, -)(X) = Hom_{\mathcal{C}}(A, X) \text{ para todo } X \in obj(\mathcal{C})$$

e para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$,

$$\begin{array}{rccc} Hom_{\mathcal{C}}(A, f) : & Hom_{\mathcal{C}}(A, X) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A, Y) \\ & h & \mapsto & fh \end{array}.$$

Analogamente, definimos o funtor contravariante $Hom_{\mathcal{C}}(-, A)$.

Seja $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ um funtor covariante. Pelo item 2 da definição 1.14, para todos objetos X e Y de $\mathcal{C}$, temos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{cccc} F_{X,Y}: & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(F(X),F(Y)) \\ & f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

Se, para todos X, Y em $obj(\mathcal{C})$, $F_{X,Y}$ é injetora (resp., sobrejetora), então F é dito **fiel** (resp. **pleno**). No caso em que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias aditivas, o funtor F é dito **aditivo**, se preserva somas diretas de objetos e $F_{X,Y}$ preserva soma de morfismos, isto é, $F(X_1 \oplus X_2) \cong F(X_1) \oplus F(X_2)$ e $F(f+g) = F(f) + F(g)$, para todos $X_1, X_2 \in Obj(\mathcal{C})$ e $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é um **isomorfismo de categorias**, se existe um funtor $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $GF = 1_{\mathcal{C}}$ e $FG = 1_{\mathcal{D}}$. Neste caso, dizemos que as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são *isomorfas*. Se $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, F é dito um **automorfismo** de $\mathcal{C}$.

Sejam $F, F' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ funtores covariantes. Uma **transformação natural** é uma família de morfismos $\Psi = \{\Psi_X : F(X) \longrightarrow F'(X); X \in Obj(\mathcal{C})\}$ em $\mathcal{C}'$ tal que para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\Psi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & F'(X) \arrow[d, "F'(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\Psi_Y"'] & F'(Y) \end{tikzcd}$$

em $\mathcal{C}'$ é comutativo. Se cada Ψ_X é um isomorfismo em $\mathcal{C}'$, Ψ é chamada uma **equivalência natural**. Neste caso, dizemos que F e F' são **naturalmente equivalentes** e denotamos por $F \simeq F'$.

Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é uma **equivalência de categorias** se existe um funtor $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $GF \simeq 1_{\mathcal{C}}$ e $FG \simeq 1_{\mathcal{D}}$. Dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são **categorias equivalentes**, e denotamos por $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, se existe uma equivalência de categorias $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.

1.2 Categoria dos Módulos sobre uma Álgebra

Nesta seção, introduziremos as notações e terminologias sobre álgebras e módulos sobre uma álgebra. Trataremos de forma sucinta esses assuntos, mais informações podem ser encontradas em [2] e [16].

1.2.1 Álgebras

Definição 1.17. *Seja K um corpo. Um anel Λ com unidade é uma K-álgebra se possui uma estrutura de K-espaço vetorial e $\lambda(ab) = a(\lambda b)$ para todo $\lambda \in K$ e $a, b \in \Lambda$. Em geral, chamaremos Λ simplesmente de álgebra.*

Se a dimensão $dim_K\, \Lambda$ do K-espaço vetorial Λ é finita, dizemos que Λ é uma **K-álgebra de dimensão finita**.

Exemplo 1.18. *Numa K-categoria (Hom-finita) $\mathcal{C}$ o anel $(End_{\mathcal{C}}(X), +, \circ)$, onde $X \in obj(\mathcal{C})$, é uma K-álgebra (respectivamente, de dimensão finita), com identidade 1_X.*

Ao longo deste texto, a menos que seja dito o contrário, Λ sempre será uma álgebra de dimensão finita.

Um **ideal à direita** (**à esquerda**) I de uma K-álgebra Λ é um K-subespaço vetorial de Λ tal que $xa \in I$ ($ax \in I$, respectivamente) para todo $x \in I$ e $a \in \Lambda$. Um **ideal bilateral**, ou simplesmente **ideal**, I de Λ é um ideal à esquerda e à direita de Λ. Neste caso, o K-espaço vetorial quociente Λ/I tem uma estrutura de K-álgebra.

Uma álgebra Λ é dita **simples** se $\Lambda \neq 0$ e os únicos ideais de Λ são $\{0\}$ e o próprio Λ.

Se I é um ideal bilateral e m é um inteiro positivo obtemos um outro ideal bilateral I^m de Λ formado por todas as somas finitas de elementos da forma $x_1x_2\ldots x_m$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_m \in I$. Se $I^n = 0$ para algum inteiro positivo n, dizemos que I é um **ideal nilpotente** de Λ. Um elemento x em Λ é dito **nilpotente**, se existe um inteiro positivo m tal que $x^m = 0$.

Um ideal I (à direita, à esquerda ou bilateral) próprio de Λ é dito **maximal** se a existência de um ideal I' de Λ tal que $I \subseteq I' \subsetneq \Lambda$, implica que $I' = I$ ou $I' = \Lambda$.

Se Λ tem um único ideal maximal à direita (ou à esquerda), dizemos que Λ é uma K-álgebra **local**.

A interseção de todos ideais à direita (ou à esquerda) maximais de Λ é chamada o **radical de Jacobson**, ou simplesmente **radical** da K-álgebra Λ e será denotado por $rad\ \Lambda$. Note que $rad\ \Lambda$ é um ideal de Λ. Consequentemente, $\Lambda/rad\ \Lambda$ é uma K-álgebra.

Proposição 1.19. *Seja Λ uma álgebra.*

1. $rad(\Lambda/rad\ \Lambda) = 0$.
2. *Para qualquer idempotente $g + rad\ \Lambda \in \Lambda/rad\ \Lambda$, existe um idempotente e tal que $g - e \in rad\ \Lambda$.*

Demonstração. Veja [2], p. 5 e 19, Corolário 1.4 e Lema 4.4. □

Seja Λ uma álgebra de dimensão finita. Se $rad\ \Lambda = 0$, dizemos que Λ é uma K-álgebra **semissimples**. Pela Proposição anterior, $\Lambda/rad\ \Lambda$ é um exemplo de álgebra semissimples.

Proposição 1.20. *Se Λ é uma K-álgebra de dimensão finita, então $rad\ \Lambda$ é nilpotente.*

Demonstração. Veja [2], p. 8, Corolário 2.3. □

1.2.2 Módulos sobre uma Álgebra

Definição 1.21. *Seja Λ uma K-álgebra. Um Λ-módulo à direita é um par $(X, \cdot)$, onde X é um K-espaço vetorial e*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & X \times \Lambda & \longrightarrow & X \\ & (x, a) & \longmapsto & xa \end{array}$$

é uma operação binária, satisfazendo as seguintes condições:

1. $(x_1 + x_2)a = x_1a + x_2a$
2. $x_1(a + b) = x_1a + x_1b$
3. $x_1(ab) = (x_1a)b$
4. $x_11 = x_1$
5. $(x_1\lambda)a = (x_1a)\lambda$

para todo $x_1, x_2 \in X$, $a, b \in \Lambda$ e $\lambda \in K$. Similarmente, definimos Λ-módulo à esquerda.

***Notação**: escreveremos X ao invés de $(X, .)$.*

Exemplo 1.22. *Uma álgebra Λ é um Λ-módulo à direita (e à esquerda).*

Daqui em diante um Λ-módulo será, a menos que seja especificado o contrário, um Λ-módulo à direita e ficará entendido que todos os resultados válidos para Λ-módulos à direita serão válidos, com algumas adaptações necessárias, para os Λ-módulos à esquerda. Além disso, muitas vezes diremos simplesmente módulo para se referir a um Λ-módulo.

Seja X um Λ-módulo. Um Λ-**submódulo** X' de X é K-subespaço vetorial de X tal que $x'a \in X'$ para todo $x' \in X'$ e todo $a \in \Lambda$. Se X é não-nulo e seus únicos submódulos são 0 e o próprio X, dizemos que X é um **módulo simples**.

Dizemos que um módulo X tem **dimensão finita** se a dimensão $dim_K X$ do K-espaço vetorial subjacente de X é finita.

Sejam X e Y Λ-módulos. Um Λ-**homomorfismo** $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação K-linear tal que $f(xa) = f(x)a$ para todo $x \in X$ e $a \in \Lambda$. Se além disso f é injetivo (respectivamente, sobrejetivo), f é chamado **monomorfismo** (respectivamente, **epimorfismo**). Dizemos que f é um **isomorfismo**, se f é bijetivo. Neste caso, X e Y são ditos isomorfos e escrevemos $X \cong Y$.

Denotaremos por $Mod\,\Lambda$ a categoria cujos objetos são Λ-módulos e morfismos são Λ-homomorfismos.

A **soma direta** dos Λ-módulos $X_1, \ldots, X_s$ é a soma direta $X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$ de K-espaços vetoriais munida de uma estrutura de Λ-módulo definida por $(x_1, \ldots, x_s)a = (x_1a, \ldots, x_sa)$, com $x_1 \in X_1, \ldots, x_s \in X_s$ e $a \in \Lambda$.

Um Λ-módulo não-nulo X é dito **indecomponível** se não existem Λ-módulos não-nulos X_1 e X_2 tais que $X \simeq X_1 \oplus X_2$.

Sejam X e Y objetos de $Mod\,\Lambda$. O conjunto $Hom_\Lambda(X, Y)$ de todos os Λ-homomorfismos de X para Y é um grupo abeliano aditivo, com a adição $f, g \mapsto f + g$ dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in X$. O módulo $\{0\}$ é objeto zero de $Mod\,\Lambda$.

Além disso, definindo a multiplicação escalar $(f, \lambda) \mapsto f\lambda$ por $(f\lambda)(x) = f(x\lambda)$ para todo $f \in Hom_\Lambda(X, Y)$, $\lambda \in K$ e $x \in X$, temos que o conjunto $Hom_\Lambda(X, Y)$ é um K-espaço vetorial. Mais ainda, se X e Y são módulos de dimensão finita, então $Hom_\Lambda(X, Y)$ é um K-espaço vetorial de dimensão finita.

Desta forma, prova-se que a composição de Λ-homomorfismos é K-bilinear. Logo, $Mod\,\Lambda$ é uma K-categoria aditiva.

Agora, veremos que $Mod\,\Lambda$ é uma categoria abeliana. Seja $f : X \longrightarrow Y$ um Λ-homomorfismo. O **núcleo**, a **imagem** e o **conúcleo** de f são definidos, respectivamente, por

$$Ker\, f = \{x \in X : f(x) = 0\}, Im\ f = \{f(x) : x \in X\} \text{ e } Coker\, f = Y/Im\ f.$$

Os Λ-homomorfismos inclusão $i : Ker\ f \longrightarrow X$, dado por $i(x) = x$, e projeção $p : Y \longrightarrow Coker\, f$, dado por $p(y) = y + Im\ f$, são os morfismos núcleo e conúcleo de f, respectivamente. Além disso, pode-se mostrar que $X/Ker\, f \cong Im\ f$, isto é, o Primeiro Teorema dos Isomorfismos é válido em $Mod\,\Lambda$. Assim, podemos concluir que $Mod\,\Lambda$ é uma categoria abeliana. Logo, $Mod\,\Lambda$ é uma K-categoria abeliana.

Como $Mod\,\Lambda$ é uma K-categoria, pelo Exemplo 1.18, sabemos que $End(X)$ é uma álgebra, para todo Λ-módulo X. A seguir, apresentamos um lema que relaciona X e $End(X)$.

Lema 1.23. *Sejam Λ uma K-álgebra e X um Λ-módulo.*

1. *Se a álgebra $End(X)$ é local, então X é indecomponível.*

2. *Se X é indecomponível e tem dimensão finita, então a álgebra $End(X)$ é local e qualquer Λ-endomorfismo de X é nilpotente ou um isomorfismo.*

Demonstração. Veja [2], p. 22, Corolário 4.8. □

Sejam X um Λ-módulo e X' um subconjunto de X. Dizemos que X é **gerado** por X' se

$$X = \langle X' \rangle = \left\{ \sum_{finita} x'_i \lambda_i : \lambda_i \in \Lambda, x'_i \in X', i \in \mathbb{Z}_+^* \right\}.$$

Se X' é finito, X é dito **finitamente gerado**.

Denotaremos por $mod\,\Lambda$ a categoria cujos objetos são Λ-módulos finitamente gerados. Observe que $mod\,\Lambda$ é uma subcategoria plena de $Mod\,\Lambda$. Além disso, $mod\,\Lambda$ é uma K-categoria abeliana Hom-finita.

A seguir, veremos um resultado fundamental na Teoria de Representações de álgebras de dimensão finita.

Teorema 1.24 (Krull-Schmidt)**.** *Seja Λ uma álgebra.*

1. *Todo módulo em $mod\,\Lambda$ tem uma decomposição $X \cong X_1 \oplus \ldots \oplus X_m$, onde $X_1, \ldots, X_m$ são módulos indecomponíveis e cada álgebra de endomorfismo $End(X_j)$ é local para todo $j = 1, \ldots, m$.*

2. *Se $X \cong \bigoplus_{i=1}^m X_i \cong \bigoplus_{j=1}^n X'_j$, onde X_i e X'_j são indecomponíveis, então $m = n$ e existe uma permutação σ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $X_i \cong X'_{\sigma(i)}$ para cada $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Veja [2], p. 23. □

Uma álgebra Λ como Λ-módulo admite uma decomposição $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n e_i\Lambda$, onde $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de Λ, isto é,

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_n = 1, e_i e_j = \begin{cases} e_i, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{e } e_i = e_j + e_k \Rightarrow e_i = e_j \text{ ou } e_i = e_k.$$

respectivamente. Neste caso, cada $e_i\Lambda$ é um módulo indecomponível. Logo, pelo Teorema 1.24, esta decomposição de Λ é única, a menos de isomorfismo e da ordem dos somandos diretos.

Se $e_i\Lambda \ncong e_j\Lambda$ para todo $i \neq j$, dizemos que Λ é uma **álgebra básica**. Uma álgebra Λ é **conexa** se ela não é produto de duas álgebras.

Um Λ-módulo P é **projetivo** se, para qualquer epimorfismo $p \in Hom_\Lambda(X,Y)$ e qualquer $h \in Hom_\Lambda(P,Y)$, existe $g \in Hom_\Lambda(P,X)$ tal que diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ X \arrow[r, "p"'] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo. Dualmente, definimos um Λ-módulo **injetivo**.

Denotaremos por $Proj\,\Lambda$ a subcategoria plena de $Mod\,\Lambda$, formada por todos Λ-módulos projetivos, e por $proj\,\Lambda$ a subcategoria plena de $mod\,\Lambda$, consistindo de todos Λ-módulos finitamente gerados projetivos. Observe que $proj\,\Lambda$ é uma K-categoria aditiva Hom-finita.

Proposição 1.25. *A soma direta de Λ-módulos $\bigoplus_{i\in I} P_i$ é projetivo se, e somente se, cada P_i é projetivo.*

Demonstração. Veja [16], p 194, Proposição 3.5. □

Um Λ-submódulo L de M é **supérfluo** se para cada Λ-submódulo X de M a igualdade $L + X = M$ implica $X = M$. Um epimorfismo $h : P \longrightarrow X$ em $mod\,\Lambda$ é chamado **cobertura projetiva** de X se P é projetivo e $Ker\,h$ é supérfluo.

Uma sequência de homomorfismos de Λ-módulos

$$\ldots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

é chamada **sequência exata** se $Im\ f_{n-1} = Ker\ f_n$ para todo n. Uma sequência exata é dita **curta** se ela é da forma

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0\,.$$

Teorema 1.26. *Seja* $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L_2 \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta em $mod\,\Lambda$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe um homomorfismo $h : L_2 \longrightarrow M$ tal que $gh = 1_{L_2}$;*
2. *Existe um homomorfismo $k : M \longrightarrow L_1$ tal que $kf = 1_{L_1}$;*
3. *$M \cong L_1 \oplus L_2$.*

Demonstração. Veja [16], p. 177, Teorema 1.18. □

Dizemos que uma sequência exata curta **cinde** se ela satisfaz as condições equivalentes do Teorema 1.26.

Seja X um Λ-módulo. Dizemos que

$$\ldots \longrightarrow P_m \xrightarrow{p_m} P_{m-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

é uma **resolução projetiva** de X se existe $p_0 \in Hom_\Lambda(P_0, X)$ tal que

$$\ldots \longrightarrow P_m \xrightarrow{p_m} P_{m-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} X \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

é uma sequência exata onde cada P_n, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, é um Λ-módulo projetivo. Se além disso $p_j : P_j \longrightarrow Ker\, p_{j-1}$, para todo $j \geq 1$, e $p_0 : P_0 \longrightarrow X$ são coberturas projetivas, então (1.1) é uma **resolução projetiva minimal** de X.

Observação 1.27. *Em geral, o núcleo de p_0 em (1.2) é denotado por ΩX.*

Proposição 1.28. *Todo Λ-módulo X admite uma resolução projetiva minimal em $mod\,\Lambda$.*

Demonstração. Veja [2], p. 30, Corolário 5.10. □

Se um Λ-módulo X admite resolução projetiva finita,

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{p_m} P_{m-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} X \longrightarrow 0\ , \tag{1.3}$$

então o menor número inteiro não-negativo m tal que (1.3) é uma resolução projetiva de X é chamado a **dimensão projetiva** de X e denotado por $pd\,X$. Se não existe uma resolução projetiva finita de X, então $pd\,X = \infty$.

A **dimensão global à direita** de uma K-álgebra Λ é o número, caso exista,

$$r.gl.dim\,\Lambda = max\{pd\,X; X \in Mod\,\Lambda\}.$$

Neste caso, Λ é dita uma **álgebra de dimensão global finita**. Caso contrário, dizemos que Λ tem dimensão global infinita e $r.gl.dim\,\Lambda = \infty$.

Uma álgebra Λ é dita **hereditária à direita** se a dimensão global de Λ é no máximo 1, isto é, $r.gl.dim\ \Lambda \leq 1$.

Seja X um Λ-módulo. O **radical** (de Jacobson) $rad\ X$ de X é a interseção de todos submódulos maximais de X.

A próxima Proposição apresenta as principais propriedades do radical.

Proposição 1.29. *Sejam X, Y módulos em $mod\,\Lambda$.*

1. *$rad\ (X \oplus Y) = rad\ X \oplus rad\ Y$.*
2. *Se $f \in Hom_\Lambda(X, Y)$, então $f(rad\ X) \subseteq rad\ Y$.*
3. *$X rad\ \Lambda = rad\ X$.*

Demonstração. Veja [2], p. 15, Proposição 3.7. □

O próximo resultado fornece uma nova definição para um Λ-submódulo supérfluo em $mod\,\Lambda$.

Lema 1.30. *(Lema de Nakayama para Módulos) Seja P um Λ-submódulo de X.*

1. *Se P é supérfluo então $P \subseteq rad\ X$.*
2. *Se P é finitamente gerado e $P \subseteq rad\ X$ então P é supérfluo.*

Demonstração. Veja [23], p. 57. □

Corolário 1.31. *Seja P um Λ-submódulo de X em $mod\,\Lambda$. Então P é supérfluo se, e somente se, $P \subseteq rad\ X$.*

Seja X um Λ-módulo. Dizemos que $x \in X$ é um **elemento nilpotente** se existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $x^m = 0$.

Proposição 1.32. *Seja X um Λ-módulo. Se f é um elemento nilpotente de $End(X)$, então $1_X - f$ é um automorfismo de X.*

Demonstração. Por hipótese, existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $f^m = 0$. Com isso,

$$1_X = 1_X - f^m = (1_X - f)(1 + f + \ldots + f^{m-1}).$$

Claramente, temos também $(1 + f + \ldots + f^{m-1})(1_X - f) = 1_X$. Logo $1_X - f$ é um automorfismo de X. □

Observação 1.33. *Na Teoria de Módulos sobre Anéis, se R é um anel artiniano e a R-álgebra Λ é um R-módulo finitamente gerado, Λ é dita uma* ***álgebra de Artin****. Devido à sua grande importância na Teoria Representações, ao longo deste trabalho, Λ é uma álgebra de Artin.*

1.3 Categorias Krull-Schmidt

Na seção anterior, apresentamos o Teorema Krull-Schmidt na categoria $mod\,\Lambda$, o qual assegura a existência de uma única decomposição, a menos de isomorfismo e permutação, de um Λ-módulo como soma direta de Λ-módulos indecomponíveis cujos anéis de endomorfismos são locais.

Nesta seção, abordaremos de forma sucinta as Categorias Krull-Schmidt, as quais satisfazem o equivalente ao Teorema Krull-Schmidt. Nosso principal objetivo é mostrar que $proj\,\Lambda$ é uma categoria Krull-Schmidt. Uma exposição mais detalhada dos assuntos tratados aqui pode ser encontrada em [20] e [22].

1.3.1 Morfismos Idempotentes e Objetos Indecomponíveis

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\varphi \in End_{\mathcal{C}}(X, X)$. Se $\varphi^2 = \varphi$, dizemos que φ é um **idempotente**. Suponhamos que existam morfismos $p : X \longrightarrow Y$ e $u : Y \longrightarrow X$ em $\mathcal{C}$ tais que $pu = 1_Y$ e $up = \varphi$. Assim, φ é um idempotente, pois

$$\varphi^2 = (up)(up) = u(pu)p = u1_Y p = up = \varphi$$

Neste caso, φ é dito um **idempotente que cinde**.

Lema 1.34. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e φ um idempotente em $End_{\mathcal{C}}(X)$.*

1. *$1_X - \varphi$ é um morfismo idempotente.*

2. *φ cinde se, e somente se, $1_X - \varphi$ tem núcleo.*

3. *φ cinde se, e somente se, $1_X - \varphi$ tem conúcleo.*

4. *Se (X_1, u_1) e (X_2, u_2) são os núcleos de $1_X - \varphi$ e φ, respectivamente, então $X = X_1 \oplus X_2$ com inclusões canônicas u_1 e u_2.*

Demonstração. **1.** Como φ é idempotente, $1_X - \varphi$ também o é, pois

$$(1_X - \varphi)^2 = (1_X - \varphi)(1_X - \varphi) = 1_X - \varphi - \varphi + \varphi^2 = 1_X - 2\varphi + \varphi = 1_X - \varphi.$$

2. Se φ cinde, existem morfismos $p : X \longrightarrow Y$ e $u : Y \longrightarrow X$ em $\mathcal{C}$ tais que $pu = 1_Y$ e $up = \varphi$. Assim, (X, φ) é o núcleo de $1_X - \varphi$. De fato,

(1) $(1_X - \varphi)\varphi = \varphi - \varphi^2 = \varphi - \varphi = 0$;

(2) Seja um morfismo $h : Z \longrightarrow X$ em $\mathcal{C}$ tal que $(1_X - \varphi)h = 0$. Assim, $h : Z \longrightarrow X$ é o único morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $h = \varphi h$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "0"] & X \arrow[r, "1_X-\varphi"] & X \\
& Z \arrow[ul, dotted, "h"] \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Reciprocamente, suponhamos que (Y, u) seja o núcleo de $1_X - \varphi$. Como $(1_X - \varphi)\varphi = 0$, existe um morfismo $p : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "0"] & X \arrow[r, "1_X-\varphi"] & X \\
& X \arrow[ul, dotted, "p"] \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $up = \varphi$. Agora, note que $(1_X - \varphi)u = 0$, isto é, $\varphi u = u$. Assim, $upu = \varphi u = u$, donde obtemos $pu = 1_X$, pois u é um monomorfismo. Logo, φ é um idempotente que cinde.
3. Prova análoga a anterior.
4. Pelo item 2, $1_X - \varphi$ e φ cindem, isto é, existem morfismos $p_1 : X \longrightarrow X_1$ e $p_2 : X \longrightarrow X_2$ em $\mathcal{C}$ tais que

$$u_1p_1 = \varphi, p_1u_1 = 1_{X_1}, u_2p_2 = 1_X - \varphi \text{ e } p_2u_2 = 1_{X_2}.$$

Logo, $u_1p_1 + u_2p_2 = 1_X$. Além disso, temos $\varphi u_1 = u_1p_1u_1 = u_1 1_{X_1} = u_1$. Assim,

$$u_2p_2u_1 = (1_X - \varphi)u_1 = u_1 - \varphi u_1 = 0,$$

donde obtemos $p_2u_1 = 0$, pois u_2 é um monomorfismo. Por outro lado, note que

$$u_1p_1u_2 = \varphi u_2 = \varphi u_2 - u_2 + u_2 1_{X_2} = \varphi u_2 - (1_X - u_2p_2)u_2 = \varphi u_2 - \varphi u_2 = 0.$$

Com isso, $p_1u_2 = 0$, u_1 é um monomorfismo. Portanto, $X = X_1 \oplus X_2$. □

Corolário 1.35. *Todo idempotente de uma categoria abeliana $\mathcal{C}$ cinde.*

Demonstração. Seja $\varphi : X \longrightarrow X$ um idempotente de $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana, $1_X - \varphi$ tem núcleo. Logo, pelo item 2 do Lema 1.34, φ cinde. □

Um objeto X em uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dito **indecomponível** se X não é o *objeto zero* de $\mathcal{C}$ e se sempre que $X \cong X_1 \oplus X_2$ implica que $X_1 = 0$ ou $X_2 = 0$.

Proposição 1.36. *Seja X um objeto de uma categoria aditiva $\mathcal{C}$, na qual todo idempotente cinde. Então, X é indecomponível se, e somente se, 0 e 1_X são os únicos idempotentes de $End(X)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\varphi : X \to X$ um idempotente de $End(X)$. Pelo item 1 do Lema 1.34, $1_X - \varphi$ também é um idempotente de $End(X)$. Por hipótese, $1_X - \varphi$ cinde. Assim, pelos itens 2 e 4 do Lema 1.34, $\varphi = 1_X - (1_X - \varphi)$ possui núcleo $(Ker\, \varphi, u)$ e $Ker\, \varphi$ é um somando direto de X com inclusão canônica u. Como X é indecomponível, $Ker\, \varphi = X$ ou $Ker\, \varphi = 0$. No primeiro caso, como u é uma inclusão canônica, temos $u = 1_X$. Logo, $\varphi = \varphi 1_X = 0$. Já no segundo caso, φ é um monomorfismo pelo Lema 1.11. Portanto, $\varphi = 1_X$, pois $\varphi^2 = \varphi$.

($\Leftarrow$) Seja X_1 um somando direto de X. Assim, existem morfismos $u_1 : X_1 \to X$ e $p_1 : X \to X_1$ em $\mathcal{C}$ tais que $p_1 u_1 = 1_{X_1}$. Note que u_1 é um monomorfismo e p_1 é um epimorfismo. Além disso, $u_1 p_1$ é um idempotente de $End(X)$. Por hipótese, $u_1 p_1 = 0$ ou $u_1 p_1 = 1_X$. Pela primeira igualdade, obtemos $p_1 = 0$, pois u_1 é um monomorfismo. Assim, $(X_1, 1_{X_1})$ é o conúcleo de p_1. De fato, temos $1_{X_1} p_1 = p_1 = 0$. Mais ainda, dado um morfismo $g : X_1 \longrightarrow Z$ em $\mathcal{C}$ tal que $g p_1 = 0$, g é o único morfismo em $\mathcal{C}$ fazendo o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p_1"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & X_1 \arrow[r, "1_{X_1}"] \arrow[d, "g"] & X_1 \arrow[dl, dotted, "g"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

Como p_1 é um epimorfismo, pelo Lema 1.11, $X_1 = 0$. Pela segunda igualdade, obtemos que u_1 é um isomorfismo, isto é, $X_1 \cong X$. Logo, X é indecomponível. $\square$

Observação 1.37. *Na volta ($\Leftarrow$) da Proposição 1.36 não usamos o fato que todo idempotente cinde em $\mathcal{C}$. Logo, se 0 e 1_X são os únicos idempotentes de $End(X)$, então X é indecomponível, para todo objeto X de uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ qualquer.*

1.3.2 Categorias Krull-Schmidt

Definição 1.38. *Uma categoria **Krull-Schmidt** é uma categoria aditiva tal que todo objeto X admite uma decomposição finita $X \cong \oplus_{i=1}^m X_i$, onde cada X_i é um objeto indecomponível e cada anel $End(X_i)$ é local, para todo $i = 1, \ldots, m$.*

Exemplo 1.39. *Pelo Teorema 1.24 $\operatorname{mod} \Lambda$ é uma categoria Krull-Schmidt.*

Observação 1.40. *Assim como no item 2 do Teorema da Decomposição Única (Teorema 1.24) em $\operatorname{mod} \Lambda$, pode-se provar que a decomposição $X \cong \oplus_{i=1}^m X_i$ de um objeto X determinada na definição de Categoria Krull-Schmidt é única, a menos de isomorfismos e permutações. Uma prova para isto pode ser encontrada no Teorema 4.2 em [20].*

A partir de agora, daremos definições e resultados a fim de mostrarmos que $proj\,\Lambda$ é uma categoria Krull-Schmidt, onde Λ é uma álgebra de dimensão finita.

Um anel R é dito **semiperfeito** se $R/rad\ R$ é um anel semissimples e os idempotentes de $R/rad\ R$ levantam módulo $rad\ R$, isto é, para qualquer idempotente $g+R \in R/rad\ R$ existe um idempotente $e \in R$ tal que $g-e \in rad\ R$.

Exemplo 1.41. *Como uma álgebra de dimensão finita semissimples é um anel semissimples, pelo Lema 1.19, toda álgebra de dimensão finita é um anel semiperfeito.*

Usando a definição anterior e idempotentes que cindem, Krause, em [20](veja Corolário 4.4), fornece uma caracterização das categorias Krull-Schmidt enunciada na próxima proposição.

Proposição 1.42. *Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é Krull-Schmidt se, e somente se, todo idempotente de $\mathcal{C}$ cinde e $End_{\mathcal{C}}(X)$ é um anel semiperfeito, para todo $X \in obj(\mathcal{C})$.*

Corolário 1.43. *Uma K-categoria aditiva Hom-finita $\mathcal{C}$ é Krull-Schmidt se, e somente se, todo idempotente de $\mathcal{C}$ cinde.*

Demonstração. No Exemplo 1.18, vimos que $End_{\mathcal{C}}(X)$ é uma álgebra de dimensão finita. Assim, pelo Exemplo 1.41, segue que $End_{\mathcal{C}}(X)$ é um anel semiperfeito. Logo, a Proposição 1.42 completa a demonstração. □

Observação 1.44. *Como $mod\,\Lambda$ é uma K-categoria abeliana Hom-finita, poderíamos provar que $mod\,\Lambda$ é uma categoria Krull-Schmidt usando os Corolários 1.35 e 1.43.*

Lema 1.45. *Seja $\mathcal{C}'$ uma subcategoria plena de uma categoria aditiva $\mathcal{C}$, na qual todo idempotente cinde. Todo idempotente em $\mathcal{C}'$ cinde se, e somente se, $\mathcal{C}'$ é fechada para somandos diretos.*

Demonstração. Suponha que todo idempotente de $\mathcal{C}'$ cinde e seja $Y \in obj(\mathcal{C})$ um somando direto de $X' \in obj(\mathcal{C}')$. Assim, existem morfismos $u : Y \longrightarrow X'$ e $p : X' \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ tais que $pu = 1_Y$. Desta forma, $\varphi = up : X' \longrightarrow X'$ é idempotente em $\mathcal{C}'$. Por hipótese φ cinde, isto é, existem morfismos $u' : Y' \longrightarrow X'$ e $p' : X' \longrightarrow Y'$ em $\mathcal{C}'$ tais que $p'u' = 1_{Y'}$ e $u'p' = \varphi$. Pela primeira igualdade, note que $Y' \in obj(\mathcal{C}')$ é um somando direto de X'.

Com isso, basta mostrarmos que Y é isomorfo Y' em $\mathcal{C}$. De fato, sejam $f = p'u : Y \longrightarrow Y'$ e $g = pu' : Y' \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$. Temos

$$fg = (p'u)(pu') = p'\varphi u' = p'u'p'u' = 1_{Y'}$$

e

$$gf = (pu')(p'u) = p\varphi u = pupu = 1_Y,$$

como queríamos. Logo, $\mathcal{C}'$ é fechada para somandos diretos.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{C}'$ é fechada para somandos diretos e seja $\varphi' : X' \longrightarrow X'$ um idempotente de $\mathcal{C}'$. Notemos que φ' também é um idempotente de $\mathcal{C}$, pois $\mathcal{C}'$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}$. Assim φ' cinde em $\mathcal{C}$, isto é, existem morfismos $u : Y \longrightarrow X'$ e $p : X' \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ tais que

$$up = \varphi \text{ e } pu = 1_Y \qquad (1.4)$$

Pela segunda igualdade, sabemos que Y é um somando direto de X'. Por hipótese, Y é um objeto de $\mathcal{C}'$. Como $\mathcal{C}'$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{C}$, temos que u e p são morfismos de $\mathcal{C}'$. Logo, por (1.4), φ' é um idempotente que cinde em $\mathcal{C}'$. $\square$

Exemplo 1.46. *Seja Λ uma K-álgebra de dimensão finita. Como a categoria abeliana $\operatorname{mod}\Lambda$ é Krull-Schmidt, todos seus idempotentes cindem pela Proposição 1.42. Sabendo que $\operatorname{proj}\Lambda$ é fechada para somandos diretos (veja a Proposição 1.25) e é uma subcategoria plena de $\operatorname{mod}\Lambda$, pelo lema 1.45, todo idempotente em $\operatorname{proj}\Lambda$ cinde. Além disso, como $\operatorname{proj}\Lambda$ é uma K-categoria aditiva Hom-finita, pelo Corolário 1.43, $\operatorname{proj}\Lambda$ é uma categoria Krull-Schmidt.*

1.4 Complexos

Nesta seção, apresentamos de forma breve a categoria dos complexos. Em particular, discutiremos sobre complexos radicais, nosso principal objeto de estudo nesse texto. Para o leitor mais interessado nos assuntos tratados aqui, recomendamos [25] e [26].

Definição 1.47. *Um **complexo** (X, d_X) sobre uma categoria $\mathcal{A}$ é uma coleção de objetos, chamados **células** de X e morfismos chamados **diferenciais** em $\mathcal{A}$*

$$(X, d_X): \qquad \dots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \longrightarrow \dots$$

tais que $d_X^i d_X^{i-1} = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Às vezes, denotaremos (X, d_X) por X.

Um **morfismo de complexos** $f = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} : X \longrightarrow Y$ é uma sequência de morfismos $f^i : X^i \longrightarrow Y^i$, chamados **componentes** de f, tais que, para todo $i \in \mathbb{Z}$, $f^{i+1}d_X^i = d_Y^i f^i$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] & \dots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \dots \\
Y: & \dots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"'] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"'] & Y^{i+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

A composição gf de morfismos de complexos $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$, definida por $(gf)^i = g^i f^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, é um morfismo de complexos.

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right, "gf"'] & \dots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \dots \\
Y: \arrow[d, "g"] & \dots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"] \arrow[d, "g^{i-1}"] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] \arrow[d, "g^i"] & Y^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{i+1}"] & \dots \\
Z: & \dots \arrow[r] & Z^{i-1} \arrow[r, "d_Z^{i-1}"'] & Z^i \arrow[r, "d_Z^i"'] & Z^{i+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Com isso, obtemos uma categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ cujos os objetos são complexos sobre $\mathcal{A}$, com morfismos e a composição dos mesmos definidos anteriormente.

As principais subcategorias plenas de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ são:

$$\mathcal{C}^+(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) : X^i = 0, \forall i < m, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{C}^-(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) : X^i = 0, \forall i > m, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}\}$$
$$\mathcal{C}^b(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^-(\mathcal{A}) \cap \mathcal{C}^+(\mathcal{A}).$$

Os complexos em $\mathcal{C}^+(\mathcal{A}), \mathcal{C}^-(\mathcal{A}), \mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ são chamados *limitados inferiormente*, *limitados superiormente* e *limitados*, respectivamente.

Em geral, se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana, então $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ também o é. Para exemplificar, consideremos $\mathcal{A} = mod\,\Lambda$, onde Λ é uma álgebra sobre um corpo K. O objeto zero em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é o complexo com cada célula igual ao objeto zero de $\mathcal{A}$. A soma direta de complexos (X, d_X) e (Y, d_Y) é o complexo $\left(X \oplus Y, \begin{pmatrix} d_X & 0 \\ 0 & d_Y \end{pmatrix}\right)$. Se $f \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$, então o núcleo de f é o complexo

$$(Ker\, f, \delta) : \qquad \ldots \longrightarrow Ker\, f^{i-1} \xrightarrow{\delta^{i-1}} Ker\, f^i \xrightarrow{\delta^i} Ker\, f^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

onde $\delta^i = d_X^i|_{Ker\, f^i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. O morfismo núcleo de f é o morfismo de complexos $u = (u^i)_{i\in\mathbb{Z}} : Ker\ f \longrightarrow X$, onde cada u^i é o morfismo núcleo de f^i em $\mathcal{A}$. Dualmente, definimos o conúcleo $Coker\, f$ e o morfismo conúcleo $p : Y \longrightarrow Coker\, f$ de f em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Sejam X um objeto de $\mathcal{A}$ e $i \in \mathbb{Z}$. Definimos o **complexo concentrado no nível** i $(X(i), d_{X(i)})$, onde $X(i)^i = X$ e zero caso contrário, e $d^n_{X(i)} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos um monomorfismo (também chamado de mergulho) fiel de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, denotado por $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Dado o complexo $X : \quad \ldots \to X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \to \ldots$ definimos os seguintes complexos:

$$X_{\leq n} : \qquad \ldots \longrightarrow X^{n-2} \xrightarrow{d_X^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

$$X_{\geq n} : \qquad \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \ldots$$

Tais complexos são chamados **truncamentos** de X.

Seja X um complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A} = mod\,\Lambda$. A **i-ésima cohomologia** de X é dada por
$$H^i(X) = \frac{Ker\, d_X^i}{Im\ d_X^{i-1}}.$$

Para todo $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(X)$ está bem definida pois $Im\ d_X^{i-1} \subset Ker\, d_X^i$.

Proposição 1.48. *Para cada $i \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{array}{rcccc} H^i(-): & \mathcal{C}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A} & \\ & X & & H^i(X) = \dfrac{Ker\, d_X^i}{Im\ d_X^{i-1}} & \overline{x} \\ & \Big\downarrow f & \longmapsto & \Big\downarrow H^i(f) & \Big\downarrow \\ & Y & & H^i(Y) = \dfrac{Ker\, d_Y^i}{Im\ d_Y^{i-1}} & \overline{f^i(x)} \end{array}$$

é um funtor.

Demonstração. Veja [25], p. 818, Proposição 10.37. □

Considere $\mathcal{A} = mod\,\Lambda$. A seguir definimos morfismos radicais em $\mathcal{A}$ e complexos radicais em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Definição 1.49. *Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{A}$ é um **morfismo radical** se $Im\ f \subset rad\ Y$. Dizemos que um complexo (X, d_X) em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é um **complexo radical** se $Im\ d_X^i \subset rad\ X^{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, isto é, cada diferencial é um morfismo radical.*

Proposição 1.50. *O conjunto $\mathcal{I}$ de todos morfismos radicais é um ideal de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. De fato,

1. Sejam os objetos X, Y em $\mathcal{A}$ e $f, g \in \mathcal{I}(X, Y)$. O morfismo nulo 0 pertence a $\mathcal{I}(X, Y)$, pois $Im\ 0 = 0 \subset rad\,Y$, visto que $rad\,Y$ é um subgrupo de Y. Além disso, $(f - g)(X) = f(X) - g(X) \subset rad\,Y$.

   Logo, $\mathcal{I}(X, Y)$ é um subgrupo aditivo de $Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$;

2. Sejam $f \in \mathcal{I}(Z, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Z)$. Temos

   $$Im\ fg = fg(X) = f(Im\ g) \subset f(Z) = Im\ f \subset rad\,Y$$

   isto é, $fg \in \mathcal{I}(X, Y)$. Por outro lado, suponha que $f \in Hom_{\mathcal{A}}(Z, Y)$ e $g \in \mathcal{I}(X, Z)$. Pela Proposição 1.29, temos

   $$fg(X) = f(Im\ g) \subset f(rad\,Z) \subset radY$$

   isto é, $fg \in \mathcal{I}(X, Y)$.

□

Proposição 1.51. *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita. Se $f : X \longrightarrow X$ é um morfismo radical em $mod\,\Lambda$, então f é nilpotente.*

Demonstração. Como f é um morfismo radical, temos

$$f(X) \subseteq rad\,X = Xrad\,\Lambda, \tag{1.5}$$

onde a igualdade é obtida pela Proposição 1.29. Agora, suponhamos que $f^{l-1}(X) \subseteq X rad^{l-1}\,\Lambda$, para algum $l \in \mathbb{N}$. Assim,

$$f^l(X^n) = f(f^{l-1}(X)) \subseteq f(X rad^{l-1}\,\Lambda) = f(X) rad^{l-1}\,\Lambda \overset{(1.5)}{\subseteq} X rad^l\,\Lambda.$$

Logo, por indução, provamos que $f^m(X) \subseteq X rad^m\,\Lambda$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $rad\,\Lambda$ é nilpotente, visto que Λ é uma álgebra de dimensão finita (Proposição 1.20), f é nilpotente. $\square$

Corolário 1.52. *Seja Λ uma álgebra de dimensão finita. Se $f : X \longrightarrow X$ é um morfismo radical em $mod\,\Lambda$, então $1_X - f$ é um automorfismo.*

Demonstração. Segue diretamente das Proposições 1.51 e 1.32. $\square$

1.5 Álgebra de Caminhos e Representações

Nesta seção, estudaremos algumas noções de Teoria de Representações. Para maiores detalhes recomendamos [2] e [4].

Um **quiver** é uma quádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, onde:

1. Q_0 e Q_1 são conjuntos cujos elementos são chamados **vértices** e **flechas**, respectivamente.

2. $s, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ são aplicações que associam cada flecha $\alpha \in Q_1$ aos seus vértices inicial $a = s(\alpha)$ e final $b = t(\alpha)$ em Q_0, respectivamente. Tais flechas $\alpha \in Q_1$ são denotadas por $\alpha : a \to b$.

Em geral, denotaremos um quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ simplesmente por Q.

Um quiver Q dito **finito** se Q_0 e Q_1 são conjuntos finitos. Se o grafo subjacente de Q é conexo, dizemos que Q é **conexo**.

A menos de menção ao contrário todo quiver Q é finito.

Seja $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ um quiver e $a, b \in Q_0$. Um **caminho não-trivial** w de comprimento $l \geq 1$ de a para b é uma sequência de flechas $\alpha_l \alpha_{l-1} \ldots \alpha_1$ em Q_1 tal que o $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})(1 \leq k < l)$ e $t(\alpha_l) = b$. Graficamente, temos

$$a \xrightarrow{\alpha_1} t(\alpha_1) \xrightarrow{\alpha_2} t(\alpha_2) \longrightarrow \ldots \qquad t(\alpha_{l-1}) \xrightarrow{\alpha_l} b\,.$$

Neste caso, dizemos que $s(\alpha_1) = a$ e $t(\alpha_l) = b$ são o *início* e o *término* de w, respectivamente. O caminho não-trivial w é chamado **ciclo** sempre que seus início e término coincidem. Um quiver Q é dito **acíclico** se não possui ciclos.

Além disso, a cada vértice a em Q_0 associamos um caminho de comprimento zero, chamado **caminho trivial** e denotado por ε_a.

Desta forma, definimos a multiplicação de dois caminhos $w = \alpha_l \alpha_{l-1} \ldots \alpha_1$ e $w' = \beta_k \beta_{k-1} \ldots \beta_1$ como

$$w \cdot w' = \begin{cases} ww' = \alpha_l \ldots \alpha_1 \beta_k \ldots \beta_1, & \text{se } t(w') = \beta_k = \alpha_1 = s(w) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sejam K um corpo e Q um quiver. Denotamos KQ o K-espaço vetorial gerado pelo conjunto de todos os caminhos em Q, isto é, cujos elementos são unicamente da forma

$$\sum_i \lambda_i w_i,$$

onde $\lambda_i \in K$, com $\lambda_i \neq 0$ para uma quantidade finita de índices i e w_i é um caminho em Q. Estendendo por linearidade e distributividade a multiplicação definida anteriormente, verifica-se que KQ é uma álgebra associativa cujo o elemento identidade é $1 = \sum\limits_{a \in Q_0} \varepsilon_a$. Neste caso, KQ é chamada **álgebra de caminhos** de Q.

A álgebra de caminhos KQ é conexa se, e somente se, o quiver Q é conexo.

Seja Q um quiver. O ideal **flecha** de KQ é gerado (como ideal) por todas as flechas $\alpha \in Q_1$ de Q e denotado por R_Q. Um ideal $\mathcal{I}$ de KQ é dito **admissível** se existe um inteiro $m > 1$ tal que $R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2$.

Uma **relação** ρ em um quiver Q é um elemento da álgebra de caminhos KQ dado pela K-combinação linear de caminhos de comprimento maior do que um e com mesmos vértices inicial e final.

Seja $\mathcal{I}$ um ideal admissível. É sabido que $\mathcal{I}$ é gerado por um conjunto finito de relações $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$. Assim, o par $(Q, \mathcal{I})$ é dito um **quiver limitado pelas relações** $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ e álgebra quociente $KQ/\mathcal{I}$ é dita **álgebra do quiver limitado por relações** $(Q, \mathcal{I})$.

Exemplo 1.53. *Seja Q o quiver*

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 \arrow[loop left, "\lambda"] & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
& 3 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

O ideal $\mathcal{I}$ gerado por $\{\beta\alpha - \delta\lambda, \lambda\beta, \lambda^3\}$ é admissível. Neste caso, $(Q, \mathcal{I})$ é o quiver limitado pelas relações $\rho_1 = \beta\alpha - \delta\lambda$, $\rho_2 = \lambda\beta$ e $\rho_3 = \lambda^3$.

A seguir, apresentamos o *Teorema de Gabriel* que estabelece uma relação entre uma álgebra de dimensão finita tendo determinadas condições com um quiver limitado por relações.

Teorema 1.54. *Seja K um corpo algebricamente fechado. Toda K-álgebra Λ de dimensão finita básica e conexa é isomorfa à uma álgebra $KQ/\mathcal{I}$ de um quiver limitado por relações $(Q, \mathcal{I})$.*

Até agora, percebemos que as álgebras isomorfas às álgebras de caminhos de um quiver Q podem ser estudadas por meio do próprio quiver Q. Agora, por meio de representações veremos como os quivers são úteis para o estudos dos módulos sobre uma álgebra.

Sejam K um corpo e Q um quiver. Uma **representação** $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ de Q é definida da seguinte forma:

1. A cada vértice a em Q_0 é associado um K-espaço vetorial M_a;

2. A cada flecha $\alpha : a \longrightarrow b$ em Q_1 é associada uma transformação linear $\varphi_\alpha : M_a \longrightarrow M_b$.

Sejam $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ e $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ representações de um quiver Q. Um **morfismo de representações** $f : M \longrightarrow M'$ é uma família de transformações lineares $(f_a : M_a \longrightarrow M'_a)_{a \in Q_0}$ tais que, para cada flecha $\alpha : a \longrightarrow b$, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"'] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"'] & M'_b \end{tikzcd}$$

A composição de morfismos de representações $f = (f_a)_{a\in Q_0} : M \longrightarrow M'$ e $g = (g_a)_{a\in Q_0} : M' \longrightarrow M''$ dada por $gf = (g_a f_a : M \longrightarrow M'')_{a\in Q_0}$ também é um morfismo de representações.

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"'] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] \arrow[d, "g_a"'] & M'_b \arrow[d, "g_b"] \\ M''_a \arrow[r, "\varphi''_\alpha"'] & M''_b \end{tikzcd}$$

Com isso, definimos a categoria $Rep_K(Q)$ de representações de Q e a subcategoria plena $rep_K(Q)$ de $Rep_K(Q)$ formada pelas representações de dimensão finita $M = (M_a, \varphi_\alpha)$, isto é, cada M_a é um K-espaço vetorial de dimensão finita. Prova-se que $Rep_K(Q)$ e $rep_K(Q)$ são K-categorias abelianas e que são equivalentes às categorias $Mod\,\Lambda$ e $mod\,\Lambda$, respectivamente.

Assim, podemos determinar os módulos injetivos, projetivos e simples indecomponíveis como representações do quiver $(Q, \mathcal{I})$.

Proposição 1.55. *Seja a um vértice em Q_0. Um Λ-módulo simples $S(a)$ corresponde à representação $(S(a)_b, \varphi_\alpha)$ de Q dada por*

$$S(a)_b = \begin{cases} K, & se\ a = b \\ 0, & se\ a \neq b \end{cases} \quad e\ \varphi_\alpha = 0, \forall \alpha \in Q_1.$$

Demonstração. Ver [2], p. 76. □

Proposição 1.56. *Um Λ-módulo projetivo indecomponível corresponde à representação $(P(a)_b, \varphi_\beta)$, onde $P(a)_b$ é o K-espaço vetorial cuja base B é o conjunto de todos $\overline{w} = w + \mathcal{I}$, com w um caminho de a para b e para cada $\beta : b \longrightarrow c \in Q_1$,*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\beta : & P(a)_b & \longrightarrow & P(a)_c \\ & \overline{w} & \longmapsto & \overline{\beta w} \end{array},$$

para cada $\overline{w} \in B$. O radical de um Λ-módulo projetivo indecomponível corresponde à representação $(P'(a)_b, \varphi'_\beta)$, onde $P'(a)_b$ com $b = a$ é o K-espaço vetorial com base o conjunto de todos $\overline{w} = w + \mathcal{I}$, com w um caminho não-trivial de a para a,

$P'(a)_b = P(a)_b$ para $b \neq a$, e para cada $\beta : b \longrightarrow c \in Q_1$,

$$\varphi'_\beta = \begin{cases} \varphi_\beta|_{P'(a)_b}, & se\ b = a \\ \varphi_\beta, & se\ b \neq a \end{cases}$$

onde $\varphi_\beta|_{P'(a)_b}$ é a restrição de φ_β ao K-espaço vetorial $P'(a)_b$.

Demonstração. Ver [2], p. 79, Lema 2.4. □

Proposição 1.57. *Um Λ-módulo injetivo indecomponível corresponde à representação $(I(a)_b, \varphi_\beta)$, onde $I(a)_b$ é o dual do K-espaço vetorial cuja base B' é o conjunto de todos $\overline{w} = w + \mathcal{I}$, com caminhos w de b para a e para cada $\beta : b \to c \in Q_1$, φ_β é dada pelo dual da multiplicação à esquerda por $\overline{\beta}$.*

Demonstração. Ver [2], p. 81, Lema 2.6. □

Exemplo 1.58. *Seja Q o quiver*

$$\overset{1}{\bullet} \xleftarrow{\ \beta\ } \overset{2}{\bullet} \xleftarrow{\ \alpha\ } \overset{3}{\bullet}$$

A álgebra de caminhos KQ é gerada pelo conjunto $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \beta, \alpha, \alpha\beta\}$. Observemos que KQ é isomorfa à álgebra de matrizes triangulares inferiores 3×3

$$\mathbb{T}_3(K) = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & K & K \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f \in K \right\},$$

onde o isomorfismo é induzido da aplicação K-linear dada por

$$\varepsilon_i \mapsto E_{ii}, \beta \mapsto E_{21}, \alpha \mapsto E_{32}, \beta\alpha \mapsto E_{31}$$

com $i = 1, 2, 3$, onde E_{jk} é a matriz 3×3 com 1 na entrada jk e 0 nas demais entradas.

Com base nas Proposições 1.55, 1.56 e 1.57, temos a lista de KQ-módulos simples, projetivos e injetivos indecomponíveis:

$$\begin{aligned} P(1) = rad\,P(2) &= K \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \ = S(1) \\ P(2) &= K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0 \ = rad\,P(3) \\ P(3) &= K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K \ = I(1) \\ I(2) &= 0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K \\ I(3) &= 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow K \ = S(3) \\ S(2) &= 0 \longleftarrow K \longleftarrow 0 \end{aligned}$$

1.6 Sequência e Quiver de Auslander-Reiten

As sequências de Auslander-Reiten (também chamadas sequências quase cindidas) foram introduzidas, na década de 70, por Maurice Auslander e Idun Reiten na categoria $mod\,\Lambda$, onde Λ é uma álgebra Artin. Elas são fundamentais nessa categoria, uma vez que permitem descrever os módulos indecomponíveis e os morfismos irredutíveis entre os mesmos. Isto possibilita a construção do quiver de Auslander-Reiten, o qual reúne informações importante sobre $mod\,\Lambda$.

Nesta seção, apresentamos de forma sucinta as sequências de Auslander-Reiten e o Quiver de Auslander-Reiten. Para o leitor mais interessado em tais assuntos, recomendamos o capítulo IV de [2].

Inicialmente, definiremos morfismos irredutíveis em uma categoria aditiva $\mathcal{A}$.

Definição 1.59. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo em uma categoria aditiva $\mathcal{A}$. Dizemos que f é* ***mono cindido*** *(resp.* ***epi cindido****) se existe um morfismo $k : Y \longrightarrow X$ em $\mathcal{A}$ tal que $kf = 1_X$ (resp. $fk = 1_Y$). Por outro lado, f é dito* ***irredutível****, se não é mono cindido nem epi cindido e se qualquer fatoração $f = hg$ implica que ou g é mono cindido ou h é epi cindido.*

Agora, apresentamos um resultado importante sobre morfismos irredutíveis entre módulos indecomponíveis na categoria aditiva $mod\,\Lambda$.

Lema 1.60. *Sejam X e Y módulos indecomponíveis em $mod\,\Lambda$. Um morfismo $f \in Hom_\Lambda(X,Y)$ é irredutível se, e somente se, $f \in rad_\Lambda(X,Y) \setminus rad^2_\Lambda(X,Y)$.*

Demonstração. Veja [2], p. 100, Lema 1.6. □

Sejam X e Y módulos indecomponíveis em $mod\,\Lambda$. Pelo Lema anterior, o K-espaço vetorial quociente

$$Irr(X,Y) = rad_\Lambda(X,Y)/rad^2_\Lambda(X,Y),$$

chamado **Espaço dos Morfismos Irredutíveis**, determina o número de morfismo irredutíveis de X para Y.

No capítulo 3, daremos mais detalhes sobre morfismos irredutíveis em uma categoria. Agora, definiremos uma sequência de Auslander-Reiten.

Uma sequência exata curta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ em $mod\,\Lambda$ é dita uma **sequência de Auslander-Reiten** se X e Y são indecomponíveis, e f e g são morfismos irredutíveis.

Seja Λ uma K-álgebra de dimensão finita, básica e conexa. O quiver $\Gamma(mod\,\Lambda)$ de $mod\,\Lambda$, chamado **quiver de Auslander-Reiten de** Λ, é definido como segue:

1. Os vértices de $\Gamma(mod\,\Lambda)$ são as classes de isomorfismos $[X]$ de módulos indecomponíveis X em $mod\,\Lambda$.

2. Sejam $[X]$ e $[Y]$ vértices em $\Gamma(mod\,\Lambda)$ correspondentes aos módulos indecomponíveis X e Y em $mod\,\Lambda$. As flechas $[X] \longrightarrow [Y]$ estão em correspondência bijetiva com os vetores de uma base de $Irr(X,Y)$.

Denotaremos as classes de isomorfismos $[X]$ simplesmente por X.

Exemplo 1.61. *Seja Λ a álgebra de caminhos do quiver Q dado por*

$$\overset{1}{\bullet} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\bullet} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\bullet}$$

Pelo Exemplo 1.58, temos uma lista de KQ-módulos indecomponíveis simples, projetivos e injetivos:

$$
\begin{array}{rcl}
P(1) = rad\, P(2) & = & K \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \ = S(1) \\
P(2) & = & K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0 \ = rad\, P(3) \\
P(3) & = & K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K \ = I(1) \\
I(2) & = & 0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K \\
I(3) & = & 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow K \ = S(3) \\
S(2) & = & 0 \longleftarrow K \longleftarrow 0
\end{array}
$$

O quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(mod\, \Lambda)$ de Λ é dado por

$$
\begin{tikzcd}
 & & P(3) \arrow[dr, "p"] & & \\
 & P(2) \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "q"] \arrow[rr, dashed, no head] & & I(2) \arrow[dr, "r"] & \\
P(1) \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, no head] & & S(2) \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, dashed, no head] & & S(3)
\end{tikzcd}
$$

Maiores detalhes sobre a construção deste quiver pode ser encontrada no capítulo IV de [2]. No entanto, destacaremos alguns elementos do quiver. Cada morfismo no quiver $\Gamma(mod\, \Lambda)$ é irredutível. As sequências de Auslander-Reiten neste quiver são:

$$0 \longrightarrow P(1) \xrightarrow{f} P(2) \xrightarrow{q} S(2) \longrightarrow 0 \tag{1.6}$$

$$0 \longrightarrow P(2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} q & g \end{pmatrix}^t} S(2) \oplus P(3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j & p \end{pmatrix}} I(2) \longrightarrow 0 \tag{1.7}$$

$$0 \longrightarrow S(2) \xrightarrow{j} I(2) \xrightarrow{r} S(3) \longrightarrow 0\,. \tag{1.8}$$

Neste caso, os morfismos f, g e j são morfismos inclusões e p, q e r são morfismos projeções.

Exemplo 1.62. *Seja Λ a álgebra de caminhos do quiver Q dado por*

$$\overset{1}{\bullet} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\bullet} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\bullet}$$

com relação $\beta\alpha = 0$. Em [15](veja pág. 15), vemos que o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(mod\, \Lambda)$ de Λ é dado por

$$
\begin{tikzcd}
 & & & P(3) \arrow[dr, "r"] & \\
P(1) \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & S(2) \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, dashed, no head] & & S(3) \\
 & P(2) \arrow[ur, "q"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

Agora, apenas (1.6) *e* (1.8) *são sequências de Auslander-Reiten no quiver* $\Gamma(mod\,\Lambda)$. *Neste quiver,* f *e* j *são morfismos inclusões e* r *e* q *são morfismos projeções assim como no quiver do exemplo anterior.*

Entretanto, neste quiver, apesar de ainda termos $P(1) = rad\ P(2)$, *agora temos* $rad\ P(3) = S(2)$.

Capítulo 2

Categoria Triangulada

Na Teoria de Categorias, existem categorias importantes que não são abelianas e, consequentemente, não possuem sequências exatas curtas. No entanto, algumas destas categorias possuem uma estrutura de categoria triangulada e triângulos (distinguidos) que desempenham um papel semelhante ao das sequências exatas curtas nas categorias abelianas.

Neste capítulo, apresentaremos as principais definições e resultados sobre Categorias Trianguladas. Ao final, apresentaremos dois exemplos de categorias trianguladas, a saber, as categorias homotópica e derivada de uma categoria aditiva. Mais detalhes sobre Categorias Trianguladas podem ser encontrados em [10] e [13] (veja também [7]).

2.1 Categoria Triangulada

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e T um automorfismo de $\mathcal{C}$, denominado **funtor translação**.

Definição 2.1. *Um* ***triângulo*** *em $\mathcal{C}$ é uma sêxtupla (X, Y, Z, u, v, w) representada por*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \ ,$$

onde $X, Y, Z \in obj(\mathcal{C})$ e u, v e w são morfismos de $\mathcal{C}$, o qual será denotado, quando não houver confusão, por (u, v, w).

Na literatura, o triângulo (u, v, w) é representado por

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "w"'] & \\ X \arrow[rr, "u"'] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

lembrando que w é um morfismo de Z para $T(X)$ em $\mathcal{C}$.

Definição 2.2. *Dizemos que uma tripla (f, g, h) de morfismos em $\mathcal{C}$ é um* ***morfismo de triângulos*** *de (u, v, w) para (u', v', w') se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & T(X') \end{tikzcd}$$

é comutativo. Se f, g e h são isomorfismos em $\mathcal{C}$, então dizemos que (f,g,h) é um ***isomorfismo de triângulos****.*

Definição 2.3. *Uma categoria* ***triangulada*** *é uma tripla $(\mathcal{C},T,\tau)$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria aditiva, T é um automorfismo de $\mathcal{C}$ e τ é uma classe de triângulos, denominada* ***triangulação*** *e cujos elementos são chamados* ***triângulos distinguidos****, que satisfazem as seguintes condições:*

(TR1) (a) τ é fechada para isomorfismos;
(b) Se u é um morfismo em $\mathcal{C}$, existe um triângulo distinguido (u,v,w);
(c) Para todo $X \in obj(\mathcal{C})$, $(X,X,0,1_X,0,0)$ é um triângulo distinguido.

(TR2) (Rotação) Se (u,v,w) é um triângulo distinguido, então $(v,w,-T(u))$ também o é.

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "w"'] & \\
X \arrow[rr, "u"'] & & Y \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& T(X) \arrow[dl, "-T(u)"'] & \\
Y \arrow[rr, "v"'] & & Z \arrow[ul, "w"']
\end{tikzcd}
$$

(TR3) Se o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & T(X')
\end{tikzcd}
$$

é tal que suas linhas são triângulos distinguidos e o quadrado esquerdo é comutativo, então existe um morfismo $h : Z \longrightarrow Z'$ em $\mathcal{C}$ tal que (f,g,h) é um morfismo de triângulos de (u,v,w) para (u',v',w').

(TR4) (Axioma do Octaedro) Dado o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T^{-1}(Y') \arrow[r, "T^{-1}(k')"] \arrow[d, "T^{-1}(g)"'] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "uv"'] & & \\
T^{-1}(X') \arrow[r, "T^{-1}(j')"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i"'] & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"'] & X' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "1'_X"'] & T(Y) \arrow[d, "T(i)"] \\
& Z' \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[d, "i'"'] & Y' \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[d, "k'"] & X' \arrow[r, "T(i)j'"] & T(Z') \\
& T(X) \arrow[r, equal] & T(X) & &
\end{tikzcd}
$$

Se (u,i,i'), (v,j,j') e (uv,k,k') são triângulos distinguidos, então existem morfismos $f : Z' \longrightarrow Y'$ e $g : Y' \longrightarrow X'$ em $\mathcal{C}$ tais que o diagrama acima comuta e a terceira linha é um triângulo distinguido $(f,g,T(i)j')$.

Quando não houver confusão, diremos que $\mathcal{C}$ é uma categoria triangulada.

Observação 2.4. *Em 2001, no artigo [21], May mostrou que o axioma (TR3) é redundante, isto é, ele segue como consequência dos demais axiomas. No entanto, optamos por mantê-lo na definição supracitada, devido a importância do mesmo para provar alguns resultados adiante.*

Definição 2.5. *Sejam $(\mathcal{C}, T, \tau)$ e $(\mathcal{C}', T', \tau')$ categorias trianguladas quaisquer. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é **exato** se existe uma equivalência natural $\Psi : FT \to T'F$ tal que F leva um triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ de $\mathcal{C}$ em um triângulo distinguido*

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\Psi_X F(w)} T'F(X)$$

*de $\mathcal{C}'$. Se além disso F é uma equivalência de categorias dizemos que F é uma **equivalência triangular**. Neste caso, dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são triangular-equivalentes.*

No axioma (TR2), vimos que podemos rotacionar um triângulo distinguido no sentido horário. O seguinte lema garante que tal rotação pode ser feita no sentido anti-horário também, ou seja, é válida a recíproca do axioma (TR2).

Lema 2.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada. Se $(v, w, -T(u))$ é um triângulo distinguido em $\mathcal{C}$, então (u, v, w) também o é.*

Demonstração. Veja [13], p. 6, Lema 1.3. □

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada e $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Um funtor covariante (respectivamente, contravariante) $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ é chamado **funtor cohomológico** se a sequência longa

$$\ldots \to H(T^i(X)) \xrightarrow{H(T^i(u))} H(T^i(Y)) \xrightarrow{H(T^i(v))} H(T^i(Z)) \xrightarrow{H(T^i(w))} H(T^{i+1}(X)) \to \ldots$$

(respectivamente,

$$\ldots \to H(T^{i+1}(X)) \xrightarrow{H(T^i(u))} H(T^i(Z)) \xrightarrow{H(T^i(v))} H(T^i(Y)) \xrightarrow{H(T^i(w))} H(T^i(X)) \to \ldots)$$

é exata, para todo triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ em $\mathcal{C}$.

Lema 2.7. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada, M um objeto em $\mathcal{C}$ e um triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ em $\mathcal{C}$. Então,*

1. *$vu = wv = 0$;*
2. *$Hom_{\mathcal{C}}(M, -)$ e $Hom_{\mathcal{C}}(-, M)$ são funtores cohomológicos;*
3. *Seja o morfismo de triângulos distinguidos em $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & T(X')
\end{tikzcd}$$

Se f e g são isomorfismos, então h também o é.

Demonstração. Veja [13], p. 4, Proposição 1.2. □

Proposição 2.8. *Seja* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ *um triângulo distinguido em uma categoria triangulada* $\mathcal{C}$. *Para todo morfismo* $g : W \to Y$ *em* $\mathcal{C}$ *tal que* $vg = 0$, *existe um morfismo* $\varphi : W \to X$ *em* $\mathcal{C}$ *tal que* $u\varphi = g$.

Demonstração. Pelo Lema 2.7, o funtor covariante $Hom_{\mathcal{C}}(W, -)$ é cohomológico. Assim, aplicando tal funtor no triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$, obtemos a sequência exata longa

$$\ldots \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(W, X) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(W,u)} Hom_{\mathcal{C}}(W, Y) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(W,v)} Hom_{\mathcal{C}}(W, Z) \longrightarrow \ldots$$

Como $g \in Hom_{\mathcal{C}}(W, Y)$ e $vg = 0$, temos $g \in Ker\, Hom_{\mathcal{C}}(W, v) = Im\, Hom_{\mathcal{C}}(W, u)$. Logo, existe $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(W, X)$ tal que $u\varphi = g$, como queríamos. □

Na definição 1.59, vimos que morfismos mono cindidos (resp., epi cindidos) são aqueles que possuem inverso à esquerda (resp., inverso à direita). A seguir, veremos as consequências de termos esses morfismos em um triângulo distinguido.

Lema 2.9. *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria triangulada e* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ *um triângulo distinguido em* $\mathcal{C}$. *As seguintes condições são equivalentes:*

1. $w = 0$;

2. u *é mono cindido;*

3. v *é epi cindido.*

Demonstração. Veja [13], p. 7, Lema 1.4. □

Por fim, veremos condições necessárias e suficientes para que tenhamos um isomorfismo em um certo triângulo distinguido.

Lema 2.10. *Seja* $u : X \longrightarrow Y$ *um morfismo numa categoria triangulada* $\mathcal{C}$. *Então,* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} T(X)$ *é um triângulo distinguido em* $\mathcal{C}$ *se, e somente se,* u *é um isomorfismo.*

Demonstração. Veja [13], p. 9, Lema 1.7. □

2.2 Categoria Homotópica

Nesta seção, daremos um exemplo de Categoria Triangulada, a Categoria Homotópica $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ onde $\mathcal{A}$ é uma categoria aditiva.

Definição 2.11. *Sejam* $f, g : X \longrightarrow Y$ *morfismos de complexos em* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. *Dizemos que* f *é* ***homotópico*** *a* g, *e denotamos* $f \sim g$, *se existem morfismos* $s^i : X^i \longrightarrow Y^{i-1}$ *em* $\mathcal{A}$, *denominados* ***homotopias***, *tais que no diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X : \arrow[d, "f-g"] & \ldots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}-g^{i-1}"'] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i-g^i"] \arrow[dl, dashed, "s^i"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}-g^{i+1}"] \arrow[dl, dashed, "s^{i+1}"] & \ldots \\
Y : & \ldots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"'] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"'] & Y^{i+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

têm-se $f^i - g^i = d_Y^{i-1}s^i + s^{i+1}d_X^i$, *para todo* $i \in \mathbb{Z}$.

Proposição 2.12. *Com as notações da definição anterior, se $f \sim g$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, então $f\alpha \sim g\alpha$ e $\beta f \sim \beta g$, para todos $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(W, X)$ e $\beta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(Y, Z)$.*

Demonstração. Basta observar que

$$f^i\alpha^i - g^i\alpha^i = (f^i - g^i)\alpha^i = d_Y^{i-1}(s^i\alpha^i) + (s^{i+1}\alpha^{i+1})d_W^{i+1}$$

e

$$\beta^i f^i - \beta^i g^i = \beta^i(f^i - g^i) = d_Z^{i-1}(\beta^{i-1}s^i) + (\beta^i s^{i+1})d_X^i$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. □

Seja $f \in Hom_{\mathcal{C}(A)}(X, Y)$. Dizemos que f é **homotopicamente nulo** se $f \sim 0$, onde $0 \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ é o morfismo zero. Denotamos por $\mathcal{I}(X, Y)$ o conjunto de todos morfismos homotopicamente nulos em $Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$.

Agora, observe que $f - g \in \mathcal{I}(X, Y)$ se, e somente se, $f \sim g$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Desta forma, definimos a **categoria homotópica** $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ tal que

$$obj(\mathcal{K}(\mathcal{A})) = obj(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \text{ e } Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y) = \frac{Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)}{\mathcal{I}(X, Y)}$$

para todos complexos X e Y em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, isto é, os morfismos de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ são os morfismos de complexos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ a menos de homotopias.

Se $f = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$, $[f] = f + \mathcal{I}(X, Y)$ denota sua classe de homotopia, isto é, o morfismo correspondente em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Diremos que os morfismos f^i são as *componentes* de f e também, por abuso de linguagem, de $[f]$.

Podemos verificar que a homotopia $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto $Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$, para quaisquer complexos X e Y em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Assim, mostraremos que a composição $\circ$ de morfismos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ dada por

$$\begin{array}{rccc} \circ: & Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y) & \to & Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Z) \\ & ([g], [f]) & \mapsto & [gf] \end{array}$$

está bem definida. De fato, suponhamos que

$$([g], [f]) = ([g'], [f']).$$

em $Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y)$. Desta forma, temos $g - g' \in \mathcal{I}(Y, Z)$ e $f - f' \in \mathcal{I}(X, Y)$, isto é, $g \sim g'$ e $f \sim f'$. Pela Proposição 2.12, $gf \sim g'f$ e $g'f \sim g'f'$. Logo, como $\sim$ é uma relação de equivalência, por transitividade, $gf \sim g'f'$, donde obtemos $[gf] = [g'f']$, como queríamos.

Agora, mostraremos que $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva. Sabendo que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva e pela composição definida em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, podemos provar os itens 1 (veja Observação 1.7) e 3 da Definição 1.5.

Além disso, a próxima proposição garante que cada conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y)$ possui uma estrutura de grupo abeliano.

Proposição 2.13. *O conjunto $\mathcal{I}(X, Y) = \{f \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y) : f \sim 0\}$ é um subgrupo aditivo de $Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$.*

Demonstração. Dado o morfismo zero $0 \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$, existem morfismos $s^i = 0 : X^i \to Y^{i-1}$ em $\mathcal{A}$ tais que $0 = d_Y^{i-1}s^i + s^{i+1}d_X^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo, $0 \in \mathcal{I}(X, Y)$.

Sejam $f, g \in \mathcal{I}(X, Y)$. Assim, existem homotopias $s^i, t^i : X^i \to Y^{i-1}$ em $\mathcal{A}$, de modo que

$$f^i = d_Y^{i-1}s^i + s^{i+1}d_X^i \text{ e } g^i = d_Y^{i-1}t^i + t^{i+1}d_X^i,$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Com isso $f^i - g^i = d_Y^{i-1}(s^i - t^i) + (s^{i+1} - t^{i+1})d_X^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo, $f - g \in \mathcal{I}(X, Y)$, o que completa a demonstração. □

Por fim, pode-se provar que o objeto zero 0 de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é o mesmo de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Em geral, $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ não é uma categoria abeliana, mesmo que $\mathcal{A}$ o seja (Veja [11], p. 57, Observação 5.7).

Agora, seja $\mathcal{A} = Mod\ \Lambda$. Na Proposição 1.48, para cada $i \in \mathbb{Z}$, definimos o funtor $H^i(-) : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, o qual induz uma aplicação $H^i(-) : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$. O próximo resultado garante que tal aplicação está bem definida.

Proposição 2.14. *Se $f, g \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ são homotópicos então, para todo $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(f) = H^i(g)$.*

Demonstração. Como $f \sim g$, existem morfismos $s^i : X^i \longrightarrow Y^{i-1}$ em $\mathcal{A}$ tais que

$$f^i - g^i = d_Y^{i-1}s^i + s^{i+1}d_X^i \tag{2.1}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Agora, seja $\overline{x} \in H^i(X) = \dfrac{Ker\ d_X^i}{Im\ d_X^{i-1}}$. Assim,

$$H^i(f)(\overline{x}) - H^i(g)(\overline{x}) = \overline{f^i(x) - g^i(x)} \overset{(2.1)}{=} \overline{d_Y^{i-1}s^i(x)} + \overline{s^{i+1}d_X^i(x)} = \overline{d_Y^{i-1}s^i(x)}$$

pois $x \in Ker\, d_X^i$. Como $H^i(Y) = \dfrac{Ker\ d_Y^i}{Im\ d_Y^{i-1}}$, obtemos $H^i(f) = H^i(g)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, como queríamos □

Corolário 2.15. *Para todo $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(-) : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ é um funtor.*

A seguir listamos algumas subcategorias plenas de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{K}^+(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) : X^i = 0, \forall i < m, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{K}^-(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) : X^i = 0, \forall i > m, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{K}^b(\mathcal{A}) = \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}^-(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{K}^{-,b}(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{K}^-(\mathcal{A}); H^i(X) = 0, \forall i < m, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}\}$$

Agora, definiremos um complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ que será muito útil para provar que $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada.

Definição 2.16. *Seja $f \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$. O **cone** de f é o complexo C_f dado por $C_f^i = X^{i+1} \oplus Y^i$ e $d_{C_f}^i = \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Um complexo X em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é dito **homotopicamente nulo** se 1_X é homotopicamente nulo. Neste caso, $X \cong 0$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

O próximo resultado apresenta um exemplo de complexo homotopicamente nulo.

Proposição 2.17. *Para todo complexo X em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, o cone C_{1_X} do morfismo identidade 1_X é homotopicamente nulo.*

Demonstração. Precisamor mostrar que o morfismo $1_{C_{1_X}}$ é homotopicamente nulo. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{Z}$, definindo $s^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : C^i_{1_X} \to C^{i-1}_{1_X}$ no diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_{1_X}: \arrow[d, "1_{C_{1_X}}"] & \cdots \arrow[r] & X^i \oplus X^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C_{1_X}}"] \arrow[d, "1_{C^{i-1}_{1_X}}"'] & X^{i+1} \oplus X^i \arrow[r, "d_{C^i_{1_X}}"] \arrow[d, "1^i_{C_{1_X}}"'] \arrow[dl, dashed, "s^i"] & X^{i+2} \oplus X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "1_{C^{i+1}_{1_X}}"] \arrow[dl, dashed, "s^{i+1}"] & \cdots \\
C_{1_X}: & \cdots \arrow[r] & X^i \oplus X^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C_{1_X}}"'] & X^{i+1} \oplus X^i \arrow[r, "d^i_{C_{1_X}}"'] & X^{i+2} \oplus X^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, temos

$$d^{i-1}_{C_{1_X}} s^i + s^{i+1} d^i_{C_{1_X}} = \begin{pmatrix} -d^i_X & 0 \\ 1 & d^{i-1}_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{i+1}_X & 0 \\ 1 & d^i_X \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -d^i_X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & d^i_X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1^i_{C_{1_X}}$$

como queríamos. Logo, C_{1_X} é homotopicamente nulo. □

O próximo resultado mostra que o cone de um morfismo (classe de homotopia) em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ independe da escolha do representante.

Proposição 2.18. *Sejam $f, g : X \longrightarrow Y$ morfismos de complexos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Se $f \sim g$, então $C_f \cong C_g$.*

Demonstração. Como f é homotópico a g, para todo $i \in \mathbb{Z}$, existem morfismos $s^i : X^i \longrightarrow Y^{i-1}$ em $\mathcal{A}$ tais que

$$f^i - g^i = d^{i-1}_Y s^i + s^{i+1} d^i_X. \tag{2.2}$$

Agora, defina $\varphi : C_f \to C_g$ como segue:

$$\begin{tikzcd}
C_f: \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \arrow[r] & X^i \oplus Y^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C_f}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^i & 1 \end{pmatrix}"] & X^{i+1} \oplus Y^i \arrow[r, "d^i_{C_f}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^{i+1} & 1 \end{pmatrix}"] & X^{i+2} \oplus Y^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^{i+2} & 1 \end{pmatrix}"] & \cdots \\
C_g: & \cdots \arrow[r] & X^i \oplus Y^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C_g}"'] & X^{i+1} \oplus Y^i \arrow[r, "d^i_{C_g}"'] & X^{i+2} \oplus Y^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Note que φ é um morfismo de complexos pois, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi^i d^{i-1}_{C_f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^{i+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^i_X & 0 \\ f^i & d^{i-1}_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^i_X & 0 \\ -s^{i+1} d^i_X + f^i & d^{i-1}_Y \end{pmatrix} \overset{(2.2)}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} -d_X^i & 0 \\ g^i + d_Y^{i-1}s^i & d_Y^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^i & 0 \\ g^i & d_Y^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^i & 1 \end{pmatrix} = d_{C_g}^{i-1}\varphi^{i-1}$$

Por fim, como $det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^{i+1} & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, segue que φ é um isomorfismo de complexos. Portanto, $C_f \cong C_g$. □

Agora, para cada $m \in \mathbb{Z}$, definimos um funtor

$$\begin{array}{cccc} [m]: & \mathcal{K}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathcal{A}) \\ & (X, d_X) & & (X[m], d_{X[m]}) \\ & \Big\downarrow f & \longmapsto & \Big\downarrow f[m] \\ & (Y, d_Y) & & (Y[m], d_{Y[m]}) \end{array}$$

com $X[m]^i = X^{i+m}$, $d_{X[m]}^i = (-1)^m d_X^{i+m}$ e $f[m]^i = f^{i+m}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Para todo $m \in \mathbb{Z}$, temos que o funtor $[m]$ é um automorfismo, pois o funtor $[-m]$ é seu inverso. Assim, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \cdots \\
Y: \arrow[d, "i_f"] & \cdots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"] \arrow[d, "i_f^{i-1}"] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] \arrow[d, "i_f^i"] & Y^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "i_f^{i+1}"] & \cdots \\
C_f: \arrow[d, "p_f"] & \cdots \arrow[r] & X^i \oplus Y^{i-1} \arrow[r, "d_{C_f}^{i-1}"] \arrow[d, "p_f^{i-1}"] & X^{i+1} \oplus Y^i \arrow[r, "d_{C_f}^i"] \arrow[d, "p_f^i"] & X^{i+2} \oplus Y^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "p_f^{i+1}"] & \cdots \\
X[1]: & \cdots \arrow[r] & X^i \arrow[r, "-d_X^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "-d_X^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

onde i_f é a inclusão canônica e p_f é a projeção canônica. Notemos que i_f e p_f são morfismos de complexos, pois

$$d_{C_f}^i i_f^{i+1} = \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d_Y^i = i_f^{i+1} d_Y^i$$

e

$$p_f^{i+1} d_{C_f}^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \end{pmatrix} = -d_X^{i+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = -d_X^{i+1} p_f^i.$$

Com isso, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{p_f} X[1]$ é um triângulo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, com funtor translação $[1]$. Pela Proposição 2.18, podemos notar que tal triângulo distinguido não depende do representante do morfismo f em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Teorema 2.19. *A categoria homotópica $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada, juntamente com o funtor translação $[1] : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$ e uma classe τ de triângulos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ que são isomorfos a um triângulo da forma*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{p_f} X[1].$$

Demonstração. Basta mostrarmos que τ é uma triangulação. De fato,

(TR1)(a) Segue imediatamente.

(b) Se u é um morfismo em $\mathcal{K}(A)$, pela construção anterior, existe um triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{i_u} C_u \xrightarrow{p_u} X[1]$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

(c) Seja X um complexo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Para provarmos que o triângulo $X \xrightarrow{1_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} X[1]$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é distinguido, mostraremos que o mesmo é isomorfo ao triângulo $X \xrightarrow{1_X} X \xrightarrow{i_{1_X}} C_{1_X} \xrightarrow{p_{1_X}} X[1]$. De fato, pela Proposição 2.17, $C_{1_X} \cong 0$. Assim, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_X"] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, dotted, "0"] & X[1] \arrow[d, "1_X[1]"] \\
X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r, "i_{1_X}"'] & C_{1_X} \arrow[r, "p_{1_X}"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

é comutativo, Logo, $(1_X, 0, 0)$ é um triângulo distinguido em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

(TR2) Seja $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{i_u} C_u \xrightarrow{p_u} X[1]$ um triângulo distinguido em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Para provar que o triângulo $Y \xrightarrow{i_u} C_u \xrightarrow{p_u} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ é distinguido, mostraremos que o mesmo é isomorfo ao triângulo distinguido

$$Y \xrightarrow{i_u} C_u \xrightarrow{i_{i_u}} C_{i_u} \xrightarrow{p_{i_u}} Y[1] .$$

Primeiro mostraremos que $X[1] \cong C_{i_u}$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Considere as aplicações

$$\begin{tikzcd}
X[1]: \arrow[d, shift left, "j"] & \dots \arrow[r] & X^{i+1} \arrow[rr, "-d_X^{i+1}"] \arrow[d, shift left, "\begin{pmatrix} -u^{i+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}"] & & X^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\begin{pmatrix} -u^{i+2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}"] & \dots \\
C_{i_u}: \arrow[u, shift left, "k"] & \dots \arrow[r] & Y^{i+1} \oplus X^{i+1} \oplus Y^i \arrow[rr, "d^i_{C_{i_u}}"'] \arrow[u, shift left, "\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}"] & & Y^{i+2} \oplus X^{i+2} \oplus Y^{i+1} \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Observe que j e k são morfismos de complexos, pois para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
d^i_{C_{i_u}} j^i &= \begin{pmatrix} -d_Y^{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{i+1} & 0 \\ 1 & u^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u^{i+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_Y^{i+1} u^{i+1} \\ -d_X^{i+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -u^{i+2} d_X^{i+1} \\ -d_X^{i+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^{i+2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-d_X^{i+1}) = j^{i+1} d^i_{X[1]}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k^{i+1}d^i_{C_{i_u}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_Y^{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{i+1} & 0 \\ 1 & u^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_X^{i+1} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= (-d_X^{i+1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = d^i_{X[1]}k^i. \end{aligned}$$

Agora, note que $kj = 1_{X[1]}$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, visto que

$$k^i j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u^{i+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{X^{i+1}} = 1_{X[1]^i}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, como para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$j^i k^i = \begin{pmatrix} -u^{i+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -u^{i+1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

provaremos que $jk \sim 1_{C_{i_u}}$. De fato, tomando $E_{13} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : C^{i+1}_{i_u} \to C^i_{i_u}$ como as homotopias temos, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$d^{i-1}_{C_{i_u}} E_{13} + E_{13} d^i_{C_{i_u}} = \begin{pmatrix} -d_Y^i & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^i & 0 \\ 1 & u^i & d_Y^{i-1} \end{pmatrix} E_{13} + E_{13} \begin{pmatrix} -d_Y^{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{i+1} & 0 \\ 1 & u^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & u^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -u^{i+1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1^i_{C_{i_u}} - j^i k^i.$$

Logo, $X[1] \cong C_{i_u}$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Por fim, basta mostrarmos a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i_u"] \arrow[d, equal] & C_u \arrow[r, "p_u"] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[r, "-u[1]"] \arrow[d, dotted, "j"] & Y[1] \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, "i_u"] & C_u \arrow[r, "i_{i_u}"] & C_{i_u} \arrow[r, "p_{i_u}"] & Y[1] \end{tikzcd}$$

Claramente, o primeiro quadrado é comutativo. Agora, observe que $k i_{i_u} = p_u$, pois

$$k^i i^i_{i_u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = p^i_u$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Com isso e sabendo que $jk \sim 1_{C_{i_u}}$, pela Proposição 2.12, obtemos $jp_u = jki_{i_u} \sim 1_{C_{i_u}} i_{i_u} = i_{i_u}$, o que prova a comutatividade do segundo quadrado. O terceiro quadrado também comuta, pois

$$p^i_{i_u} j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u^{i+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -u^{i+1} = -u[1]^i.$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Com isso, $(1_Y, 1_{C_u}, j)$ é um isomorfismo de triângulos. Logo, $(i_u, p_u, -u[1])$ é um triângulo distinguido de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

(TR3) Seja o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "i_u"] \arrow[d, "g"] & C_u \arrow[r, "p_u"] \arrow[d, dotted, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "i_{u'}"] & C'_u \arrow[r, "p_{u'}"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

cujas linhas são triângulos distinguidos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e o primeiro quadrado é comutativo, isto é, $gu \sim u'f$. Assim, existem morfismos $s^i : X^{i+1} \longrightarrow Y'^i$ em $\mathcal{A}$ tais que

$$g^i u^i - u'^i f^i = d^{i-1}_{Y'} s^i + s^{i+1} d^i_X. \tag{2.3}$$

Agora, defina $h : C_u \longrightarrow C'_u$ por

$$h^i = \begin{pmatrix} f^{i+1} & 0 \\ s^{i+1} & g^i \end{pmatrix} : C^i_u = X^{i+1} \oplus Y^i \longrightarrow C'^i_u = X'^{i+1} \oplus Y'^i.$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Note que h é um morfismo de complexos, pois

$$h^i d^{i-1}_{C_u} = \begin{pmatrix} f^{i+1} & 0 \\ s^{i+1} & g^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^i_X & 0 \\ u^i & d^{i-1}_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f^{i+1} d^i_X & 0 \\ -s^{i+1} d^i_X + g^i u^i & g^i d^{i-1}_Y \end{pmatrix} \overset{(2.3)}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} -d^i_{X'} f^i & 0 \\ u'^i f^i + d^{i-1}_{Y'} s^i & d^{i-1}_{Y'} g^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^i_{X'} & 0 \\ u'^i & d^{i-1}_{Y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^i & 0 \\ s^i & g^{i-1} \end{pmatrix} = d^{i-1}_{C_{u'}} h^{i-1}$$

Agora, observe que o segundo e o terceiro quadrados são comutativos, pois

$$h^i i^i_u = \begin{pmatrix} f^{i+1} & 0 \\ s^{i+1} & g^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} g^i = i^i_{u'} g^i$$

e

$$p^i_{u'} h^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{i+1} & 0 \\ s^{i+1} & g^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{i+1} & 0 \end{pmatrix} = f[1]^i \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = f[1]^i p^i_u$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo (f, g, h) é morfismo de triângulos.

(TR4) Dado o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_h[-1] \arrow[r, "p_h[-1]"] \arrow[d, "g[-1]"'] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "h"'] & & \\
C_v[-1] \arrow[r, "p_v[-1]"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i_u"'] & Z \arrow[r, "i_v"] \arrow[d, "i_h"'] & C_v \arrow[r, "p_v"] \arrow[d, equal] & Y[1] \arrow[d, "i_u[1]"] \\
& C_u \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[d, "p_u"'] & C_h \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[d, "p_h"'] & C_v \arrow[r, "i_u[1]p_v"] & C_u[1] \\
& X[1] \arrow[r, equal] & X[1] & &
\end{tikzcd}$$

onde (u, i_u, p_u), (v, i_v, p_v) e (h, i_h, p_h) são triângulos distinguidos. Como $vu = h$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, isto é, $vu \sim h$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ existem morfismos $s^i : X^i \longrightarrow Z^{i-1}$ em $\mathcal{A}$ tais que para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$v^i u^i - h^i = d_Z^{i-1} s^i + s^{i+1} d_X^i. \tag{2.4}$$

Por (TR3), existe $f : C_u \longrightarrow C_h$ dado por

$$f^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^{i+1} & v^i \end{pmatrix} : C_u^i = X^{i+1} \oplus Y^i \longrightarrow C_h^i = X^{i+1} \oplus Z^i$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$ tal que $(1_X, v, f)$ é um morfismo de triângulos.

Agora, defina $g : C_h \longrightarrow C_v$ por

$$g^i = \begin{pmatrix} u^{i+1} & 0 \\ -s^{i+1} & 1 \end{pmatrix} : C_u^i = X^{i+1} \oplus Z^i \longrightarrow C_v^i = Y^{i+1} \oplus Z^i$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Note que g é um morfismo de complexos, pois para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$g^i d_{C_h}^{i-1} = \begin{pmatrix} u^{i+1} & 0 \\ -s^{i+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^i & 0 \\ h^i & d_Z^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^{i+1} d_X^i & 0 \\ s^{i+1} d_X^i + h^i & d_Z^{i-1} \end{pmatrix} \overset{(2.4)}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} -d_Y^i u^i & 0 \\ v^i u^i - d_Z^{i-1} s^i & d_Z^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_Y^i & 0 \\ v^i & d_Z^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i & 0 \\ -s^i & 1 \end{pmatrix} = d_{C_v}^{i-1} g^{i-1}$$

Agora, observe que o quadrado

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "i_v"] \arrow[d, "i_h"] & C_v \arrow[d, equal] \\
C_h \arrow[r, "g"] & C_v
\end{tikzcd}$$

é comutativo, pois para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$g^i i_h^i = \begin{pmatrix} u^{i+1} & 0 \\ -s^{i+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = i_v^i 1_{C_v^i}.$$

Por fim, precisamos mostrar que o triângulo $C_u \xrightarrow{f} C_h \xrightarrow{g} C_v \xrightarrow{i_u[1]p_v} C_u[1]$

é distinguido. Provaremos que o mesmo é isomorfo ao triângulo distinguido

$$C_u \xrightarrow{f} C_h \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{p_f} C_u[1]\ .$$

Inicialmente, mostraremos que $C_v \cong C_f$. De fato, considere as aplicações

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
C_v : & \dots \arrow[r] & Y^{i+1}\oplus Z^i \arrow[rr, "d^i_{C_v}"] \arrow[d, shift left, "{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}"] & & Y^{i+2}\oplus Z^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, shift left, "{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}"] & \dots \\
C_f : \arrow[u, shift left, "q"] \arrow[from=u, shift left, "r"] & \dots \arrow[r] & X^{i+2}\oplus Y^{i+1}\oplus X^{i+1}\oplus Z^i \arrow[rr, "d^i_{C_f}"'] \arrow[u, shift left, "{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ u^{i+1} & -s^{i+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}^t}"] & & X^{i+3}\oplus Y^{i+2}\oplus X^{i+2}\oplus Z^{i+1} \arrow[r] \arrow[u, shift left, "{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ u^{i+2} & -s^{i+2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}^t}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Note que r e q são morfismos de complexos, pois para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$d^i_{C_f} r^{i-1} = \begin{pmatrix} d_X^{i+2} & 0 & 0 & 0\\ -u^{i+2} & -d_Y^{i+1} & 0 & 0\\ 1 & 0 & -d_X^{i+1} & 0\\ s^{i+2} & v^{i+1} & h^{i+1} & d_Z^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ -d_Y^{i+1} & 0\\ 0 & 0\\ v^{i+1} & d_Z^i\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -d_Y^{i+1} & 0\\ v^{i+1} & d_Z^i\end{pmatrix} = r^i d^i_{C_v}$$

e

$$q^i d^i_{C_f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & u^{i+2} & 0\\ 0 & 0 & -s^{i+2} & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^{i+2} & 0 & 0 & 0\\ -u^{i+2} & -d_Y^{i+1} & 0 & 0\\ 1 & 0 & -d_X^{i+1} & 0\\ s^{i+2} & v^{i+1} & h^{i+1} & d_Z^i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -d_Y^{i+1} & -u^{i+2}d_X^{i+1} & 0\\ 0 & v^{i+1} & s^{i+2}d_X^{i+1} + h^{i+1} & d_Z^i\end{pmatrix} \overset{(2.4)}{=} \begin{pmatrix} 0 & -d_Y^{i+1} & -d_Y^{i+1}u^{i+1} & 0\\ 0 & 0 & v^{i+1}u^{i+1} - d_Z^i s^{i+1} & d_Z^i\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -d_Y^{i+1} & 0\\ v^{i+1} & d_Z^i\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & u^{i+1} & 0\\ 0 & 0 & -s^{i+1} & 1\end{pmatrix} = d^i_{C_v} q^{i-1}$$

Agora, observe que $qr = 1_{C_v}$, pois para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$q^i r^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & u^{i+1} & 0\\ 0 & 0 & -s^{i+1} & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1_{C_v^i}$$

Por outro lado, mostraremos que $rq \sim 1_{C_f}$. De fato, note que para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$r^i q^i = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & u^{i+1} & 0\\ 0 & 0 & -s^{i+1} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & u^{i+1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -s^{i+1} & 1\end{pmatrix}$$

Assim, para todo $i \in \mathbb{Z}$, existem $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : C_f^{i+1} \to C_f^i$ tais que

$$\begin{pmatrix} d_X^{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ -u^{i+1} & -d_Y^i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -d_X^i & 0 \\ s^{i+1} & v^i & h^i & d_Z^{i-1} \end{pmatrix} E_{13} + E_{13} \begin{pmatrix} d_X^{i+2} & 0 & 0 & 0 \\ -u^{i+2} & -d_Y^{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -d_X^{i+1} & 0 \\ s^{i+2} & v^{i+1} & h^{i+1} & d_Z^i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s^{i+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s^{i+1} & 1 \end{pmatrix} = 1_{C_f^i} - r^i q^i$$

como queríamos. Agora, só precisamos mostrar a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} C_u \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & C_h \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & C_v \arrow[r, "i_u[1]p_v"] \arrow[d, dotted, "r"] & C_u[1] \arrow[d, equal] \\ C_u \arrow[r, "f"] & C_h \arrow[r, "i_f"] & C_f \arrow[r, "p_f"] & C_u[1] \end{tikzcd}$$

A comutatividade do primeiro quadrado é óbvia. Para o segundo quadrado, primeiro observe que $q\, i_f = g$, pois

$$q^i i_f^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & u^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & -s^{i+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{i+1} & 0 \\ -s^{i+1} & 1 \end{pmatrix} = g^i$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Com isso e sabendo que $qi_f = 1_{C_f}$, temos $rg = rqi_f \sim 1_{C_f} i_f = i_f$ pela Proposição 2.12, o que mostra a comutatividade do segundo quadrado. Para mostrar a comutatividade do terceiro quadrado, note que

$$p_f^i r^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = i_u[1]^i p_v^i$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo, $(1_{C_u}, 1_{C_h}, r)$ é um isomorfismo de triângulos. Portanto $C_u \xrightarrow{f} C_h \xrightarrow{g} C_v \xrightarrow{i_u[1]p_v} C_u[1]$ é um triângulo distinguido. □

2.3 Categoria Derivada

Nesta seção, apresentamos mais um exemplo de categoria triangulada, a Categoria Derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ onde $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana. Mais especificamente, temos interesse no caso em que $\mathcal{A} = mod\,\Lambda$. Como veremos, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é obtida a partir de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ invertendo todos os quase-isomorfismos. Introduziremos apenas os conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Mais detalhes sobre Categorias Derivadas podem ser encontrados em [10] e [11] (veja também [7]).

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Pela Proposição 1.48 e o corolário 2.15, definimos o funtor $H^i : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$. Um morfismo de complexos f em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é dito um **quase-isomorfismo** se $H^i(f)$ é um isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Para todos complexos X e Y em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, denotaremos por $S_{X,Y}$ o conjunto de todos os quase-isomorfismos de X para Y, isto é,

$$\mathcal{S}_{X,Y} = \{f \in Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X,Y) : f \text{ é um quase-isomorfismo}\}.$$

Pela Proposição 2.14, um morfismo de complexos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ homotópico a um quase-isomorfismo também é um quase-isomorfismo. Desta forma, se f é um quase-isomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, qualquer classe de equivalência de f também o é.

Seja $\mathcal{M}_{X,Y}$ o conjunto cujos elementos são as triplas (Z,s,a) representadas pelos diagramas

$$X \xleftarrow[\sim]{s} Z \xrightarrow{a} Y \ ,$$

onde $Z \in obj(\mathcal{K}(\mathcal{A})), s \in \mathcal{S}_{Z,X}$ e $a \in Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(Z,Y)$. Dizemos que

$$(Z,s,a) \equiv (Z',s',a')$$

se, e somente se, existem $(W,t,b) \in \mathcal{M}_{X,Y}$ e morfismos $p \in Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(W,Z)$, $p' \in Hom_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(W,Z')$ tais que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "a"] & \\
X & W \arrow[l, "t"', "\sim"] \arrow[r, "b"] \arrow[u, dashed, "p"'] \arrow[d, dashed, "p'"] & Y \\
 & Z' \arrow[ul, "s'", "\sim"'] \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

Prova-se que $\equiv$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{M}_{X,Y}$.

Definição 2.20. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Existe uma categoria $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, chamada **categoria derivada** de $\mathcal{A}$ e um funtor $Q_{\mathcal{A}} : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$, chamado funtor localização, satisfazendo as seguintes condições:*

(L1) Se s é um quase-isomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, então $Q_{\mathcal{A}}(s)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

(L2) (Propriedade Universal) Para qualquer funtor $F : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que $F(s)$ é um isomorfismo sempre que s é um quase-isomorfismo, existe um único funtor $G : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(\mathcal{A}) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & & \mathcal{B} \\
 & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \arrow[ur, dashed, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Observe que a Propriedade (L2) garante que categoria $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é única a menos de equivalências de categorias.

Os objetos de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ são os mesmos de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e para todos $X, Y \in obj(\mathcal{D}(\mathcal{A}))$,

$$Hom_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X,Y) = \frac{\mathcal{M}_{X,Y}}{\equiv},$$

isto é, os morfismos de X para Y em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ são as classes de equivalência de (Z, s, a) em $\mathcal{M}_{X,Y}$, as quais denotaremos por frações $\frac{s}{a}$.

Além disso, o funtor localização é dado por

$$\begin{array}{cccc} Q_{\mathcal{A}}: & \mathcal{K}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ & X & & X \\ & \Big\downarrow f & \longmapsto & \Big\downarrow \frac{f}{1} \\ & Y & & Y \end{array}$$

Pode-se provar que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva e $Q_{\mathcal{A}}$ é um funtor aditivo.

Usando o funtor localização e a estrutura triangulada de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, construiremos triângulos em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Primeiro, estendemos o automorfismo $[1] : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}(\mathcal{A})$ para $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ da seguinte forma: dado um morfismo $\dfrac{f}{s} : X \to Y$ de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, definimos $\left(\dfrac{f}{s}\right)[1] = \dfrac{f[1]}{s[1]} : X[1] \to Y[1]$, isto é,

$$X[1] \xleftarrow[\sim]{s[1]} Z[1] \xrightarrow{f[1]} Y[1] \,.$$

Como vimos na seção anterior, os triângulos distinguidos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ são da forma $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{p_f} X[1]$, onde C_f é o cone de f. Assim, temos uma classe τ de triângulos em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ que são isomorfos à imagem de um triângulo distinguido em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ via o funtor localização $Q_{\mathcal{A}}$, isto é, são isomorfos aos triângulos em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ da forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X \arrow[dl, equal, "\sim"'] \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, equal, "\sim"'] \arrow[dr, "i_f"] & & C_f \arrow[dl, equal, "\sim"'] \arrow[dr, "p_f"] & \\ X & & Y & & C_f & & X[1] \end{tikzcd}$$

A categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, juntamente com automorfismo $[1] : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e a classe τ de triângulos, é uma categoria triangulada. Uma prova detalhada desta afirmação pode ser encontrada na Proposição 3.10 de [7].

Para finalizar, ressaltamos que as categorias derivadas $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$, $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ de $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$, $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ e $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$, respectivamente, também possuem uma estrutura de categorias trianguladas.

Consideremos $\mathcal{A} = mod\,\Lambda$ e $\mathcal{P} = proj\,\Lambda$. Denotemos $\mathcal{K}^*(\Lambda) = \mathcal{K}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}^*(\Lambda) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$, com $* \in \{-,+,b\}$.

Desta forma, existe um funtor inclusão $\iota : \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{K}^-(\Lambda)$. Se Q_Λ^- é o funtor localização de $\mathcal{K}^-(\Lambda)$ para $\mathcal{D}^-(\Lambda)$, temos o funtor $F = Q_\Lambda^-\iota : \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\Lambda)$. Sejam $[1]_{\mathcal{K}^-(\mathcal{P})}$ e $[1]_{\mathcal{D}^-(\Lambda)}$ os respectivos funtores translações de $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ e $\mathcal{D}^-(\Lambda)$.

Temos $F \circ [1]_{\mathcal{K}^-(\mathcal{P})} = [1]_{\mathcal{D}^-(\Lambda)} \circ F$, pois

$$F \circ [1]_{\mathcal{K}^-(\mathcal{P})}(X) = Q_\Lambda^-(X[1]) = X[1] = [1]_{\mathcal{D}^-(\Lambda)} Q_\Lambda^- \iota(X) = [1]_{\mathcal{D}^-(\Lambda)} \circ F(X)$$

e

$$F \circ [1]_{\mathcal{K}^-(\mathcal{P})}(f[1]) = Q_\Lambda^-(f[1]) = \frac{f[1]}{1} = [1]_{\mathcal{D}^-(\Lambda)} Q_\Lambda^- \iota(f) = [1]_{\mathcal{D}^-(\Lambda)} \circ F(f)$$

Assim, obtemos uma equivalência natural Ψ tal que, para todo complexo X em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, $\Psi_X : F \circ [1]_{\mathcal{K}^-(\mathcal{P})}(X) \to [1]_{\mathcal{D}^-(\Lambda)} \circ F(X)$ é igual a identidade. Tomando esta equivalência natural e pela forma como definimos os triângulos distinguidos em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$, F é um funtor exato. Por fim, pela versão dual do Teorema 8.19 de [11], obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.21. *O funtor $F : \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\Lambda)$ é uma equivalência triangular.*

Observação 2.22. *Na prova do Teorema 2.21 é mostrado que todo complexo concentrado em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ é isomorfo a sua resolução projetiva em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Assim, pode-se provar que existe uma imersão $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}(\Lambda)$. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada no Corolário 3.23 em [7].*

Observação 2.23. *Dualmente, a categoria $\mathcal{K}^+(\mathcal{P})$ é triangular-equivalente à categoria $\mathcal{D}^+(\Lambda)$ e a categoria $\mathcal{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ é triangular-equivalente à categoria $\mathcal{D}^b(\Lambda)$.*

Neste último caso, se Λ tem dimensão global finita, $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ é triangular-equivalente à categoria $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ (veja [13], Capítulo I, seção 3.3).

Por fim, definimos os Triângulos de Auslander-Reiten em uma categoria triangulada, os quais são os duais das sequências de Auslander-Reiten na categoria abeliana *mod* Λ. Apresentamos apenas os conceitos necessários para o entendimento de alguns comentários e exemplos exibidos no capítulos posteriores. Para mais detalhes recomendamos [13].

Seja $\mathcal{C}$ uma K-categoria triangulada Hom-finita Krull-Schmidt. Um triângulo distinguido

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \tag{2.5}$$

é dito um **triângulo de Auslander-Reiten** se satisfaz as seguintes condições:

1. X e Z são indecomponíveis;
2. $w \neq 0$
3. u e v são morfismos irredutíveis.

Se para todo objeto indecomponível Z em $\mathcal{C}$, existe um triângulo de Auslander-Reiten (2.5), dizemos que $\mathcal{C}$ **tem triângulos de Auslander-Reiten**.

Observação 2.24. *A categoria $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ é uma K-categoria Hom-finita Krull-Schmidt. Uma prova para esta afirmação pode ser encontrada em [22] (p. 38, Proposição 1.5.16). Desta forma, se Λ é uma álgebra de dimensão global finita, $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ é uma K-categoria Hom-finita Krull-Schmidt, pois $\mathcal{D}^b(\Lambda) \cong \mathcal{K}^b(\mathcal{P})$.*

Teorema 2.25. *Seja Z um objeto indecomponível em $\mathcal{K}^{-,b}(\mathcal{P})$. Existe um triângulo de Auslander-Reiten $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ se, e somente, Z é um objeto de $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$.*

Demonstração. [12], Teorema 1.4. □

Observação 2.26. *O teorema anterior garante que a categoria derivada $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ tem triângulos de Auslander-Reiten se, e somente se, Λ tem dimensão global finita.*

De forma geral, poucas classes de álgebras possuem uma descrição explícita dos triângulos de Auslander-Reiten. Uma destas classes é a das álgebras hereditárias.

Analogamente à definição dada no capítulo 1, o quiver de Auslander-Reiten de uma categoria $\mathcal{A}$ possui vértices que representam classes de isomorfismos $[X]$ de objetos indecomponíveis X em $\mathcal{A}$ e possui flechas que são morfismos irredutíveis.

As sequências e os triângulos de Auslander-Reiten de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, respectivamente, são descritas nos seus respectivos quivers de Auslander-Reiten.

A seguir apresentamos um exemplo de quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada limitada de uma álgebra hereditária.

Exemplo 2.27. *Seja Λ a álgebra de caminhos do seguinte quiver Q:*

$$\overset{1}{\bullet} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\bullet} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\bullet}$$

Pelo Exemplo 1.61, o quiver de Auslander-Reiten de $\operatorname{mod}\Lambda$ *é dado por:*

$$\begin{tikzcd}
 & & \overset{P(3)}{\bullet} \arrow[dr, "p"] & & \\
 & \overset{P(2)}{\bullet} \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "q"] \arrow[rr, dashed, no head] & & \overset{I(2)}{\bullet} \arrow[dr, "r"] & \\
\overset{P(1)}{\bullet} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, no head] & & \overset{S(2)}{\bullet} \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, dashed, no head] & & \overset{S(3)}{\bullet}
\end{tikzcd}$$

A seguir apresentamos o quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada limitada $\mathcal{D}^b(\Lambda)$:

$$\begin{tikzcd}
P_1[-1] \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & S_2[-1] \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & I_3[-1] \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & P_1[1] \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & S_2[1] \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & I_3[1] \\
\cdots & P_2[-1] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & I_2[-1] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & I_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & P_2[1] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & I_2[1] \arrow[ur] & \cdots \\
 & & P_3[-1] \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & P_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & S_2 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & I_3 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & P_3[1] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Podemos observar que Λ é uma álgebra hereditária. Desta forma, como mencionamos anteriormente, os triângulos de Auslander-Reiten possuem uma descrição explícita. Por exemplo, determinemos o cone de $f : P_1 \to P_2$ em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ assim como definimos na categoria de complexos:

$$\begin{tikzcd}
P_1: \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
P_2: \arrow[d, "i"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
C_f: & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(1) \arrow[r, "f"] & P(2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Agora, observemos:

$$\begin{tikzcd}
C_f \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & P(2) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
S_2: & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & S(2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Desta forma, C_f e S_2 são quase-isomorfos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A} = mod\,\Lambda$, e assim são isomorfos em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Com isso,

$$P_1 \xrightarrow{f} P_2 \xrightarrow{\gamma} S_2 \longrightarrow P_1[1]$$

é um triângulo de Auslander-Reiten em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$, onde S_2 é a resolução projetiva de C_f.

Capítulo 3

Caracterização de Morfismos Irredutíveis

Neste capítulo, abordaremos sucintamente os morfismos cindidos e irredutíveis na categoria de complexos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}$ é uma categoria aditiva. Em seguida, apesar de muitos resultados deste capítulo serem válidos para categoria de complexos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, nos restringiremos a uma subcategoria plena Krull-Schmidt $\mathcal{P}$ de $\mathcal{A}$, fechada para somas diretas e somandos diretos, a fim de obtermos resultados interessantes sobre morfismos irredutíveis na categoria de complexos. Mais especificamente, consideraremos $\mathcal{A} = mod\,\Lambda$ e $\mathcal{P} = proj\,\Lambda$.

Seja $\mathcal{I}$ o ideal de $\mathcal{P}$ formado pelos morfismos radicais. Denotaremos por $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ a categoria formada pelos complexos em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ cujos os diferenciais pertencem a $\mathcal{I}$, isto é, os complexos radicais em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Conforme o artigo [9], caracterizaremos e apresentaremos algumas propriedades dos morfismos irredutíveis nas categorias $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Para a segunda categoria será necessário a introdução dos complexos homotopicamente minimais, os quais são equivalentes aos complexos em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ (Proposição 3.17). A partir daí, é provado que todo complexo em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$ é isomorfo em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ a um complexo em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ (Teorema 3.18). Desta forma, mostraremos que os morfismos irredutíveis em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ são dados pelos morfismos irredutíveis em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, a menos de homotopia (Teorema 3.23).

3.1 Morfismos Cindidos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

Como vimos na definição 1.59, um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{A}$ é dito **mono cindido** (resp. **epi cindido**) se existe um morfismo $h : Y \longrightarrow X$ em $\mathcal{A}$ tal que $hf = 1_X$ (resp. $fh = 1_Y$). Se uma das condições é verificada, f é dito **cindido**.

Desta definição obtemos o seguinte resultado cuja demonstração segue das definições.

Proposição 3.1. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos em $\mathcal{A}$.*

1. *f é mono cindido e epi cindido se, e somente se, f é um isomorfismo;*

2. *Se gf é um isomorfismo, então f é mono cindido e g é epi cindido.*

3. *Se f é mono cindido (resp. epi cindido), então f é um monomorfismo (resp. epimorfismo).*

Um morfismo de complexos f em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é chamado **smonic** (resp. **sepic**) se todas suas componentes são mono cindidas (resp. epi cindidas).

Um morfismo mono cindido f (resp. epi cindido) em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é smonic (resp. sepic), isto é, cada f^i é mono cindido (resp. epi cindido) para todo $i \in \mathbb{Z}$. Porém, veremos no próximo exemplo que isto não é verdade em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Exemplo 3.2. *Sejam M um objeto indecomponível de $\mathcal{A}$ e X um complexo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ dado por $X^0 = X^1 = M$, $d^0 = 1_M$ e zero caso contrário. Fazendo $s^1 = 1_M$ e $s^n = 0$ se $n \neq 1$, definimos uma homotopia entre os morfismos 1_X e 0_X,*

$$
\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "1_X - 0_X"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] \arrow[dl, dashed, "0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "1"] \arrow[dl, dashed, "1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "0"'] & \dots \\
X: & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "1"'] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

de modo que $1_X = 0_X$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Então 0 é mono cindido, mas nem todas suas componentes são mono cindidas, isto é, 0 não é smonic.

3.2 Caracterização dos Morfismos Irredutíveis em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$

Nesta seção, caracterizaremos os morfismos irredutíveis na categoria $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, conforme o artigo [9]. Nesse artigo, a demonstração da caracterização dos morfismos smonic e sepic é omitida. A seguir exibimos a demonstração desses dois casos. Acrescentamos o item (iii) pois a caracterização desse morfismo será útil no próximo capítulo.

Proposição 3.3. *(Formas Standard) Seja $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \partial)$ um morfismo de complexos em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$:*

$$
\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] & \dots \arrow[r] & X^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+2}"] & \dots \\
Y: & \dots \arrow[r] & Y^i \arrow[r, "\partial^i"] & Y^{i+1} \arrow[r, "\partial^{i+1}"] & Y^{i+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

(i) Se f é um morfismo smonic, (a menos de isomorfismo) podemos assumir que $Y^i = X^i \oplus Y'^i$, $f^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\partial^i = \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

(ii) Se f é um morfismo sepic, (a menos de isomorfismo) podemos assumir que $X^i = Y^i \oplus X'^i$, $f^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $d^i = \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \\ b^i & \epsilon^i \end{pmatrix}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

(iii) Se f possui uma única componente irredutível f^{i_0} tal que todas as componentes à esquerda são epi cindidas e todas as componentes à direita são mono cindidas, então (a menos de isomorfismo) podemos assumir que

$$X^i = Y^i \oplus X'^i, f^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, d^i = \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \\ b^i & \epsilon^i \end{pmatrix}, d^{i_0-1} = \begin{pmatrix} c^{i_0-1} & \varepsilon^{i_0-1} \end{pmatrix}$$

se $i < i_0$,

$$Y^i = X^i \oplus Y'^i, f^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial^i = \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix}$$

se $i > i_0$, *e* $\partial^{i_0} = \begin{pmatrix} l^{i_0} & \xi^{i_0} \end{pmatrix}^t$.

Demonstração. **(i)** Como f é smonic todas as suas componentes são mono cindidas, isto é, para cada $f^i : X^i \longrightarrow Y^i$ existe $r^i : Y^i \longrightarrow X^i$ tal que

$$r^i f^i = 1_{X^i}. \tag{3.1}$$

Por (3.1), a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X^i \xrightarrow{f^i} Y^i \xrightarrow{\pi^i} Y'^i \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

cinde, para todo $i \in \mathbb{Z}$, sendo π^i a projeção canônica e $Y'^i = Coker\, f^i$. Assim,

$$Y^i \cong X^i \oplus Y'^i,$$

com o isomorfismo $p^i : Y^i \longrightarrow X^i \oplus Y'^i$ dado por $p^i = \begin{pmatrix} r^i \\ \pi^i \end{pmatrix}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Desta forma, precisamos definir os diferenciais $s^i : X^i \oplus Y'^i \longrightarrow X^{i+1} \oplus Y'^{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, de forma que $(X \oplus Y', s)$ seja um complexo e que o seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] & & X^i \arrow[rr, "d^i"] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "f^i"] & & X^{i+1} \arrow[rr, "d^{i+1}"] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "f^{i+1}"] & & X^{i+2} \arrow[r] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "f^{i+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^i \arrow[rr, "d^i"] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"'] & & X^{i+1} \arrow[rr, "d^{i+1}"] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"'] & & X^{i+2} \arrow[rr] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"'] & & \cdots \\
\cdots \arrow[rr] & & Y^i \arrow[rr, "\partial^i"] \arrow[dl, "p^i"'] & & Y^{i+1} \arrow[rr, "\partial^{i+1}"] \arrow[dl, "p^{i+1}"'] & & Y^{i+2} \arrow[r] \arrow[dl, "p^{i+2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^i \oplus Y'^i \arrow[rr, "s^i"'] & & X^{i+1} \oplus Y'^{i+1} \arrow[rr, "s^{i+1}"'] & & X^{i+2} \oplus Y'^{i+2} \arrow[rr] & & \cdots
\end{tikzcd} \tag{*}$$

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, seja $\pi^{i+1}\partial^i : Y^i \longrightarrow Y'^{i+1}$. Observe que

$$(\pi^{i+1}\partial^i)f^i = \pi^{i+1}(\partial^i f^i) = \pi^{i+1}(f^{i+1}d^i) = (\pi^{i+1}f^{i+1})d^i \overset{(3.2)}{=} 0.$$

Como (Y'^i, π^i) é o conúcleo de f^i existe $e^i : Y'^i \longrightarrow Y'^{i+1}$ tal que

$$\pi^{i+1}\partial^i = e^i \pi^i. \tag{3.3}$$

Assim, (Y'^i, e^i) é um complexo, pois

$$e^{i+1}e^i\pi^i \overset{(3.3)}{=} e^{i+1}\pi^{i+1}\partial^i \overset{(3.3)}{=} \pi^{i+2}\partial^{i+1}\partial^i = 0,$$

o que implica $e^{i+1}e^i = 0$, tendo em vista que π^i é um epimorfismo.

Analogamente, para cada $i \in \mathbb{Z}$, seja $r^{i+1}\partial^i - d^i r^i : Y^i \longrightarrow X^{i+1}$. Note que

$$(r^{i+1}\partial^i - d^i r^i)f^i = r^{i+1}\partial^i f^i - d^i r^i f^i \overset{(3.1)}{=} r^{i+1}f^{i+1}d^i - d^i 1_{X^i} \overset{(3.1)}{=} 1_{X^{i+1}}d^i - d^i = 0.$$

Sabendo que (Y'^i, π^i) é o conúcleo de f^i existe $a^i : Y'^i \longrightarrow X^{i+1}$ tal que

$$r^{i+1}\partial^i - d^i r^i = a^i \pi^i \tag{3.4}$$

Assim, defina $s^i = \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Desta forma, para todo $i \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$s^{i+1}s^i = \begin{pmatrix} d^{i+1} & a^{i+1} \\ 0 & e^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{i+1}d^i & d^{i+1}a^i + a^{i+1}e^i \\ 0 & e^{i+1}e^i \end{pmatrix}$$

Sabemos que $d^{i+1}d^i = 0$ e $e^{i+1}e^i = 0$ pois X e Y' são complexos. Mais ainda,

$$(d^{i+1}a^i + a^{i+1}e^i)\pi^i = d^{i+1}a^i\pi^i + a^{i+1}e^i\pi^i \overset{(3.4)\text{ e }(3.3)}{=} d^{i+1}(r^{i+1}\partial^i - d^i r^i) + a^{i+1}(\pi^{i+1}\partial^i) =$$

$$= d^{i+1}r^{i+1}\partial^i + a^{i+1}\pi^{i+1}\partial^i \overset{(3.4)}{=} (r^{i+2}\partial^{i+1} - a^{i+1}\pi^{i+1})\partial^i + a^{i+1}\pi^{i+1}\partial^i = 0$$

o que implica $d^{i+1}a^i + a^{i+1}e^i = 0$, pois π^i é um epimorfismo. Com isso, $s^{i+1}s^i = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, isto é, $(X \oplus Y', s)$ é um complexo.

Por fim, mostraremos a comutatividade do diagrama $(*)$. Primeiro como f é um morfismo de complexos $\partial^i f^i = f^{i+1}d^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por (3.1) e (3.2), para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos

$$p^i f^i = \begin{pmatrix} r^i \\ \pi^i \end{pmatrix} f_i = \begin{pmatrix} r^i f^i \\ \pi^i f^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Além disso,

$$s^i p^i = \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^i \\ \pi^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^i r^i + a^i \pi^i \\ e^i \pi^i \end{pmatrix} \overset{(3.3)\text{ e }(3.4)}{=} \begin{pmatrix} r^{i+1} \\ \pi^{i+1} \end{pmatrix} \partial^i = p^{i+1}\partial^i$$

e

$$s^i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d^i$$

o que completa a demonstração.

(ii) Suponha que f é sepic. Assim, todas as suas componentes são epi cindidas, isto é, para cada $f^i : X^i \longrightarrow Y^i$ existe $k^i : Y^i \longrightarrow X^i$ tal que

$$f^i k^i = 1_{Y^i}. \tag{3.5}$$

Por (3.5), a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X'^i \xrightarrow{u^i} X^i \xrightarrow{f^i} Y^i \longrightarrow 0 \tag{3.6}$$

cinde para todo $i \in \mathbb{Z}$, sendo u^i a inclusão canônica e $X'^i = Ker\, f^i$. Com isso,

$$X^i \cong Y^i \oplus X'^i,$$

com o isomorfismo $q^i : Y^i \oplus X'^i \longrightarrow X^i$ dado por $q^i = \begin{pmatrix} k^i & u^i \end{pmatrix}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Assim, para cada $i \in \mathbb{Z}$, definiremos o diferencial $t^i : Y^i \oplus X'^i \longrightarrow Y^{i+1} \oplus X'^{i+1}$, de modo que $(Y \oplus X', t)$ seja um complexo e o seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] & & X^i \arrow[rr, "d^i"] \arrow[dd, "f^i"] & & X^{i+1} \arrow[rr, "d^{i+1}"] \arrow[dd, "f^{i+1}"] & & X^{i+2} \arrow[r] \arrow[dd, "f^{i+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^i \oplus X'^i \arrow[ur, "q^i"] \arrow[rr, "t^i"] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & & Y^{i+1} \oplus X'^{i+1} \arrow[ur, "q^{i+1}"] \arrow[rr, "t^{i+1}"] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & & Y^{i+2} \oplus X'^{i+2} \arrow[ur, "q^{i+2}"] \arrow[rr] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & & \cdots \\
\cdots \arrow[rr] & & Y^i \arrow[rr, "\partial^i"] & & Y^{i+1} \arrow[rr, "\partial^{i+1}"] & & Y^{i+2} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^i \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "\partial^i"'] & & Y^{i+1} \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "\partial^{i+1}"'] & & Y^{i+2} \arrow[ur, equal] \arrow[rr] & & \cdots
\end{tikzcd} \tag{$**$}$$

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, seja $d^i u^i : X'^i \longrightarrow X^{i+1}$. Como

$$f^{i+1}(d^i u^i) = (f^{i+1} d^i) u^i = (\partial^i f^i) u^i = \partial^i (f^i u^i) \overset{(3.6)}{=} 0$$

e (X'^{i+1}, u^{i+1}) é o núcleo de f^{i+1} existe $\epsilon^i : X'^i \longrightarrow X'^{i+1}$ tal que

$$d^i u^i = u^{i+1} \epsilon^i. \tag{3.7}$$

Note que (X', ϵ) é um complexo, pois

$$u^{i+2} \epsilon^{i+1} \epsilon^i \overset{(3.7)}{=} d^{i+1} u^{i+1} \epsilon^i \overset{(3.7)}{=} d^{i+1} d^i u^i = 0,$$

o que implica $\epsilon^{i+1} \epsilon^i = 0$, visto que u^{i+2} é um monomorfismo.

Agora, seja $d^i k^i - k^{i+1} \partial i : Y^i \longrightarrow X^{i+1}$. Sabendo que

$$f^{i+1}(d^i k^i - k^{i+1} \partial i) = f^{i+1} d^i k^i - f^{i+1} k^{i+1} \partial i \overset{(3.5)}{=} \partial^i f^i k^i - \partial^i \overset{(3.5)}{=} \partial^i - \partial^i = 0$$

e (X'^{i+1}, u^{i+1}) é o núcleo de f^{i+1}, existe $b^i : Y^i \longrightarrow X'^{i+1}$ tal que

$$d^i k^i - k^{i+1} \partial^i = u^{i+1} b^i. \tag{3.8}$$

Desta forma, defina

$$t^i = \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \\ b^i & \epsilon^i \end{pmatrix}.$$

Para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos que

$$t^{i+1} t^i = \begin{pmatrix} \partial^{i+1} & 0 \\ b^{i+1} & \epsilon^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \\ b^i & \epsilon^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^{i+1} \partial^i & 0 \\ b^{i+1} \partial^i + \epsilon^{i+1} b^i & \epsilon^{i+1} \epsilon^i \end{pmatrix}.$$

Como Y e X' são complexos, temos $\partial^{i+1}\partial^i = 0$ e $\epsilon^{i+1}\epsilon^i = 0$. Além disso,

$$u^{i+2}(b^{i+1}\partial^i + \epsilon^{i+1}b^i) = u^{i+2}b^{i+1}\partial^i + u^{i+2}\epsilon^{i+1}b^i \overset{(3.8) \text{ e } (3.7)}{=} (d^{i+1}k^{i+1} - k^{i+2}\partial^{i+1})\partial^i +$$

$$+(d^{i+1}u^{i+1})b^i = d^{i+1}k^{i+1}\partial^i + d^{i+1}u^{i+1}b^i \overset{(3.8)}{=} d^{i+1}(d^ik^i - u^{i+1}b^i) + (d^{i+1}u^{i+1})b^i = 0,$$

implica $b^{i+1}\partial^i + \epsilon^{i+1}b^i = 0$, visto que u^{i+2} é um monomorfismo. Logo, $t^{i+1}t^i = 0$ o que prova que $(Y \oplus X', t)$ é um complexo.

Por fim, mostraremos que o diagrama $(**)$ é comutativo. Primeiro observe que $\partial^i f^i = f^{i+1}d^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, visto que f é um morfismo de complexos. Segundo, Por (3.5) e (3.6), temos

$$f^iq^i = f^i \begin{pmatrix} k^i & u^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^ik^i \\ f^iu^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por último,

$$\begin{aligned} q^{i+1}t^i &= \begin{pmatrix} k^{i+1} & u^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \\ b^i & \epsilon^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^{i+1}\partial^i + u^{i+1}b^i & u^{i+1}\epsilon^i \end{pmatrix} \overset{(3.8) \text{ e } (3.7)}{=} \\ &= \begin{pmatrix} d^ik^i & d^iu^i \end{pmatrix} = d^iq^i \end{aligned}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} t^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \\ b^i & \epsilon^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \end{pmatrix} = \partial^i \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

o que conclui a prova desta segunda afirmação da proposição.

(iii) Por hipótese $f = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é um morfismo sepic e smonic nos intervalos $J_1 = \{i \in \mathbb{Z}; i < i_0\}$ e $J_2 = \{i \in \mathbb{Z}; i > i_0\}$, respectivamente. Assim, pelos itens (i) e (ii), a menos de isomorfismo, podemos assumir que

$$X^i = Y^i \oplus X'^i, f^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } d^j = \begin{pmatrix} \partial^j & 0 \\ b^j & \epsilon^j \end{pmatrix},$$

onde $X'^i = Ker\, f^i$, para todo $i, j \in J_1$ e $j \neq i_0 - 1$, e

$$Y^i = X^i \oplus Y'^i, f^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \partial^i = \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix},$$

onde $Y'^i = Coker\, f^i$, para todo $i \in J_2$. Assim, basta definirmos os diferenciais $\begin{pmatrix} c^{i_0-1} & \varepsilon^{i_0-1} \end{pmatrix} : Y^{i_0-1} \oplus X'^{i_0-1} \longrightarrow X^{i_0}$ e $\begin{pmatrix} l^{i_0} \\ \xi^{i_0} \end{pmatrix} : Y^{i_0} \longrightarrow X^{i_0+1} \oplus Y'^{i_0+1}$, de modo que os dois cubos vísíveis do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] & & X^{i_0-1} \arrow[rr, "d^{i_0-1}"] \arrow[dd, "f^{i_0-1}"] & & X^{i_0} \arrow[rr, "d^{i_0}"] \arrow[dd, "f^{i_0}"] & & X^{i_0+1} \arrow[r] \arrow[dd, "f^{i_0+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{i_0-1} \oplus X'^{i_0-1} \arrow[ur, "q^{i_0-1}"] \arrow[rr, "(c^{i_0-1} \quad \varepsilon^{i_0-1})"] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & & X^{i_0} \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "d^{i_0}"] \arrow[dd, "f^{i_0}"'] & & X^{i_0+1} \arrow[ur, equal] \arrow[rr] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"'] & & \cdots \\
\cdots \arrow[rr] & & Y^{i_0-1} \arrow[rr, "\partial^{i_0-1}"] & & Y^{i_0} \arrow[rr, "\partial^{i_0}"] & & Y^{i_0+1} \arrow[r] \arrow[dl, "p^{i_0+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{i_0-1} \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "\partial^{i_0-1}"'] & & Y^{i_0} \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "\begin{pmatrix} l^{i_0} \\ \xi^{i_0} \end{pmatrix}"'] & & X^{i_0+1} \oplus Y'^{i_0+1} \arrow[rr] & & \cdots
\end{tikzcd} \qquad (***)$$

sejam comutativos e suas linhas sejam complexos, onde p^{i_0+1} e q^{i_0-1} são isomorfismos determinados nos itens (i) e (ii), respectivamente.

Defina $\begin{pmatrix} c^{i_0-1} & \varepsilon^{i_0-1} \end{pmatrix} = d^{i_0-1}q^{i_0-1} : Y^{i_0-1} \oplus X'^{i_0-1} \longrightarrow X^{i_0}$. Temos que

$$\cdots \longrightarrow Y^{i_0-2} \oplus X'^{i_0-2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial^{i_0-2} & 0 \\ b^{i^0-2} & \epsilon^{i_0-2} \end{pmatrix}} Y^{i_0-1} \oplus X'^{i_0-1} \xrightarrow{(c^{i_0-1} \quad \varepsilon^{i_0-1})} X^{i_0} \xrightarrow{d^{i_0}} X^{i_0+1} \longrightarrow \cdots$$

é um complexo pois pelo diagrama $(***)$,

$$\begin{aligned}
(c^{i_0-1} \quad \varepsilon^{i_0-1}) \begin{pmatrix} \partial^{i_0-2} & 0 \\ b^{i_0-2} & \epsilon^{i_0-2} \end{pmatrix} &= d^{i_0-1}q^{i_0-1} \begin{pmatrix} \partial^{i_0-2} & 0 \\ b^{i_0-2} & \epsilon^{i_0-2} \end{pmatrix} = \\
&= d^{i_0-1}d^{i_0-2}q^{i_0-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e claramente $d^{i_0} \begin{pmatrix} c^{i_0-1} & \varepsilon^{i_0-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Agora, defina $\begin{pmatrix} l^{i_0} \\ \xi^{i_0} \end{pmatrix} = p^{i_0+1}\partial^{i_0} : Y^{i_0} \longrightarrow X^{i_0+1} \oplus Y'^{i_0+1}$. Desta forma,

$$\cdots \longrightarrow Y^{i_0-1} \xrightarrow{\partial^{i_0-1}} Y^{i_0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} l^{i_0} \\ \xi^{i_0} \end{pmatrix}} X^{i_0-1} \oplus Y'^{i_0-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d^{i_0+1} & a^{i_0+1} \\ 0 & e^{i_0+1} \end{pmatrix}} X^{i_0-2} \oplus Y'^{i_0-2} \longrightarrow \cdots$$

também é um complexo pois novamente pelo diagrama $(***)$,

$$\begin{pmatrix} d^{i_0+1} & a^{i_0+1} \\ 0 & e^{i_0+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^{i_0} \\ \xi^{i_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{i_0+1} & a^{i_0+1} \\ 0 & e^{i_0+1} \end{pmatrix} p^{i_0+1}\partial^{i_0} = p^{i_0+2}\partial^{i_0+1}\partial^{i_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e claramente $\begin{pmatrix} l^{i_0} \\ \xi^{i_0} \end{pmatrix} \partial^{i_0-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Além disso, pelos itens (i) e (ii), o diagrama é comutativo e os morfismos p^j e q^l são isomorfismos, para cada $j > i_0$ e $l < i_0$, respectivamente, o que completa a demonstração. $\square$

3.3 Propriedades dos Morfismos Irredutíveis em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades dos morfismos irredutíveis em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$. Veremos que os morfismos irredutíveis são de três tipos, a saber, os morfismos que caracterizamos na seção anterior.

Sejam X um complexo em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e J um subintervalo de $\mathbb{Z}$. A **restrição** X' de X a J é o complexo $X' = (X^i)_{i\in J}$, com $X'^i = X^i$ para $i \in J$ e $X'^i = 0$ para $i \notin J$. Dizemos que $f' : X' \longrightarrow Y'$ é a **restrição** de $f : X \longrightarrow Y$ à J se X' e Y' são restrições de X e Y à J, respectivamente, e $f' = (f^i)_{i\in J}$ com $f'^i = f^i$ para $i \in J$ e $f'^i = 0$ para $i \notin J$.

Proposição 3.4. *(Fatorações Induzidas) Seja $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \partial)$ um morfismo de complexos*

$$\begin{tikzcd}
X : \arrow[d, "f"] & \ldots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \ldots \\
Y : & \ldots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "\partial^{i-1}"'] & Y^i \arrow[r, "\partial^i"'] & Y^{i+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ tal que sua restrição $f' : X' \longrightarrow Y'$ a um subintervalo J de $\mathbb{Z}$ admite uma fatoração. Então, esta fatoração pode ser estendida para f.

Demonstração. Suponha que $J = [n, m]$, com $n, m \in \mathbb{Z}$ e $n < m$. Por hipótese, existe um complexo $Z' = (Z'^i)_{i\in J'}$ e morfismos de complexos $g' : X' \longrightarrow Z'$ e $h' : Z' \longrightarrow Y'$, tais que $f' = h'g'$, conforme o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X' : \arrow[d, "g'"] \arrow[dd, bend right, "f'"'] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "g'^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g'^{n+1}"] & \ldots \arrow[r] & X^{m-1} \arrow[r, "d^{m-1}"] \arrow[d, "g'^{m-1}"] & X^m \arrow[r] \arrow[d, "g'^m"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
Z' : \arrow[d, "h'"] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Z'^n \arrow[r, "d^n_{Z'}"] \arrow[d, "h'^n"] & Z'^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "h'^{n+1}"] & \ldots \arrow[r] & Z'^{m-1} \arrow[r, "d^{m-1}_{Z'}"] \arrow[d, "h'^{m-1}"] & Z'^m \arrow[r] \arrow[d, "h'^m"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
Y' : & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "\partial^n"'] & Y^{n+1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & Y^{m-1} \arrow[r, "\partial^{m-1}"'] & Y^m \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Precisamos mostrar que existem um complexo Z, cuja restrição a J é Z', e morfismos g e h, cuja a restrição a J são g' e h', respectivamente, tais que $f = hg$. Isto pode ser visto no seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X : \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "f"'] & \ldots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, equal] & X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "g'^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g'^{n+1}"] & \ldots \arrow[r] & X^{m-1} \arrow[r, "d^{m-1}"] \arrow[d, "g'^{m-1}"] & X^m \arrow[r, "d^m"] \arrow[d, "g'^m"] & X^{m+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{m+1}"] & \ldots \\
Z : \arrow[d, "h"] & \ldots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "g'^n d^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & Z'^n \arrow[r, "d^n_{Z'}"] \arrow[d, "h'^n"] & Z'^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "h'^{n+1}"] & \ldots \arrow[r] & Z'^{m-1} \arrow[r, "d^{m-1}_{Z'}"] \arrow[d, "h'^{m-1}"] & Z'^m \arrow[r, "\partial^m h'^m"] \arrow[d, "h'^m"] & Y^{m+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ldots \\
Y : & \ldots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "\partial^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r, "\partial^n"'] & Y^{n+1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & Y^{m-1} \arrow[r, "\partial^{m-1}"'] & Y^m \arrow[r, "\partial^m"'] & Y^{m+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

De fato, para mostrar que Z é um complexo basta notar que

$$d^n_{Z'}(g'^n d^{n-1}) = g'^{n+1} d^n d^{n-1} = 0 \ \text{ e } \ (\partial^m h'^m) d^{m-1}_{Z'} = \partial^m \partial^{m-1} h'^{m-1} = 0.$$

Para verificar que g e h são morfismos de complexos é suficiente observar que

$$h'^n(g'^n d^{n-1}) = f^n d^{n-1} = \partial^{m-1} f^{n-1} \ \text{ e } \ (\partial^m h'^m) g'^m = \partial^m f^m = f^{m+1} d^m.$$

Isto completa a demonstração para o caso que J é um intervalo finito. A prova desse resultado é análoga se J é um intervalo infinito. $\square$

Corolário 3.5. *Se um morfismo de complexos f em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ é irredutível, então suas componentes são ou cindidas ou irredutíveis.*

Demonstração. Seja f^{i_0} uma componente de f. Suponha que f^{i_0} não é cindida e assuma que $f^{i_0} = h'^{i_0} g'^{i_0}$. Pela Proposição 3.4 podemos estender a fatoração de f^{i_0} para f, isto é, existem morfismos de complexos h e g tais que $f = hg$ e $h^{i_0} = h'^{i_0}$ e $g^{i_0} = g'^{i_0}$. Como f é irredutível ou g é mono cindido ou h é epi cindido. Em particular, ou g'^{i_0} é mono cindido ou h'^{i_0} é epi cindido. Logo f^{i_0} é irredutível. $\square$

Corolário 3.6. *Sejam $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \partial)$ um morfismo irredutível em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e f^{i_0} uma de suas componentes.*

(a) Se f^{i_0} não é epi cindido, então todas as componentes à direita de f^{i_0} (isto é, f^i com $i > i_0$) são mono cindidos;

(b) Se f^{i_0} não é mono cindido, então todas as componentes à esquerda de f^{i_0} (isto é, f^i com $i < i_0$) são epi cindidos;

Demonstração. (a) Considere a fatoração $f^{i_0} = f^{i_0} 1_{X^{i_0}}$. Pela Proposição 3.4, podemos estender a fatoração acima para f da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "f"'] & \cdots \arrow[r] & X^{i_0-1} \arrow[r, "d^{i_0-1}"] \arrow[d, equal] & X^{i_0} \arrow[r, "d^{i_0}"] \arrow[d, equal] & X^{i_0+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i_0+1}"] & \cdots \\
Z: \arrow[d, "h"] & \cdots \arrow[r] & X^{i_0-1} \arrow[r, "d^{i_0-1}"] \arrow[d, "f^{i_0-1}"] & X^{i_0} \arrow[r, "f^{i_0+1}d^{i_0}"] \arrow[d, "f^{i_0}"] & Y^{i_0+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
Y: & \cdots \arrow[r] & Y^{i_0-1} \arrow[r, "\partial^{i_0-1}"'] & Y^{i_0} \arrow[r, "\partial^{i_0}"'] & Y^{i_0+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como f é irredutível, ou g é mono cindido ou h é epi cindido. No entanto, por hipótese, f^{i_0} não é epi cindido o que significa que h não é sepic e assim não é epi cindido. Portanto, g é mono cindido. Em particular, g é smonic. Consequentemente f^i é mono cindido para todo $i > i_0$, como queríamos.

(b) A demonstração é análoga a letra (a). $\square$

Lema 3.7. *Sejam $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \partial)$ um morfismo irredutível em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e $i_0 \in \mathbb{Z}$. Se f^{i_0} é mono cindido mas não é epi cindido e f^{i_0-1} é um epimorfismo, então todas as componentes de f à esquerda de f^{i_0} são mono cindidas.*

Demonstração. Como $f^{i_0} : X^{i_0} \longrightarrow Y^{i_0}$ é mono cindido existe um morfismo $g^{i_0} : Y^{i_0} \longrightarrow X^{i_0}$ em $\mathcal{P}$ tal que $g^{i_0} f^{i_0} = 1_{X^{i_0}}$. Seja $\delta = g^{i_0}\partial^{i_0-1} : Y^{i_0-1} \longrightarrow X^{i_0}$. Como f é um morfismo de complexos, temos

$$\delta f^{i_0-1} = g^{i_0}\partial^{i_0-1} f^{i_0-1} = g^{i_0} f^{i_0} d^{i_0-1} = d^{i_0-1}.$$

Por outro lado,

$$f^{i_0}\delta f^{i_0-1} = f^{i_0}g^{i_0}\partial^{i_0-1} f^{i_0-1} = f^{i_0}g^{i_0} f^{i_0} d^{i_0-1} = f^{i_0}d^{i_0-1} = \partial^{i_0-1} f^{i_0-1}$$

o que implica $f^{i_0}\delta = \partial^{i_0-1}$, pois f^{i_0-1} é um epimorfismo.

Assim, temos a seguinte fatoração de f:

$$\begin{tikzcd}
X : \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "f"'] & \ldots \arrow[r] & X^{i_0-1} \arrow[r, "d^{i_0-1}"] \arrow[d, "f^{i_0-1}"] & X^{i_0} \arrow[r, "d^{i_0}"] \arrow[d, equal] & X^{i_0+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ldots \\
Z : \arrow[d, "h"] & \ldots \arrow[r] & Y^{i_0-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & X^{i_0} \arrow[r, "d^{i_0}"] \arrow[d, "f^{i_0}"] & X^{i_0+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i_0+1}"] & \ldots \\
Y : & \ldots \arrow[r] & Y^{i_0-1} \arrow[r, "\partial^{i_0-1}"'] & Y^{i_0} \arrow[r, "\partial^{i_0}"'] & Y^{i_0+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Como por hipótese f^{i_0} não é epi cindido, segue que h não é epi cindido. Desta forma, g é mono cindido pois f é irredutível. Logo todas as componentes de f à esquerda de f^{i_0} são mono cindidas. □

Agora classificaremos os morfismos irredutíveis em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$.

Proposição 3.8. *Se $f = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} : (X, d) \longrightarrow (Y, \partial)$ é um morfismo irredutível na categoria de complexos $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, então f satisfaz uma das seguintes condições:*

1. *f é smonic, isto é, f^i é mono cindido para todo $i \in \mathbb{Z}$.*
2. *f é sepic, isto é, f^i é epi cindido para todo $i \in \mathbb{Z}$.*
3. *Existe uma única componente irredutível f^{i_0} tal que todas as componentes à esquerda são epi cindidas e todas as componentes à direita são mono cindidas.*

Demonstração. Se existe um índice $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que f^{i_0} não é cindido, pelos Corolários 3.5 e 3.6, temos o terceiro caso.

Suponhamos que todos os morfismos f^i são cindidos. Se todos são epi cindidos, temos o segundo caso. Assim, suponha que exista um morfismo f^{i_0} que não é epi cindido Como todos os morfismos f^i são cindidos f^{i_0} é mono cindido. Pelo Corolário 3.6, f^i é mono cindido, para todo $i > i_0$. Se o mesmo é verdade para todo $n < i_0$, temos o primeiro caso. Caso contrário, existe um índice $m < i_0$ cuja componente não é mono cindido. Pelo Corolário 3.6 f^i é epi cindido, para todo $i < m$. Assim, podemos assumir que i_0 é o menor índice tal que sua componente é mono cindido mas não é epi cindido. Com isso f^{i_0-1} é epi cindido. De fato, caso contrário, como todo morfismo é cindido f^{i_0-1} seria um mono cindido contradizendo a minimalidade de f^{i_0}. Em particular, f^{i_0-1} é um epimorfismo. Logo, pelo Lema 3.7 todas as componentes de f à esquerda de f^{i_0} são mono cindidas, o que é uma contradição pois existe $m < i_0$ cuja componente f^m não é mono cindido.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & X^m \arrow[r] \arrow[d, "f^m"] & \ldots \arrow[r] & X^{i_0-1} \arrow[r, "d^{i_0-1}"] \arrow[d, "f^{i_0-1}"] & X^{i_0} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i_0}"] & \ldots \\
\text{epi cindido} & & & & & \text{mono cindido} \\
\ldots \arrow[r] & Y^m \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & Y^{i_0-1} \arrow[r, "\partial^{i_0-1}"'] & Y^{i_0} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

□

Definição 3.9. *O morfismo irredutível em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ satisfazendo a condição 3 da Proposição 3.9 será chamado **morfismo sirredutível**.*

A seguir, apresentaremos exemplos de morfismos irredutíveis da categoria $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ satisfazendo cada uma das condições da Proposição anterior.

Exemplo 3.10. *Seja Λ a álgebra de caminhos do quiver $Q = \overset{1}{\bullet} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\bullet} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\bullet}$. No Exemplo 1.61, apresentamos o quiver de Auslander-Reiten de Λ*

$$\begin{tikzcd}
 & & P(3) \arrow[dr, "p"] & & \\
 & P(2) \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "q"] \arrow[rr, dashed, no head] & & I(2) \arrow[dr, "r"] & \\
P(1) \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, no head] & & S(2) \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, dashed, no head] & & S(3)
\end{tikzcd}$$

a) *Considere o morfismo de complexos a seguir:*

$$\begin{tikzcd}
P_1: \arrow[d, "\widetilde{f}"] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
P_2: & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Podemos mostrar que $\widetilde{f}$ é um morfismo irredutível em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, observando que f é irredutível em $\mathcal{P}$. Mais especificamente, $\widetilde{f}$ é um morfismo sirredutível.
b) *Considere o morfismo de complexos a seguir:*

$$\begin{tikzcd}
P_3: \arrow[d, "\widetilde{p}"] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(3) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
I_2: & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(1) \arrow[r, "gf"] & P(3) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

O complexo I_2 é um objeto de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ (veja Exemplo 1.61). Além disso, $\widetilde{p}$ é um morfismo irredutível em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, pois p é irredutível em $\mathcal{P}$. Mais ainda, pode-se observar que $\widetilde{p}$ é um morfismo smonic.

c) *Considere o morfismo de complexos a seguir:*

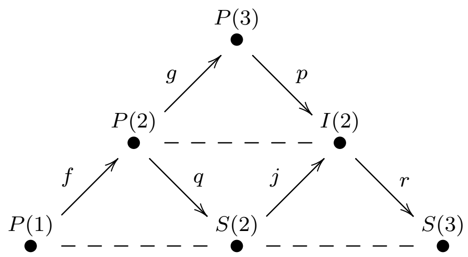
$$\begin{tikzcd}
P_3 \oplus S_2 : \arrow[d, "\begin{pmatrix} \widetilde{p} & \widetilde{j} \end{pmatrix}"] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "\begin{pmatrix} f \\ gf \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & P(2) \oplus P(3) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
I_2 : & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(1) \arrow[r, "gf"] & P(3) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Como $P(1) = rad\ P(2)$, temos $Im\ f \subset rad\ P(2)$ pois f é o morfismo inclusão. Além disso, vimos no item anterior que $Im\ gf \subset rad\ P(3)$. Assim, $Im \begin{pmatrix} f \\ gf \end{pmatrix} \subset rad\ (P(2) \oplus P(3))$. Logo, o complexo $P_2 \oplus S_2$ é um objeto da categoria $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$. Com isso e sabendo que I_2 é um complexo de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, temos que $\begin{pmatrix} \widetilde{p} & \widetilde{j} \end{pmatrix}$ é um morfismo de complexos de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$.

Mais ainda, $\begin{pmatrix} \widetilde{p} & \widetilde{j} \end{pmatrix}$ é um morfismo irredutível em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, pois $\begin{pmatrix} p & j \end{pmatrix}$ é irredutível em $\mathcal{P}$ (veja Exemplo 1.61). Além disso, observemos que $\begin{pmatrix} \widetilde{p} & \widetilde{j} \end{pmatrix}$ é um morfismo sepic.

Para finalizar esta seção mostraremos que, em geral, a recíproca da Proposição 3.9 não é verdadeira.

Exemplo 3.11. *Novamente, consideremos a álgebra de caminhos Λ do quiver $Q = \overset{1}{\bullet} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\bullet} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\bullet}$ e seu quiver de Auslander-Reiten a seguir, apresentado no Exemplo 1.61:*



a) *Considere o morfismo de complexos definido a seguir:*

$$\begin{tikzcd}
X : \arrow[d, "\alpha"] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(3) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
Y : & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(2) \arrow[r, "g"] & P(3) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Como $P(2) = rad\ P(3)$ e g é o morfismo inclusão o complexo Y é um objeto da categoria $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$. Logo, α é um morfismo de complexos de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$. Observe que α é um morfismo smonic.

No entanto, mostraremos que α não é irredutível. O morfismo α tem a *seguinte fatoração em* $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$*:*

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "\beta"] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(3) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
Z: \arrow[d, "\gamma"] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"] & P(3) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
Y: & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(2) \arrow[r, "g"] & P(3) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

O complexo Z *é um objeto de* $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$*. De fato, como* f *também é um morfismo inclusão,* $P(1) = rad\ P(2)$ *e* $P(2) = rad\ P(3)$*, temos*

$$(gf)(P(1)) = g(P(1)) = P(1) = rad\ P(2) \subset P(2) = rad\ P(3).$$

Claramente, β *não é mono cindido. Por outro lado, como* f *é um morfismo irredutível, temos que* γ *não é um morfismo sepic e, consequentemente, não é epi cindido. Logo,* α *não é um morfismo irredutível em* $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$*.*

Exemplo 3.12. *Seja* Λ *a álgebra de caminhos do quiver* $\overset{1}{\bullet} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\bullet} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\bullet}$ *com relação* $\beta\alpha = 0$*. Pelo Exemplo 1.62, o quiver de Auslander-Reiten de* Λ *é*

$$\begin{tikzcd}
 & & & P(3) \arrow[dr, "r"] & \\
P(1) \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & S(2) \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, dashed, no head] & & S(3) \\
 & P(2) \arrow[ur, "q"'] & & &
\end{tikzcd}$$

A partir deste quiver, conseguimos o contra-exemplo para a recíproca da condição 2 da Proposição 3.9.
a)*Considere o morfismo de complexos*

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "\sigma"] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & P(2) \arrow[r, "jq"] \arrow[d] & P(3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
Y: & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(1) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Como $0 \longrightarrow P(1) \xrightarrow{f} P(2) \xrightarrow{q} S(2) \longrightarrow 0$ *é uma sequência de Auslander-Reiten, sabemos que* $qf = 0$*. Com isso* $jqf = 0$ *e assim* X *é um complexo. Mais ainda, como* $P(1) = rad\ P(2)$ *e* f *é um morfismo inclusão, temos* $Im\ f \subset rad\ P(2)$*. Por outro lado, como* $rad\ P(3) = S(2)$ *e* j *é um morfismo inclusão* $jq(P(2)) \subset j(S(2)) = S(2) \subset rad\ P(3)$*. Logo* X *é um objeto em* $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$*. Portanto,* σ *é um morfismo de complexos em* $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$*.*

Observe que σ *é sepic. No entanto* σ *não é irredutível. Com efeito, considere* *a seguinte fatoração de σ:*

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "\varphi"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & P(2) \arrow[r, "jq"] \arrow[d, equal] & P(3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
Y: \arrow[d, "\theta"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & P(2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
Z: & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(1) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Note que φ não é smonic e assim não é mono cindido. Além disso, podemos observar que θ não é epi cindido. Portanto, σ não é irredutível em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$.

b) *Considere o morfismo de complexos*

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "\rho"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
Y: & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(2) \arrow[r, "jq"] & P(3) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$. Podemos observar que ρ é um morfismo sirredutível, cuja única componente irredutível é f. Entretanto, mostraremos que ρ não é irredutível. De fato, seja a seguinte fatoração de ρ em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$:

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "\delta"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
Z: \arrow[d, "\eta"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & P(2) \arrow[r] \arrow[d, "jq"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
Y: & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(2) \arrow[r, "jq"] & P(3) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Note que δ não é mono cindido. Por outro lado, pela irredutibilidade de f temos que η não é um morfismo sepic e assim não é epi cindido. Logo, ρ não é um morfismo irredutível em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$.

3.4 Morfismo Irredutível em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$

Nesta seção, caracterizaremos e classificaremos os morfismos irredutíveis de $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Veremos que os morfismos irredutíveis de $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ seguem a "mesma" caracterização e possuem as "mesmas" propriedades dos morfismos irredutíveis de $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ (Teorema 3.23).

Para isto usaremos o fato que todo complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ é isomorfo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ a um complexo de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ (Teorema 3.18). Assim, introduziremos na seguinte subseção os complexos homotopicamente minimais em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$, os quais são equivalentes aos complexos radicais, isto é, os complexos em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ (Proposição 3.17). Algumas demonstrações serão omitidas. Maiores detalhes sobre complexos homotopicamente minimais podem ser encontrados em [19] e [22].

3.4.1 Complexos Homotopicamente Minimais

Ao longo desta seção, Λ é uma álgebra não semissimples de dimensão finita sobre um corpo K.

Definição 3.13. *Um complexo X em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ é dito **homotopicamente minimal** se todo automorfismo de X em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ é um automorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.*

Sabemos que complexos isomorfos em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ também os são em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. O Lema a seguir garante a recíproca para o caso em que os complexos são homotopicamente minimais.

Lema 3.14. *Sejam X e Y complexos homotopicamente minimais em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Se $[f] : X \to Y$ é um isomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, então f também o é em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.*

Demonstração. Por hipótese, existe um morfismo $[g] : Y \to X$ tal que $[1_X] = [g][f] = [gf]$ e $[1_X] = [f][g] = [fg]$. Assim, $[gf]$ e $[fg]$ são automorfismos em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Como X e Y são complexos homotopicamente minimais, temos que gf e fg são automorfismos em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Logo, pela Proposição 4.2, f é um isomorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. □

A seguir, apresentamos o resultado dual do Lema B.1 de [19]:

Lema 3.15. *Seja (X, d) um complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *X é homotopicamente minimal;*
2. *Se $X' \neq 0$ é um somando direto de X, então X' é homotopicamente nulo;*
3. *A aplicação $d^i : X^i \to Im\ d^i$ é uma cobertura projetiva, para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

A fim de demonstrar a próxima proposição, apresentamos o seguinte lema, o qual fornece uma consequência para as componentes de morfismos homotopicamente nulos entre complexos radicais.

Lema 3.16. *Sejam X e Y complexos radicais em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Se um morfismo $f = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{P})}(X, Y)$ é homotopicamente nulo, então cada f^i é um morfismo radical.*

Demonstração. Por hipótese, existem morfismos $s^i : X^i \longrightarrow Y^{i-1}$ em $\mathcal{P}$, tais que $f^i = d_Y^{i-1}s^i + s^{i+1}d_X^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim, temos

$$f^i(X) = d_Y^{i-1}s^i(X) + s^{i+1}d_X^i(X) \subset rad\ Y^i + s^{i+1}(rad\ X^{i+1}) \subset rad\ Y^i,$$

pois X e Y são complexos radicais em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ e pela Proposição 1.29. □

O próximo resultado mostra que os complexos homotopicamente minimais e radicais são equivalentes em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Proposição 3.17. *Um complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ é homotopicamente minimal se, e somente se, ele é radical.*

Demonstração. Seja (X, d) um complexo homotopicamente minimal em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Pelo Lema 3.15, para todo $i \in \mathbb{Z}$, a aplicação $d^i : X^i \to Im\ d^i$ é uma cobertura projetiva. Com isso, $Ker\, d^i$ é submódulo supérfluo de X^i, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Pelo Corolário 1.31 e como X é um complexo obtemos $Im\ d^{i-1} \subseteq Ker\, d^i \subseteq rad\ X^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo (X, d) é um complexo radical em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Por outro lado, assuma que (X, d) é um complexo radical e seja $[f] : X \to X$ um automorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Assim, existe um morfismo $[g] : X \to X$ tal que

$$fg \sim 1_X \text{ e } gf \sim 1_X.$$

Com isso $1_X - fg$ é homotopicamente nulo. Pelo Lema 3.16, cada $1_{X^i} - f^i g^i$ é um morfismo radical. Desta forma, pelo Corolário 1.52, $f^i g^i = 1_{X^i} - (1_{X^i} - f^i g^i)$ é um automorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim, fg é um automorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Pela Proposição 4.2, f é epi cindido. Usando o mesmo raciocínio para $gf \sim 1_X$, mostramos que f é mono cindido. Logo, f é um automorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ e portanto X é um complexo homotopicamente minimal. □

Assim, apresentamos o resultado dual da Proposição B.2 em [19], o qual garante que todo complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ pode ser escrito como soma direta de um complexo em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e um complexo homotopicamente nulo.

Teorema 3.18. *Todo complexo X na categoria $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ admite uma decomposição $X = X_1 \oplus X_2$, onde X_1 é um complexo radical e X_2 é homotopicamente nulo. Além disso, o complexo X_1 é único a menos de isomorfismo, isto é, se $X = X_1' \oplus X_2'$, onde X_1' é complexo radical e X_2' é homotopicamente nulo, então X_1 e X_1' são isomorfos em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.*

Observação 3.19. *Pelo Teorema 3.18, todo complexo X em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ é isomorfo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ a um complexo X_1 em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$.*

3.4.2 Caracterização dos Morfismos Irredutíveis em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$

Nesta subseção veremos que os morfismos cindidos e irredutíveis em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ são os mesmos de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{-}(\mathcal{P})$, a menos de homotopia.

Lema 3.20. *Se $f : X \longrightarrow X$ é um morfismo homotópico a identidade em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, então f é um automorfismo em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$.*

Demonstração. Por hipótese $[f] = [1_X]$ em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, e assim $[f]$ é um automorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Sabendo que X é um complexo radical, pela Proposição 3.17, X é homotopicamente minimal. Logo, f é um automorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ e, portanto, em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$. □

Corolário 3.21. *Sejam f um morfismo de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e $[f]$ sua classe de homotopia em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Então, f é mono cindido (resp. epi cindido) se, e somente se, $[f]$ é mono cindido (resp. epi cindido).*

Demonstração. Faremos a prova apenas para o caso mono cindido. O caso epi cindido é análogo. Se f é mono cindido, existe um morfismo h em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ tal que $hf = 1$. Com isso, $[1] = [hf] = [h][f]$, ou seja, $[f]$ é mono cindido.

Reciprocamente, assuma que $[f]$ é mono cindido. Desta forma, existe um morfismo $[h]$ em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ tal que $[h][f] = [1]$, isto é, $[hf] = [1]$. Assim, pelo Lema 3.20, hf é um automorfismo. Logo, f é mono cindido pela Proposição 4.2. □

Lema 3.22. *Seja f um morfismo em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ com uma fatoração em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, $[f] = [h][g]$. Se f é irredutível em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, então existem morfismos h' e g' em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ tais que $f = h'g'$, sendo h' e g' homotópicos a h e a g, respectivamente.*

Demonstração. Como f é um morfismo irredutível em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, pela Proposição 3.9, sabemos que f é smonic, sepic ou sirredutível. Suponhamos que f é sirredutível com componente irredutível f^0.

Seja $f' = hg$. Assim, $[f'] = [f]$ de modo que existem morfismos $(s^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tais que no diagrama

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f'-f"] & \ldots \arrow[r] & X^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "f'^{-1}-f^{-1}"'] & X^{0} \arrow[r, "d^{0}"] \arrow[d, "f'^{0}-f^{0}"] \arrow[dl, dashed, "s^{0}"'] & X^{1} \arrow[r] \arrow[d, "f'^{1}-f^{1}"] \arrow[dl, dashed, "s^{1}"] & \ldots \\
Y: & \ldots \arrow[r] & Y^{-1} \arrow[r, "\partial^{-1}"'] & Y^{0} \arrow[r, "\partial^{0}"'] & Y^{1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

temos

$$f'^i - f^i = \partial^{i-1}s^i + s^{i+1}d^i \tag{3.9}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim, pelo Corolário 3.21 e como f é sirredutível, para $i < 0$, as componentes f'^i de f' são epi cindidas e assim cada h^i também o é, e para $i > 0$, cada f'^i é mono cindido e assim cada g^i também o é. Desta foma, pela Proposição 3.3, podemos escrever a fatoração $f' = hg$ como

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "g"] & \ldots \arrow[r] & X^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] \arrow[d, "g^{-2}"] & X^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "g^{-1}"] \arrow[dl, dashed, "s'^{-1}"'] \arrow[ddl, dashed, "s^{-1}"] & X^{0} \arrow[r, "d^{0}"] \arrow[d, "g^{0}"] \arrow[dl, dashed, "s'^{0}"'] \arrow[ddl, dashed, "s^{0}"] & X^{1} \arrow[r, "d^{1}"] \arrow[d, "(1\quad 0)^t"] \arrow[ddl, dashed, "s^{1}"'] & X^{1} \arrow[r] \arrow[d, "(1\quad 0)^t"] \arrow[ddl, dashed, "s^{2}"'] & \ldots \\
Z: \arrow[d, "h"] & \ldots \arrow[r] & Y^{-2} \oplus Z'^{-2} \arrow[r, "\tilde{\partial}^{-2}"] \arrow[d, "(1\quad 0)"'] & Y^{-1} \oplus Z'^{-1} \arrow[r, "\tilde{\partial}^{-1}"] \arrow[d, "(1\quad 0)"'] & Z^{0} \arrow[r, "\tilde{\partial}^{0}"] \arrow[d, "h^{0}"'] & X^{1} \oplus Z'^{1} \arrow[r, "\tilde{\partial}^{1}"] \arrow[d, "h^{1}"'] \arrow[dl, dashed, "s''^{1}"] & X^{2} \oplus Z'^{2} \arrow[r] \arrow[d, "h^{2}"'] \arrow[dl, dashed, "s''^{2}"] & \ldots \\
Y: & \ldots \arrow[r] & Y^{-2} \arrow[r, "\partial^{-2}"'] & Y^{-1} \arrow[r, "\partial^{-1}"'] & Y^{0} \arrow[r, "\partial^{0}"'] & Y^{1} \arrow[r, "\partial^{1}"] & Y^{2} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Desta forma, definimos morfismos $s'^i = (s^i \quad 0)^t : X^i \longrightarrow X^{i-1} \oplus Z'^{i-1}$, para cada $i \leq 0$, e $s''^i = (s^i \quad 0) : X^i \oplus Z'^i \longrightarrow Y^{i-1}$, para cada $i > 0$, de modo que

$$s^i = h^{i-1}s'^i \tag{3.10}$$

para todo $i \leq 0$ e

$$s^i = s''^i g^i, \tag{3.11}$$

para todo $i > 0$. Agora, defina

$$g'^i = \begin{cases} g^i + \tilde{\partial}^{i-1}s'^i + s'^{i+1}d^i, & \text{se} \quad i < 0 \\ g^0 + \tilde{\partial}^{-1}s'^0, & \text{se} \quad i = 0 \\ g^i, & \text{se} \quad i > 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

e

$$h'^i = \begin{cases} h^i, & \text{se} \quad i < 0 \\ h^0 + s''^1\tilde{\partial}^0, & \text{se} \quad i = 0 \\ h^i + \partial^{i-1}s''^i + s''^{i+1}\tilde{\partial}^i, & \text{se} \quad i > 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Note que, considerando os morfismos

$$\hat{s} = \begin{cases} s'^i, & \text{se} \quad i \leq 0 \\ 0, & \text{se} \quad i > 0 \end{cases} \quad \text{e} \ \hat{\hat{s}} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad i \leq 0 \\ s''^i, & \text{se} \quad i > 0 \end{cases}$$

em $\mathcal{P}$ temos que g' é homotópico a g e h' é homotópico h. Por fim, mostraremos que $f = g'h'$. De fato, para $i < 0$, temos

$$\begin{aligned} h'^i g'^i &\overset{(3.12)\ e\ (3.13)}{=} h^i(g^i + \tilde{\partial}^{i-1}s'^i + s'^{i+1}d^i) = h^ig^i + h^i\tilde{\partial}^{i-1}s'^i + h^is'^{i+1}d^i = \\ &= f'^i + \partial^{i-1}h^{i-1}s'^i + h^is'^{i+1}d^i \overset{(3.10)}{=} f'^i + \partial^{i-1}s^i + s^{i+1}d^i \overset{(3.9)}{=} f^i. \end{aligned}$$

Para $i = 0$, temos

$$\begin{aligned} h'^0 g'^0 &\overset{(3.12)e(3.13)}{=} (h^0 + s''^1\tilde{\partial}^0)(g^0 + \tilde{\partial}^{-1}s'^0) = h^0g^0 + h^0\tilde{\partial}^{-1}s'^0 + s''^1\tilde{\partial}^0g^0 = \\ &= f'^0 + \partial^{-1}h^{-1}s'^0 + s''^1g^1d^0 \overset{(3.10)\ e\ (3.11)}{=} f'^0 + \partial^{-1}s^0 + s^1d^0 \overset{(3.9)}{=} f^0 \end{aligned}$$

Para $i > 0$, temos

$$\begin{aligned} h'^i g'^i &\overset{(3.12)\ e\ (3.13)}{=} (h^i + \partial^{i-1}s''^i + s''^{i+1}\tilde{\partial}^i)g^i = h^ig^i + \partial^{i-1}s''^ig^i + s''^{i+1}\tilde{\partial}^ig^i = \\ &= f'^i + \partial^{i-1}s''^ig^i + s''^{i+1}g^{i+1}d^i \overset{(3.11)}{=} f'^i + \partial^{i-1}s^i + s^{i+1}d^i \overset{(3.9)}{=} f^i \end{aligned}$$

como queríamos. Se f é smonic ou sepic a demonstração segue de forma análoga. □

Teorema 3.23. *Seja $[f]$ um morfismo de $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ com f em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ (veja a Observação após o Teorema 3.18). Então, $[f]$ é irredutível em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ se, e somente se, f é irredutível em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$.*

Demonstração. Seja $[f]$ irredutível em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Como $[f]$ não é cindido, pelo Corolário 3.21, f também não o é. Agora, suponha que $f = hg$ em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$. Com isso, obtemos $[f] = [hg] = [h][g]$. Como $[f]$ é irredutível temos $[g]$ mono cindido ou $[h]$ epi cindido. Assim, novamente pelo Corolário 3.21, temos que g é mono cindido ou h é epi cindido. Logo, f é irredutível em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$.

Reciprocamente, assuma que f é irredutível em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$. Sabendo que f não é cindido, pelo Corolário 3.21, $[f]$ também não o é. Agora, consideremos a fatoração $[f] = [h][g]$. Assim, pelo Lema 3.22, existem morfismos h' e g' tais que $f = h'g'$, sendo g' e h' homotópicos a h e g, respectivamente. Como f é irredutível, g' é mono cindido ou h' é epi cindido. Assim, pelo Corolário 3.21, $[g] = [g']$ é mono cindido ou $[h] = [h']$ é epi cindido. Logo, $[f]$ é irredutível em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. □

Capítulo 4

Considerações sobre Morfismos Irredutíveis na Categoria de Homotopia

Neste capítulo, assim como no anterior, denotaremos $\mathcal{P} = proj\ \Lambda$.

No capítulo 2, como $\mathcal{P}$ é uma categoria aditiva, vimos que a Categoria Homotópica $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ é uma categoria triangulada, cujos triângulos são da forma

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{p_f} X[1]\ , \tag{4.1}$$

sendo C_f o cone de f dado por $C_f^i = X^{i+1} \oplus Y^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^-(\mathcal{P})$ com uma das formas standard da Proposição 3.3. Conforme [1], mostraremos que o triângulo distinguido (4.1) é isomorfo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ ao triângulo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \longrightarrow X[1]$, onde W é um complexo em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^-(\mathcal{P})$ com uma expressão abreviada com relação ao cone C_f de f.

Assim, ainda com base em [1], caracterizaremos estes triângulos distinguidos em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ com os dois primeiros morfismos f e g irredutíveis em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^-(\mathcal{P})$, conforme a Proposição 3.9. Veremos que:

1. se f é smonic, então g é sepic;

2. se f é sepic, então g sirredutível;

3. se f é sirredutível, então g é smonic ou g é sirredutível.

Ainda neste capítulo, estudaremos alguns resultados de [15], dentre os quais discutiremos sobre a indecomponibilidade do cone de um morfismo irredutível e a existência de morfismos irredutíveis em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Para o primeiro, consideraremos que Λ é uma álgebra de dimensão finita e usaremos a estrutura triangulada de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Para o segundo, mostraremos que as proposições apresentadas em [15] são consequências de alguns resultados que exibiremos. Por último, usando alguns lemas de [24], veremos uma outra condição suficiente para que o C_f seja indecomponível em uma categoria triangulada Krull-Schmidt qualquer.

4.1 Forma de alguns Triângulos em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$

Primeiro, mostraremos que o domínio (contradomínio) de uma componente radical de um morfismo smonic (sepic) em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ é nulo.

Lema 4.1. *Sejam $f : X \to Y$ um morfismo smonic em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ e $f^i : X^i \to Y^i$ uma componente de f. Se f^i é um morfismo radical então $X^i = 0$.*

Demonstração. Como $f : X \to Y$ é um morfismo smonic, pela Proposição 3.3, podemos assumir que $Y^i = X^i \oplus Y'^i$ e $f^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t$. Assim, obtemos $X^i \oplus \{0\} = Im\ f^i \subset rad\ Y^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Como, pela Proposição 1.29, $rad\ Y^i = rad\ X^i \oplus rad\ Y'^i$, temos $X^i \subset rad\ X^i$, o que implica que $X^i = 0$. □

A seguir, temos o resultado dual para um morfismo sepic em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, cuja a demonstração é análoga.

Lema 4.2. *Sejam $f : X \to Y$ um morfismo sepic em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ e $f^i : X^i \to Y^i$ uma componente de f. Se f^i é um morfismo radical então $Y^i = 0$.*

Demonstração. Sabendo que f é sepic, pela Proposição 3.3, assumimos que $X^i = Y^i \oplus X'^i$ e $f^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Assim $Y^i = Im\ f^i \subset rad\ Y^i$. Logo $Y^i = 0$. □

Lema 4.3. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo de complexos em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$. Se f é um morfismo smonic na forma standard (veja Proposição 3.3), então o triângulo distinguido $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{p_f} X[1]$ é isomorfo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ ao triângulo*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{-a} X[1]\,, \tag{4.2}$$

onde W é o complexo com $W^i = Y'^i$ e $d^i_W = e^i$, g e $-a$ são morfismos de complexos dados por $g^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $(-a)^i = -a^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, respectivamente.

Demonstração. Como vimos na prova da Proposição 3.3(i), W é um complexo, com $W^i = Y'^i$ e $d^i_W = e^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Além disso, g e $-a$ são morfismos de complexos, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y: \arrow[d, "g"] & \dots \arrow[r] & X^{i-1}\oplus Y'^{i-1} \arrow[r, "\partial^{i-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & X^i \oplus Y'^i \arrow[r, "\partial^i"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & X^{i+1}\oplus Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \dots \\
W: \arrow[d, "-a"] & \dots \arrow[r] & Y'^{i-1} \arrow[r, "e^{i-1}"] \arrow[d, "-a^{i-1}"] & Y'^i \arrow[r, "e^i"] \arrow[d, "-a^i"] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "-a^{i+1}"] & \dots \\
X[1]: & \dots \arrow[r] & X^i \arrow[r, "-d^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "-d^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \partial^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^i \end{pmatrix} = e^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, como Y é um complexo, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\partial^i \partial^{i-1} = \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{i-1} & a^{i-1} \\ 0 & e^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde obtemos

$$(-a^i)e^{i-1} = (-d^i)(-a^{i-1}). \tag{4.3}$$

Agora, precisamos mostrar que os triângulos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{p_f} X[1]$ e $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{-a} X[1]$ são isomorfos em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, isto é, que existe um isomorfismo $h : C_f \to W$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, equal] & C_f \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & W \arrow[r, "-a"] & X[1]
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

comutativo, o qual pode ser representado em blocos tridimensionais da forma

$$\begin{tikzcd}
& X^{i+1} \arrow[rr, "{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t}"] \arrow[dd, equal] && X^{i+1} \oplus Y'^{i+1} \arrow[rr, "i_f^{i+1}"] \arrow[dd, equal] && C_f^{i+1} \arrow[rr, "p_f^{i+1}"] \arrow[dd, dashed, "h^{i+1}"] && X^{i+2} \arrow[dd, equal] \\
X^i \arrow[ur, "d^i"] \arrow[rr, "{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t}"'] \arrow[dd, equal] && X^i \oplus Y'^i \arrow[ur, "\partial^i"] \arrow[rr, "i_f^i"'] \arrow[dd, equal] && C_f^i \arrow[ur, "d^i_{C_f}"] \arrow[rr, "p_f^i"'] \arrow[dd, dashed, "h^i"'] && X^{i+1} \arrow[ur, "-d^{i+1}"] \arrow[dd, equal] \\
& X^{i+1} \arrow[rr, "{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t}"] && X^{i+1} \oplus Y'^{i+1} \arrow[rr, "g^{i+1}"] && Y'^{i+1} \arrow[rr, "-a^{i+1}"] && X^{i+2} \\
X^i \arrow[ur, "d^i"] \arrow[rr, "{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t}"'] && X^i \oplus Y'^i \arrow[ur, "\partial^i"] \arrow[rr, "g^i"'] && Y'^i \arrow[ur, "e^i"] \arrow[rr, "-a^i"'] && X^{i+1} \arrow[ur, "-d^{i+1}"']
\end{tikzcd}$$

Defina $h : C_f \to W$ dado por $h^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Mostraremos que h é um morfismo de complexos. De fato, sabemos que cada $d^i_{C_f} : C_f^i \to C_f^{i+1}$ é dado por

$$d^i_{C_f} = \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & d^i & a^i \\ 0 & 0 & e^i \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$h^{i+1} d^i_{C_f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & d^i & a^i \\ 0 & 0 & e^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^i \end{pmatrix} = e^i h^i = d^i_W h^i$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$, como queríamos.

Agora, note que $hi_f = g$ em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$ e consequentemente em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, pois

$$h^i i_f^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = g^i,$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo, o segundo quadrado do diagrama $(*)$ é comutativo.

Para a comutatividade do terceiro quadrado de $(*)$, provaremos que $-ah = p_f$ em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$, isto é, p_f é homotópico a $-ah$ em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_f : \arrow[d, "p_f - ah"] & \dots \arrow[r] & C_f^{i-1} \arrow[r, "d_{C_f}^{i-1}"] \arrow[d, "p_f^{i-1}+a^{i-1}h^{i-1}"'] & C_f^{i} \arrow[r, "d_{C_f}^{i}"] \arrow[d, "p_f^{i}+a^{i}h^{i}"] \arrow[dl, dashed, "s^i"'] & C_f^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "p_f^{i+1}+a^{i+1}h^{i+1}"] \arrow[dl, dashed, "s^{i+1}"] & \dots \\
X[1] : & \dots \arrow[r] & X^{i} \arrow[r, "-d^i"'] & X^{i+1} \arrow[r, "-d^{i+1}"'] & X^{i+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, defina o morfismo $s^i : C_f^i = X^{i+1} \oplus X^i \oplus Y'^i \to (X[1])^{i-1} = X^i$ dado por $s^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Assim,

$$\begin{aligned}
(-d^i)s^i + s^{i+1}d_{C_f}^i &= (-d^i)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & d^i & a^i \\ 0 & 0 & e^i \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a^i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = p_f^i + a^i h^i
\end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$, como desejado.

Para finalizar, precisamos mostrar que h é isomorfismo em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Defina $\begin{pmatrix} -a & 0 & 1 \end{pmatrix}^t : W \to C_f$. Inicialmente, devemos provar que $\begin{pmatrix} -a & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ é um morfismo de complexos, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
W : \arrow[d, "\begin{pmatrix} -a & 0 & 1 \end{pmatrix}^t"] & \dots \arrow[r] & Y'^{i-1} \arrow[r, "e^{i-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} -a^{i-1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] & Y'^{i} \arrow[r, "e^{i}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} -a^{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} -a^{i+1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] & \dots \\
C_f : & \dots \arrow[r] & C_f^{i-1} \arrow[r, "d_{C_f}^{i-1}"'] & C_f^{i} \arrow[r, "d_{C_f}^{i}"'] & C_f^{i+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Com efeito,

$$\begin{aligned}
d_{C_f}^i \begin{pmatrix} -a^i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & d^i & a^i \\ 0 & 0 & e^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a^i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-d^{i+1})(-a^i) \\ 0 \\ e^i \end{pmatrix} \overset{(4.3)}{=} \\
&= \begin{pmatrix} (-a^{i+1})e^i \\ 0 \\ e^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-a^{i+1}) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^i.
\end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Para todo $i \in \mathbb{Z}$, observe que

$$h^i[\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \end{pmatrix}^t]^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a^i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

isto é, $h\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = 1$ em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$ e, consequentemente, em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$.

Para mostrarmos que $\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \end{pmatrix}^t h = 1$ em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$, para cada $i \in \mathbb{Z}$, defina o morfismo $s^i : C_f^i \to C_f^{i+1}$ por $s^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_f : \arrow[d, "1-\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \end{pmatrix}^t h"] & \dots \arrow[r] & C_f^{i-1} \arrow[r, "d_{C_f}^{i-1}"] \arrow[d] & C_f^i \arrow[r, "d_{C_f}^i"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^i"'] & C_f^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^{i+1}"'] & \dots \\
C_f : & \dots \arrow[r] & C_f^{i-1} \arrow[r, "d_{C_f}^{i-1}"'] & C_f^i \arrow[r, "d_{C_f}^i"'] & C_f^{i+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Temos

$$\begin{aligned}
d_{C_f}^{i-1} s^i + s^{i+1} d_{C_f}^i &= \begin{pmatrix} -d^i & 0 & 0 \\ 1 & d^{i-1} & a^{i-1} \\ 0 & 0 & e^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & d^i & a^i \\ 0 & 0 & e^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a^i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \begin{pmatrix} -a^i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} h^i
\end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Com isso, 1 é homotópico a $\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \end{pmatrix}^t h$ em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$. Portanto, h é um isomorfismo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Isto completa a demonstração. □

Observação 4.4. *A seguir, apresentamos uma demonstração alternativa do Lema 4.3, utilizando axiomas da categoria triangulada $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$.*

Demonstração. Seja $a[-1] : Y'[-1] \to X$ dado por

$$\begin{tikzcd}
Y'[-1] \arrow[d, "{a[-1]}"] & \dots \arrow[r] & \overbrace{Y'^{i-1}}^{Y'[-1]^i} \arrow[r, "-e^{i-1}"] \arrow[d, "a^{i-1}"] & \overbrace{Y'^i}^{Y'[-1]^{i+1}} \arrow[r, "-e^i"] \arrow[d, "a^i"] & \overbrace{Y'^{i+1}}^{Y'[-1]^{i+2}} \arrow[r] \arrow[d, "a^{i+1}"] & \dots \\
X & \dots \arrow[r] & X^i \arrow[r, "d^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Pela equação (4.3), $a[-1]$ é um morfismo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Assim, por TR1(b) e TR2, obtemos o seguinte triângulo distinguido em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$:

$$X \xrightarrow{i_{a[-1]}} C_{a[-1]} \xrightarrow{p_{a[-1]}} Y' \xrightarrow{-a} X[1] .$$

No entanto, como f é um morfismo smonic na forma standard (Proposição 3.3, temos, para todo $i \in \mathbb{Z}$, que

$$Y^i = Y'^i \oplus X^i = C_{a[-1]}^i, f^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i_{a[-1]}^i \text{ e } \partial^i = \begin{pmatrix} e^i & 0 \\ a^i & d^i \end{pmatrix} = d_{C_{a[-1]}}^i$$

Assim, obtemos o triângulo distinguindo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{-a} X[1]$ em

$\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, onde W é o complexo com $W^i = Y'^i$ e $d_W^i = e^i$, $g = p_{a[-1]}$ é o morfismo de complexo dado por $g^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $-a$ é o morfismo de complexos cujas componentes são $(-a)^i = -a^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Com isso, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, equal] & C_f \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & W \arrow[r, "-a"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

possui linhas que são triângulos distinguidos e o quadrado à esquerda comutativo.

Logo, por (TR3), existe um morfismo $h : C_f \to W$ tal que $(1_X, 1_Y, h)$ é um morfismo de triângulos. Pelo Lema 2.7, h é um isomorfismo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Isto completa a demonstração. $\square$

Observação 4.5. *Pelo Lema 4.3, se $f : X \to Y$ é smonic, então o triângulo (4.2) tem a forma*

$$\begin{tikzcd}
X : \arrow[d, "f"] & \dots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"] & X^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"] & \dots \\
Y : \arrow[d, "g"] & \dots \arrow[r] & X^{i-1} \oplus Y'^{i-1} \arrow[r, "\partial^{i-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & X^i \oplus Y'^i \arrow[r, "\partial^i"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & X^{i+1} \oplus Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \dots \\
W : \arrow[d, "-a"] & \dots \arrow[r] & Y'^{i-1} \arrow[r, "e^{i-1}"] \arrow[d, "-a^{i-1}"] & Y'^i \arrow[r, "e^i"] \arrow[d, "-a^i"] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "-a^{i+1}"] & \dots \\
X[1] : & \dots \arrow[r] & X^i \arrow[r, "-d^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "-d^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

onde $\partial^i = \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix}$, *para todo* $i \in \mathbb{Z}$.

Corolário 4.6. *Com as notações do Lema 4.3, se f é um morfismo de complexos em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^-(\mathcal{P})$, então W é um complexo em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^-(\mathcal{P})$.*

Demonstração. Como X é um complexo em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^-(\mathcal{P})$, para todo $(x_i, y_i') \in X^i \oplus Y'^i$,

$$d^i(x_i, y_i') = \begin{pmatrix} d^i & a^i \\ 0 & e^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^i(x_i) + a^i(y_i') \\ e^i(y_i') \end{pmatrix} \subset rad\ (X^i \oplus Y'^i),$$

donde, pelo item 1 da Proposição 1.29, $e^i(y_i') \in rad\ Y'^i$ e assim $Im\ e^i \subset rad\ Y'^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Logo W é um complexo em $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^-(\mathcal{P})$. $\square$

Corolário 4.7. ***(1º caso)*** *Seja $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{-a} X[1]$ o triângulo (4.2) definido no Lema 4.3. Se f é smonic então g é sepic.*

Demonstração. Segue imediatamente do Observação 4.5. $\square$

Lema 4.8. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo de complexos em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$. Se f é um morfismo sepic na forma standard (veja Proposição 3.3), então o triângulo distinguido $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{p_f} X[1]$ é isomorfo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ ao triângulo*

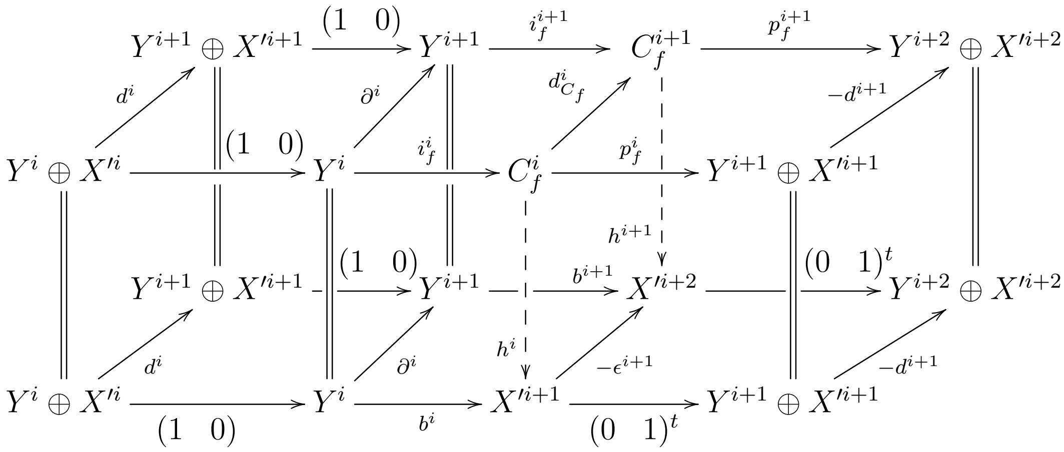
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{(0\quad 1)^t} X[1] \tag{4.4}$$

onde W é o complexo com $W^i = X'^{i+1}$ e $d^i_W = -\epsilon^{i+1}$ e g é o morfismo de complexos dado por $g^i = b^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Precisamos mostrar que existe um isomorfismo $h : C_f \to W$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, equal] & C_f \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & W \arrow[r, "(0\quad 1)^t"] & X[1]
\end{tikzcd} \qquad (**)$$

comutativo, o qual pode ser representado em blocos tridimensionais da forma



Inicialmente, mostraremos que W é um complexo e que g e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ são morfismos de complexos. Como X é um complexo, para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos que

$$d^{i+1}d^i = \begin{pmatrix} \partial^{i+1} & 0 \\ b^{i+1} & \epsilon^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \\ b^i & \epsilon^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde obtemos as igualdades $(-\epsilon^{i+1})(-\epsilon^{i+1}) = 0$ e

$$(-\epsilon^{i+1})b^i = b^{i+1}\partial^i. \tag{4.5}$$

as quais mostram que W é um complexo e que g é um morfismo de complexos, respectivamente. Por outro lado, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ é um morfismo de complexo, pois

$$-d^{i+1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\partial^{i+1} & 0 \\ -b^{i+1} & -\epsilon^{i+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t(-\epsilon^{i+1}).$$

Agora, como cada $C^i_f = Y^{i+1} \oplus X'^{i+1} \oplus Y^i$, defina $h : C_f \to W$ dado por

$h^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^i \end{pmatrix}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Mostraremos que h é um morfismo de complexos. De fato, sabendo que todo $d^i_{C_f} : C^i_f \to C^{i+1}_f$ é dado por

$$d^i_{C_f} = \begin{pmatrix} -\partial^{i+1} & 0 & 0 \\ -b^{i+1} & \epsilon^{i+1} & 0 \\ 1 & 0 & \partial^i \end{pmatrix},$$

segue que

$$\begin{aligned} h^{i+1}d^i_{C_f} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^{i+1} & 0 & 0 \\ -b^{i+1} & \epsilon^{i+1} & 0 \\ 1 & 0 & \partial^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^{i+1} & b^{i+1}\partial^i \end{pmatrix} \overset{(4.5)}{=} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^{i+1} & (-\epsilon^{i+1})b^i \end{pmatrix} = -\epsilon^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^i \end{pmatrix} = -\epsilon^{i+1}h^i = d^i_W h^i \end{aligned}$$

como desejado.

Agora, verificaremos que o diagrama $(**)$ é comutativo. O primeiro quadrado é comutativo. Notemos que o segundo quadrado também é comutativo, pois

$$h^i i^i_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b^i = g^i$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$, isto é, $g = hi_f$ em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$ e, consequentemente, em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$.

Para provar que o terceiro quadrado é comutativo, mostraremos que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t h$ é homotópico a p_f em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_f : \arrow[d, "p_f - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t h"'] & \ldots \arrow[r] & C^{i-1}_f \arrow[r, "d^{i-1}_{C_f}"] \arrow[d] & C^i_f \arrow[r, "d^i_{C_f}"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^i"] & C^{i+1}_f \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^{i+1}"] & \ldots \\
X[1] : & \ldots \arrow[r] & Y^i \oplus X'^i \arrow[r, "-d^i"'] & Y^{i+1} \oplus X'^{i+1} \arrow[r, "-d^{i+1}"'] & Y^{i+1} \oplus X'^{i+2} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Tomando o morfismo $s^i : C^i_f = Y^{i+1} \oplus X^{i+1} \oplus Y^i \to (X[1])^{i-1} = Y^i \oplus X'^i$ em $\mathcal{P}$ dado por $s^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, obtemos, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} s^{i+1}d^i_{C_f} + (-d^i)s^i &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial^{i+1} & 0 & 0 \\ -b^{i+1} & \epsilon^{i+1} & 0 \\ 1 & 0 & \partial^i \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -\partial^i & 0 \\ -b^i & -\epsilon^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b^i \end{pmatrix} = p^i_f - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t h^i. \end{aligned}$$

Com isso, $p_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t h$ em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Logo, o diagrama $(**)$ é comutativo.

Por fim, provaremos que h é um isomorfismo em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Seja a aplicação

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t : W \to C_f$. Observe que, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} d^i_{C_f}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t\right]^i &= \begin{pmatrix} -\partial^{i+1} & 0 & 0 \\ -b^{i+1} & \epsilon^{i+1} & 0 \\ 1 & 0 & \partial^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon^{i+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t\right]^{i+1}(-\epsilon^{i+1}) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t\right]^{i+1} d^i_W \end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$ é um morfismo de complexos. Além disso,

$$h^i\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t\right]^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, $h\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = 1_W$ em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$ e assim em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$.

Por outro lado, para a igualdade $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t h = 1_{C_f}$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, provaremos que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t h$ é homotópico a 1_{C_f} em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} C_f : \arrow[d, "1-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t h"] & \dots \arrow[r] & C_f^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C_f}"] \arrow[d] & C_f^i \arrow[r, "d^i_{C_f}"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "l^i"'] & C_f^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "l^{i+1}"'] & \dots \\ C_f : & \dots \arrow[r] & C_f^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C_f}"'] & C_f^i \arrow[r, "d^i_{C_f}"'] & C_f^{i+1} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Tomemos o morfismo $l^i : C_f^i = Y^{i+1} \oplus X^{i+1} \oplus Y^i \longrightarrow C_f^{i+1} = Y^{i+2} \oplus X^{i+2} \oplus Y^{i+1}$ em $\mathcal{P}$ dado por $l^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\begin{aligned} l^{i+1}d^i_{C_f} + d^{i-1}_{C_f}l^i &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\partial^{i+1} & 0 & 0 \\ -b^{i+1} & \epsilon^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & \partial^i \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -\partial^i & 0 & 0 \\ -b^i & \epsilon^i & 0 \\ 0 & 0 & \partial^{i-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & b^i \end{pmatrix} = 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} h^i \end{aligned}$$

como queríamos. Logo, h é um isomorfismo $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. □

Observação 4.9. *Assim como foi feito no Lema 4.3, apresentamos uma demonstração alternativa para o Lema 4.8, usando os axiomas da categoria triangulada $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$.*

Demonstração. Seja $-b[-1] : Y[-1] \longrightarrow X'$ dado por

$$\begin{tikzcd}
Y[-1] \arrow[d, "-b[-1]"] & \dots \arrow[r] & \overbrace{Y^{i-1}}^{Y[-1]^i} \arrow[r, "-\partial^{i-1}"] \arrow[d, "-b^{i-1}"] & \overbrace{Y^{i}}^{Y[-1]^{i+1}} \arrow[r, "-\partial^{i}"] \arrow[d, "-b^{i}"] & \overbrace{Y^{i+1}}^{Y[-1]^{i+2}} \arrow[r] \arrow[d, "-b^{i+1}"] & \dots \\
X' & \dots \arrow[r] & X'^i \arrow[r, "\epsilon^i"] & X'^{i+1} \arrow[r, "\epsilon^{i+1}"] & X'^{i+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Por (4.5), $-b[-1]$ é um morfismo de complexos em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$. Por TR1(b) e TR2,

$$C_{b[-1]} \xrightarrow{p_{b[-1]}} Y \xrightarrow{b} X'[1] \xrightarrow{i_b} C_{b[-1]}[1] \, .$$

é um triângulo distinguido em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$.

No entanto, como f é um morfismo sepic na forma standard (Proposição 3.3),

$$X^i = Y^i \oplus X'^i = C^i_{b[-1]}, f^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = p^i_{b[-1]} \text{ e } d^i = \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \\ b^i & \epsilon^i \end{pmatrix} = d^i_{C_{b[-1]}}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Desta forma, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{(0\ \ 1)^t} X[1]$ é um triângulo distinguido de f, onde W é o complexo com $W^i = X'[1]^i = X'^{i+1}$ e $d^i_W = -\epsilon^{i+1}$ e g é o morfismo de complexos dado por $g^i = b^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Com isso, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, equal] & C_f \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & W \arrow[r, "(0\ \ 1)^t"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

possui linhas que são triângulos distinguidos e o quadrado comutativo à esquerda. Logo, por (TR3) e pela Proposição 2.10, existe um morfismo $h : C_f \longrightarrow W$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ tal que $(1_X, 1_Y, h)$ é um isomorfismo de triângulos, como desejado. $\square$

Observação 4.10. *Pelo Lema 4.8, o triângulo distinguido* (4.4) *tem a forma:*

$$\begin{tikzcd}
X : \arrow[d, "f"] & \dots \arrow[r] & Y^{i-1} \oplus X'^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & Y^i \oplus X'^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & Y^{i+1} \oplus X'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \dots \\
Y : \arrow[d, "g"] & \dots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "\partial^{i-1}"'] \arrow[d, "b^{i-1}"] & Y^i \arrow[r, "\partial^i"'] \arrow[d, "b^i"] & Y^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "b^{i+1}"] & \dots \\
W : \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t"] & \dots \arrow[r] & X'^i \arrow[r, "-\epsilon^i"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t"] & X'^{i+1} \arrow[r, "-\epsilon^{i+1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t"] & X'^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t"] & \dots \\
X[1] : & \dots \arrow[r] & Y^i \oplus X'^i \arrow[r, "-d^i"'] & Y^{i+1} \oplus X'^{i+1} \arrow[r, "-d^{i+1}"'] & Y^{i+2} \oplus X'^{i+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

onde $d^i = \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \\ b^i & \epsilon^i \end{pmatrix}$, *para todo* $i \in \mathbb{Z}$.

Corolário 4.11. *Com as notações do Lema 4.8, se f é um morfismo de complexos em $\mathcal{C}^-_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, então W é um complexo em $\mathcal{C}^-_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e as componentes de g são morfismos radicais.*

Demonstração. Como X é um complexo em $\mathcal{C}^-_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^i \end{pmatrix}^t (X'^i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t (-\epsilon^i)(X'^i) = d^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t (X'^i) \subset rad\,(Y^{i+1} \oplus X'^{i+1}).$$

Pela Proposição 1.29, $rad\ (Y^{i+1} \oplus X'^{i+1}) = rad\ Y^{i+1} \oplus rad\ X'^{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim, $-\epsilon^i(X'^i) \in rad\ X'^{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo, W é um complexo em $\mathcal{C}^-_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$.

Por outro lado, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$d^i(Y^i \oplus X'^i) = \begin{pmatrix} \partial^i & 0 \\ b^i & \epsilon^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^i \\ X'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^i(Y^i) \\ b^i(Y^i) + \epsilon^i(X'^i) \end{pmatrix} \subset rad\ (Y^i \oplus X'^i).$$

pois X é um complexo em $\mathcal{C}^-_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$. Como $rad\ (Y^i \oplus X'^i) = rad\ Y^i \oplus rad\ X'^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos $b^i(Y^i) + \epsilon^i(X'^i) \subset rad\, X'^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Sabendo que $\epsilon^i(X'^i) \subset rad\, X'^i$ e $rad\, X'^i$ é um subgrupo aditivo de X'^i para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos $b^i(Y^i) \subset rad\, X'^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo todas as componentes de g são morfismos radicais. □

Corolário 4.12. *(2º caso) Seja* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{(0\ \ 1)^t} X[1]$ *o triângulo* (4.4) *definido no Lema 4.8. Se f é um morfismo irredutível sepic e g é um morfismo irredutível, então g é sirredutível.*

Demonstração. Pela Proposição 3.9, g é um morfismo irredutível smonic, sepic ou sirredutível em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. No entanto, inicialmente, observe que as componentes de g são morfismos radicais pelo corolário anterior.

Desta forma, se $g : Y \to W$ é smonic, então $Y = 0$ pelo Lema 4.1, o que contraria a irredutibilidade de f. Por outro lado, se g é um morfismo sepic, pelo Lema 4.2, $W = 0$. Com isso, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} X[1]$ é um triângulo distinguido em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Logo, pela Proposição 2.10, f é um isomorfismo, o que contradiz a irredutibilidade de f. Portanto, g é sirredutível em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. □

Observação 4.13. *Nas condições do Corolário 4.12, no triângulo distinguido* (4.4) *em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, g é um morfismo sirredutível com componente irredutível b^k, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Corolário 3.6, temos que b^i é epi (mono) cindido para todo $i < k$ ($i > k$, respectivamente). Pelos Lemas 4.1 e 4.2, temos*

$$X'^j = 0 \ e \ Y^i = 0$$

sempre que $j \leq k < i$. Logo, o triângulo (4.4)*, a menos de isomorfismo, tem a* *seguinte forma:*

$$
\begin{tikzcd}
X : \arrow[d, "f"] & \ldots \arrow[r] & Y^{k-2} \arrow[r, "\partial^{k-2}"] \arrow[d, equal] & Y^{k-1} \arrow[r, "\partial^{k-1}"] \arrow[d, equal] & Y^{k} \arrow[r, "b^{k}"] \arrow[d, equal] & X'^{k+1} \arrow[r, "\epsilon^{k+1}"] \arrow[d] & X'^{k+2} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
Y : \arrow[d, "g"] & \ldots \arrow[r] & Y^{k-2} \arrow[r, "\partial^{k-2}"'] \arrow[d] & Y^{k-1} \arrow[r, "\partial^{k-1}"'] \arrow[d] & Y^{k} \arrow[r] \arrow[d, "b^{k}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
W : \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X'^{k+1} \arrow[r, "-\epsilon^{i+1}"] \arrow[d, equal] & X'^{k+2} \arrow[r, "-\epsilon^{k+2}"] \arrow[d, equal] & X'^{k+3} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ldots \\
X[1] : & \ldots \arrow[r] & Y^{k-1} \arrow[r, "-\partial^{k-1}"'] & Y^{k} \arrow[r, "-b^{k}"'] & X'^{k+1} \arrow[r, "-\epsilon^{k+1}"'] & X'^{k+2} \arrow[r, "-\epsilon^{k+2}"'] & X'^{k+3} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}
$$

Lema 4.14. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de complexos em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$. Se f é um morfismo sirredutível na forma standard (Proposição 3.3), então o triângulo distinguido $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} C_f \xrightarrow{p_f} X[1]$ é isomorfo em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ ao triângulo*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{a} X[1]\,, \tag{4.6}$$

onde W é o complexo com

$$W^{j} = \begin{cases} X'^{j+1}, & se\ j < i-1 \\ X^{i}, & se\ j = i-1 \\ Y^{i}, & se\ j = i \\ Y'^{i}, & se\ j > i \end{cases} \quad e\ d_W^{j} = \begin{cases} -\epsilon^{j+1}, & se\ j < i-2 \\ -\varepsilon^{i-1}, & se\ j = i-2 \\ f^{i}, & se\ j = i-1 \\ \xi^{i}, & se\ j = i \\ e^{j}, & se\ j > i \end{cases}$$

e g e a são os morfismos de complexos dados, respectivamente, por

$$g^{j} = \begin{cases} b^{j}, & se\ j < i-1 \\ c^{i-1}, & se\ j = i-1 \\ 1, & se\ j = i \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, & se\ j > i \end{cases} \quad e\ a^{j} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^{t}, & se\ j < i-1 \\ 1, & se\ j = i-1 \\ -l^{i}, & se\ j = i \\ -a^{j}, & se\ j > i \end{cases}.$$

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que W é um complexo. Note que

$$d_W^{i} d_W^{i-1} = \xi^{i} f^{i} = 0 \text{ e } d_W^{i-1} d_W^{i-2} = f^{i} \varepsilon^{i-1} = 0,$$

pois f é um morfismo de complexo. Além disso, pelos lemas 4.3 e 4.8, temos que

$$d_W^{j} d_W^{j-1} = e^{j+1} e^{j} = 0 \text{ e } d_W^{m} d_W^{m-1} = (-\varepsilon^{m+1})(-\varepsilon^{m}) = 0$$

para todo $j > i$ e todo $m < i-2$, respectivamente.

Agora, mostraremos que g e a são morfismos de complexos, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y: \arrow[d, "g"] & \ldots \arrow[r] & Y^{i-2} \arrow[r, "\partial^{i-2}"] \arrow[d, "b^{i-2}"] & Y^{i-1} \arrow[r, "\partial^{i-1}"] \arrow[d, "c^{i-1}"] & Y^{i} \arrow[r, "\begin{pmatrix} l^{i} \\ \xi^{i} \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & X^{i+1} \oplus Y^{\prime i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \ldots \\
W: \arrow[d, "-a"] & \ldots \arrow[r] & X^{\prime i-1} \arrow[r, "-\varepsilon^{i-1}"] \arrow[d, "-a^{i-2}"] & X^{i} \arrow[r, "f^{i}"] \arrow[d, equal] & Y^{i} \arrow[r, "\xi^{i}"] \arrow[d, "-l^{i}"] & Y^{\prime i+1} \arrow[r] \arrow[d, "-a^{i+1}"] & \ldots \\
X[1]: & \ldots \arrow[r] & Y^{i-1} \oplus X^{\prime i-1} \arrow[r, "-d^{i-1}"'] & X^{i} \arrow[r, "-d^{i+1}"'] & X^{i+1} \arrow[r, "-d^{i+1}"'] & X^{i+2} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato, sabendo que X e Y são complexo, temos que

$$\begin{pmatrix} c^{i-1} & \varepsilon^{i-1} \end{pmatrix} d^{i-2} = \begin{pmatrix} c^{i-1} & \varepsilon^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^{i-2} & 0 \\ b^{i-2} & \varepsilon^{i-2} \end{pmatrix} = 0$$

e

$$\partial^{i+1} \begin{pmatrix} l^{i} & \xi^{i} \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} d^{i+1} & a^{i+1} \\ 0 & e^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^{i} \\ \xi^{i} \end{pmatrix} = 0$$

que implicam que

$$c^{i-1}\partial^{i-2} = (-\varepsilon^{i-1})b^{i-2} \tag{4.7}$$

e

$$(-d^{i+1})(-l^{i}) = (-a^{i+1})\xi^{i}, \tag{4.8}$$

respectivamente. Como f é um morfismo de complexos, temos também que

$$f^{i}c^{i-1} = \partial^{i-1}1_{Y^{i}} \text{ e } -l^{i}f^{i} = -d^{i}1_{X^{i}},$$

Além disso, obtemos

$$g^{i+1} \begin{pmatrix} l^{i} \\ \xi^{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^{i} \\ \xi^{i} \end{pmatrix} = \xi^{i} = \xi^{i}1_{Y^{i}}$$

e

$$-\begin{pmatrix} c^{i-1} & \varepsilon^{i-1} \end{pmatrix}(-a^{i-2}) = -\begin{pmatrix} c^{i-1} & \varepsilon^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\varepsilon^{i-1} = 1_{X^{i}}(-\varepsilon^{i-1}).$$

Por fim, a comutatividade dos demais quadrados segue dos lemas 4.3 e 4.8. Com isso, concluímos que g e a são morfismos de complexos.

Agora, observe que o cone C_f de f é dado por

$$\ldots \underbrace{Y^{i-1} \oplus X^{\prime i-1} \oplus Y^{i-2}}_{C_f^{i-2}} \overset{d_{C_f}^{i-2}}{\to} \underbrace{X^{i} \oplus Y^{i-1}}_{C_f^{i-1}} \overset{d_{C_f}^{i-1}}{\to} \underbrace{X^{i+1} \oplus Y^{i}}_{C_f^{i}} \overset{d_{C_f}^{i}}{\to} \underbrace{X^{i+2} \oplus X^{i+1} \oplus Y^{\prime i+1}}_{C_f^{i+1}} \ldots$$

Assim, definimos $h : C_f \longrightarrow W$ por

$$h^j = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^j \end{pmatrix}, & \text{se } j < i-1 \\ \begin{pmatrix} 1 & c^j \end{pmatrix}, & \text{se } j = i-1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{se } j = i \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{se } j > i \end{cases}$$

Mostraremos que h é um morfismo de complexos, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
C_f : \ldots \arrow[d, "h"] & \overbrace{Y^{i-1} \oplus X'^{i-1} \oplus Y^{i-2}}^{C_f^{i-2}} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 & b^{i-2} \end{pmatrix}"] & \overbrace{X^i \oplus Y^{i-1}}^{C_f^{i-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & c^{i-1} \end{pmatrix}"] & \overbrace{X^{i+1} \oplus Y^i}^{C_f^{i}} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \overbrace{X^{i+2} \oplus X^{i+1} \oplus Y'^{i+1}}^{C_f^{i+1}} \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \ldots \\
W : \ldots \arrow[r] & X'^{i-1} \arrow[r, "-\varepsilon^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "f^i"] & Y^i \arrow[r, "\xi^i"] & Y'^{i+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato, note que

$$\begin{aligned} h^{i-1}d_{C^f}^{i-2} &= \begin{pmatrix} 1 & c^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^{i-1} & -\varepsilon^{i-1} & 0 \\ 1 & 0 & \partial^{i-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^{i-1} & c^{i-1}\partial^{i-2} \end{pmatrix} \overset{(4.7)}{=} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^{i-1} & -\varepsilon^{i-1}b^{i-2} \end{pmatrix} = -\varepsilon^{i-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^{i-2} \end{pmatrix} = -\varepsilon^{i-1}h^{i-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^i d_{C_f}^{i-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^i & 0 \\ f^i & \partial^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^i & \partial^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^i & f^i c^{i-1} \end{pmatrix} = \\ &= f^i \begin{pmatrix} 1 & c^{i-1} \end{pmatrix} = d_W^{i-1}h^{i-1} \end{aligned}$$

e

$$h^{i+1}d_{C_f}^{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 \\ 1 & l^i \\ 0 & \xi^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \xi^i \end{pmatrix} = \xi^i \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = d_W^i h^i$$

Além disso, pelos lemas 4.3 e 4.8, a igualdade $h^j d_{C_f}^{j-1} = d_Z^{j-1}h^{j-1}$ é válida para os demais $j \in \mathbb{Z}$, o que completa a prova da nossa afirmação.

Agora, provaremos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, equal] & C_f \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "h"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & W \arrow[r, "a"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

O primeiro quadrado é comutativo. Para o segundo quadrado, observe que

$$h^{i-1}i_f^{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & c^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c^{i-1} = c^{i-1}1_{Y^{i-1}} = g^{i-1}1_{Y^{i-1}}$$

e

$$h^i i_f^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1_{Y^{i-1}} = 1_{Y^i}1_{Y^i} = g^i 1_{Y^i}$$

Novamente, os lemas 4.3 e 4.8 fornecem $h^j i_f^j = g^j 1_{Y^j}$ para $j \neq i-1, i$ em $\mathbb{Z}$. Isto prova a comutatividade do segundo quadrado.

Já para o terceiro quadrado, consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_f : \dots \arrow[r] \arrow[d, "p_f - ah"] & C_f^{i-3} \arrow[r, "d_{C_f}^{i-3}"] \arrow[d] & C_f^{i-2} \arrow[r, "d_{C_f}^{i-2}"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^{i-2}"'] & C_f^{i-1} \arrow[r, "d_{C_f}^{i-1}"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^{i-1}"'] & C_f^{i} \arrow[r, "d_{C_f}^{i}"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^{i}"'] & C_f^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^{i+1}"'] & \dots \\
X[1] : \dots \arrow[r] & Y^{i-2} \oplus X^{i-2} \arrow[r, "-d^{i-2}"'] & Y^{i-1} \oplus X^{i-1} \arrow[r, "-d^{i-1}"'] & X^{i} \arrow[r, "-d^{i}"'] & X^{i+1} \arrow[r, "-d^{i+1}"'] & X^{i+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Defina cada morfismo $s^j : C_f^j \longrightarrow X[1]^{j-1}$ por

$$s^j = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } j < i-1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } j = i-1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } j = i \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } j > i \end{cases}$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
d^{i-2}s^{i-2} + s^{i-1}d_{C_f}^{i-2} &= \begin{pmatrix} -\partial^{i-2} & 0 \\ -b^{i-2} & -\epsilon^{i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^{i-1} & -\varepsilon^{i-1} & 0 \\ 1 & 0 & \partial^{i-2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial^{i-2} \\ 0 & 0 & -b^{i-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \partial^{i-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^{i-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b^{i-2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^{i-2} \end{pmatrix} = p_f^{i-2} + a^{i-2}h^{i-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^{i-1}s^{i-1} + s^{i}d_{C_f}^{i-1} &= \begin{pmatrix} -c^{i-1} & -\varepsilon^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} d_{C_f}^{i-1} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -c^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & c^{i-1} \end{pmatrix} = p_f^{i-1} + a^{i-1}h^{i-1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d^{i}s^{i} + s^{i+1}d_{C_f}^{i} &= d_W^i \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 \\ 1 & l^i \\ 0 & \xi^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l^i \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - (-l^i) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = p_f^i + a^i h^i.
\end{aligned}$$

Além disso, $d^j s^j + s^{j+1} d_{C_f}^j = p_f^j + a^j h^j$ para os demais $j \in \mathbb{Z}$ pelos lemas 4.3 e 4.8.

Por fim, mostraremos que h é um isomorfismo em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Seja $n : W \longrightarrow C_f$

dado por

$$n^j = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t, & \text{se } j < i-1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t, & \text{se } j = i-1 \\ \begin{pmatrix} -l^i & 1 \end{pmatrix}^t, & \text{se } j = i \\ \begin{pmatrix} -a^j & 0 & 1 \end{pmatrix}^t, & \text{se } j > i \end{cases}.$$

Provaremos que n é um morfismo de complexos, isto é , o diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
W : \arrow[d, "n"] & \ldots \arrow[r] & X'^{i-1} \arrow[r, "-\varepsilon^{i-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}"] & X^i \arrow[r, "d^{i-1}_{C_f}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}"] & Y^i \arrow[r, "\xi^i"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} -l^i \\ 1 \end{pmatrix}"] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} -a^{i+1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] & \ldots \\
C_f : & \ldots \arrow[r] & C_f^{i-2} \arrow[r, "d^{i-2}_{C_f}"'] & C_f^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C_f}"'] & C_f^i \arrow[r, "d^i_{C_f}"'] & C_f^{i+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato, note que

$$\begin{aligned} d^{i-2}_{C_f} n^{i-2} &= \begin{pmatrix} -c^{i-1} & -\varepsilon^{i-1} & 0 \\ 1 & 0 & \partial^{i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon^{i-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = n^{i-1} d^{i-2}_W, \\ d^{i-1}_{C_f} n^{i-1} &= \begin{pmatrix} -d^i & 0 \\ f^i & \partial^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^i \\ f^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l^i f^i \\ f^i \end{pmatrix} = n^i d^{i-1}_W \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d^i_{C_f} n^i &= \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 \\ 1 & l^i \\ 0 & \xi^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -l^i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-d^{i+1})(-l^i) \\ 0 \\ \xi^i \end{pmatrix} \overset{(4.8)}{=} \begin{pmatrix} (-a^{i+1})\xi^i \\ 0 \\ \xi^i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -a^{i+1} & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \xi^i = n^{i+1} d^i_W \end{aligned}$$

A comutatividade dos demais quadrados segue dos lemas 4.3 e 4.8. Agora, observe que

$$h^{i-1} n^{i-1} = \begin{pmatrix} 1 & c^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \text{ e } h^i n^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -l^i \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$. Além disso, temos que $h^j n^j = 1$ em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$ para todo $j \in \mathbb{Z}, j \neq i, i-1$, pelos lemas 4.3 e 4.8.

Agora, mostraremos $nh = 1$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, isto é, nh é homotópico a 1 em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_f : \arrow[d, "1-nh"] & \ldots \arrow[r] & C_f^{i-3} \arrow[r, "d^{i-3}_{C_f}"] \arrow[d] & C_f^{i-2} \arrow[r, "d^{i-2}_{C_f}"] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "v^{i-2}"'] & C_f^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C_f}"] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "v^{i-1}"'] & C_f^i \arrow[r, "d^i_{C_f}"] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "v^i"'] & C_f^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}_{C_f}"] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "v^{i+1}"'] & C_f^{i+2} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "v^{i+2}"'] & \ldots \\
C_f : & \ldots \arrow[r] & C_f^{i-3} \arrow[r, "d^{i-3}_{C_f}"'] & C_f^{i-2} \arrow[r, "d^{i-2}_{C_f}"'] & C_f^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}_{C_f}"'] & C_f^i \arrow[r, "d^i_{C_f}"'] & C_f^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}_{C_f}"'] & C_f^{i+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Assim, defina cada morfismo $v^j : C_f^j \longrightarrow C_f^{j-1}$ por

$$v^j = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } j < i-1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t, & \text{se } j = i-1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } j = i \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } j = i+1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{se } j > i+1 \end{cases}.$$

Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} v^{i-1}d_{C^f}^{i-2} + d_{C_f}^{i-3}v^{i-2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^{i-1} & -\varepsilon^{i-1} & 0 \\ 1 & 0 & \partial^{i-2} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -\partial^{i-2} & 1 & 0 \\ -b^{i-2} & -\epsilon^{i-2} & 0 \\ 1 & 0 & \partial^{i-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^{i-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b^{i-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & b^{i-2} \end{pmatrix} = 1 - n^{i-2}h^{i-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^i d_{C^f}^{i-1} + d_{C_f}^{i-2}v^{i-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d_{C^f}^{i-1} + \begin{pmatrix} -c^{i-1} & -\varepsilon^{i-1} & 0 \\ 1 & 0 & \partial^{i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -c^{i-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & c^{i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c^{i-1} \end{pmatrix} = 1 - n^{i-1}h^{i-1}, \\ v^{i+1}d_{C^f}^{i} + d_{C_f}^{i-1}v^i &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 \\ 1 & l^i \\ 0 & \xi^i \end{pmatrix} + d_{C_f}^{i-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & l^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -l^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l^i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - n^i h^i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
v^{i+2}d^{i+1}_{Cf} + d^{i}_{C_f}v^{i+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^{i+2} & 0 & 0 \\ 1 & d^{i+1} & a^{i+1} \\ 0 & 0 & e^{i+1} \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} -d^{i+1} & 0 \\ 1 & l^{i} \\ 0 & \xi^{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^{i+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a^{i+1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a^{i+1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - n^{i+1}h^{i+1}
\end{aligned}$$

Pelos lemas 4.3 e 4.8, segue que $v^{j+1}d_{C_f^j} + d^{j-2}_{C_f}v^{j} = 1 - n^{j}k^{j}$ para os demais $j \in \mathbb{Z}$. Assim, $1 = nk$ em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Logo, h é um isomorfismo em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. $\square$

Observação 4.15. *Pelo Lema 4.14, o triângulo distinguido* (4.6) *tem a forma:*

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] & \ldots \arrow[r] & Y^{i-2} \oplus X'^{i-2} \arrow[r, "d^{i-2}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & Y^{i-1} \oplus X'^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & X^{i} \arrow[r, "d^{i}"] \arrow[d, "f^{i}"'] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^{t}"] & \ldots \\
Y: \arrow[d, "g"] & \ldots \arrow[r] & Y^{i-2} \arrow[r, "\partial^{i-2}"'] \arrow[d, "b^{i-2}"'] & Y^{i-1} \arrow[r, "\partial^{i-1}"'] \arrow[d, "c^{i-1}"'] & Y^{i} \arrow[r, "\partial^{i}"'] \arrow[d, equal] & X^{i+1} \oplus Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \ldots \\
W: \arrow[d, "a"] & \ldots \arrow[r] & X'^{i-1} \arrow[r, "-\varepsilon^{i-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^{t}"'] & X^{i} \arrow[r, "f^{i}"] \arrow[d, equal] & Y^{i} \arrow[r, "\xi^{i}"] \arrow[d, "-l^{i}"'] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "-a^{i+1}"] & \ldots \\
X[1]: & \ldots \arrow[r] & Y^{i-1} \oplus X'^{i-1} \arrow[r, "-d^{i-1}"'] & X^{i} \arrow[r, "-d^{i}"'] & X^{i+1} \arrow[r, "-d^{i+1}"'] & X^{i+2} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

onde $d^{j} = \begin{pmatrix} \partial^{j} & 0 \\ b^{j} & \epsilon^{j} \end{pmatrix}$ *para todo* $j \leq i-2$, $d^{i-1} = \begin{pmatrix} c^{i-1} & \varepsilon^{i-1} \end{pmatrix}$, $\partial^{k} = \begin{pmatrix} d^{k} & a^{k} \\ 0 & e^{k} \end{pmatrix}$ *para todo* $k \geq i+1$, *e* $\partial^{i} = \begin{pmatrix} l^{i} & \xi^{i} \end{pmatrix}^{t}$.

Corolário 4.16. *Com as notações do Lema 4.14, se* f *é um morfismo em* $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, *então* W *é um complexo em* $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ *e as componentes* g^{j}, *com* $j \leq i-1$, *de* g *são morfismos radicais.*

Demonstração. Pelos Corolários 4.6 e 4.11, para provar que W é um complexo em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, basta mostrarmos que ε^{i-1}, f^{i} e ξ^{i} são morfismos radicais.

Com efeito, sabendo que X é um complexo em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, $-\varepsilon^{i-1}$ é um morfismo radical, pois $-\varepsilon^{i-1}(X'^{i-1}) = -d^{i-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^{t} \subset rad\ X^{i}$. De forma análoga, como Y é um complexo em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$ e pela Proposição 1.29, ξ^{i} é um morfismo radical, pois $\xi^{i}(Y^{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\partial^{i}(Y^{i}) \subset rad\ Y'^{i+1}$.

Por outro lado, pela Proposição 3.17, Y é um complexo homotopicamente minimal, pois Y é um complexo em $\mathcal{C}^{-}_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$. Desta forma, Pelo Lema 3.15 a aplicação $\partial^i = \begin{pmatrix} l^i & \xi^i \end{pmatrix}^t : Y^i \to Im\ \partial^i$ é uma cobertura projetiva e assim $Ker\,\partial^i$ é submódulo supérfluo de Y^i. Pelo Corolário 1.31 e sabendo que W é um complexo, $Im\,f^i \subset Ker\,\xi^i = Ker\,\partial^i \subseteq rad\ Y^i$, isto é, f^i é um morfismo radical.

Para a segunda parte, pelo Corolário 4.11, basta mostrarmos que c^{i-1} é um morfismo radical. De fato, tendo em vista que X é um complexo em $\mathcal{C}^-_{\mathcal{I}}(\mathcal{P})$, $d^{i-1}(Y^{i-1} \oplus X'^{i-1}) = c^{i-1}(Y^{i-1}) + \varepsilon^{i-1}(X'^{i-1}) \subset rad\ X^i$. Sabendo que ε^{i-1} é um morfismo radical e $rad\ X^i$ é um subgrupo aditivo de X^i, temos que $c^{i-1}(Y^{i-1}) \subset rad\ X^i$. Isto completa a demonstração. □

Corolário 4.17. *(3º caso) Seja* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{a} X[1]$ *o triângulo* (4.6) *definido no Lema 4.14. Se f é um morfismo irredutível sirredutível e g é um morfismo irredutível, então g é smonic ou g é sirredutível.*

Demonstração. Pela Proposição 3.9, basta mostrarmos que g não é sepic. De fato, caso contrário, $c^{i-1} : Y'^{i-1} \to X^i$ é epi cindido. Como c^{i-1} é um morfismo radical pelo corolário anterior, temos que $X^i = 0$ pelo Lema 4.2, o que contradiz a irredutibilidade de f^i. Portanto, g é smonic ou g é sirredutível em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. □

Observação 4.18. *Seja* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{a} X[1]$ *o triângulo* (4.6) *definido no Lema 4.14. Pela Proposição 4.17 temos dois casos. Exibiremos a seguir formas do triângulo* (4.6) *nesses casos*

1. *Suponha que g é um morfismo smonic. Desta forma, para todo $j > i$, g^j é um isomorfismo e assim $X^j = 0$. Por outro lado, para $j < i$, como as componentes g^j de g são morfismos radicais pelo Corolário 4.16, temos que $Y^j = 0$ pelo Lema 4.1. Com isso, o triângulo distinguido* (4.6) *tem a seguinte forma:*

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & X'^{i-2} \arrow[r, "\epsilon^{i-2}"] \arrow[d] & X'^{i-1} \arrow[r, "\varepsilon^{i-1}"] \arrow[d] & X^i \arrow[r] \arrow[d, "f^i"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
Y: \arrow[d, "g"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y^i \arrow[r, "\xi^i"'] \arrow[d, equal] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
W: \arrow[d, "a"] & \cdots \arrow[r] & X'^{i-1} \arrow[r, "-\varepsilon^{i-1}"] \arrow[d, equal] & X^i \arrow[r, "f^i"] \arrow[d, equal] & Y^i \arrow[r, "\xi^i"] \arrow[d] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
X[1]: & \cdots \arrow[r] & X'^{i-1} \arrow[r, "-\varepsilon^{i-1}"'] & X^i \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2. *Suponha que g é sirredutível. Como $g^j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} : X^j \oplus Y^j \longrightarrow Y^j$ é um morfismo epi cindido para todo $j > i$, temos que b^k, para algum $k \leq i-2$, ou c^{i-1} é a única componente irredutível de g. Como pela Proposição 3.9, todas as componentes á direita da componente irredutível são mono cindidas, segue que cada g^j é um isomorfismo. Isto implica que $X^j = 0$ para todo $j > i$. Mais ainda, suponha que b^k com $k \leq i-2$ é uma componente irredutível. Assim, pelo Lema 4.1, $Y^j = 0$ para todo j tal que $k < j < i-2$ se $k = i-3$, as componentes b^k.*

   Ainda pela Proposição 3.9, todas as componentes à esquerda da componente irredutível são epi cindidas. Desta forma, pelo Corolário 4.16 e pelo Lema 4.2, $X'^j = 0$ para todo j menor que o índice da componente irredutível.

Com isso, se c^{i-1} é a única componente irredutível de g, o triângulo distinguido (4.6) tem a seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & Y^{i-3} \arrow[r, "\partial^{i-3}"] \arrow[d, equal] & Y^{i-2} \arrow[r, "\partial^{i-2}"] \arrow[d, equal] & Y^{i-1} \arrow[r, "c^{i-1}"] \arrow[d, equal] & X^{i} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
Y: \arrow[d, "g"] & \cdots \arrow[r] & Y^{i-3} \arrow[r, "\partial^{i-3}"'] \arrow[d] & Y^{i-2} \arrow[r, "\partial^{i-2}"'] \arrow[d] & Y^{i-1} \arrow[r, "\partial^{i-1}"'] \arrow[d, "c^{i-1}"'] & Y^{i} \arrow[r, "\xi^{i}"'] \arrow[d, equal] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
W: \arrow[d, "a"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X^{i} \arrow[r, "f^{i}"] \arrow[d, equal] & Y^{i} \arrow[r, "\xi^{i}"] \arrow[d] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
X[1]: & \cdots \arrow[r] & Y^{i-2} \arrow[r, "-\partial^{i-2}"'] & Y^{i-1} \arrow[r, "-c^{i-1}"'] & X^{i} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, suponha que b^{k} com $k \leq i-2$ é uma componente irredutível. Em particular, se $k = i-3$, o triângulo distinguido (4.6) tem a forma

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & Y^{i-4} \arrow[r, "\partial^{i-4}"] \arrow[d, equal] & Y^{i-3} \arrow[r, "b^{i-3}"] \arrow[d, equal] & X'^{i-2} \arrow[r, "\epsilon^{i-2}"] \arrow[d] & X'^{i-1} \arrow[r, "-\varepsilon^{i-1}"] \arrow[d] & X^{i} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
Y: \arrow[d, "g"] & \cdots \arrow[r] & Y^{i-4} \arrow[r, "\partial^{i-4}"] \arrow[d] & Y^{i-3} \arrow[r] \arrow[d, "b^{i-3}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y^{i} \arrow[r, "\xi^{i}"'] \arrow[d, equal] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
W: \arrow[d, "a"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X'^{i-2} \arrow[r, "\epsilon^{i-2}"] \arrow[d, equal] & X'^{i-1} \arrow[r, "c^{i-1}"] \arrow[d, equal] & X^{i} \arrow[r, "f^{i}"] \arrow[d, equal] & Y^{i} \arrow[r, "\xi^{i}"] \arrow[d] & Y'^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
X[1]: & \cdots \arrow[r] & Y^{i-3} \arrow[r, "-b^{i-3}"'] & X'^{i-2} \arrow[r, "-\epsilon^{i-2}"'] & X'^{i-1} \arrow[r, "\varepsilon^{i-1}"'] & X^{i} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

No próximo exemplo exibiremos triângulos com as formas descritas nos Corolários 4.7, 4.12 e 4.17 desta seção.

Exemplo 4.19. *Seja $\mathcal{A} = mod\ \Lambda$, onde $\Lambda = KQ/R$ é a álgebra de caminhos do quiver $Q : \overset{3}{\bullet} \xrightarrow{\beta} \overset{2}{\bullet} \xrightarrow{\alpha} \overset{1}{\bullet}$ com $R = \langle \alpha\beta \rangle$. No exemplo 1.62, vimos que o quiver de Auslander-Reiten de Λ é dado por*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \overset{P(3)}{\bullet} \arrow[dr, "\theta"] & \\
\overset{S(1)}{\bullet} \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[r, dash, dashed] & \overset{S(2)}{\bullet} \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, dash, dashed] & & \overset{S(3)}{\bullet} \\
 & \underset{P(2)}{\bullet} \arrow[u, "\gamma"'] & &
\end{tikzcd}$$

Além disso, em [15] é provado o quiver de Auslander-Reiten de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ é dado por

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, "\overline{\eta}"] & & S_3[-1] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, "\overline{\sigma}"] & & P_3 \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, "\overline{\psi}"] & & P_2[1] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, "\overline{\gamma}[1]"] & & S_1[2] \\
& C_f[-1] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur, "\overline{\xi}[-1]"] \arrow[dr, "\overline{\phi}"] & & S_2 \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur, "\overline{\delta}"] \arrow[dr, "\overline{\rho}"] & & C_f \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur, "\overline{\phi}[1]"] \arrow[dr, "\overline{\xi}"] & & S_2[1] \arrow[ur, "\overline{\rho}[1]"] \arrow[dr, "\overline{\delta}[1]"] & \\
P_3[-1] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur, "\overline{\psi}[-1]"] & & P_2 \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur, "\overline{\gamma}"] & & S_1[1] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur, "\overline{\eta}[1]"] & & S_3 \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[ur, "\overline{\sigma}[1]"] & & P_3[1]
\end{tikzcd}$$

onde C_f é o cone do morfismo não-nulo $f = \delta\gamma : P(2) \longrightarrow P(3)$.

Desta forma, temos:

1. *No triângulo distinguido*

$$\begin{tikzcd}
P_2: \arrow[d, "\overline{\gamma}"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
S_2: \arrow[d, "\overline{\rho}"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, equal] & P(2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
P_1[1]: \arrow[d, "\overline{\phi}[1]\overline{\rho}[1]"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
P_2[1]: & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P(2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, temos que $\overline{\gamma}$ é smonic e $\overline{\rho}$ é sepic, ou seja, é um exemplo do 1º caso.

2. *Agora, no triângulo distinguido*

$$\begin{tikzcd}
S_3: \arrow[d, "\overline{\sigma}[1]"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & P(2) \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & P(3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
S_2[1]: \arrow[d, "\overline{\rho}[1]"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & P(2) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
P_3[1]: \arrow[d, "\overline{\xi}[1]\overline{\psi}[1]"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
S_2[1]: & \dots \arrow[r] & P(1) \arrow[r, "-\varphi"] & P(2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, sabemos que $\overline{\sigma}[1]$ é sepic. Agora,observe que $f = \delta\gamma$ é um morfismo irredutível em $\mathcal{P}$, pois $S(2)$ não é um Λ-módulo projetivo. Logo, $\overline{\rho}[1]$ é sirredutível. Portanto, temos um exemplo do segundo caso.

3. No triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
P_1[1]: \arrow[d, "\overline{\eta}[1]"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
C_f: \arrow[d, "\overline{\xi}"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(2) \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & P(3) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
S_3 \arrow[d] & \dots \arrow[r] & P(1) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & P(2) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & P(3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
P_1[2]: & \dots \arrow[r] & P(1) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$\overline{\eta}[1]$ é sirredutível e ξ é um morfismo smonic.

Por fim, no triângulo distinguido

$$\begin{tikzcd}
S_2: \arrow[d, "\begin{pmatrix}\overline{\delta}\\ \overline{\rho}\end{pmatrix}"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & P(2) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
P_3 \oplus P_1[1]: \arrow[d, "\begin{pmatrix}\overline{\psi} & \overline{\eta}\end{pmatrix}"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(1) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\varphi"] & P(3) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
C_f \arrow[d] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & P(2) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & P(3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
S_2[1]: & \dots \arrow[r] & P(1) \arrow[r, "-\varphi"] & P(2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

os morfismos $\begin{pmatrix}\overline{\delta}\\ \overline{\rho}\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}\overline{\psi} & \overline{\eta}\end{pmatrix}$ são sirredutíveis com componentes irredutíveis f e φ, respectivamente. Portanto, obtemos exemplos para o 3º caso.

Em [1], prova-se o resultado:

Teorema 4.20. *Sejam Λ um álgebra de dimensão finita não simples e $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ um triângulo de Auslander-Reiten em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Então:*

(1) Se u é smonic então v é sepic.

(2) Se u é sepic então v é sirredutível.

(3) Se u é sirredutível então v é smonic ou sirredutível.

Para demonstrar esse resultado foi essencial encontrar e classificar os triângulos (4.2), (4.4) e (4.6).

4.2 Morfismos Irredutíveis em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$

É um fato bem conhecido que em categorias abelianas o núcleo e o conúcleo de morfismos irredutíveis são indecomponíveis. O resultado análogo para a categoria derivada $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ é:

Proposição 6.1. **[14]** Sejam X e Y indecomponíveis em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$, para uma álgebra de dimensão finita Λ e assuma que temos um morfismo irredutível $f : X \longrightarrow Y$. Então, o cone C_f é indecomponível.

Para demonstrar esse resultado usa-se a existência de um mergulho da categoria derivada $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ na categoria estável $\underline{mod}\ \widehat{\Lambda}$ sobre a álgebra repetitiva. O mergulho é uma equivalência se, e somente se, Λ tem dimensão global finita. Nesse trabalho, faremos como em [1], onde aplica-se o axioma (TR4) de categoria triangulada. Esse resultado exibe um método para construção de objetos indecomponíveis em uma categoria triangulada É importante observar que nem todos os morfismos irredutíveis aparecem em triângulos de Auslander-Reiten (veja [?]). Nesta seção discutiremos também a existência de morfismo irredutível em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Neste caso, usaremos a imersão de $\mathcal{A} = mod\,\Lambda$ em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ (veja a Observação 2.22). Por último veremos uma outra condição suficiente para que C_f seja indecomponível, conforme [15].

Inicialmente, sejam $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada Krull-Schmidt e X um objeto indecomponível de $\mathcal{C}$. Um morfismo em $End_{\mathcal{C}}(X)$ ou é nilpotente ou é um isomorfismo (veja [14]).

Seja $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ um triângulo distinguido em $\mathcal{C}$. Por abuso de linguagem, no próximo resultado, o qual garante que C_u indecomponível se u é um morfismo irredutível em $\mathcal{C}$, denotaremos Z por C_u e $T(X)$ por $X[1]$.

Proposição 4.21. *Seja $u : X \to Y$ um morfismo entre objetos indecomponíveis em uma categoria triangulada Krull-Schmidt $\mathcal{C}$. Se u é irredutível, então C_u é indecomponível.*

Demonstração. Sabemos que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} C_u \xrightarrow{w} X[1]$ é um triângulo distinguido em $\mathcal{C}$. Aplicando (TR2) duas vezes, segue que $C_u \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1] \xrightarrow{-v[1]} C_u[1]$ também é um triângulo distinguido em $\mathcal{C}$.

Agora, seja f um idempotente de $End\,(C_u)$. Pela Proposição 1.36, temos que provar que f é zero ou o morfismo identidade 1_{C_u} para concluir que C_u é indecomponível.

Por (TR1)(b), temos os triângulos distinguidos $C_u \xrightarrow{f} C_u \xrightarrow{g} C_f \xrightarrow{h} C_u[1]$ e $C_u \xrightarrow{wf} X[1] \xrightarrow{\theta} C_{wf} \xrightarrow{\delta} C_u[1]$.

Assim, por (TR4), existem morfismos α e β em $\mathcal{C}$ tais que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
C_{wf}[-1] \arrow[r, "{\delta[-1]}"] \arrow[d, "{\beta[-1]}"'] & C_u \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & C_u \arrow[d, "wf"'] & & \\
Y \arrow[r, "v"] & C_u \arrow[r, "w"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "{-u[1]}"] \arrow[d, "\theta"'] & Y[1] \arrow[r, "{-v[1]}"] \arrow[d, equal] & C_u[1] \arrow[d, "{g[1]}"] \\
& C_f \arrow[r, dotted, "\alpha"] \arrow[d, "h"'] & C_{wf} \arrow[r, dotted, "\beta"] \arrow[d, "\delta"'] & Y[1] \arrow[r, "\gamma"] & C_f[1] \\
& C_u[1] \arrow[r, equal] & C_u[1] & &
\end{tikzcd}$$

Desta forma, como $-u[-1] = \beta\theta$ e u é irredutível, então ou θ é mono cindido ou β é epi cindido.

Se θ é mono cindido, pela Proposição 2.9, $wf = 0$. Pela Proposição 2.8, existe $\eta : C_u \to Y$ tal que $v\eta = f$. Como Y é indecomponível, $\eta v : Y \to Y$ é um isomorfismo ou nilpotente. Se ηv é um isomorfismo, então v é mono cindido pela Proposição 4.2. Por (TR2) e pela Proposição 2.9, segue que $u = 0$, o que é uma contradição. Com isso, ηv é nilpotente, isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\eta v)^n = 0$ e $(\eta v)^{n-1} \neq 0$. Agora, como f é um idempotente de $End(C_u)$, sabemos que $f^2 = f$. Com isso $f^n = f$. Assim,

$$f = f^{n+1} = (v\eta)\dots(v\eta) = v(\eta v)\dots(\eta v)\eta = v(\eta v)^n\eta = 0,$$

isto é, $f = 0$.

Se β é epi cindido, pela Proposição 2.9, $\gamma = 0$. Com isso e pela comutatividade do diagrama anterior, $gv = 0$. Pela Proposição 2.8, existe $\varphi : Y \to C_u$ tal que $f\varphi = v$. Como $f^2 = f$, temos $f(f\varphi) = f\varphi$ e assim $fv = v$. Assim, por (TR3), existe $m : X[1] \to X[1]$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & C_u \arrow[r, "w"] \arrow[d, "f"] & X[1] \arrow[r, "-u[1]"] \arrow[d, "m"] & Y[1] \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, "v"] & C_u \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[r, "-u[1]"] & Y[1]
\end{tikzcd}$$

Como X é indecomponível m é nilpotente ou m é um isomorfismo. Se m é um isomorfismo, pelo Lema 2.7, f também o é. Em particular f é um monomorfismo. Desta forma $f = 1_{C_u}$, pois $f^2 = f$. Por outro lado, se m é nilpotente, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m^p = 0$ e $m^{p-1} \neq 0$. Assim, pela comutatividade do terceiro quadrado do diagrama anterior, $u = um = um^2 = \dots = um^p = 0$, o que é uma contradição. Logo, $f = 0$ ou $f = 1_{C_u}$ em $End\,(C_u)$. Portanto, C_u é indecomponível. □

Seja Λ uma álgebra de dimensão global finita. Sabemos que $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ é uma categoria triangulada Krull-Schmidt (veja Observação 2.24). Assim, para uma álgebra de dimensão global finita Λ, o resultado a seguir, o qual é apresentado na Proposição 6.1 de [14], é uma consequência da Proposição 4.21.

Corolário 4.22. *Sejam X e Y indecomponíveis em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ e assuma que temos um morfismo irredutível $f : X \longrightarrow Y$. Então, o cone C_f é indecomponível.*

A seguir apresentamos um resultado, cuja a prova utiliza a caracterização e a classificação dos morfismos irredutíveis em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$.

Proposição 4.23. *Sejam X e Y objetos indecomponíveis em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, com $Y^{-(i+2)} \neq 0$, $Y^0 \neq 0, X^i = 0, Y^i = 0$ para $i > 0$ e $X^{-n} = 0$ para todo $-n < -i$. Então não existe morfismo irredutível $f : (X, d) \to (Y, \partial)$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$.*

Demonstração. Sejam X e Y objetos indecomponíveis em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ satisfazendo as hipóteses da proposição. Suponhamos que exista um morfismo irredutível $f : X \to Y$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, com X e Y indecomponíveis.

Pelo Teorema 3.23 e pela Proposição 3.8, o morfismo f é smonic, sepic ou sirredutível. Como $Y^{-(i+2)} \neq 0$, concluímos que f não é sepic. Além disso, se f tem uma única componente irredutível, digamos f^{-i}, então todas suas componentes à esquerda são epi cindidas, o que não ocorre. Logo f é smonic. Assim, pela Observação 4.5, temos o seguinte triângulo distinguido de f:

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "f"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X^{-i} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"] & \dots \arrow[r] & X^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"] & 0\dots \\
Y: \arrow[d, "g"] & \dots \arrow[r] & Y^{-(i+2)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y^{-(i+1)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^{-i} \oplus Y'^{-i} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \dots \arrow[r] & X^{-1} \oplus Y'^{-1} \arrow[r, "\partial^{-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & X^0 \oplus Y'^0 \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & 0\dots \\
W: \arrow[d, "-a"] & \dots \arrow[r] & Y^{-(i+2)} \arrow[r] \arrow[d] & Y^{-(i+1)} \arrow[r] \arrow[d] & Y'^{-i} \arrow[r] \arrow[d, "-a^{i-1}"] & \dots \arrow[r] & Y'^{-1} \arrow[r, "e^{-1}"] \arrow[d, "-a^i"] & Y'^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0\dots \\
X[1]: & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X^{-i} \arrow[r, "-d^i"] & X^{-(i+1)} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & X^0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0\dots
\end{tikzcd}$$

Agora, note que f fatora como

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "p"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X^{-i} \arrow[r] \arrow[d, "f^{-i}"'] & \dots \arrow[r] & X^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"'] & 0 \ \dots \\
Z: \arrow[d, "h"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y^{-(i+1)} \arrow[r, "\partial^{-(i+1)}"] \arrow[d, equal] & Y^{-i} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dots \arrow[r] & Y^{-1} \arrow[r, "\partial^{-1}"] \arrow[d, equal] & Y^0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \ \dots \\
Y: & \dots \arrow[r] & Y^{-(i+2)} \arrow[r, "\partial^{-(i+2)}"] & Y^{-(i+1)} \arrow[r, "\partial^{-(i+1)}"] & Y^{-i} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & Y^{-1} \arrow[r, "\partial^{-1}"] & Y^0 \arrow[r] & 0 \ \dots
\end{tikzcd}$$

Como f é irredutível ou p é mono cindido ou h epi cindido.

Suponhamos que $p : X \to Z$ é mono cindido. Em particular p é smonic. Assim, pela Observação 4.5, temos o seguinte triângulo distinguido de p:

$$\begin{tikzcd}
X: \arrow[d, "p"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X^{-i} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"] & \dots \arrow[r] & X^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t"] & 0\dots \\
Z: \arrow[d, "g_p"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y^{-(i+1)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^{-i} \oplus Y'^{-i} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \dots \arrow[r] & X^{-1} \oplus Y'^{-1} \arrow[r, "\partial^i"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & X^0 \oplus Y'^0 \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}"] & 0\dots \\
W_g: \arrow[d, "-a_p"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y^{-(i+1)} \arrow[r] \arrow[d] & Y'^{-i} \arrow[r] \arrow[d, "-a^{i-1}"] & \dots \arrow[r] & Y'^{-1} \arrow[r, "e^i"] \arrow[d, "-a^i"] & Y'^0 \arrow[r] \arrow[d, "-a^{i+1}"] & 0\dots \\
X[1]: & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X^{-i} \arrow[r] & X^{-(i+1)} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & X^0 \arrow[r, "-d^{i+1}"] & 0 \arrow[r] & 0\dots
\end{tikzcd}$$

Como p é mono cindido, pelo Lema 2.9, o morfismo $-a_p = 0$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, isto é, existem morfismos $(s^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, com $s^n : Y'^n \to X^n$ para $-i \le n \le 0$, e $s^n = 0$ caso contrário, em $\mathcal{P}$ tais que $-a_p^n = d_{W_g}^n s^{n-1} - d^{n-1}s^n$.

Agora, observe que se no triângulo distinguido de f, usamos as mesmas homotopias s^n de p (considerando $s^{-(i+2)} = 0 : Y^{-(i+2)} \to 0$) , vemos que $-a$ é homotópico a zero. Desta forma, pelo Lema 2.9, f é mono cindido o que contraria a irredutibilidade de f.

Por outro lado, suponha que h é epi cindido. Em particular h é sepic. Assim, pela Observação 4.10, obtemos o seguinte triângulo distinguido de h:

$$\begin{tikzcd}
Z: \arrow[d, "h"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y'^{-(i+1)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y'^{-i} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dots \arrow[r] & Y^{-1} \arrow[r, "\partial^i"] \arrow[d, equal] & Y^0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \dots \\
Y: \arrow[d, "g_h"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y^{-(i+2)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y^{-(i+1)} \arrow[r] \arrow[d] & Y^{-i} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & Y^{-1} \arrow[r, "\partial^i"] \arrow[d] & Y^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \dots \\
W_h: \arrow[d, "q"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y^{-(i+2)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \dots \\
Z[1]: & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Y^{-(i+1)} \arrow[r, "\partial^{-(i+1)}"'] & Y^{-i} \arrow[r, "-\partial^{-i}"'] & Y^{-(i-1)} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & Y^0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \dots
\end{tikzcd}$$

Pelo Lema 2.6, temos o triângulo distinguido $W_h[-1] \xrightarrow{-q[-1]} C \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g_h} W_h$. Como h epi cindido, pelo Lema 2.9, g_h é nulo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Assim, existe um morfismo $s^{-(i+1)}$ em $\mathcal{P}$ no diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y: \arrow[d, "p"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Y^{-(i+2)} \arrow[r, "\partial^{-(i+2)}"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed] & Y^{-(i+1)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^{-(i+1)}"] & \dots \arrow[r] & Y^{-1} \arrow[r, "\partial^{-1}"] \arrow[d] & Y^0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \dots \\
W_h: & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Y^{-(i+2)} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

tal que $s^{-(i+1)}\partial^{-(i+2)} = 1_{Y^{-(i+2)}}$. Por outro lado, como Y é um complexo radical e pela Proposição 1.29, note que

$$\begin{aligned} s^{-(i+1)}\partial^{-(i+2)}(Y^{-(i+2)}) &\subset s^{-(i+1)}(rad\, Y^{-(i+1)}) \subset rad\, Y^{-(i+2)} \neq Y^{-(i+2)} = \\ &= 1_{Y^{-(i+2)}}(Y^{-(i+2)}) \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Isto completa a demonstração. □

Seja $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ uma sequência de Auslander-Reiten em $mod\,\Lambda$. Se Λ é uma álgebra hereditária, Happel provou em [13] que tal sequência fornece um triângulo de Auslander-Reiten em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Mas, normalmente, um morfismo irredutível em $mod\,\Lambda$ não permanece irredutível em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$, o que ilustra a Proposição 6.2 de [14] apresentada a seguir, a qual é uma consequência da Proposição 4.23.

Corolário 4.24. *[14] Se X e Y são Λ-módulos indecomponíveis com*

$$pd_\Lambda\, Y \geq pd_\Lambda\, X + 2,$$

então não existe morfismo irredutível $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$.

Demonstração. Como X e Y são isomorfos às suas respectivas resoluções projetivas minimais em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$, as quais satisfazem a hipótese da proposição anterior, o resultado segue. □

Sejam X e Y Λ-módulos. Observe que se $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$, onde Λ é uma álgebra hereditária, a desigualdade $pd_\Lambda Y \geq pd_\Lambda X + 2$ não é satisfeita, pois $pd_\Lambda\, X$ é 0 ou 1.

Proposição 4.25. *Se $f : X \to Y[1]$ é um morfismo irredutível em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ tal que $X^0 \neq 0$, $Y^0 \neq 0$ e $X^i = 0, Y^i = 0, \forall i > n$, então Y é somando de $X_{\leq -1}$.*

Demonstração. Considere a seguinte fatoração de f:

$$\begin{tikzcd}
X : \arrow[d, "h"] & \ldots \arrow[r] & X^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] \arrow[d, equal] & X^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, equal] & X^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
X_{\leq -1} : \arrow[d, "g"] & \ldots \arrow[r] & X^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] \arrow[d, "f^{-2}"] & X^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
Y[1] : & \ldots \arrow[r] & Y^{-1} \arrow[r, "-\partial^{-1}"'] & Y^0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Como f é irredutível, ou h é mono cindido ou g é epi cindido. Sendo $X^0 \neq 0$, temos que h não é smonic e assim h não é mono cindido. Logo, g é epi cindido, isto é, existe $k : Y[1] \to X_{\leq -1}$ tal que $gk = 1_{Y[1]}$. Portanto como k é mono cindido segue que Y é somando de $X_{\leq -1}$. $\square$

A seguir apresentamos a Proposição 6.3 de [14], o qual é uma consequência da Proposição 4.25.

Corolário 4.26. *[14] Seja $f : X \to Y[1]$ um morfismo irredutível em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$, onde X e Y são Λ-módulos indecomponíveis. Então Y é um somando de ΩX (veja Observação 1.27).*

Demonstração. Pela Observação 2.22, os complexos X e Y em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ são isomorfos as resoluções projetivas em $\mathcal{K}^{-,b}(\Lambda)$ e assim em $\mathcal{K}^-(\Lambda)$, as quais satisfazem a hipótese da proposição anterior. Assim o resultado segue, visto que $X_{\leq -1}$ é a resolução projetiva de ΩX. $\square$

A próxima Proposição mostra que nem sempre existem morfismos irredutíveis $f : X \to Y[2]$.

Proposição 4.27. *Sejam X e Y objetos indecomponíveis em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, com $H^0(X) \neq 0$, $X^0 \neq 0, X^i = 0$ para $i > 0$ e $Y^i = 0$ para $i \geq -1$. Então não existe morfismo irredutível $f : X \to Y$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$.*

Demonstração. Seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Considere a fatorização de f dada por

$$\begin{tikzcd}
X : \arrow[d, "h"] & \ldots \arrow[r] & X^{-3} \arrow[r, "d^{-3}"] \arrow[d, equal] & X^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] \arrow[d, equal] & X^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, equal] & X^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
X_{\leq 1} : \arrow[d, "g"] & \ldots \arrow[r] & X^{-3} \arrow[r, "d^{-3}"] \arrow[d, "f^{-3}"] & X^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] \arrow[d, "f^{-2}"] & X^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
Y : & \ldots \arrow[r] & Y^{i-3} \arrow[r, "\partial^{i-3}"] & Y^{i-2} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Mostraremos que h não é mono cindido e g não é epi cindido. Suponhamos que h é mono cindido, isto é, existe $p : X_{\leq 1} \to X$ tal que $ph = 1_X$. Assim, aplicando o funtor covariante $H^0 : \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{A}$, obtemos $H^0(p)H^0(h) = 1_{H^0(X)}$. Como $H^0(X) = X^0/Im\, d_X^{-1}$ é não-nulo e $H^0(X_{\leq 1}) = 0$, temos uma contradição.

Agora, suponha que g é epi cindido e considere o triângulo distinguido $X_{\leq 1} \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{u} C_g \longrightarrow X_{\leq 1}[1]$. Por (TR2), obtemos o triângulo distinguido $C_g[-1] \longrightarrow X_{\leq 1} \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{u} C_g$. Então, pelo Lema 2.9, $u : Y \to C_g$ é homotópico a zero, isto é, temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y : \arrow[d, "u"] & \ldots \arrow[r] & Y^{-4} \arrow[r, "d_Y^{-4}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t"'] & Y^{-3} \arrow[r, "d_Y^{-3}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t"'] \arrow[dl, dashed, "s^{-3}"'] & Y^{-2} \arrow[r, "d_Y^{-2}=0"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t"'] \arrow[dl, dashed, "s^{-2}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, dashed, "s^{-1}=0"'] & \ldots \\
C_g : & \ldots \arrow[r] & X^{-3} \oplus Y^{-4} \arrow[r, "d_{C_g}^{-4}"'] & X^{-2} \oplus Y^{-3} \arrow[r, "d_{C_g}^{-3}"'] & X^{-1} \oplus Y^{-2} \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

onde $s^{i+1}\partial^i + d_{C_g}^{i-1}s^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Agora, considere o triângulo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} C_f \longrightarrow X[1]$. Usando as mesmas homotopias s^i (considerando $s^0 = 0 : 0 \to X^0$ visto que $C_f^{-1} = X^0$), vemos que v é homotópico a zero de modo que, pelo Lema 2.9, f é mono cindido, o que contradiz a irredutibilidade de f.

Portanto, $f : X \to Y$ não é irredutível. $\square$

A seguir incluimos dois lemas, apresentados em [24], com o objetivo de demonstrar que temos uma outra condição suficiente para garantir que C_f é indecomponível.

Lema 4.28. *Seja* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ *um triângulo distinguido em uma categoria triangulada* $\mathcal{C}$. *Assuma que exista uma decomposição* $Y = \oplus_{j=1}^n Y_j$ *e escreva* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *e* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, *onde* $u_j = X \to Y_j$ *e* $v_j : Y_j \to Z$, *com* $j = 1, 2, \ldots, n$. *Se* $u_j = 0$ *então* v_j *é mono cindido para todo* $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Como cada Y_j é um objeto de $\mathcal{C}$, por (TR1)(c), temos o triângulo distinguido $Y_j \xrightarrow{1_{Y_j}} Y_j \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$. Pelo Lema 2.6, segue que

$$0 \longrightarrow Y_j \xrightarrow{1_{Y_j}} Y_j \longrightarrow T(0)\ .$$

também é um triângulo distinguido. Agora, note que os quadrados

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & Y_j \arrow[d, "i_j"] \\
X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "p_j"] \\
0 \arrow[r] & Y_j
\end{tikzcd}$$

são comutativos, onde i_j e p_j são a inclusão e a projeção canônicas, respectivamente. De fato, a comutatividade do primeiro quadrado é clara. Já o segundo quadrado é comutativo, pois $p_j u = p_j(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_j = 0$.

Por (TR3), existem morfismos $h_j : Y_2 \to Z$ e $h'_j : Z \to Y_j$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & Y_j \arrow[r, "1_{Y_j}"] \arrow[d, "i_j"] & Y_j \arrow[r] \arrow[d, "h_j"] & T(0) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p_j"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h'_j"] & T(X) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Y_j \arrow[r, "1_{Y_j}"] & Y_j \arrow[r] & T(0)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Como 0 e $p_j i_j = 1_j$ são isomorfismos, pelo Lema 2.7, $h'_j h_j$ também é um isomorfismo. Assim, pela Proposição 4.2 h_j é mono cindido. Logo, $v_j = v i_j = h_j$ é mono cindido. □

Lema 4.29. *Seja* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ *um triângulo distinguido em uma categoria triangulada Krull-Schmidt* $\mathcal{C}$ *tais que* X *e* Y *são objetos indecomponíveis e que* u *é não-nulo e não é um isomorfismo. Assuma que exista uma decomposição* $Z = \oplus_{j=1}^{n} Z_j$ *com objetos indecomponíveis* Z_j *e escreva* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *e* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$*, onde* $v_j = X \to Y_j$ *e* $w_j : Y_j \to Z$*, com* $j = 1, 2, \ldots, n$*. Então* $n \geq 1$ *e todos os morfismos* v_j *e* w_j *são não-nulos e não são isomorfismos.*

Demonstração. Inicialmente, notemos que $n = 0$ implica que $Z = 0$. Mas, pela Proposição 2.10, isto significa que u é um isomorfismo, o que é uma contradição.

Agora, por (TR2), observe que $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \xrightarrow{-T(u)} T(Y)$ é um triângulo distinguido. Assim, se algum $v_j = 0$, pelo Lema 4.28, w_j é mono cindido. Com isso, Z_j é um somando direto de $X[1]$ e consequentemente Z_j e $X[1]$ são isomorfos, pois são indecomponíveis. Desta forma, w_j é um isomorfismo. Mais ainda, como $w_j = w\, i_j$, pela Proposição , w é epi cindido. Pela Proposição 2.9 $-T(u) = 0$. Como T é um automorfismo, temos $u = 0$, o que é uma contradição. Logo todos v_j são não nulos. Analogamente todos w_j são não-nulos

Por outro lado, se algum v_j é um isomorfismo segue que v é mono cindido pois $v_j = p_j v$. Logo, pela Proposição 2.9, $u = 0$ o que novamente é uma contradição. Logo todos v_j não são isomorfismos. Dualmente, podemos provar que todos w_j não são isomorfismos. □

Proposição 4.30. *Sejam* $f : X \to Y$ *um morfismo não-nulo e não-invertível entre objetos indecomponíveis em uma categoria triangulada Krull-Schmidt* $\mathcal{C}$ *e o triângulo distinguido* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} X[1]$ *. Se* $Hom(Y, X[1]) = 0$*, então* W *é indecomponível.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que W não é indecomponível. Como $\mathcal{C}$ é uma categoria Krull-Schmidt, podemos escrever $W = \bigoplus_{i=1}^{r} Z_i$, onde $r > 1$ e cada Z_i é indecomponível. Assim, $g = \begin{pmatrix} g_1 & \ldots & g_r \end{pmatrix}^t$ e $h = \begin{pmatrix} h_1 & \ldots & h_r \end{pmatrix}$. Pelo Lema 4.29, sabemos que todos g_i e h_i são não-nulos e não são isomorfismos para cada $i = 1, \ldots, r$.

Considere o morfismo

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} : W \to W$$

onde $1 = 1_{Z_1}$. Como $Hom(Y, X[1]) = 0$, segue que $h\varphi g = 0$. Pela Proposição 2.8, existe $\varphi_Y \in Hom(Y,Y)$ tal que $\varphi g = g\varphi_Y$, isto é, o quadrado do seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "\varphi_Q"] & W \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "\varphi"] & X[1] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & W \arrow[r, "h"'] & X[1] \end{tikzcd}$$

Além disso, indutivamente, pode-se mostrar que $g\varphi_Y^n = \varphi^n g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, $g\varphi_Y^n = \varphi g$, pois $\varphi^2 = \varphi$.

Assim, como $\varphi g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ e $g\varphi_Y^n = \begin{pmatrix} g_1\varphi_Y^n & g_2\varphi_Y^n & \dots & g_r\varphi_Y^n \end{pmatrix}$ temos que $g_1\varphi_Y = g_1$ e $g_i\varphi_Y^n = 0$ para $2 \leq i \leq r$. Como Y é indecomponível, pelo Lema 1.23, φ_Y é nilpotente ou um isomorfismo. Se φ_Y é nilpotente, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que que $\varphi_Y^m = 0$. Com isso, $g_1\varphi_Y^m = 0 \neq g_1$, o que é uma contradição. Agora, suponha que φ_Y é um isomorfismo. Por (TR2) e (TR3), existe φ_X fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\varphi_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "\varphi_Y"] & W \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "\varphi"] & X[1] \arrow[d, dashed, "\varphi_X[1]"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & W \arrow[r, "h"'] & X[1] \end{tikzcd}$$

comutar. Desta forma,

$$f\varphi_Y = \varphi_X f \tag{4.9}$$

Novamente φ_X é nilpotente ou um isomorfismo, pois X é indecomponível. Se φ_X é um isomorfismo, então, pelo Lema 2.7, φ também o é, o que é uma contradição. Com isso, φ_X é nilpotente, isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_X^n = 0$. Assim, obtemos

$$f\varphi_Y^n = (f\varphi_Y)\varphi_Y^{n-1} \overset{(4.9)}{=} \varphi_X f\varphi_Y^{n-1} \overset{(4.9)}{=} \varphi_X^2 f\varphi_Y^{n-2} \overset{(4.9)}{=} \dots \overset{(4.9)}{=} \varphi_X^n f = 0$$

Como φ_Y é um isomorfismo, segue que $f = 0$, o que é uma contradição. Portanto, W é indecomponível. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] E. R. Alvares, S. Fernandes, H. Giraldo. *Shape of the Auslander-Reiten Triangles*. Preprint.

[2] I. Assem; D. Simpson; A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math. Soc. Student Texts 65, Cambridge University Press, Cambridge (2006).

[3] Auslander. *Representation theory of artin algebras II*, Comm. Algebra 1 (1974), 269-310.

[4] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge Univ. Press (1995).

[5] R. Bautista, M.J. Souto Salorio. *Irreducible morphisms in the bounded derived category*, Journal of Pure and Applied Algebra 215 (2011) 866-884.

[6] G. Chalom, H. Merklen *Irreducible morphisms in subcategories*, in: Groups, Rings and Group Rings, in: Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 248, Taylor and Francis CRC Press, 2006.

[7] M. R. Fidélis *Teorema de Morita para Categoria Derivada*. Viçosa, MG, 2013. v, 119f. ; 29 cm.

[8] H. Giraldo; E. Marcos. *Heart of irreducible morphisms of complexes*. Preprint.

[9] H. Giraldo; H. Merklen. *Irreducible morphisms of categories of complexes*. Journal of Algebra 321 (2009) 2716-2736.

[10] S.Gelfand; Y.Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer, Berlin (1996).

[11] P. Grivel. *Catégories dérivés et foncteurs derives*. In: Borel, A. (ed.) Algebraic D-modules. Academic Press, London (1987).

[12] D. Happel. *Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite-dimensional algebras*. Proceedings of the American Mathematical Society, 112(3):641-648, July 1991.

[13] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*. London Math. Soc. Lect. Notes 119, Cambridge University Press, Cambridge(1988).

[14] D. Happel; B. Keller; I. Reiten. *Bounded Derived Categories and Repetitive Algebras*, J. Algebra 319 (2008) 1611-1635.

[15] D. Happel; I. Reiten; S. O. Smalø. *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras.* Memoirs Amer. Math. Soc. 120(1996),no. 575.

[16] T. Hungerford. *Algebra.* Berlin: Springer-Verlag, 1975.

[17] N. Jacobson. *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, San Francisco,(1980).

[18] H. Krause. *Auslander-Reiten theory via Brown representability*, K-theory 20 (2000) 331-344.

[19] H. Krause. *The stable derived category of a Noetherian scheme.* Compos. Math., 141(5):1128-1162, 2005.

[20] H. Krause. *Krull-Remak-Schmidt categories and projective covers.* Electronic notes, http://www.math.uni-bielefeld.de/∼hkrause/krs.pdf, nov 2015.

[21] J.P.May. *The additivity of traces in triangulated categories.* Advances in Mathematics 163(2001), 34-73.

[22] F. B. Medeiros. *Dimensão global forte e complexidade na categoria derivada.* 2014. 108 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

[23] R. S. Pierce. *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 88, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, New York, 1982.

[24] C. M. Ringel *Hereditary triangulated categories.* Electronic notes, http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.56.9999&rep=rep1&type=pdf, out 2015.

[25] J. J. Rotman. *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, Upper Saddle RTiver, NJ, 2002.

[26] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge University Press(1997).