

ISAQUE VIZA DE SOUZA

SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES DE GAUSS ESTÁVEIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2012**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

S729s
2012

Souza, Isaque Viza de, 1987-
Singularidades de aplicações de Gauss estáveis / Isaque
Viza de Souza. – Viçosa, MG, 2012.
xii, 60f. : il. (algumas col.) ; 29cm.

Inclui índice.

Orientador: Catarina Mendes de Jesus

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 57-59

1. Topologia. 2. Singularidades (Matemática). 3. Geometria.
I. Universidade Federal de Viçosa. II. Título.

CDD 22. ed. 514

ISAQUE VIZA DE SOUZA

SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES DE GAUSS ESTÁVEIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 16 de Julho de 2012.

Marcos Craizer

Maurício Barros Corrêa Júnior

Simone Maria de Moraes
(Coorientadora)

Catarina Mendes de Jesus
(Orientadora)

Se podes olhar, vê. Se podes ver, repara.
Livro dos Conselhos

Agradecimentos

Agradeço:

Primeiramente à Deus, por sua soberania e cuidado em todos os momentos da vida.

À minha família, que sempre esteve ao meu lado, fazendo com que os dias mais difíceis parecessem fáceis e tornando os momentos de alegria incalculáveis. Obrigado ao meu pai, Geraldo de Souza, por ser um conselheiro precioso e preparado para as decisões mais difíceis; à minha mãe, Dirce Viza de Souza, por tanto carinho e amor, para os quais me faltam palavras e os quais não saberia quantificar; e aos meus irmãos, Tiago Viza de Souza e Kenia Viza de Souza, por estarem comigo nas horas de maior desafio e tão próximos quanto se possa imaginar nas de celebração.

À minha namorada e amiga, Mariana, pelo carinho, sorrisos e abraços, que sempre completam meus dias.

Aos amigos da minha casa, Felipe de Souza, Giulliano Damasceno, Rafael Magalhães e Samuel Magalhães, que tornaram os dias mais leves durante esta caminhada. Obrigado por cada momento compartilhado!

Aos amigos da *MatCaverna* que estiveram comigo em muitas horas de estudo no DMA. Em especial à Ana Paula Cota, Artur Fassoni, Fernando Lourenço, Frederico Ventura, Guemael Rinaldi e Vinícius Soares, que, além de me acompanharem nos estudos, compartilharam outros momentos, dando uma palavra amiga ou contando uma piada. Obrigado pelas conversas preciosas nesses dois anos!

À professora Catarina Mendes de Jesus, pela orientação, amizade e paciência, que me inspiraram e ajudaram durante todo o tempo do mestrado. Seus conselhos, ideias e principalmente a amizade serão sempre uma ótima lembrança desses anos.

Aos professores e funcionários do DMA, minha gratidão por terem me apoiado e ensinado durante essa jornada. Em especial à professora Simone Maria de Moraes, por ter me co-orientado, ao professor Ady Cambraia Junior, pelas conversas e ideias esclarecedoras durante o último período, e ao sr. Jair Pereira Lopes, por me proporcionar um café

agradável acompanhado por longos minutos de conversa sobre temas variados.

Aos professores que aceitaram o convite para fazer parte da banca examinadora, Maurício Barros Corrêa Júnior (UFV) e Marcos Craizer (PUC-RJ), agradeço a disponibilidade e as contribuições para este trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro concedido durante estes dois anos, sem o qual a realização desta dissertação não seria possível.

À todos que não citei o nome, mas que contribuíram com um sorriso ou abraço durante esse período e se tornaram, deste modo, essenciais para a realização deste trabalho.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	xi
Abstract	xii
Introdução	1
1 Resultados Preliminares	4
1.1 Complexos Regulares e Característica de Euler	4
1.1.1 Complexos Regulares	4
1.1.2 Superfícies	5
1.1.3 Característica de Euler de Superfícies	7
1.2 Grafos	9
1.3 Aplicações Estáveis	10
1.3.1 Jatos	11
1.3.2 A Topologia C^∞ de Whitney	13
1.3.3 Conjunto Singular	14
1.4 Aplicação de Gauss Estável e Superfícies	17
2 Transições e Cirurgias de Aplicações de Gauss	20
2.1 Forma de Monge e Função Altura de Uma Superfície	20

2.1.1	Conjuntos de Bifurcação	21
2.2	Classificação Local das Singularidades da Função Altura	22
2.2.1	Casos Extras para uma Família de Superfícies	25
2.3	Transições Locais	27
2.3.1	Transição A_3	27
2.3.2	Transições do tipo Lábios	28
2.3.3	Transições do tipo Bicos	29
2.3.4	Exemplos de Transições A_3	29
2.4	Cirurgias da Aplicação de Gauss	31
2.4.1	Cirurgia S^-	31
2.4.2	Cirurgia S^{-+}	32
2.4.3	Cirurgia S^+	32
3	Grafos e Aplicações de Gauss Estáveis	34
3.1	Grafos Dual de Aplicações Estáveis	34
3.2	Transições da Aplicação de Gauss	37
3.2.1	Grafo da Transição Lips	37
3.2.2	Grafo da Transição Beaks	38
3.3	Exemplos: Realização de Grafos	38
3.4	Efeito das Cirurgias nos Grafos das Aplicações de Gauss	42
3.4.1	Grafo da Cirurgia S^-	42
3.4.2	Grafo da Cirurgia S^{-+}	43
3.4.3	Grafo da Cirurgia S^+	44
3.5	Realização de Grafos Bipartidos	45
3.5.1	Grafos Bipartidos com $A \leq 3$	45
3.5.2	Realização de Grafo Árvore	48

3.5.3 Realização de Grafos Bipartidos	52
3.6 Algoritmo para a Realização dos Grafos	54
Conclusão e Perspectivas Futuras	56
Referências Bibliográficas	57

Lista de Figuras

1.1	Constução de 2-complexo	5
1.2	Triangulação da 2-esfera	7
1.3	Característica de Euler do disco D^2	7
1.4	Soma conexa do toro com o 2-toro	8
1.5	Soma conexa de uma superfície com S^2	8
1.6	Exemplos de Grafos	9
1.7	Pontos de dobra e cúspide	15
1.8	Sinal das regiões de uma superfície M	16
1.9	Sinal de cúspide	17
1.10	Curva γ_θ	18
2.1	Singularidade A_1 localmente	22
2.2	Singularidade A_2 (conjunto parabólico em preto) e sua imagem pela aplicação de Gauss	23
2.3	Singularidade A_3 (ponto c) e sua imagem pela aplicação de Gauss	24
2.4	Singularidade A_4 e sua imagem pela aplicação de Gauss para diferentes valores do parâmetro t	26
2.5	Singularidade D_4 e sua imagem pela aplicação de Gauss para diferentes valores do parâmetro t na parametrização $f_t(x, y, t) = x^3 - xy^2 + ty^2$	27
2.6	Transições do Tipo A_3	28
2.7	Transição do tipo Lips (L)	28

2.8	Transição do tipo Beaks ($B+$)	29
2.9	Transição Lips	30
2.10	Transição Beaks	30
2.11	Cirurgia S^- e sua imagem pela aplicação de Gauss	31
2.12	Cirurgia S^{-+}	32
2.13	Cirurgia S^+ e sua imagem pela aplicação de Gauss	33
2.14	Usando a cirurgia S^{-+} para aumentar o gênero de uma região	33
3.1	Superfície com conjunto parabólico e o grafo associado	35
3.2	Grafos com 3 arestas	35
3.3	Transição L e seu grafo local	38
3.4	Transição B e seu grafo local	39
3.5	Grafos básicos	39
3.6	Realização dos grafos básicos usando transições	40
3.7	Toro Retorcido	40
3.8	Grafos com peso diferente de zero	41
3.9	T_1^+ e T_1^-	41
3.10	Efeito de S^- no grafo	42
3.11	Efeito de S^{-+} no grafo	43
3.12	Efeito de S^+ no grafo	44
3.13	Aumento do peso de um vértice	45
3.14	Grafo simples com pesos	46
3.15	Grafos com 3 arestas	47
3.16	Realização dos grafos (i) e (ii) da Figura 3.15	48
3.17	Realização dos grafos (iii) e (iv) da Figura 3.15	48
3.18	Realização dos grafos (v) e (iv) da Figura 3.15	48

3.19	Árvore não-estrelada	49
3.20	Árvore Estreladas	49
3.21	Decomposição de um grafo	50
3.22	Árvore Estrelada Positiva de grau 5	51
3.23	1º Caso: Árvore Estrelada Negativa de grau 5	51
3.24	2º Caso: Árvore Estrelada Negativa de grau 5	52
3.25	Transições para obter a árvore estrelada negativa de grau 5 apresentada na Figura 3.24	52

Resumo

SOUZA, Isaque Viza de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Julho de 2012. **Singularidades de Aplicações de Gauss Estáveis** Orientadora: Catarina Mendes de Jesus. Coorientadora: Simone Maria de Moraes.

Neste trabalho, estudamos os grafos como invariantes de aplicações de Gauss estáveis de superfícies fechadas mergulhadas em \mathbb{R}^3 . Abordamos o problema de realização de grafos por aplicações de Gauss estáveis, enfatizando também o número de cúspides destas aplicações.

Abstract

SOUZA, Isaque Viza de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July of 2012. **Singularities of the Stable Gauss Maps.** Advisor: Catarina Mendes de Jesus. Co-advisor: Simone Maria de Moraes.

In this work, we study the graphs as invariants of stable Gauss maps from closed surfaces embedded in \mathbb{R}^3 . We study the problem of realization of graphs by stable Gauss maps, emphasizing also cusp number of these maps.

Introdução

Em 1955, Whitney publicou o artigo *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane*, que se tornou um fundamento para uma nova teoria, a Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis. Whitney determinou que um germe de aplicação estável do plano no plano é equivalente, em cada ponto singular, a apenas dois tipos de singularidades, a saber, dobras e cúspides [28]. Este trabalho motivou diversos matemáticos a estudar as singularidade de aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m , como por exemplo René Thom [29] que classificou as funções diferenciáveis de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} de codimensão ≤ 5 em sete catástrofes elementares ou John M. Boardman [5], que provou que genericamente os conjuntos singulares de ordem superior têm estrutura de subvariedades.

Um problema clássico da Teoria de Singularidades é a classificação de aplicações estáveis, a menos de equivalências, como por exemplo a \mathcal{A} -equivalência onde se permitem mudanças de coordenadas no domínio e na imagem das aplicações. Os rumos da pesquisa no sentido de resolver o problema de classificação por \mathcal{A} -equivalência se resumem, em muitos casos, na tentativa de encontrar invariantes que permitem classificar boa parte das aplicações.

No início da década de 90, Vassiliev [30] desenvolveu um método geral para a obtenção de invariantes de isotopia locais nos espaços de aplicações estáveis entre variedades. Essa técnica se baseia no estudo da estrutura de um subconjunto discriminante, determinado pelas aplicações não estáveis, e pode ser aplicada a vários tipos de aplicações.

Desde então, vários pesquisadores se interessaram em aplicar os invariantes tipo Vassiliev em diversas áreas, dentre eles: Arnold [2] nas imersões do círculo no plano, Goryunov [15] nas aplicações estáveis de superfícies em \mathbb{R}^3 e, mais recentemente, Ohmoto [23] que, aplicando as idéias de Vassiliev e Goryunov, determinou um conjunto completo de geradores para o anel dos invariantes semi-locais de primeira ordem do tipo Vassiliev, associado ao contorno aparente.

No caso de aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano, os invariantes estudados por T. Ohmoto e F. Aicardi [26], usando a técnica de Vassiliev, apresentaram alguns invariantes numéricos do ponto de vista local, para o conjunto de ramificações dessas aplicações. No entanto, existem casos em que estes invariantes não conseguem distinguir as

aplicações, isto é, podem existir aplicações em classes de \mathcal{A} -equivalência distintas tendo o mesmo valor para esses invariantes. Este fato motivou a busca de um invariante global que dependa da topologia do conjunto singular sobre a superfície de domínio. Tal invariante foi introduzido por Hacon, Mendes e Romero [10] para superfícies orientadas, a saber, o grafo associado à aplicação estável. Este invariante carrega consigo diversas informações sobre a aplicação, além de caracterizar totalmente a superfície de domínio fornecendo seu gênero. Além disso o grafo associado nos informa o tipo topológico do complemento do conjunto singular da aplicação bem como o número de componentes conexas do conjunto singular.

Esse novo invariante levantou perguntas naturais à seu respeito, sendo uma delas: “Quais grafos podem ser vistos como grafos associados a aplicações estáveis?”. Pergunta esta que deu origem ao problema da realização de grafos por aplicações estáveis. Em [9], Hacon, Mendes e Romero deram uma caracterização completa dos grafos que são realizados por aplicações estáveis de superfícies no plano. Em [17], os mesmos autores abordam a realização de grafos para uma classe de aplicações estáveis na esfera, as aplicações dobra (aplicações sem cúspide), caracterizando os grafos dessas aplicações.

Nesse trabalho, estudamos o problema da realização de grafos com aplicações de Gauss estáveis de superfícies fechadas sem bordo, nos baseando principalmente no artigo de Mendes, Moraes e Romero [21] publicado em 2011, onde os autores mostram que qualquer grafo bipartido com pesos pode ser realizado à uma tal aplicação.

Para dar tal resposta utilizamos as transições estudadas por Bruce, Giblin e Tari em [8], além das cirurgias S^- , S^{-+} e S^+ definidas em por Mendes, Moraes e Romero em [18]. Pois algumas transições, a saber, A_3^+ e A_3^- , e as cirurgias modificam o conjunto singular de maneira conveniente para a realização dos grafos.

Além disso, procuramos estabelecer relações entre o número de cúspides de uma aplicação de Gauss estável que realiza um grafo dado, para isso utilizamos um resultado apresentado por Quine em [25]. Quine estabeleceu uma fórmula que relaciona o grau de uma aplicação estável $f: M \rightarrow N$ entre superfícies, a diferença entre o número de cúspides positivas e negativas e a característica de Euler das superfícies M e N . Esta fórmula se mostrou útil para o estudo de alguns grafos, respondendo algumas perguntas que surgem no desenvolvimento do estudo deste invariante.

O presente trabalho foi dividido da seguinte forma:

No capítulo 1, veremos conceitos e resultados preliminares necessários para o desenvolvimento do trabalho. Começaremos com os complexos regulares e característica de Euler de uma superfície compacta, seguida de alguns conceitos relevantes da Teoria de Grafos. Apresentamos também alguns conceitos da Teoria de Singularidades, do ponto de vista da Topologia Diferencial, tais como k -jatos, a topologia C^∞ de Whitney, alguns conceitos de aplicações estáveis e a noção de conjuntos singulares, considerando em particular, o caso das aplicações de Gauss de superfícies. As principais referências utilizadas são: [31, 20, 11, 27, 19, 14, 16].

No capítulo 2, apresentamos os primeiros casos das singularidades da aplicação de Gauss, utilizando a classificação dada por Bruce, Giblin e Tari em [8], que é feita a partir do estudo das funções altura de uma superfície M na direção normal à superfície. Estas transições são vistas do ponto de vista local. Além disso apresentamos as transições locais da aplicação de Gauss para famílias de superfícies a 1-parâmetro. Em seguida são apresentadas as cirurgias da aplicação de Gauss, a saber, as cirurgias S^- , S^{-+} e S^+ , estas cirurgias foram introduzidas em [18]. Para gerar as figuras que ilustram a seção de transições locais utilizamos o software *SuperficiesII* [22] que está disponível em sua página.

No capítulo 3, estudaremos os grafos associados às aplicações de Gauss Estáveis, apresentando o efeito das transições locais e das cirurgias definidas no capítulo 2 sobre estes grafos. Utilizamos também as transições locais e cirurgias para tratar do problema da realização de Grafos por aplicações de Gauss estáveis, fazendo o uso, sempre que possível do resultado de Quine [25] para análise das cúspides da aplicação de Gauss.

Para finalizar apresentamos um algoritmo que pode ser utilizado para realizar a aplicação de Gauss de qualquer grafo bipartido com pesos.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos e resultados básicos necessários para este trabalho. Começamos com os complexos regulares e a Característica de Euler de uma superfície com bordo, seguida de alguns conceitos básicos e relevantes da Teoria de Grafos.

Apresentamos também conceitos da Teoria de Singularidades, do ponto de vista da Topologia Diferencial, tais como os k -jatos, a topologia C^∞ de Whitney, aplicações estáveis e a noção de conjuntos singulares. Finalizamos definindo a aplicação normal de Gauss e função altura para uma superfície.

1.1 Complexos Regulares e Característica de Euler

A classificação de espaços topológicos é um problema clássico da Topologia. Em geral, um invariante topológico diferencia dois espaços não homeomorfos, ou seja, não topologicamente equivalentes. Se α é um invariante topológico e X e Y são topologicamente equivalentes, então $\alpha(X) = \alpha(Y)$.

Nesta seção, vamos introduzir um invariante topológico completo [19] para diferenciar superfícies compactas: a característica de Euler, tendo como pré-requisito, os simplexes.

As principais referências utilizadas são [31, 20, 13, 19].

1.1.1 Complexos Regulares

Definição 1.1. Uma n -*célula* é um conjunto cujo interior é homeomorfo a um disco n -dimensional $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ com a propriedade adicional de que sua fronteira deve ser dividida em um número finito de células com dimensões menores, chamadas faces da n -célula.

Exemplo 1.1.1. Uma célula 3-dimensional é um **poliedro sólido**, geralmente um tetraedro, com polígonos (face do poliedro), segmentos de reta (arestas do poliedro) e pontos (vértices do poliedro).

De modo geral, as faces de uma n -célula são as células de dimensão menor: pontos finais de uma 1-célula são as 0-células, a fronteira de uma 2-célula consiste de 1-células e 0-células e as faces de uma n -célula consiste de 0-células, 1-células, \dots , $n - 1$ -células.

Definição 1.2. Um n -**complexo regular** é a união de k -células, com $0 \leq k \leq n$, ou seja, $K = \cup_{k=0}^n k$ - células.

Observemos que se $i < j$, então i -complexo $\in j$ -complexo.

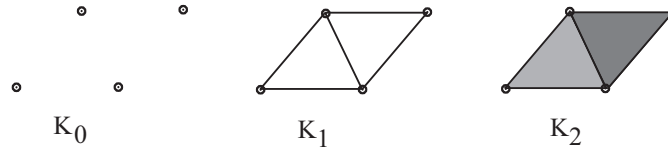


Figura 1.1: Construção de 2-complexo

Observação 1.1. O n -complexo regular K e o espaço original X são espaços distintos, pois X é um conjunto de pontos, enquanto K é um conjunto de células.

Definição 1.3. Seja K um n -complexo regular, o **espaço subjacente** X de K , denotado por $|K|$, é o conjunto:

$$X = |K| = \{x : x \in \gamma \in K; \gamma \text{ é uma célula em } K\}.$$

Definição 1.4. A **característica de Euler** de um n -complexo regular K , denotada por $\chi(K)$, é a soma alternada das células do complexo K , ou seja,

$$\chi(K) = \#(0 - \text{célula}) - \#(1 - \text{célula}) + \#(2 - \text{célula}) - \dots (-1)^n \#(n - \text{célula}),$$

onde $\#(r - \text{célula})$ denota o número de r -células do complexo K .

Exemplo 1.1.2. Para K um 2-complexo, denotando $F = \#(\text{faces})$, $A = \#(\text{arestas})$ e $V = \#(\text{vertices})$, a característica de Euler é dada por:

$$\chi(K) = V - A + F.$$

1.1.2 Superfícies

Nesta seção apresentamos resultados importantes de uma classe de complexos: as superfícies.

Definição 1.5. Uma *variedade n -dimensional* é um espaço topológico tal que todo ponto x possui uma vizinhança equivalente a um disco aberto n -dimensional, centrado em x e com raio r , $D^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$.

Definição 1.6. Uma *superfície* é uma 2-variedade.

Exemplo 1.1.3. A esfera, o k -toro e o cilindro são exemplos de superfícies.

Definição 1.7. Uma *n -variedade com bordo* é um espaço topológico tal que todo ponto tem uma vizinhança topologicamente equivalente ou a um disco n -dimensional ou a meio disco $D_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r \text{ e } x_n \geq 0\}$.

Definição 1.8. *Pontos do bordo* de uma n -variedade são os pontos cuja vizinhança é meio disco.

Exemplo 1.1.4. O bordo de um cilindro circular reto finito consiste de dois círculos, enquanto a esfera e o k -toro não possuem bordo, ou seja, são superfícies sem bordo.

Definição 1.9. Um espaço topológico 2-dimensional M é se o seu espaço subjacente de K homeomorfo a M possui apenas células triangulares que satisfazem a condição de que dois triângulos são identificados ao longo de uma aresta ou somente em um vértice ou são disjuntos, então chamamos $|K|$ de uma *triangulação*.

Definição 1.10. Uma *triangulação de uma superfície* (sem bordo) é um simplicial 2-complexo tal que:

1. Cada aresta é identificada com exatamente uma outra aresta;
2. um dado vértice pode pertencer a n triângulos, denotados por T_1, \dots, T_n , de modo que nesta sequência, dois a dois triângulos são adjacentes e possuem uma aresta em comum e T_n identifica com T_1 ao longo de uma aresta.

Observação 1.2. Uma triangulação do complexo K é dito *complexo simplicial* ou uma *triangulação em M* . Uma célula de um complexo simplicial é dito *simplex*.

Definição 1.11. Uma superfície é *compacta* se, e somente se, qualquer triangulação possui um número finito de triângulos.

Definição 1.12. Uma superfície é *conexa* se, e somente se, uma triangulação pode ser arranjada na ordem T_1, \dots, T_n , de modo que cada triângulo possui no mínimo uma aresta identificada com uma aresta de outro triângulo anterior.

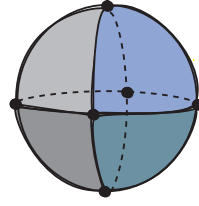
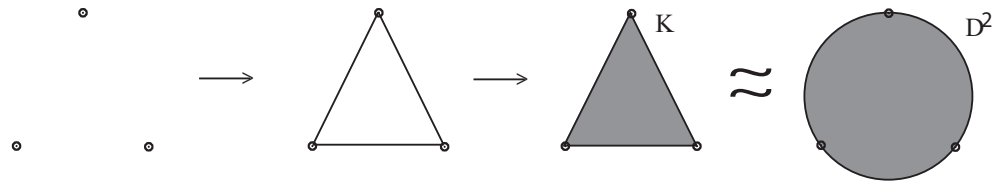


Figura 1.2: Triangulação da 2-esfera

A figura 1.2 ilustra uma triangulação da 2-esfera. Como podemos ver, cada triângulo possui pelo menos uma aresta em comum com outro triângulo. Além disso, qualquer triangulação de uma esfera é finita. Portanto a esfera é compacta e conexa.

1.1.3 Característica de Euler de Superfícies

Seja M uma superfície compacta e conexa, como demonstrado em [19], se K é um 2-complexo regular, tal que seu espaço subjacente $|K|$ é homeomorfo a M , então K e M possuem a mesma característica de Euler. Este número comum a estes 2-complexos é então chamado de *característica de Euler da superfície* e utilizaremos a mesma notação.

Figura 1.3: Característica de Euler do disco D^2

Exemplo 1.1.5. O disco fechado D^2 possui a mesma característica de Euler que uma região triangular. Com efeito, tome três pontos não colineares no plano. Una-os com arestas e considere uma face na região delimitada por esta figura. Temos então um 2-complexo K cujo o espaço subjacente é uma região triangular do plano, como ilustra a Figura 1.3. Como esta região pode ser deformada continuamente em um disco fechado, segue que $\chi(D^2) = \chi(K)$. Em K , $V = 3$, $A = 3$, e $F = 1$, logo, $\chi(D^2) = 1$.

Teorema 1.1. [19] *A característica de Euler é um invariante topológico completo para superfícies compactas, orientadas, conexas e sem bordo.*

Proposição 1.1. [19] *Se M_1 e M_2 são superfícies compactas e conexas, então*

$$\chi(M_1 \cup M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2).$$

Sejam M_1 e M_2 duas superfícies disjuntas. Em cada uma delas, removendo um pequeno disco, obtemos as superfícies M'_1 e M'_2 com uma nova componente de bordo cada,

denotadas por c_1 e c_2 . Colando c_1 e c_2 como exemplifica a Figura 1.1.3, formamos uma nova superfície.

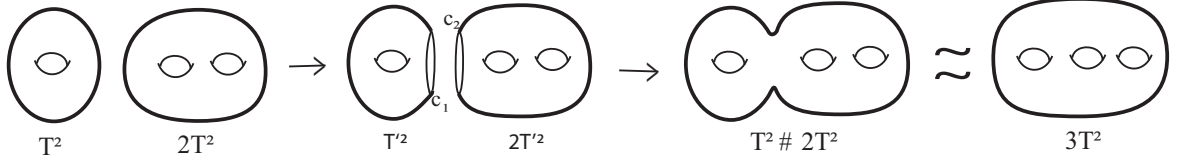


Figura 1.4: Soma conexa do toro com o 2-toro

Definição 1.13. A **soma conexa** de M_1 e M_2 , denotada por $M_1 \# M_2$ é a nova superfície obtida na descrição acima.

Observação 1.3. Ao efetuarmos a soma conexa de uma superfície qualquer com a esfera, não alteramos (a menos de homeomorfismo) a superfície.

Em outras palavras, $M \# S^2 = M$, seja qual for a superfície M .

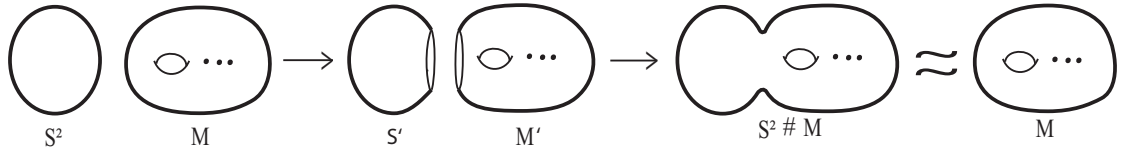


Figura 1.5: Soma conexa de uma superfície com S^2

Teorema 1.2 ([19]). *Toda superfície compacta, orientável e sem bordo é homeomorfa à esfera ou a soma conexa de n toros.*

Definição 1.14. O **gênero** de uma superfície M , denotado por $g(M)$, corresponde ao número de toros presentes nela.

Teorema 1.3. [19] *Uma superfície compacta, orientável e com bordo é homeomorfa à esfera ou à soma conexa de n toros, com um número finito de discos removido.*

Teorema 1.4. [20] *Seja M uma superfície orientável com k componentes de bordo. A característica de Euler de M é dada por*

$$\chi(M) = 2 - 2g(M) - k. \quad (1.1)$$

Corolário 1.1. *Se M é uma superfície orientável sem bordo, então*

$$\chi(M) = 2 - 2g(M).$$

Na Figura 1.5, a superfície M foi obtida pela soma conexa da esfera com a superfície M . Para realizarmos a soma, obtemos S' retirando um disco da esfera e obtemos M' retirando

um disco de M . A superfície M obtida é a união de S' e M' , logo, pela Proposição 1.1 e pelo Teorema 1.4, temos:

$$\begin{aligned}\chi(S' \cup M') &= \chi(S') + \chi(M') - \chi(S' \cap M') \\ &= (2 - 1) + (\chi(M) - 1) - 0 = \chi(M),\end{aligned}$$

pois $\chi(S' \cap M')$ é um círculo e portanto a sua característica é zero. Segue pelo Teorema 1.1, que a soma conexa de uma superfície M com a esfera é topologicamente equivalente à M .

1.2 Grafos

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos básicos da Teoria dos Grafos necessários para este trabalho.

Definição 1.15. Um *grafo* \mathcal{G} é um 1-complexo regular conexo.

Uma aresta em \mathcal{G} conectando dois vértices u e w será denotada pelo par $[u, w]$ ou, mais simplesmente, por uw quando não houver confusão. Neste caso, dizemos que os vértices u e w são *adjacentes*. As arestas de um vértice u são aquelas que se conectam a esse vértice, isto é, as arestas de \mathcal{G} do tipo uw . Quando u possui uma única aresta, u é chamado *vértice extremo* e neste caso, a aresta de u é dita *aresta extrema*.

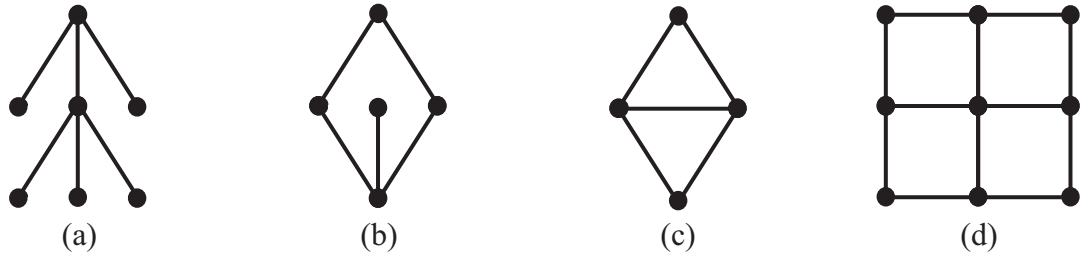


Figura 1.6: Exemplos de Grafos

Exemplo 1.2.1. Na Figura 1.6 temos quatro exemplos de grafos. Em (a) não ocorrem ciclos, em (b) e (c) ocorre um ciclo e em (d) ocorrem quatro ciclos.

Definição 1.16. O número de ciclos de um grafo \mathcal{G} é chamado de *número de Betti* do grafo \mathcal{G} e denotado por $\beta_1(\mathcal{G})$.

Teorema 1.5. [19] Seja \mathcal{G} um grafo, o *número de ciclos* $\beta_1(\mathcal{G})$ é dado por:

$$\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - V + A,$$

onde V e A são o número de vértices e arestas em \mathcal{G} , respectivamente.

Definição 1.17. Uma *árvore* é um grafo \mathcal{G} que não possui ciclos.

Exemplo 1.2.2. O grafo (a) da Figura 1.6 é uma árvore.

Os Teoremas 1.6 e 1.7 a seguir foram apresentados em [19].

Teorema 1.6. *Dado um grafo \mathcal{G} , se \mathcal{G} é uma árvore então $\chi(\mathcal{G}) = 1$.*

Demonstração. Pela Definição 1.15, \mathcal{G} é um 1-complexo e pela Definição 1.4, $\chi(\mathcal{G}) = V - A$. Por ser árvore, \mathcal{G} não possui ciclos. Segue do Teorema 1.5 que $\chi(\mathcal{G}) = 1$. \square

Teorema 1.7. *A característica de Euler é um invariante topológico para grafos.*

Definição 1.18. Um grafo é dito *bipartido* se é possível atribuir sinais $+$ ou $-$ a cada um de seus vértices de forma que cada aresta conecte apenas vértices de sinais opostos.

Teorema 1.8. [31] *Um grafo é bipartido se, e somente se, todos os seus ciclos tem tamanho par. Consequentemente, toda árvore é um grafo bipartido.*

Exemplo 1.2.3. Na Figura 1.6 os exemplos (b) e (d) são grafos bipartidos pois todos os ciclos têm tamanho par enquanto o exemplo (c) não é bipartido por ter um ciclo de tamanho ímpar.

Definição 1.19. Um *grafo com peso* é um grafo em que a cada um dos seus vértices está associado um número natural.

Neste trabalho, os grafos que iremos considerar serão grafos com pesos. Para simplificar, a partir de agora iremos chamá-los apenas de grafos e no caso de grafos bipartidos utilizaremos a convenção de vértices na cor vermelha para vértices positivos e vértices na cor azul para vértices negativos.

1.3 Aplicações Estáveis

Apresentamos agora alguns conceitos da Teoria de Singularidades adotando o ponto de vista da Topologia Diferencial. Nesta seção definimos a Topologia de Whitney, aplicações de Gauss estáveis e conjuntos singulares.

As principais referências são [14, 32, 33].

Definição 1.20. Seja M um espaço topológico não-vazio, dizemos que M é uma variedade diferenciável de dimensão n se, e somente se, para qualquer $p \in M$, existem abertos V_p em M contendo p , U_p aberto em \mathbb{R}^n e $\psi : V_p \rightarrow U_p$ um difeomorfismo.

Dadas duas variedades diferenciáveis X e Y , denotamos por:

- i) $C^r(X, Y)$: espaço de todas as aplicações de X em Y de classe C^r . Se $X = Y$ escrevemos simplesmente $C^r(X)$.
- ii) $C^\infty(X, Y)$: espaço de todas as aplicações de classe C^∞ de X em Y . Se $X = Y$ escreveremos simplesmente $C^\infty(X)$.

Observação 1.4. Sejam X e Y variedades diferenciáveis e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável. Se f tem posto máximo, então:

- i) f é uma **imersão** se, e somente se, $\dim X \leq \dim Y$;
- ii) f é uma **submersão** se, e somente se, $\dim X \geq \dim Y$;
- iii) f é um **mergulho** se, e somente se, f é uma imersão injetiva;

Observação 1.5. Uma superfície regular parametrizada M pode ser definida como um subconjunto de \mathbb{R}^3 que pode ser localmente, na vizinhança de cada um de seus pontos, parametrizado por uma imersão $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ [11].

Observação 1.6. Para uma superfície regular parametrizada M com parametrização $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ na vizinhança de um ponto $p \in M$ podemos definir uma aplicação $\mathcal{N} : M \rightarrow S^2$ associada à M e à parametrização f dada por

$$\mathcal{N}(q) = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}(q),$$

onde $f(p) = q \in f(U)$, de maneira geral dizemos que \mathcal{N} é um *campo diferenciável de vetores normais unitários em U* .

Definição 1.21. Uma superfície diferenciável regular M é dita **orientável** se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície; a escolha de tal campo é chamada **orientação** de M .

Definição 1.22. Seja M uma superfície regular parametrizada com uma orientação \mathcal{N} . A aplicação \mathcal{N} é chamada **aplicação de Gauss** de M e toma seus valores na esfera unitária S^2 .

Observação 1.7. A aplicação de Gauss independe da parametrização f de M [11].

1.3.1 Jatos

Definição 1.23. Dadas X e Y variedades diferenciáveis e $x \in X$, dizemos que duas aplicações diferenciáveis $f, g : X \rightarrow Y$ com $f(x) = g(x) = y$ têm:

1. **Contato de primeira ordem** em x se, e somente se, $(df)_x = (dg)_x$, como aplicações de $T_x X \rightarrow T_y Y$. Notação: $f \sim_x g$;

2. **Contato de ordem** k , com $k \geq 1$ em x se, e somente se, $(df) : TX \rightarrow TY$ têm contato de ordem $k - 1$ com (dg) em todo ponto de $T_x X$. Notação: $f \sim_k g$;

Observação 1.8. De modo equivalente, sejam U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m e p um ponto de U . Sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações diferenciáveis, então $f \sim_k g$ em x se, e somente se

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} g_i}{\partial x^\alpha}(x),$$

$\forall \alpha$ multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$, onde f_i e g_i são as funções coordenadas de f e g e com $1 \leq i \leq n$ e x_1, \dots, x_m as coordenadas de p em U . Isto quer dizer que $f \sim_k g$ se, e somente se, f e g possuem o mesmo desenvolvimento de Taylor de ordem k .

A relação “contato de ordem k ” definida acima é uma relação de equivalência sobre o conjunto $C_{x,y}^r(X, Y)$ das aplicações r vezes diferenciáveis de X em Y , cuja imagem de x é y . Denotaremos por $J_{x,y}^{k,r}(X, Y) = C_{x,y}^r / \sim_k$. Quando $r = \infty$, fazemos $J_{x,y}^k(X, Y)$.

Definição 1.24. Os elementos de $J^k(X, Y)$ são chamados **k -jatos** de aplicações de X em Y .

Definição 1.25. Seja $\sigma = j^k(f(x)) \in J^k(X, Y)$ um k -jato, onde f é um representante da classe de equivalência de σ em $J_{x,f(x)}^k(X, Y)$. Chamaremos $x \in X$ de **fonte** de σ e $y = f(x)$ a **meta** de σ . Consequentemente temos a **aplicação fonte** $\alpha : J^k(X, Y) \rightarrow X$ e **aplicação meta** $\beta : J^k(X, Y) \rightarrow Y$, dadas respectivamente por $\alpha(\sigma) = x$ e $\beta(\sigma) = f(x)$.

Se denotamos por A_m^k o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a k em m variáveis com coeficientes em \mathbb{R} e que se anulam na origem, teremos o seguinte isomorfismo $A_m^k \approx \mathbb{R}^N$, onde $N = d(m, k) + d(m, k-1) + \dots + d(m, 1)$ e $d(m, k) = \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!}$. Consequentemente podemos considerar A_m^k uma variedade C^∞ . De forma análoga, $B_{m,n}^k = \bigoplus_{i=1}^n A_m^k$ é também uma variedade C^∞ , cuja dimensão é $\dim B_{m,n}^k = n \cdot \dim A_m^k = n \cdot N$.

Teorema 1.9. [14] *Sejam X e Y variedades C^∞ tais que $\dim X = m$ e $\dim Y = n$. Então $J^k(X, Y)$ é uma variedade C^∞ de dimensão $(m + n + \dim B_{m,n}^k)$ e as aplicações α e β são submersões C^∞ .*

Sejam X e Y variedades C^∞ . Denotamos por $X^s = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{s \text{ vezes}}$ e definimos:

$$X^{(s)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^s; x_i \neq x_j \text{ para } 1 \leq i < j \leq s\}.$$

Seja $\alpha : J^k(X, Y) \rightarrow X$ a aplicação fonte, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha^s : (J^k(X, Y))^s &\rightarrow X^s \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_s) &\mapsto \alpha^s(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \end{aligned}$$

da seguinte forma $\alpha^s(\sigma_1, \dots, \sigma_s) = (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_s)) = (x_1, \dots, x_s)$.

Definição 1.26. Seja $J^k(X, Y)$ a variedade dos k -jatos de X em Y , o *espaço de multi-jatos de ordem k em s variáveis*, denotado por ${}_sJ^k(X, Y)$, é o seguinte subconjunto de $J^k(X, Y)^s$:

$${}_sJ^k(X, Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)}), \text{ ou seja,}$$

$${}_sJ^k(X, Y) = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in J^k(X, Y)^s; \alpha(\sigma_i) \neq \alpha(\sigma_j), \text{ para todo } i \neq j\}.$$

Observação 1.9. Como $X^{(s)}$ é aberto em X^s segue que ${}_sJ^k(X, Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$ é um aberto em $(J^k(X, Y))^s$, e portanto uma subvariedade diferenciável.

Definição 1.27. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação C^r , o *s -multi k -jato* de f é a aplicação ${}_sj^kf : X^{(s)} \rightarrow {}_sJ^k(X, Y)$, dada por:

$${}_sj^kf(x_1, \dots, x_s) = (j^kf(x_1), \dots, j^kf(x_s)).$$

1.3.2 A Topologia C^∞ de Whitney

Sejam X e Y variedades diferenciáveis. Consideremos k um inteiro não negativo e \mathcal{U} um subconjunto de $J^k(X, Y)$. Denotamos por $\mathcal{M}^k(\mathcal{U})$ o seguinte subconjunto de $C^\infty(X, Y)$:

$$\mathcal{M}^k(\mathcal{U}) = \{f \in C^\infty(X, Y); j^kf(\alpha(\mathcal{U})) \subset \mathcal{U}\}.$$

Segue da definição que $\mathcal{M}^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{M}^k(\mathcal{V}) = \mathcal{M}^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$.

Lema 1.1. A família de subconjuntos $\{\mathcal{M}^k(\mathcal{U})\}$, onde \mathcal{U} é um aberto de $J^k(X, Y)$, forma uma base para uma topologia em $C^\infty(X, Y)$.

Definição 1.28. A topologia induzida no Lema 1.1 é chamada *topologia C^k de Whitney* em $C^\infty(X, Y)$, denotada por \mathcal{W}_k .

Definição 1.29. A *topologia C^∞ de Whitney* em $C^\infty(X, Y)$ é aquela cuja base é dada por $\mathcal{W} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{W}_k$.

Observação 1.10. A definição dada acima utiliza a noção de k -jatos e está contextualizada com a seção anterior e com o que veremos a seguir. No entanto, para o nosso caso, podemos também utilizar a definição de topologia C^∞ de Whitney dada por Hirsch. Referência 17 da Jane.

Definição 1.30. A topologia em $C^r(M, N)$ que tem por base os abertos como descritos acima é chamada *topologia C^r forte* ou topologia C^r de Whitney, denotada por $C_s^r(M, N)$.

Definição 1.31. Sejam $f, g \in C^\infty(X, Y)$, com X e Y variedades diferenciáveis. Dizemos que f é *\mathcal{A} -equivalente* a g , e denotamos por $f \sim_{\mathcal{A}} g$, se existirem difeomorfismos $\phi :$

$X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \downarrow & \searrow & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Definição 1.32. Dizemos que $f \in C^\infty(X, Y)$ é **\mathcal{A} -estável** se existe uma vizinhança W de f na topologia C^∞ de Whitney, tal que para toda aplicação $g \in W$, vale a relação $f \sim_{\mathcal{A}} g$.

Para facilidade de notação, a partir de agora, vamos nos referir a aplicações \mathcal{A} -estáveis e \mathcal{A} -equivalentes como **aplicações estáveis** e **aplicações equivalentes**, respectivamente.

1.3.3 Conjunto Singular

Agora, vamos apresentar algumas propriedades de aplicações estáveis $f : M \rightarrow N$, onde M é uma superfície compacta, orientada e sem bordo. Utilizaremos a f para denotar a aplicação acima durante toda a subseção, salvo quando feita menção contrária.

Os teoremas e definições desta subseção são devidos a Whitney e são baseados nas referências [32, 14, 33].

Definição 1.33. Seja f uma aplicação estável, o **conjunto singular** de f , denotado por $\sum f$, é o conjunto de pontos de M nos quais o posto da diferencial df não é máximo. Um ponto $p \in M \setminus \sum f$ é dito **ponto regular** de f e um ponto $y \in N$ é dito **valor regular** de f se $f^{-1}(y)$ contém somente pontos regulares. O **conjunto de bifurcação** de f , $f(\sum f)$, é a imagem do conjunto singular de f .

Teorema 1.10. [28] *O conjunto singular $\sum f$ de uma aplicação estável f é uma subvariedade de codimensão 1 em M .*

Seja $p \in \sum f$ um ponto singular de uma aplicação estável f , então uma das seguintes situações ocorrem:

(a) $T_p \sum f \oplus \ker(df)_p = T_p M$;

(b) $T_p \sum f = \ker(df)_p$;

Se p é um ponto singular satisfazendo (a), então p é chamado de **ponto de dobra**, por outro lado, se (b) ocorre, dizemos que p é um **ponto de cúspide**.

Segundo Whitney [28], se f é uma aplicação estável, então para cada ponto $x \in M$, existem coordenadas locais (x_1, x_2) centradas em x e (y_1, y_2) centradas em $f(x)$, tais que f é dada por uma das formas locais:

1. $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$, x é ponto regular;
2. $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1^2, x_2)$, x é ponto de dobra;
3. $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1 x_2 - x_1^3, x_2)$, x é ponto de cúspide,

ou seja, o conjunto singular de f é formado por curvas de dobra com a possibilidade de pontos de cúspide isolados em $\sum f$.

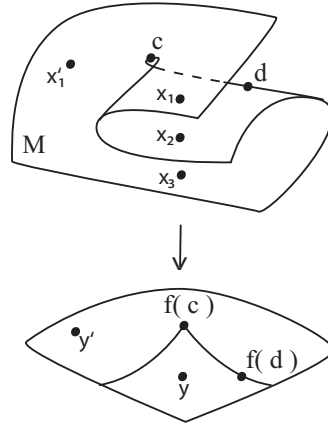


Figura 1.7: Pontos de dobra e cúspide

Como vemos na Figura 1.7, d é um ponto de dobra e a cúspide c é o ponto de encontro de duas curvas singulares. Notemos que uma curva singular separa regiões de M cuja orientação é invertida e preservada por f , e além disso note que o ponto y possui três pré-imagens, a saber x_1 , x_2 e x_3 , enquanto o ponto y' possui apenas uma pré-imagem: x_1' .

Observação 1.11. Observamos na Figura 1.7 que se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável onde M e N são superfícies orientadas, então as curvas no conjunto singular $\sum f$ separam as regiões de M cuja orientação é invertida e preservada por f . Além disso, se dois pontos na imagem de uma aplicação estável estão separados por uma curva do contorno aparente, então a diferença do número de suas respectivas pré-imagens é dois. Neste exemplo, a região para a qual a cúspide aponta possui apenas uma pré-imagem, enquanto a outra região possui três pré-imagens.

Lema 1.2. O conjunto singular $\sum f$ de uma aplicação estável f é formado por curvas fechadas, simples e disjuntas.

Demonstração. Considere a aplicação f dada no enunciado. Se existe uma curva α_i do conjunto singular de f aberta, ou seja, que termina em um dado ponto, então os dois lados de $f(\alpha_i)$ possuem o mesmo número de pré-imagens, contradição!

Se existe uma curva α_i do conjunto singular de f com auto-interseção, obtemos uma contradição quando analisamos as regiões cuja orientação é preservada e invertida por f , localmente no ponto de auto-interseção. Análogo para o caso de duas curvas com ponto em comum.

Portanto, o conjunto singular de f deve possuir somente curvas fechadas, simples e disjuntas. \square

Observação 1.12. As componentes do complemento do conjunto singular de uma aplicação estável f são levadas por f com orientações opostas, logo $\sum f$ separa $M \setminus \sum f$ em componentes disjuntas.

As curvas singulares de f separam M em regiões conexas que são as componentes do complemento $M \setminus \sum f$. Isto se deve ao fato de $\sum f$ ser composta por um conjunto de curvas fechadas em M , de acordo com o Lema 1.2.

Segundo Whitney [14], o conjunto singular de uma aplicação estável é composto por dobras e cúspides e além disso, os pontos de cúspides são isolados. Segue então do Lema 1.2 que:

Proposição 1.2. O conjunto de birfurcação de f , $\sum f$, é uma coleção de curvas fechadas em N , cujas singularidades são pontos duplos transversais, ou seja, sem tangências e com possíveis pontos de cúspides isolados.

Podemos atribuir a uma aplicação estável f sinais \pm a cada uma das componentes do complemento $M \setminus \sum f$.

Definição 1.34. Uma região conexa $R \in M \setminus \sum f$ é dita **positiva** se f preserva a sua orientação, caso contrário, R é dita **negativa**.

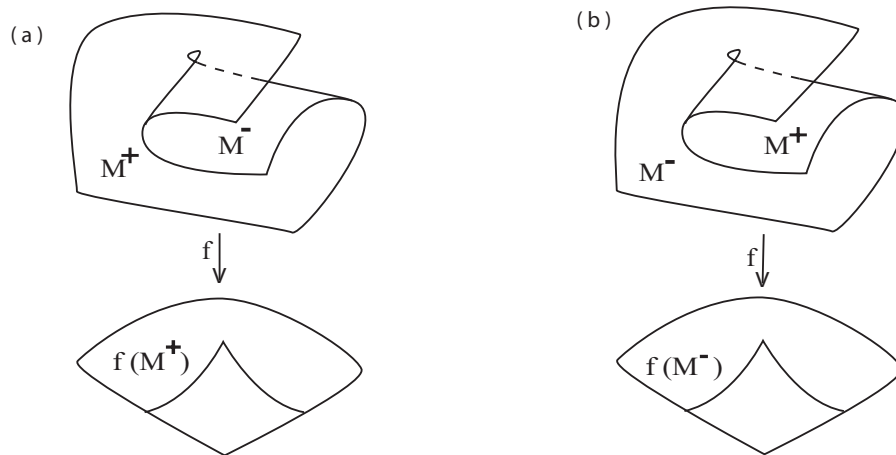


Figura 1.8: Sinal das regiões de uma superfície M

Definição 1.35. O *fecho* de cada componente conexa de $M \setminus \sum f$ cuja orientação é preservada é denotado por M_i^+ , enquanto o fecho de cada componente conexa de $M \setminus \sum f$ cuja orientação é invertida por f é denotado por M_j^- .

Podemos definir o sinal de qualquer cúspide de f , levando em consideração a orientação da região para a qual ela aponta, como mostra a Figura 1.9.

Definição 1.36. O sinal de uma cúspide C de uma aplicação estável f é $s(C) = +1$ se C aponta para uma região positiva de f ou $s(C) = -1$, se C aponta para a região negativa de f .

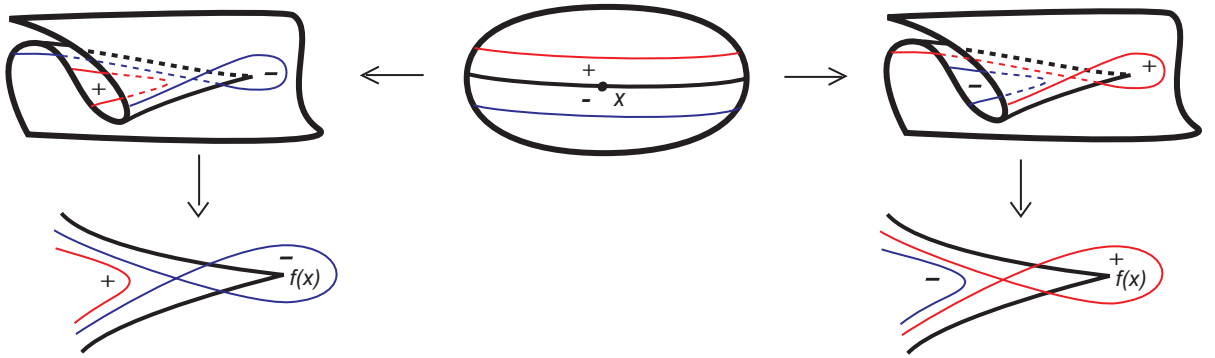


Figura 1.9: Sinal de cúspide

1.4 Aplicação de Gauss Estável e Superfícies

Para uma superfície M e um ponto p , podemos considerar seu plano tangente em p dado por $T_p M$ e uma direção $\theta \in S_p^1$, onde S_p^1 é o círculo unitário em $T_p M$ com centro p . Assim definimos o plano $\Pi_{p,\theta}$ como sendo o plano passando por p que contém \mathcal{N}_p e o vetor com ponto base em p na direção θ , e chamamos à curva obtida pela interseção de M e $\Pi_{p,\theta}$ em uma vizinhança de p de γ_θ .

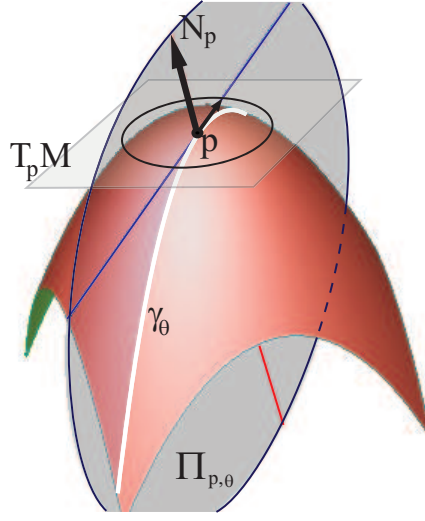
A Figura 1.10 exibe a curva γ_θ em branco, juntamente com os planos $T_p M$ e $\Pi_{p,\theta}$.

Definição 1.37. Sejam M uma superfície regular parametrizada e p um ponto de M . A função *curvatura normal* em p é a aplicação definida por

$$\begin{aligned} k_n : S_p^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto k_n(\theta) \end{aligned}$$

onde $k_n(\theta)$ é a curvatura γ_θ .

A aplicação k_n é uma aplicação contínua definida em S_1^p que é um conjunto compacto, portanto k_n assume valor máximo e mínimo. Sejam θ_1 e θ_2 tais que $k_1 = k_n(\theta_1)$ e $k_2 = k_n(\theta_2)$, sejam os valores máximo e mínimo, respectivamente, então definimos:

Figura 1.10: Curva γ_θ

Definição 1.38. k_1 e k_2 , os valores máximo e mínimo de k_n são chamados de **curvaturas principais** do ponto p .

Definição 1.39. A **curvatura gaussiana** de um ponto p de uma superfície M é o produto das **curvaturas principais** calculadas em p e a **curvatura média** é a média aritmética das curvaturas principais calculadas em p [11, 24].

A **curvatura gaussiana** em um ponto p é denotada por $K(p)$ e a **curvatura média** em um ponto p é denotada por $H(p)$, ou simplesmente por K e H quando não existir dúvida do ponto estudado.

Os pontos de uma superfície podem ser classificados pelo valor que suas curvaturas média e gaussiana assumem.

Definição 1.40. Um ponto p de uma superfície M é dito:

- **Planar** se $K(p) = 0$ e $H(p) = 0$
- **Elíptico** se $K(p) > 0$ e $H(p) \neq 0$
- **Hiperbólico** se $K(p) < 0$ e $H(p) \neq 0$
- **Parabólico** se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$

A caracterização acima engloba todos os pontos de uma superfície regular mas no caso de aplicações de Gauss estáveis não temos pontos *planares*, portanto podemos utilizar apenas a curvatura de Gauss, visto que essa é capaz de classificar os pontos de uma superfície relacionada à uma aplicação de Gauss estável.

Observação 1.13. O *conjunto singular* da aplicação de Gauss \mathcal{N} é precisamente o conjunto formado pelos pontos parabólicos que, por simplicidade, chamaremos apenas de ***conjunto parabólico*** [27]. Além disso, M^+ é o fecho do conjunto dos pontos *elípticos* de M enquanto M^- é o fecho dos pontos *hiperbólicos* de M , ou seja, os sinais da curvatura Gaussiana descrevem o comportamento do conjunto singular e das regiões de M onde \mathcal{N} mantém ou inverte sua orientação.

A partir de agora usaremos *conjunto parabólico* para nos referir ao *conjunto singular* de \mathcal{N} e vamos nos referir a regiões de *curvatura positiva* e *curvatura negativa* como *regiões positivas* e *regiões negativas*, respectivamente, mantendo também a notação \mathcal{N} para uma aplicação de Gauss estável.

Observação 1.14. O Lema 1.2 nos diz que o conjunto parabólico de uma superfície onde \mathcal{N} é formado por um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas em M

Exemplo 1.4.1. A aplicação de Gauss do toro T^2 não é estável, pois a imagem das curvas parabólicas γ_1 e γ_2 são levadas em um dois únicos pontos, a saber os polos norte e sul de S^2 , o que contraria a Proposição 1.2.

Capítulo 2

Transições e Cirurgias de Aplicações de Gauss

Neste capítulo, vamos apresentar apenas os primeiros casos das singularidades da Aplicação de Gauss, utilizando a notação de Arnold (A_k e D_k) apresentada em [3]. A classificação destas singularidades é feita a partir da análise do contato entre a superfície e seu plano tangente em um ponto. Este estudo é realizado utilizando a função altura da superfície, considerando a superfície (localmente) dada na *forma de Monge*. Um estudo destas classificações também é feito para singularidades da aplicação de Gauss de famílias de superfícies a 1-parâmetro, que são chamadas de *transições locais* [8].

Em seguida, apresentamos as cirurgias das aplicações de Gauss definidas em [21], chamadas de *Cirurgia Neck*, *Cirurgia Neck-Beaks* e *Cirurgia Round* e aqui denotadas por S^- , S^{-+} e S^+ , respectivamente. Estas cirurgias são interessantes por alterar o conjunto singular da aplicação de Gauss de maneira conveniente para o estudo que será apresentado no próximo capítulo.

2.1 Forma de Monge e Função Altura de Uma Superfície

Definição 2.1. Sejam M uma superfície regular e u um vetor unitário em \mathbb{R}^3 , definimos a *função altura de M na direção u* por

$$h_u(x) = \langle x, u \rangle = x \cdot u,$$

o produto interno de $x \in M$ e $u \in S^2$.

Observação 2.1. h_u é uma função real definida em M e suas singularidades medem o contato entre M e o plano perpendicular a u , passando por x .

Podemos considerar a *família de funções altura* h_u dada por

$$h : M \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, u) = h_u(x). \quad (2.1)$$

Definição 2.2. A *forma de Monge* (local) para a vizinhança de um ponto $p = (x, y, z)$ em uma superfície M é dada por:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ &= a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + \text{termos de ordem alta,} \end{aligned} \quad (2.2)$$

A função altura z da superfície na forma de Monge em 2.2 é a medida da ‘altura’ na direção $(0, 0, 1)$.

Observação 2.2. Toda superfície pode ser escrita localmente na *forma de Monge* [24] assim, o plano tangente na origem é o plano xy . Observe que sempre podemos considerar nosso estudo na origem, pois basta realizar uma translação da superfície em \mathbb{R}^3 .

Para estudar a interseção entre M e seu plano tangente resolvemos, simultaneamente, a equação 2.2 e a equação $z = 0$. Mas é mais proveitoso estudar a função f em uma vizinhança de $x = y = 0$.

Observação 2.3. Nesse caso, a função f é a *função altura* em M na direção do eixo z visto que M é projetada ortogonalmente no eixo z pela função $(x, y, z) \rightarrow z$, medindo a altura z do ponto (x, y, z) sobre o plano x, y . Sendo assim, podemos fazer uma classificação local de cada ponto de uma superfície.

2.1.1 Conjuntos de Bifurcação

Definição 2.3. O *conjunto de bifurcação* da família de funções altura 2.1 é o conjunto dos vetores u para os quais existe x com h_u tendo uma *singularidade degenerada* em x , isto é, do tipo A_2 ou ‘pior’ (A_3 , A_4 e D_4).

Observação 2.4. A classificação das seções anteriores e a definição 2.3 implicam que x é um ponto parabólico e u é o vetor normal a superfície em x . Portanto, o conjunto de bifurcação da família de funções altura h_u é o *conjunto de vetores normais em pontos parabólicos de M* , ou seja, é a imagem do conjunto parabólico de M pela aplicação de Gauss.

Os pontos do conjunto de bifurcação, e também os pontos correspondentes em M , podem ser classificados de acordo com o contato (A_1 , A_2 ou A_3) do plano tangente a M .

2.2 Classificação Local das Singularidades da Função Altura

A classificação aqui apresentada cobre apenas os primeiros casos estudados por Arnold [3] e é estudada para o caso das aplicações de Gauss em [8].

Vamos considerar uma superfície dada na forma de Monge e estudar as singularidades da função f .

Tipo A_1 $a_1^2 \neq 4a_0a_2$ e então f é uma *função de Morse* em $(0, 0)$ [7]. Nesse caso f é equivalente a uma das seguintes funções

$$x^2 + y^2, -x^2 - y^2, x^2 - y^2.$$

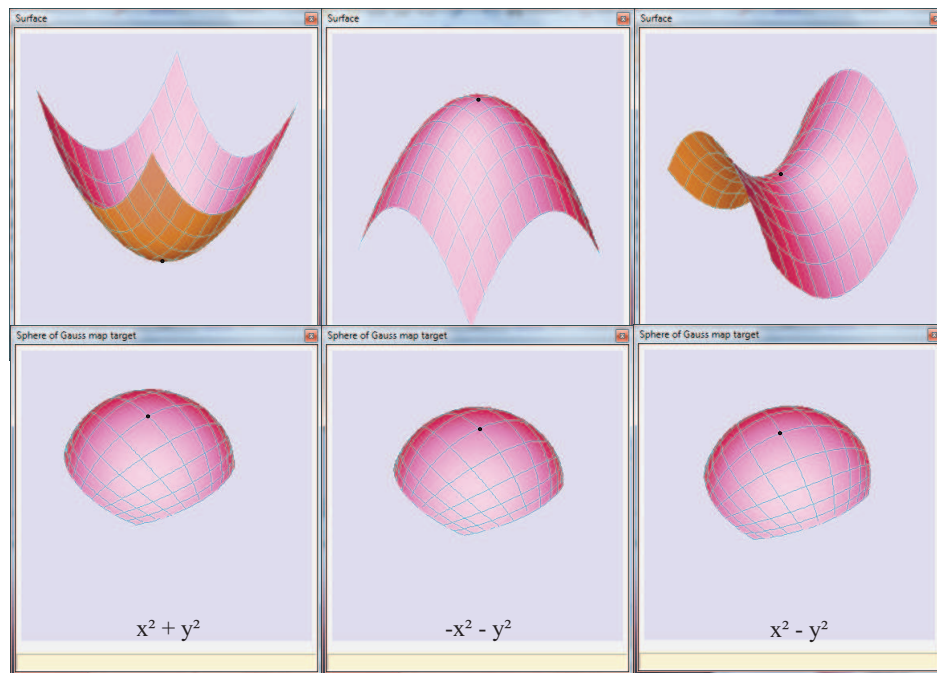


Figura 2.1: Singularidade A_1 localmente

Em particular o *conjunto de zeros* de f é localmente difeomorfo ao conjunto de zeros de uma das funções apresentadas na Figura 2.1, isto é, é um ponto (dois primeiros casos) ou duas curvas que se interceptam transversalmente (terceiro caso).

Pontos onde ocorrem singularidades A_1 da função altura f são os pontos da superfície M classificados como pontos *elípticos* (dois primeiros casos) e pontos *hiperbólicos* (terceiro caso).

Tipo A_2 Se $a_1^2 = 4a_0a_2$ então a origem é um ponto parabólico de M . A superfície dada pela Equação 2.2 pode ser transformada por uma rotação em uma nova equação, que possui a seguinte seguinte forma (com um novo a_0), que é apresentada na Figura 2.2:

$$z = f_1(x, y) = a_0x^2 + b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3 + \text{termos de ordem alta.} \quad (2.3)$$

Se $a_0 \neq 0$, $b_3 \neq 0$, por uma mudança de coordenadas a função f_1 pode ser transformada em $\pm(x^2 + y^3)$, assim a interseção de M com seu plano tangente é difeomorfa a $x^2 + y^3 = 0$.

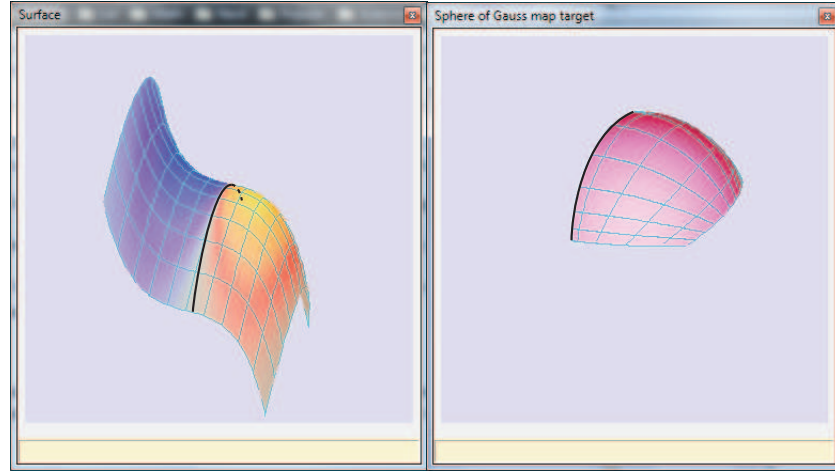


Figura 2.2: Singularidade A_2 (conjunto parabólico em preto) e sua imagem pela aplicação de Gauss

Tipo A_3 Em (2.3) se $a_0 \neq 0, b_3 = 0$ então é necessário estudar os termos de ordem 4 $c_0x^4 + \dots + c_4y^4$. E “completando quadrados” duas vezes podemos reescrever f_1 da forma

$$f_1(x, y) = a_0x^2 + (c_4 - b_2^2/4a_0)y^4 + \text{termos de ordem alta,}$$

e considerando que o coeficiente de y^4 é não-nulo, podemos eliminar os termos de ordem alta usando uma mudança de variáveis em x, y , obtendo $\pm x^2 \pm y^4$. Quando os sinais são os mesmos escrevemos A_3^+ e quando estes diferem escrevemos A_3^- . A Figura 2.3 apresenta esta singularidade

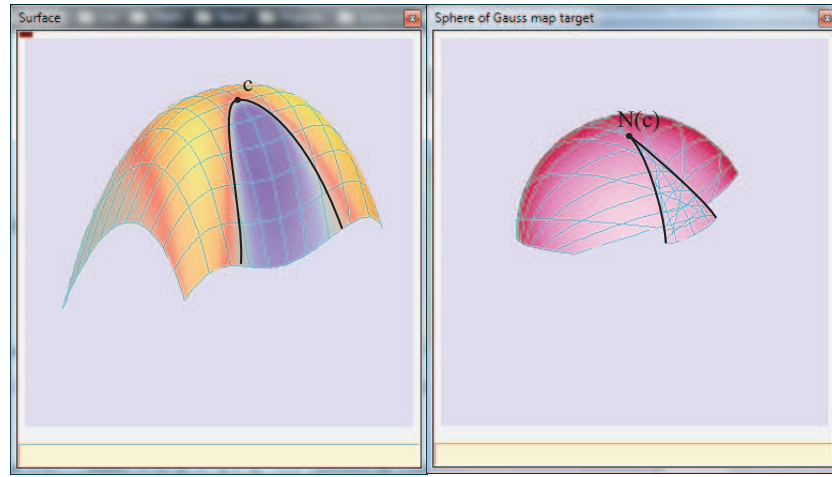


Figura 2.3: Singularidade A_3 (ponto c) e sua imagem pela aplicação de Gauss

Se $b_2 \neq 0$, dizemos que a origem é então uma *cúspide de Gauss* e pode ser classificada de acordo com o seguinte:

- *Cúspide de Gauss Elíptica (positiva)*, A_3^+ : $b_2 \neq 0, a_0 \neq 0, b_3 = 0, b_2^2 < 4a_0c_4$. A interseção de M com seu plano tangente é (localmente) um único ponto.
- *Cúspide de Gauss Hiperbólica (negativa)*, A_3^- : $b_2 \neq 0, a_0 \neq 0, b_3 = 0, b_2^2 > 4a_0c_4$. A interseção de M com seu plano tangente é (localmente) um par de curvas diferenciáveis tangentes.

Observação 2.5. Em [4] são estudados exemplos de singularidades de aplicações de Gauss de superfícies parametrizadas por $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$, onde a aplicação de Gauss é dada por $N(x, y) = (-f_x, -f_y, 1)/[1 + (f_x)^2 + (f_y)^2]^{1/2}$.

É possível estudar as singularidades da aplicação de Gauss de uma maneira mais fácil por uma projeção central a partir da origem para o plano $z = 1$ para se obter $(-f_x, -f_y, 1)$. Então projetamos essa aplicação ao plano xy e obtemos a aplicação $\tilde{N}(x, y) = (-f_x, -f_y)$.

Visto que a imagem da aplicação de Gauss N está contida no hemisfério superior de S^2 , e a projeção central é um difeomorfismo do hemisfério superior no plano $z = 1$, a *aplicação de Gauss modificada* \tilde{N} terá as mesmas singularidades de N . Sendo assim, N é singular precisamente nos pontos onde a matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix},$$

possui posto menor que dois, ou seja, quando o discriminante $\Delta = (f_{xy})^2 - f_{xx}f_{yy}$ é zero.

Além disso, de acordo com a terminologia de Whitney [32], uma condição necessária para que uma aplicação de Gauss seja estável é que ela seja *boa*, isto é, o gradiente da curvatura gaussiana K nunca se anule sobre o conjunto parabólico.

No caso da origem ser um ponto A_3 , $f(x, y)$ não é boa se $b_2 = 0$.

De fato, se consideramos

$$f(x, y) = f_1(x, y) = a_0x^2 + b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3 + \text{termos de ordem alta},$$

com $a_0 \neq 0$ então temos $\text{grad } \Delta(0, 0) = (-4a_0b_2, 0)$ que se anula na origem apenas quando $b_2 = 0$.

Para mais detalhes veja [4, 14, 32]

2.2.1 Casos Extras para uma Família de Superfícies

Observação 2.6. Uma família de superfícies a 1-parâmetro é uma aplicação diferenciável $f(x, y, t)$ com domínio sendo um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 , tal que para cada t fixado a parametrização $(x, y, f(x, y, t))$ é uma superfície regular.

Tipo A_4 Interseção do plano tangente com a superfície nesses pontos é uma *cúspide ramphoid*, dada pela equação $x^2 + 2xy^2 + y^4 + y^5 = 0$. Tais pontos representam o “nascimento ou morte” de duas cúspides de Gauss.

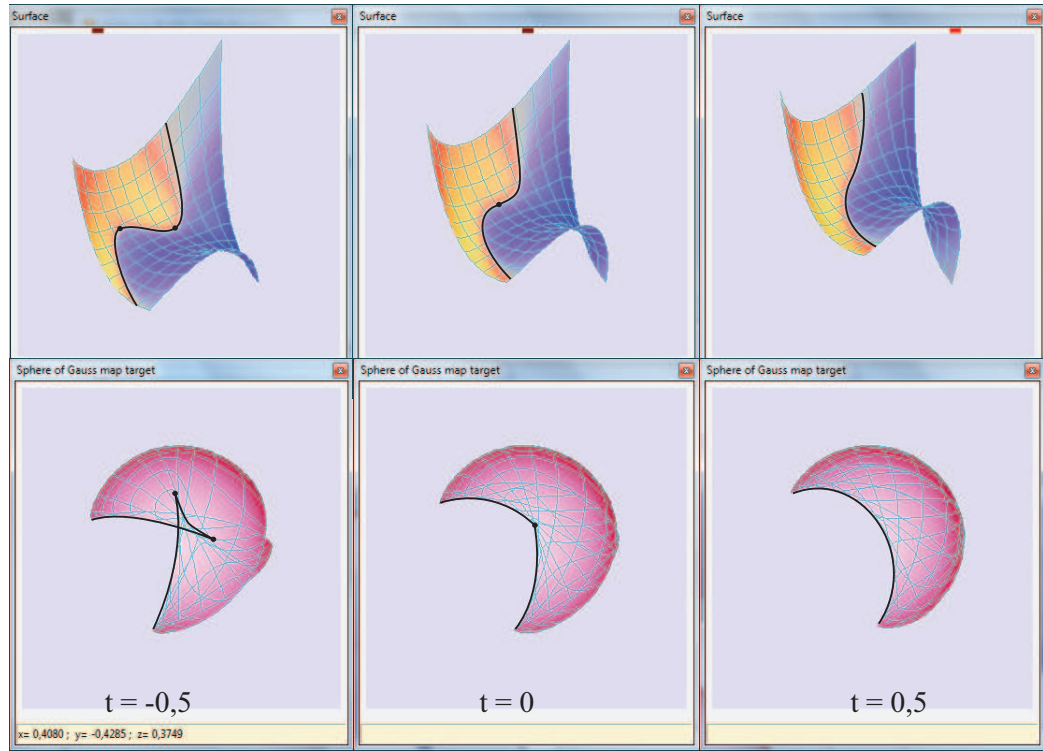


Figura 2.4: Singularidade A_4 e sua imagem pela aplicação de Gauss para diferentes valores do parâmetro t

A Figura 2.4 apresenta a família de superfícies parametrizada por $f(x, y, t) = x^2 + y^5 + 2xy^2 + y^4 + ty^3$ para diferentes valores de t .

D_4 Acontece quando os termos quadráticos da forma de Monge de uma superfície em um ponto se anulam completamente: um ponto “*umbílico plano*”. A forma de Monge é dada por

$$z = f(x, y) = b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3 + \text{termos de ordem alta}$$

e o tipo de umbílico depende do número de fatores lineares reais da parte cúbica.

Para um umbílico *hiperbólico*, D_4^+ , existe apenas um fator real: o plano tangente intercepta M localmente em uma única curva diferenciável. Para um umbílico *elíptico*, D_4^- , existem três fatores lineares reais: o plano tangente intercepta M localmente em três curvas diferenciáveis que se cruzam transversalmente.

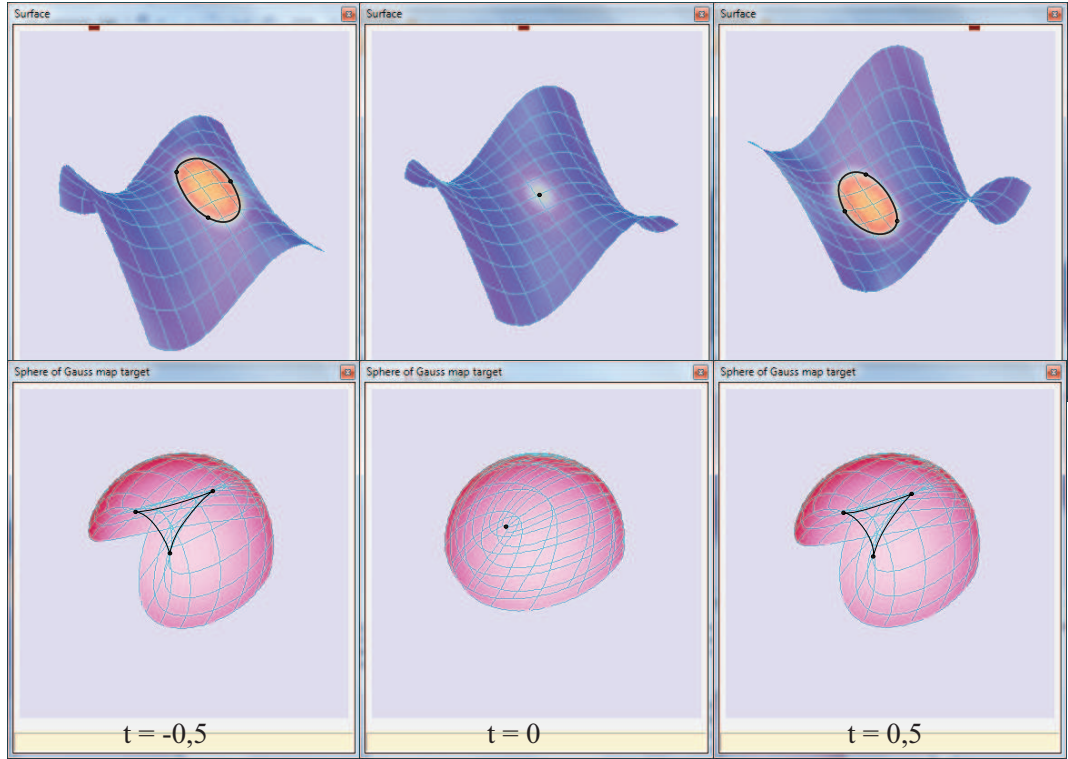


Figura 2.5: Singularidade D_4 e sua imagem pela aplicação de Gauss para diferentes valores do parâmetro t na parametrização $f_t(x, y, t) = x^3 - xy^2 + ty^2$

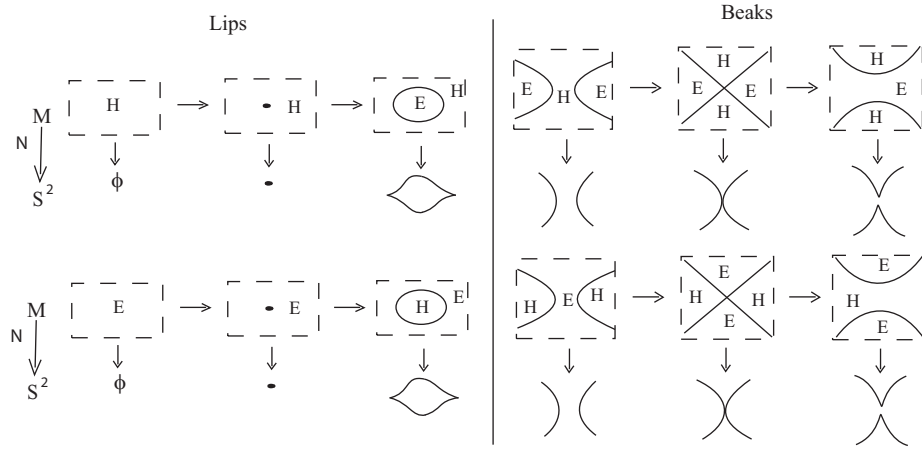
2.3 Transições Locais

Em uma família de superfícies a 1-parâmetro esperamos que aconteçam “transições” no conjunto parabólico e em sua imagem pela aplicação de Gauss. Essas transições se devem a um contato maior entre M e o plano tangente, chamados de contato A_3 , A_4 e D_4 . Nesta seção apresentamos mais detalhes sobre as transições do tipo A_3 que são de grande importância para o desenvolvimento do próximo capítulo.

2.3.1 Transição A_3

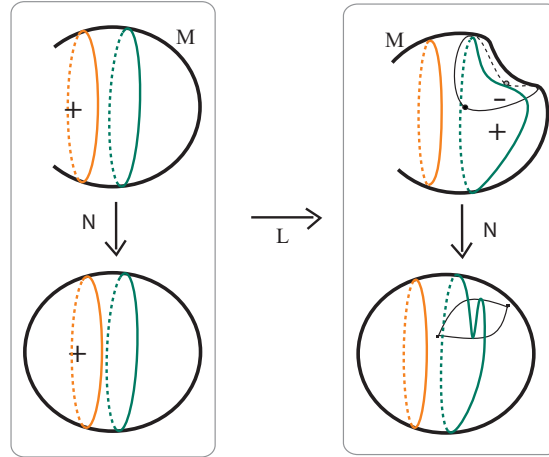
Existem quatro tipos de transições aqui, duas correspondendo a eventos do tipo “lábios” e duas correspondendo a eventos do tipo “bicos”. Em cada um desses casos a transição leva ao nascimento/morte de um par de cúspides de Gauss. Essas cúspides serão do mesmo tipo, ou seja, ambas elípticas ou ambas hiperbólicas, dependendo se o contato durante a transição é do tipo A_3^+ ou A_3^- .

A figura 2.3.1 ilustra os tipos de transição A_3 e seu efeito no conjunto parabólico. Também mostra as transições no conjunto de bifurcação na esfera.

Figura 2.6: Transições do Tipo A_3

2.3.2 Transições do tipo Lábios

A transição do tipo Lábios corresponde a uma transição de Morse do tipo máximo ou mínimo na curva parabólica. Pode acontecer em uma região de curvatura positiva ou negativa, respectivamente, \mathcal{R}_1 de M dando origem a uma nova região com curvatura negativa (resp. positiva). Sua fronteira em comum é uma componente conexa do conjunto parabólico (curva γ) cuja imagem pela aplicação de Gauss é uma curva fechada com duas cúspides em S^2 . O efeito dessa transição no grafo de \mathcal{N} corresponde a adicionar uma nova aresta ligada ao vértice positivo (resp. negativo) correspondendo a região \mathcal{R}_1 .

Figura 2.7: Transição do tipo Lips (L)

2.3.3 Transições do tipo Bicos

Esta transição corresponde a uma transição de Morse do tipo sela no conjunto parabólico. Este tipo de transição ocorre quando aproximamos dois arcos de um conjunto parabólico, até que eles se juntem em um ponto comum (“pontos do tipo bicos”) e se separem novamente dando lugar a um novo par de arcos. Nesse processo podemos juntar (localmente) dois pontos hiperbólicos diferentes e separar uma região elíptica dada em duas partes (transição B_+), ou viceversa, começando com uma região hiperbólica delimitada por dois arcos parabólicos e separá-la (localmente) em duas regiões distintas, separa por uma região elíptica (transição B_-). Como resultado da transição Bicos aparece um par de cúspides no conjunto de ramificação.

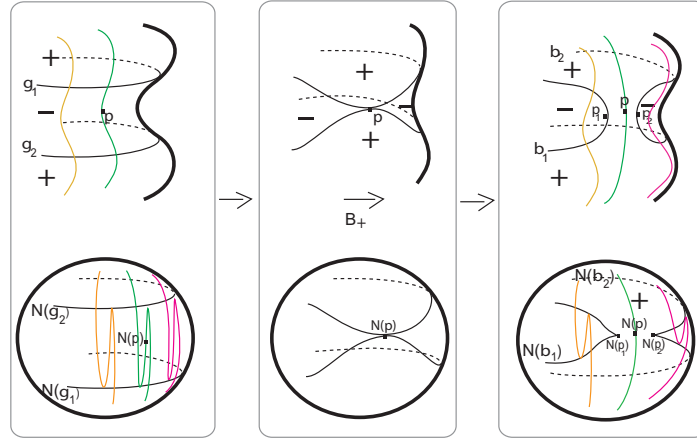


Figura 2.8: Transição do tipo Beaks (B_+)

2.3.4 Exemplos de Transições A_3

A família de superfícies $X(x, y, t) = (x, y, f(x, y, t))$ onde $f(x, y, t) = x^2 + \epsilon_1 x^2 y^2 + \epsilon_2 y^4 + ty^2$, cobre todos as possíveis combinações de de transição A_3 , onde $\epsilon_1 = \pm 1$, $\epsilon_2 \pm 1$. Para $\epsilon_2 = 1$ temos *cúspides de Gauss elípticas*, e para $\epsilon_2 = -1$ temos *cúspides de Gauss hiperbólicas*, além disso, quando $\epsilon_1 \epsilon_2 = 1$ temos uma transição *Lips* e quando $\epsilon_1 \epsilon_2 = -1$ temos uma transição *Beaks*.

As Figuras 2.9 e 2.10 ilustram uma transição do tipo Lips ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$) e uma transição do tipo Beaks ($\epsilon_1 = -\epsilon_2 = -1$), respectivamente.

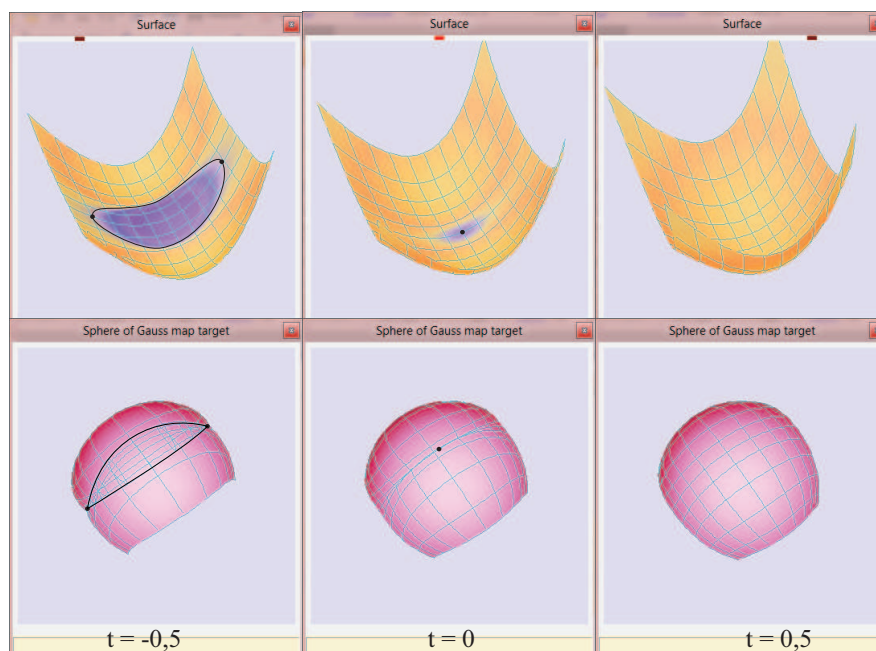


Figura 2.9: Transição Lips

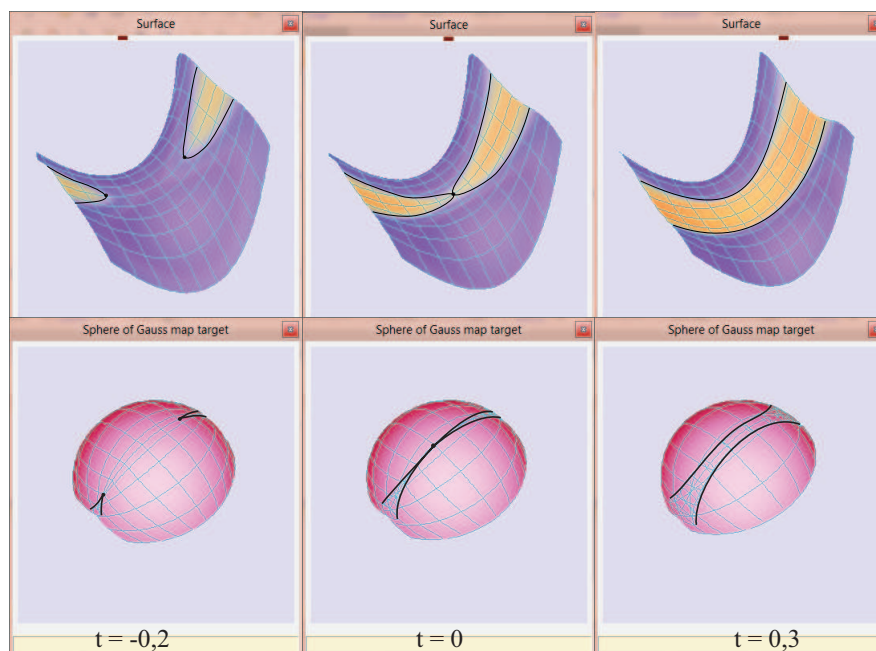


Figura 2.10: Transição Beaks

2.4 Cirurgias da Aplicação de Gauss

Nesta seção vamos descrever algumas cirurgias em imersões que alteram o conjunto singular das aplicações de Gauss de maneira conveniente. Estas cirurgias são apresentadas em [21] e serão úteis para demonstrar os resultados referentes à realização de Grafos de Aplicações de Gauss estáveis.

2.4.1 Cirurgia S^-

A cirurgia S^- consiste em unir duas regiões elípticas \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 utilizando uma região intermediária hiperbólica H . Isto é feito removendo dois discos, um em cada região elíptica, e conectando um tubo hiperbólico às suas fronteiras. Isto pode ser feito, claramente, em uma maneira diferenciável. Este processo adiciona duas componentes conexas, γ_1 e γ_2 , à curva parabólica e está ilustrado na Figura 2.11.

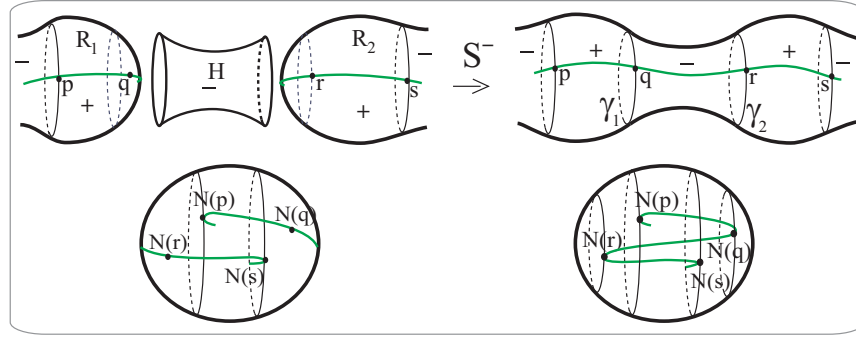


Figura 2.11: Cirurgia S^- e sua imagem pela aplicação de Gauss

Definição 2.4. Chamamos de *Cirurgia S^-* o conjunto de passos descritos anteriormente que são ilustrados pela Figura 2.11.

Observação 2.7. As regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 não são componentes conexas de uma mesma superfície necessariamente. A cirurgia S^- pode ser utilizada para conectar regiões de superfícies distintas. Digamos que \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 sejam regiões de superfícies M_1 e M_2 , respectivamente, então o resultado da cirurgia S^- é uma nova superfície $M = M_1 \oplus^- M_2$ que além de possuir todas as componentes conexas regulares de M_1 e M_2 possui uma nova componente conexa com curvatura gaussiana negativa e duas curvas parabólicas que separam a nova região das superfícies M_1 e M_2 , como ilustrado na Figura 2.11. Além disso, se as regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 pertencem a uma mesma superfície M então a cirurgia S^- aumenta o gênero da superfície M em 1.

2.4.2 Cirurgia S^{-+}

Suponha que temos dois pedaços de superfície M_1 e M_2 , ambos compostos de uma região elíptica \mathcal{R}_i , $i = 1, 2$ e uma região hiperbólica \mathcal{H}_i , $i = 1, 2$ separada por uma curva parabólica γ_i , $i = 1, 2$. Aplicamos a cirurgia S^- unindo as duas regiões elípticas através de um cilindro hiperbólico \mathcal{H}' . Isto introduz duas novas curvas parabólicas (fechadas) β_i , $i = 1, 2$ (na fronteira de \mathcal{H}'). Utilizando uma transição do tipo *Beaks* entre essas duas curvas fechadas, transformamos a região \mathcal{H}' em um disco no qual a fronteira é uma curva parabólica α . Agora, aplicando duas transições do tipo *Beaks* (entre α e β_1 e α e β_2) nós conectamos estes discos hiperbólicos simultaneamente com as regiões hiperbólicas \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , como apresentado na Figura 2.12.

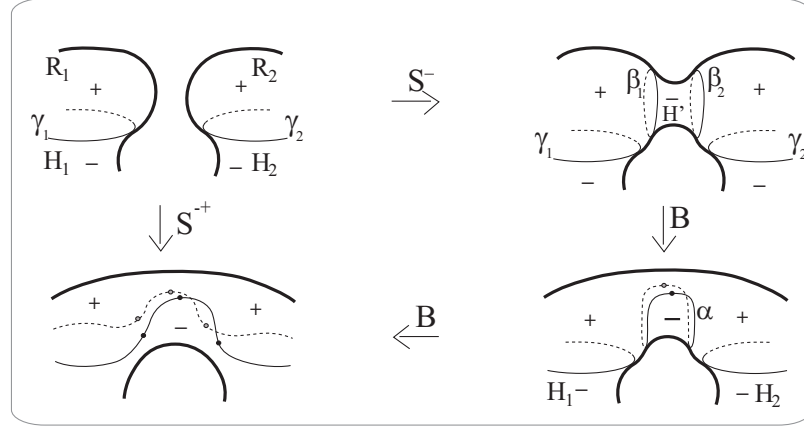


Figura 2.12: Cirurgia S^{-+}

Definição 2.5. Chamamos de **Cirurgia S^{-+}** o conjunto de passos descritos anteriormente que são ilustrados pela Figura 2.12.

2.4.3 Cirurgia S^+

A cirurgia S^+ consiste em conectar duas regiões elípticas através de um tubo elíptico. Para fazer isso usamos uma cirurgia do tipo S^- e uma transição do tipo *Beaks* seguida por uma transição do tipo *Lips*.

Dadas duas regiões elípticas \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 , conectamos elas primeiramente com um tubo hiperbólico usando uma cirurgia do tipo S^- . Isso introduz duas curvas parabólicas novas, as quais são fronteiras da nova região hiperbólica \mathcal{H} . Agora aplicamos uma transição do tipo *Beaks* unindo estas duas curvas parabólicas e transformando \mathcal{H} em um disco. Finalmente, fazemos esse disco desaparecer utilizando uma transição do tipo *Lips*.

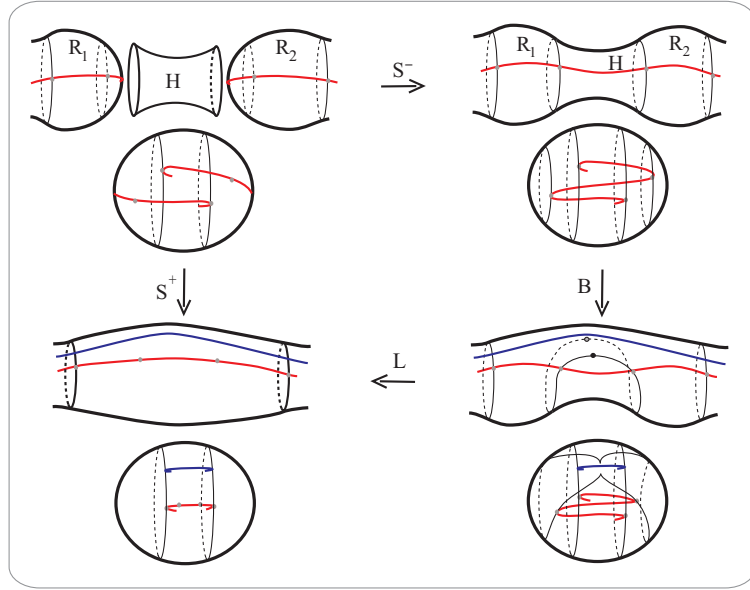


Figura 2.13: Cirurgia S^+ e sua imagem pela aplicação de Gauss

Definição 2.6. Chamamos de *Cirurgia S^+* o conjunto de passos descritos anteriormente que são ilustrados pela Figura 2.13.

Exemplo 2.4.1. É possível aumentar o gênero de uma região de curvatura positiva ou negativa em uma superfície, que possua conjunto parabólico não-vazio, utilizando a cirurgia S^{++} e matendo o número de componentes conexas do conjunto parabólico ao final da cirurgia. Para fazermos isso realizamos a cirurgia S^{++} utilizando as superfícies T_1^+ para regiões de curvatura positivas e T_1^- para regiões de curvatura negativa.

A Figura 2.14 ilustra o processo no caso de uma região de curvatura negativa, observamos que os círculos na cor cinza que aparecem na figura indicam o local onde removemos dois discos afim de realizar a cirurgia \pm .

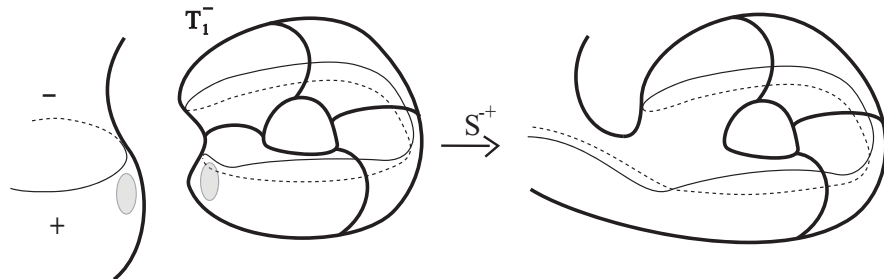


Figura 2.14: Usando a cirurgia S^{++} para aumentar o gênero de uma região

Capítulo 3

Grafos e Aplicações de Gauss Estáveis

Em [21] é apresentado um novo invariante global para aplicações de Gauss estáveis, a saber os grafos associados à aplicações de Gauss Estáveis de superfícies fechadas e orientáveis imersas no 3-espaco. Neste capítulo definimos a associação entre uma aplicação de Gauss estável e um grafo e apresentamos o efeito das cirurgias S^- , S^{-+} e S^+ e de algumas transições no grafo de uma aplicação de Gauss estável.

Estudamos também o mínimo de cúspides em alguns dos grafos apresentados e a diferença entre a quantidade de cúspides positivas e negativas. Aplicações estáveis sem cúspides, geralmente chamadas de *aplicações dobra*, são um caso interessante de aplicações estáveis estudadas por vários autores [1, 12, 17].

Por último, abordamos o problema de realizar um grafo bipartido por uma aplicação de Gauss estável, a prova deste resultado remete ao uso das cirurgias e transições apresentadas no Capítulo 2. Além disso, apresentamos um algoritmo para a realização de tais grafos.

3.1 Grafos Dual de Aplicações Estáveis

Definição 3.1. Seja $\mathcal{N} : M \rightarrow S^2$ uma aplicação de Gauss estável, onde M é uma superfície fechada e orientada e $\sum \mathcal{N}$ é o conjunto singular de \mathcal{N} , que é formado por um conjunto de curvas fechadas. Associamos um grafo G , com pesos (inteiros não-negativos) nos vértices, à aplicação \mathcal{N} do seguinte modo:

1. Cada vértice v_i corresponde a uma componente conexa do complemento $M \setminus \sum f$ sendo representado por vermelho se a região possui curvatura gaussiana positiva e por azul se a região possui curvatura gaussiana negativa, cada aresta a_i corresponde a uma curva α_i de $\sum f$;

2. Um vértice v_i e uma aresta a_i são *incidentes* se, e somente se, a curva representada por a_i encontra-se no bordo da região representada por v_i ;
3. O peso do vértice v_i corresponde ao gênero g_i da região correspondente a M_i .

Visto que M é orientável, cada curva singular está na fronteira de uma região positiva e negativa, e portanto temos o grafo \mathcal{G}_f associado à aplicação f bipartido.

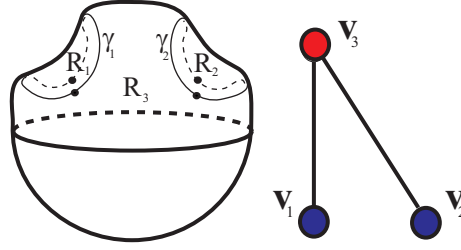


Figura 3.1: Superfície com conjunto parabólico e o grafo associado

Exemplo 3.1.1. Na superfície da Figura 3.1 o conjunto de curvas finas representa o conjunto parabólico (conjunto singular da aplicação de Gauss \mathcal{N} relacionada à superfície) enquanto os pontos sobre essas curvas indicam a ocorrência de cúspides de Gauss.

Observamos então duas curvas parabólicas (γ_1 e γ_2) separando três regiões distintas (\mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 e \mathcal{R}_3). Segue da Definição 3.1 que o grafo possui três vértices v_i ($i = 1, 2, 3$), sendo cada um deles relacionado à uma região \mathcal{R}_i . Agora, observamos que a curva γ_1 separa as regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_3 , portanto o grafo \mathcal{G} dessa aplicação possui uma aresta ligando os vértices v_1 e v_3 , e do mesmo modo observamos que a curva γ_2 separa as regiões \mathcal{R}_2 e \mathcal{R}_3 e portanto temos uma aresta ligando os vértices v_2 e v_3 . Além disso, o peso de cada vértice é zero, visto que nenhuma das regiões possui gênero positivo. Assim como apresentado na Figura 3.1 não apresentaremos o peso dos vértices que representam regiões de gênero igual a zero.

Definição 3.2. O *grau* de um vértice v de um grafo como o número de areostas que se conectam a esse grafo.

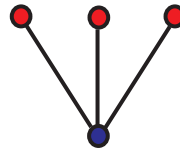


Figura 3.2: Grafos com 3 areostas

Exemplo 3.1.2. O grafo da Figura 3.2 possui um vértice negativo com grau 3 enquanto todos os seus vértices positivos possuem grau 1.

Teorema 3.1. (Corolário do Teorema de Quine) *Sejam M uma 2-variedade suave, compacta, orientada e conexa, $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, M^+ o fecho do conjunto*

dos pontos regulares nos quais f preserva a orientação, M^- o fecho dos pontos regulares os quais f inverte a orientação e C_1, \dots, C_n pontos de cúspides, então

$$\chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum_i s(C_i) = 2\deg(f), \quad (3.1)$$

onde χ é a característica de Euler e \deg é o grau da aplicação.

[6]

Observe que $M^+ \cap M^-$ é um conjunto de círculos fechados e portanto $\chi(M^+ \cap M^-) = 0$, logo $\chi(M) = \chi(M^+) + \chi(M^-)$ e voltando a fórmula 3.1 do Teorema 3.1 obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.1. *Com as mesmas hipóteses do Teorema 3.1, temos:*

$$\chi(M^+) - \chi(M^-) + \sum_i s(C_i) = 2\deg(f), \quad (3.2)$$

Proposição 3.1. *O número μ de componentes conexas da curva parabólica de uma superfície fechada e orientável genericamente imersa em \mathbb{R}^3 é dado por*

$$\mu = 2(V^- - g^-) - \frac{1}{2}(C^+ - C^-),$$

onde V^- , g^- , C^- e C^+ representam respectivamente o número de vértices negativos, soma dos pesos dos vértices negativos, o número de cúspides negativas e o número de cúspides positivas.

Demonstração. Denote por \mathcal{N} a aplicação de Gauss da superfície M . Temos por 3.2 que $2\deg(\mathcal{N}) = \chi(M^+) - \chi(M^-) + \sum_i s(C_i)$ onde $\sum_i s(C_i)$ pode ser reescrito como $C^+ - C^-$.

Por outro lado, visto que \mathcal{N} é uma aplicação de Gauss, $\deg(\mathcal{N}) = 1 - g(M)$ [16], onde $g(M)$ é o gênero da superfície M . Mais ainda, $g(M) = g(M^+) + g(M^-) + \beta_1(\mathcal{G})$ onde $\beta_1(\mathcal{G})$ é o primeiro número de Betti do grafo \mathcal{G} de \mathcal{N} (número de ciclos independentes de \mathcal{G}).

Portanto, substituindo $\deg(\mathcal{N}) = 1 - g(M)$ na Fórmula 3.2, obtemos:

$$2(1 - g(M^+) - g(M^-) - \beta_1(\mathcal{G})) = \chi(M^+) - \chi(M^-) + C^+ - C^-$$

que nos leva a,

$$2\beta_1(\mathcal{G}) = 2(1 - g(M^+) - g(M^-)) + \chi(M^-) - \chi(M^+) - C^+ + C^-. \quad (3.3)$$

Agora, observamos que $\chi(M^-) - \chi(M^+) = 2(g(M^+) - g(M^-) + V^- - V^+)$ e substituindo

em 3.3 segue que:

$$2\beta_1(\mathcal{G}) = 2 - 4g(M^-) + 2V^- - 2V^+ - C^+ + C^-, \quad (3.4)$$

mas além disso $\beta_1(\mathcal{G}) = \mu - V + 1$, com $V = V^+ + V^-$. E da igualdade 3.4 substituindo o valor de $\beta_1(\mathcal{G})$ temos:

$$\mu = 2(V^- - g^-) - \frac{1}{2}(C^+ - C^-).$$

□

Corolário 3.2. *Com as hipóteses da proposição anterior, se a aplicação de Gauss de uma imersão genérica não possui cúspides, o número μ de componentes conexas da curva parabólica é par.*

3.2 Transições da Aplicação de Gauss

No Capítulo 2 apresentamos algumas singularidades das aplicações de Gauss do ponto de vista local, vimos também que algumas dessas singularidades são estáveis apenas para uma família de superfícies a 1-parâmetro, por isso elas são chamadas também de *transições*.

1. Transições de Morse da curva parabólica em um ponto A_3 , correspondendo a transições do tipo *Lábios* e *Bicos* na aplicação de Gauss (Figura 2.3.1).
2. Nascimento/eliminação de um par de cúspides da aplicação de Gauss em uma curva parabólica (em um ponto A_4 da função altura). Isto corresponde a uma singularidade do tipo *Rabo de Andorinha* na aplicação de Gauss (Figura 2.4).
3. Transição D_4^\pm de uma função altura em um ponto umbílico plano. Correspondendo às transições do tipo *Purse* e *Pirâmide* para a aplicação de Gauss (Figura 2.5).

Neste capítulo estaremos interessados apenas nas transições que afetam as componentes conexas do conjunto singular de uma superfície, ou seja, aquelas que afetam os grafos de uma aplicação de Gauss estável, que são as transições do tipo A_3 , Bicos (B) e Lábios (L).

3.2.1 Grafo da Transição Lips

As transições L levam ao aparecimento de uma nova componente conexa no conjunto singular com o aparecimento de duas cúspides. Esta transição leva à criação de uma nova aresta e um novo vértice no grafo associado à aplicação. A nova aresta corresponde à nova

componente conexa do conjunto singular, e liga o vértice correspondente à região onde foi realizada a transição à um novo vértice. Este vértice corresponde à nova região criada pela transição e possui peso igual a zero e sinal contrário ao da região onde foi realizada a transição, como apresentado na Figura 3.3.

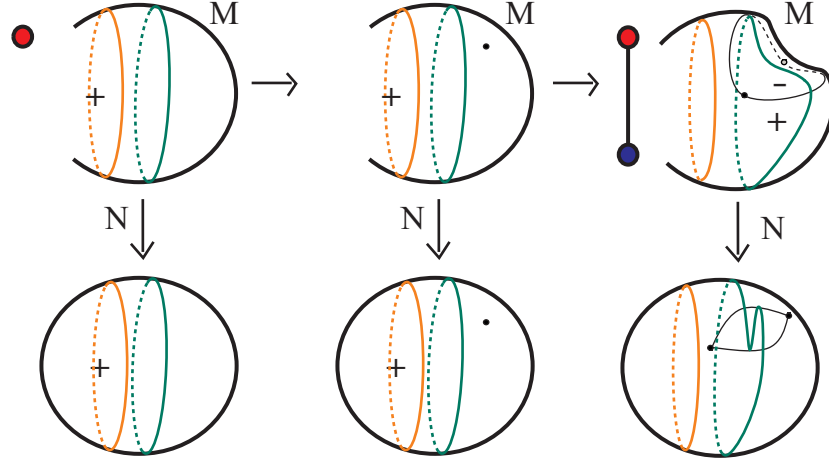


Figura 3.3: Transição L e seu grafo local

Na Figura 3.3 o grafo inicial consiste de um único vértice positivo enquanto o grafo final é composto de uma aresta, correspondendo a nova curva parabólica recém criada pela transição, ligando os dois vértices (um positivo e um negativo). O conjunto de ramificação desta segunda aplicação é uma curva fechada com duas cúspides.

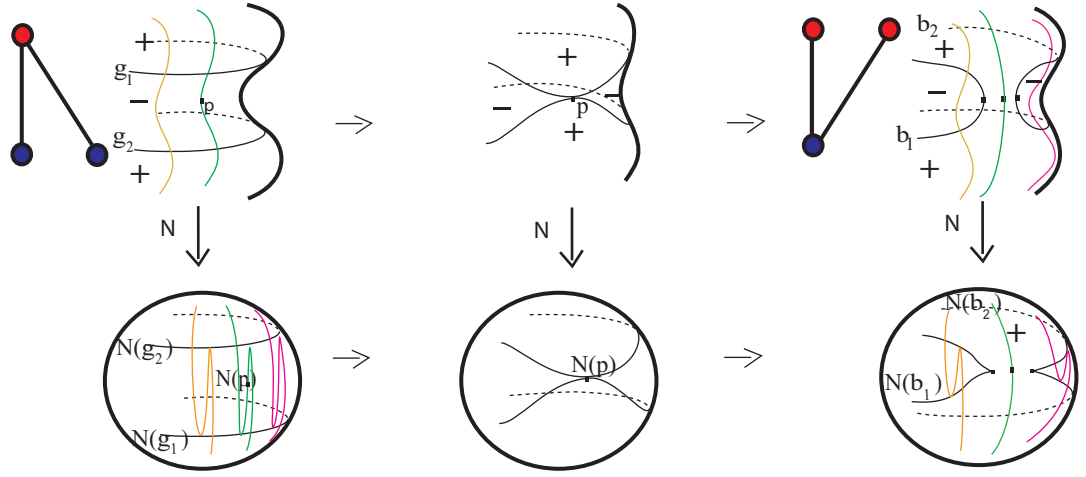
3.2.2 Grafo da Transição Beaks

A transição B pode ser utilizada para unir duas regiões de curvatura positiva (negativa), por um processo de tangência das curvas parabólicas em pontos de cúspides, separando duas regiões de curvatura negativa (positiva). Este processo leva ao desaparecimento de um dos vértices positivos (negativos) e ao aparecimento de um novo vértice negativo (positivo), como apresentado na Figura 3.4.

Na figura 3.4 o grafo inicial consiste de dois vértices negativos e um vértice positivo enquanto o grafo final é composto de dois vértices positivos e um vértice negativo, que corresponde à união das regiões negativas através da transição B , separando assim a região positiva em duas regiões.

3.3 Exemplos: Realização de Grafos

Esta seção é dedicada à realização de alguns grafos, mostrando como podemos adquirir uma aplicação de Gauss que possua o grafo em questão.

Figura 3.4: Transição B e seu grafo local

Exemplo 3.3.1. Grafos bipartidos com peso 0 em seus vértices e número de arestas A , menor ou igual a 2.



Figura 3.5: Grafos básicos

Os grafos (i), (ii) e (iii) apresentados na figura 3.5 são obtidos a partir da aplicação de Gauss $\mathcal{N} : S^2 \rightarrow S^2$, utilizando apenas as transições Lábios e Bicos, como ilustrado na Figura 3.6.

Na figura 3.6, as curvas mais finas representam o conjunto parabólico das superfícies enquanto os pontos pretos sobre as curvas representam pontos de cúspides.

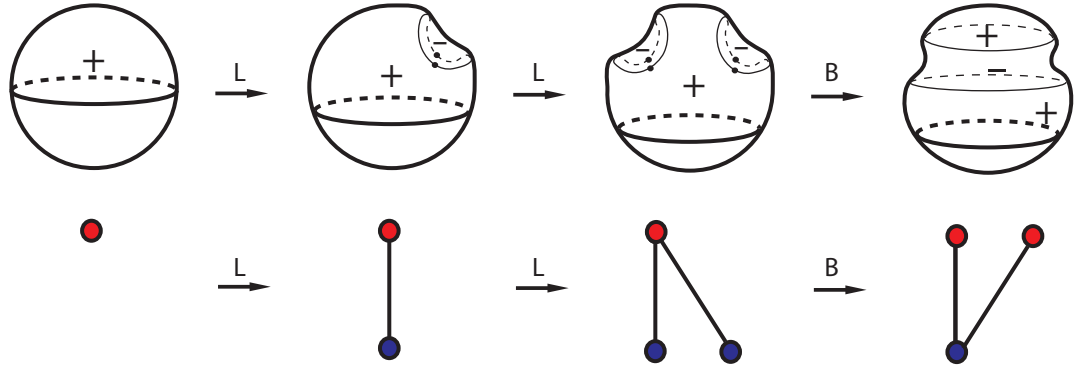


Figura 3.6: Realização dos grafos básicos usando transições

Com uma transição L obtemos (1) que realiza (i), novamente realizamos uma transição *Lábios* e obtemos (2) que realiza (ii). Agora, observe que (2) possui quatro cúspides positivas assim, pode-se realizar transições *Bicos*, eliminando as cúspides duas a duas, obtendo (3) que realiza (iii).

Por outro lado, a aplicação de Gauss estável que realiza (iv) é a aplicação do toro retorcido, caso particular de uma superfície canal [4], e pode ser parametrizada $X(u, v) = \alpha(u) + r(P(u) \cos(v) + B(u) \sin(v))$, onde α é a curva espacial $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), \epsilon \sin(nu))$ com $n = 2$, P e B o normal principal e o binormal, respectivamente, da curva α . O conjunto parabólico é formado por duas curvas parabólicas γ_1 e γ_2 que dividem a superfície em duas regiões com sinais opostos de curvatura, cada uma com 4 cúspides, com sinais alternados p_1^+, p_2^-, p_3^+ e p_4^- em γ_1 e q_1^+, q_2^-, q_3^+ e q_4^- em γ_2 .

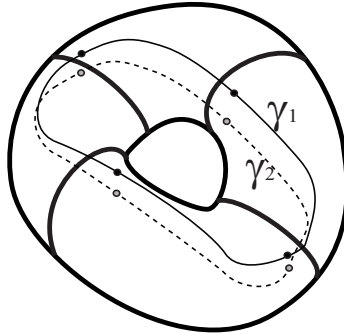


Figura 3.7: Toro Retorcido

Observe que às regiões M^+ e M^- do Toro Retorcido apresentado na Figura 3.7 possuem gênero 0 e, além disso as curvas γ_1 e γ_2 são fronteiras distintas que separam M^+ e M^- , o que nos dá uma realização do grafo (iv).

Exemplo 3.3.2. Agora, a realização de um grafo com única aresta e pesos não nulos em seus vértices, como apresentado na Figura 3.8.

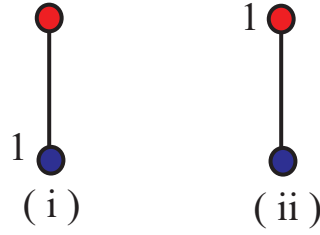


Figura 3.8: Grafos com peso diferente de zero

Novamente utilizamos a transição B , dessa vez no “toro retorcido” da Figura 3.7. Podemos aplicar transições B em ordem para obter grafos com uma única aresta e peso diferente de zero em um dos seus vértices de duas maneiras diferentes:

1. Aproximando dois pontos de cúspides (positivas), um de cada componente da curva parabólica, através de uma região hiperbólica nós passamos por uma transição B_+ , obtendo uma imersão do toro a qual o grafo da aplicação de Gauss consiste de dois vértices ligados por uma aresta. O vértice positivo possui peso zero e o negativo possui peso 1. Denotamos a imersão resultante do toro por T_1^- .
2. Podemos, alternativamente, aplicar uma transição B_- e aproximar dois pontos de cúspides (negativas), um de cada componente conexa do conjunto parabólico, em ordem para obter uma imersão do toro a qual o grafo da aplicação de Gauss consiste de dois vértices ligados por uma aresta, o vértice positivo com peso 1 e o negativo com peso 0. Este toro imerso será denotado por T_1^+ .

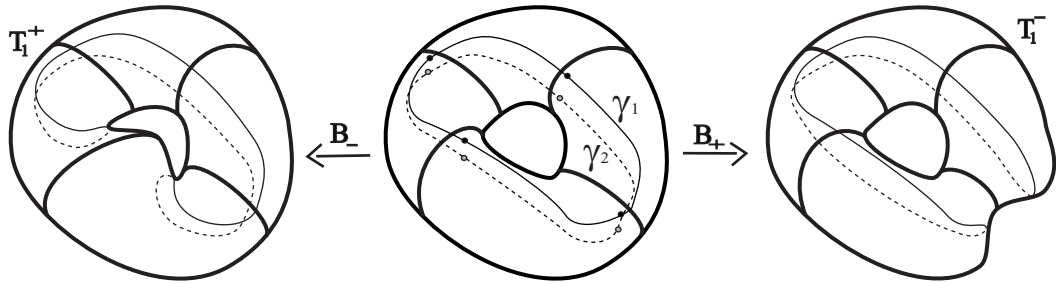


Figura 3.9: T_1^+ e T_1^-

Assim, T_1^- realiza o grafo (i) e T_1^+ realiza o grafo (ii).

Observe que as superfícies obtidas acima possuem ainda 6 cúspides em seu conjunto singular, sendo 4 positivas e 2 negativas em T_1^+ e 2 positivas e 4 negativas em T_1^- . Podemos perguntar se existem superfícies que realizam os grafos apresentados em 3.8 sem cúspides, ou seja, no caso em que a aplicação de Gauss é uma aplicação dobra.

3.4 Efeito das Cirurgias nos Grafos das Aplicações de Gauss

A partir desta seção vamos denotar por $A(M)$ e $V(M)$ o número de arestas e vértices do grafo associado à aplicação de Gauss da superfície M . No lugar de M podemos utilizar também o seu grafo \mathcal{G} , e quando não existir confusão vamos utilizar apenas A e V .

3.4.1 Grafo da Cirurgia S^-

Esta cirurgia adiciona duas novas arestas ao grafo da aplicação e um novo vértice negativo. Estas novas arestas representam as novas componentes do conjunto singular e se conectam aos vértices positivos, que representam às regiões ligadas pelo tubo hiperbólico, sendo este tubo hiperbólico a região representada pelo novo vértice negativo.

A figura a seguir mostra o efeito da cirurgia nos grafos associados às aplicações da Figura 2.11.

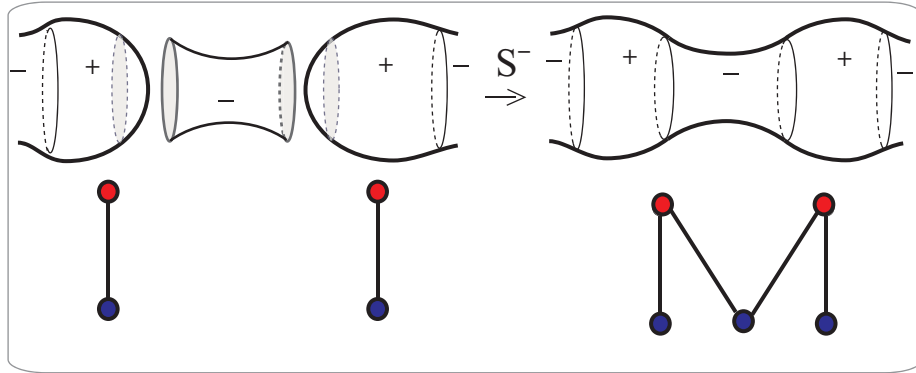


Figura 3.10: Efeito de S^- no grafo

A próxima proposição apresenta os efeitos da cirurgia no número de arestas, vértices e gênero da superfície.

Proposição 3.2. *Sejam M_1 e M_2 superfícies distintas e \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 regiões de curvatura positiva em M_1 e M_2 , respectivamente. Considere também $M = M_1 \oplus^- M_2$ o resultado da cirurgia S^- em \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 , então $A(M) = A(M_1) + A(M_2) + 2$, $V(M) = V(M_1) + V(M_2) + 1$ e $g(M) = g(M_1) + g(M_2)$.*

No caso em que esta cirurgia é realizada entre duas regiões positivas de uma mesma superfície M' obtendo uma nova superfície M , então $A(M) = A(M') + 2$, $V(M) = V(M') + 1$ e $g(M) = g(M') + 1$.

Demonstração. Para demonstrar esse resultado basta observar o comportamento do grafo obtido no local da cirurgia, visto que o restante do grafo se mantém inalterado. Vamos

considerar primeiramente o caso da cirurgia realizada entre duas superfícies distintas M_1 e M_2 como apresentado acima.

Nesse caso, o que ocorre localmente é o aparecimento de duas novas arestas no grafo \mathcal{G} de $M = M_1 \oplus^- M_2$, estas arestas representam as duas novas componentes do conjunto singular da superfície, portanto $A(M) = A(M_1) + A(M_2) + 2$. Quanto aos vértices de \mathcal{G} , o que ocorre é o surgimento de um novo vértice que representa a nova região negativa gerada pelo tubo hiperbólico, portanto $V(M) = V(M_1) + V(M_2) + 1$. Finalmente, o gênero da superfície fica inalterado, visto que as superfícies M_1 e M_2 eram disjuntas e portanto $g(M) = g(M_1) + g(M_2)$.

Consideremos agora o caso em que esta cirurgia é realizada em regiões distintas de uma mesma superfície M' .

Nesse caso, como observado no caso de duas superfícies, temos o aparecimento de duas novas curvas parabólicas e uma nova região negativa, que nos levam aos resultados $A(M) = A(M') + 2$ e $V(M) = V(M') + 1$, no entanto, esta cirurgia une duas regiões da superfície gerando assim um novo *buraco* na superfície, que pode ser visto pelo fato da criação de um novo ciclo no grafo o que nos dá $g(M) = g(M') + 1$. \square

3.4.2 Grafo da Cirurgia S^{-+}

O efeito dessa cirurgia nos grafos consiste em ‘colar’ as arestas correspondentes a γ_1 e γ_2 assim como seus respectivos vértices (isto corresponde a conectar às regiões elípticas \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 da Figura 2.12 em um lado e às regiões hiperbólicas \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 do outro). Além disso, o peso w de um vértice v obtido ‘colando’ os vértices v_1 e v_2 é dado por $w = w_1 + w_2$, onde w_i é o peso de v_i , $i = 1, 2$.

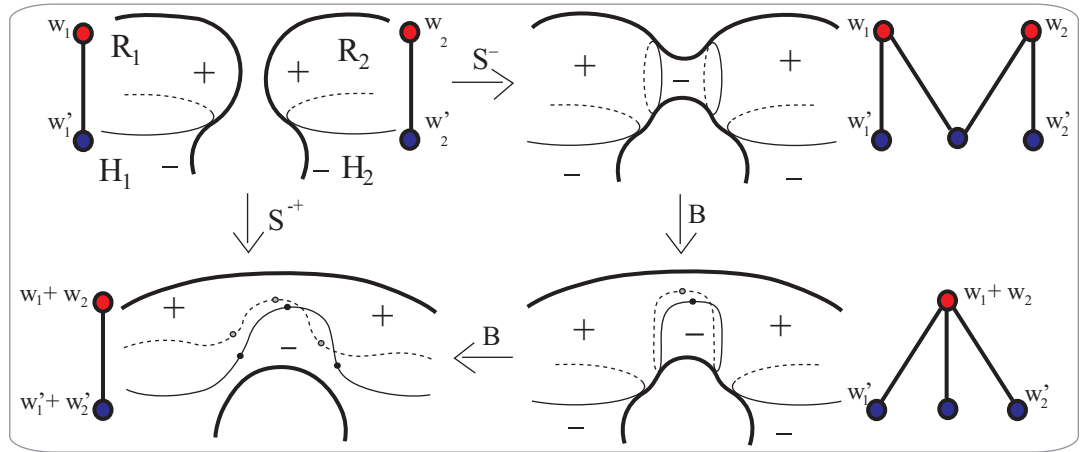


Figura 3.11: Efeito de S^{-+} no grafo

A proposição a seguir pode ser demonstrada de maneira análoga à demonstração apresentada para a Proposição 3.2.

Proposição 3.3. *Sejam M_1 e M_2 superfícies distintas e considere componentes conexas R_1 e H_1 em M_1 e R_2 e H_2 em M_2 , de modo que R_1 e R_2 são regiões positivas e H_1 e H_2 são regiões negativas, além disso suponha que R_1 e H_1 possuem a fronteira γ_1 em comum e R_2 e H_2 possuem a fronteira γ_2 em comum. Se realizamos a cirurgia S^{-+} nessas regiões de M_1 e M_2 obtendo uma nova superfície $M = M_1 \oplus^{-+} M_2$ então temos os seguintes resultados $A(M) = A(M_1) + A(M_2) - 1$, $V(M) = V(M_1) + V(M_2) - 2$ e $g(M) = g(M_1) + g(M_2)$.*

Agora, se as componentes conexas R_1 e H_1 e R_2 e H_2 são distintas e pertencem à uma mesma superfície M' então quando realizamos a cirurgia S^{-+} nessas regiões obtemos uma nova superfície M onde $A(M) = A(M') - 1$, $V(M) = V(M') - 2$ e $g(M) = g(M') + 1$.

3.4.3 Grafo da Cirurgia S^+

Esta cirurgia nos leva a identificação dos dois vértices positivos correspondendo às regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 da Figura 2.13, nos correspondentes grafos.

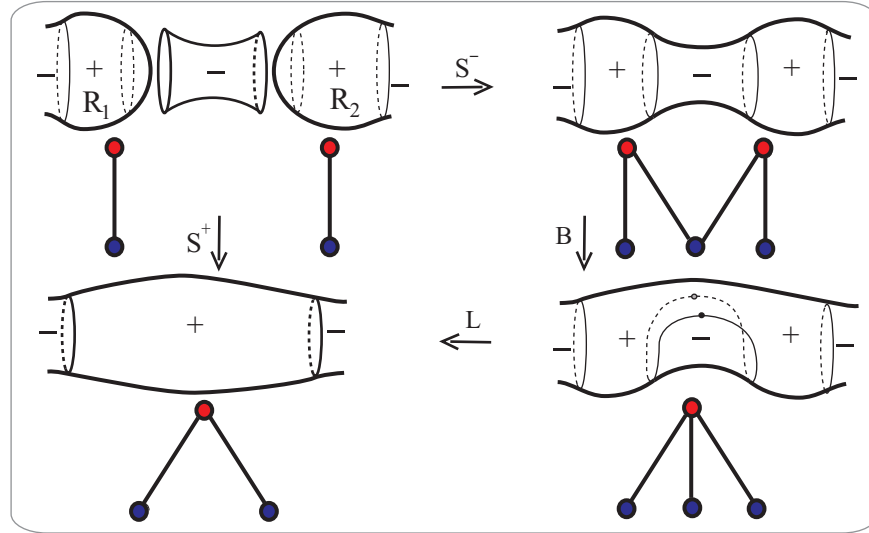


Figura 3.12: Efeito de S^+ no grafo

A proposição a seguir pode ser demonstrada de maneira análoga à demonstração apresentada para a Proposição 3.2.

Proposição 3.4. *Sejam M_1 e M_2 superfícies distintas e considere componentes conexas positivas R_1 e R_2 em M_1 e M_2 , respectivamente. Se realizamos a cirurgia S^+ em M_1 e M_2 obtendo uma nova superfície $M = M_1 \oplus^+ M_2$ então temos os seguintes resultados $A(M) = A(M_1) + A(M_2)$, $V(M) = V(M_1) + V(M_2) - 1$ e $g(M) = g(M_1) + g(M_2)$.*

Agora, se as componentes conexas R_1 e R_2 pertencem a uma mesma superfície M' então se realizamos a cirurgia em M' unindo essas regiões temos os seguintes resultados $A(M) = A(M')$, $V(M) = V(M') - 1$ e $g(M) = g(M') + 1$.

Observação 3.1. O exemplo 2.4.1 pode ser interpretado para grafos da seguinte maneira: Qualquer grafo com pelo menos uma aresta pode ter o peso de qualquer um de seus vértices aumentado, como apresentado na figura 3.13.

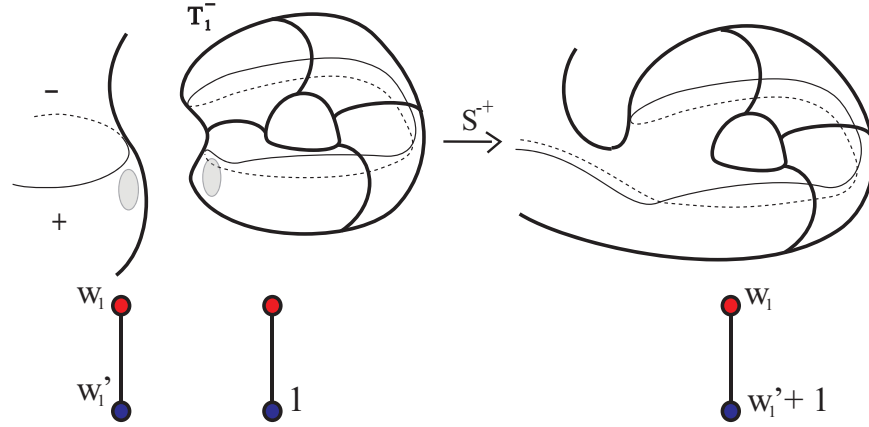


Figura 3.13: Aumento do peso de um vértice

3.5 Realização de Grafos Bipartidos

3.5.1 Grafos Bipartidos com $A \leq 3$

Os possíveis grafos com uma e duas arestas foram apresentados na Figura 3.5, sendo o caso com apenas uma aresta único e representado por (i) . Além disso, vimos como este grafo é realizado na Figura 3.6, sendo sua realização dada pelo caso (1).

Agora, se aplicamos o Corolário do Teorema de Quine 3.1 à superfície (1) temos o seguinte resultado:

$$\sum_{i=1}^2 s(c_i) = 2deg\mathcal{N} - \chi(M^+) + \chi(M^-),$$

o que nos dá:

$$\sum_{i=1}^2 s(c_i) = 2$$

que condiz com o fato da transição Lábios gerar duas cúspides positivas.

O próximo resultado nos diz que o grafo (i) pode ser realizado com pesos arbitrários em seus vértices.

Proposição 3.5. *O grafo composto por dois vértices e apenas uma aresta com pesos k (vértice positivo) e l (vértice negativo), apresentado na Figura 3.14, pode ser realizado por uma aplicação de Gauss estável e além disso $\sum s(p_i) = 2(1 - 2l)$, onde $s(c_i)$ é o sinal da cúspide do ponto c_i .*



Figura 3.14: Grafo simples com pesos

Demonstração. Caso $k = l = 0$ então sabemos que o grafo acima é realizado pela superfície (1) da Figura 3.6. No caso em que k e l são não-nulos, exibimos no Exemplo 2.4.1 uma forma de aumentar o gênero de uma região negativa utilizando a cirurgia S^{-+} entre a região negativa que desejamos aumentar o gênero e a superfície T_1^- , e como vimos no Exemplo 3.1 o peso do vértice negativo é aumentado em um. De modo análogo, podemos realizar a cirurgia S^{-+} com a entre a região positiva e a superfície T_1^+ . Portanto basta realizar esta cirurgia k vezes na região positiva e l vezes na região negativa para obter o grafo acima.

Por [16] sabemos que $\deg \mathcal{N} = 1 - g(M)$ onde M é o domínio de \mathcal{N} e $g(M)$ é o seu gênero, além disso, se o grafo de M não possui ciclos temos que $g(M) = g(M^+) + g(M^-)$.

Agora, visto que $\chi(M) = 2 - 2g(M) - t$ onde t é o número de componentes de bordo da superfície M e $g(M^+)$ é o gênero da superfície fechada obtida a partir de M^+ através da *colagem* de um disco em cada componente de bordo de M^+ , analogamente se define $g(M^-)$.

Das observações acima e da equação 3.2, $\sum s(c_i) = 2\deg \mathcal{N} - \chi(M^+) + \chi(M^-)$ temos:

$$\begin{aligned}
 \sum s(p_i) &= 2(1 - g(M)) - (2 - 2k - 1) + (2 - 2l - 1) \\
 &= 2(1 - g(M^+) - g(M^-)) + 2(l - k) \\
 &= 2(1 - k - l) + 2(l - k) \\
 &= 2(1 - 2l)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

□

Observação 3.2. Observe que na proposição acima, $\sum s(p_i)$ depende apenas do peso dado ao vértice negativo.

Isso acontece devido ao seguinte fato: A cirurgia S^{-+} tem um saldo final, sobre o somatório das cúspides, de duas cúspides negativas no conjunto parabólico, o que nos

levaria a somar -2 à $\sum s(p_i)$ mas, quando essa cirurgia é realizada com a superfície T_1^+ que possui o somatório de suas cúspides igual a 2 então o somatório permanece inalterado, como a fórmula nos mostra. No entanto, se a cirurgia é realizada com a superfície T_1^- , que possui o somatório das cúspides igual a -2 , então o somatório das cúspides da cirurgia e da superfície é igual à -4 . Mas veja que isto ocorre para cada uma das cirurgias realizadas, que são um total de l cirurgias para a região positiva, que não alteram $\sum s(p_i)$ e k cirurgias para a região negativa, que alterariam $\sum s(p_i)$ em $-4k$.

Esta fórmula também nos diz que o grafo (i) da Figura 3.5 não pode ser realizado sem cúspides, pois caso este fato fosse verdadeiro teríamos $0 = \sum s(p_i) = 2(1 - 2l)$, o que nos dá $l = \frac{1}{2}$, que é absurdo.

Além disso, a fórmula 3.5 responde à pergunta do Exemplo 3.3.2:

É possível realizar os grafos das superfícies T_1^+ e T_1^- sem cúspides no conjunto parabólico?

A resposta é *não*.

Para T_1^+ temos que $l = 0$, o que nos dá $\sum s(p_i) = 2$, portanto devem haver pelo menos 2 cúspides (positivas) e por outro lado, para T_1^- temos que $l = 1$, o que nos dá $\sum s(p_i) = -2$, levando novamente à existência de pelos menos 2 cúspides (negativas).

No entanto, uma pergunta que pode ser feita é sobre o número mínimo de cúspides em tais aplicações.

Agora, para o caso dos grafos de duas arestas temos apenas três possibilidades, dadas por (ii), (iii) e (iv) na Figura 3.5, que são realizados por (2) e (3) na Figura 3.6 e pelo *Toro Retorcido* apresentado na Figura 3.7.

Para realizar esses grafos com pesos arbitrários em seus vértices podemos utilizar a Observação 3.1 que nos dá um modo de aumentar o pesos de um dado vértice, obtendo assim os grafos desejados e provando a seguinte proposição:

Proposição 3.6. *Todo grafo bipartido com pesos e duas arestas pode ser realizado por uma aplicação de Gauss estável.*

Para o caso de 3 arestas existe uma quantidade maior de grafos que são apresentados na Figura 3.15.

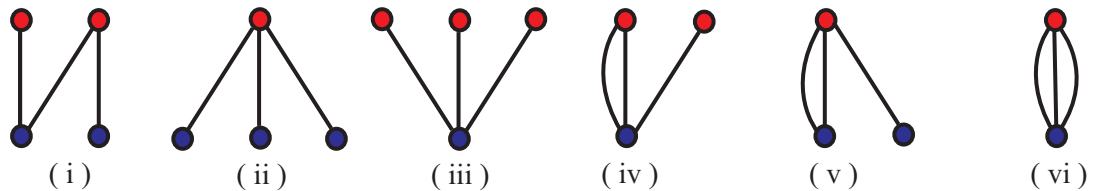


Figura 3.15: Grafos com 3 arestas

Proposição 3.7. *Os grafos de 3 arestas da Figura 3.15 podem ser realizados à partir da cirurgia S^{-+} entre as superfícies que realizam os grafos de 2 arestas.*

Demonstração. Faremos a demonstração dessa proposição observando apenas o resultado das cirurgias em grafos de 2 arestas, visto que o efeito nas superfícies já foi descrito no capítulo anterior.

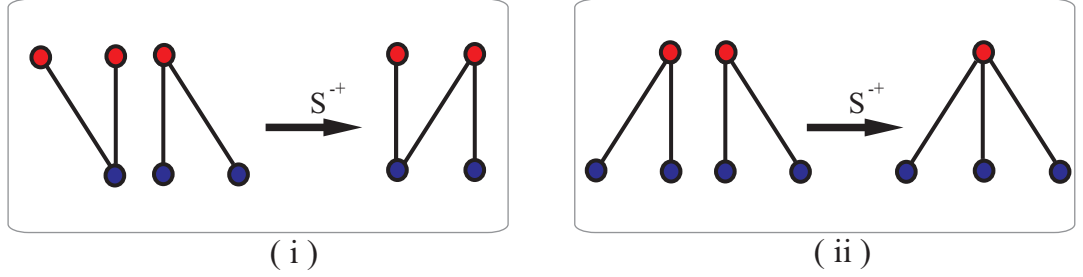


Figura 3.16: Realização dos grafos (i) e (ii) da Figura 3.15

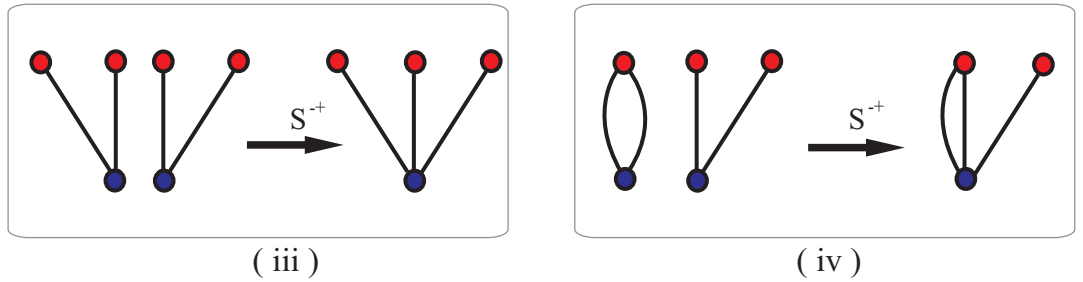


Figura 3.17: Realização dos grafos (iii) e (iv) da Figura 3.15

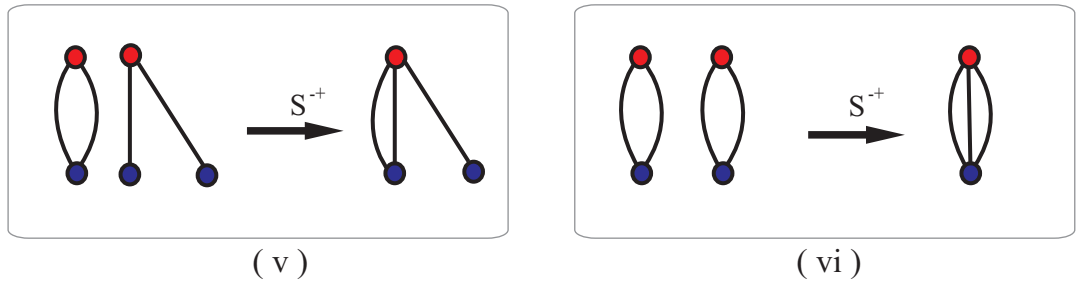


Figura 3.18: Realização dos grafos (v) e (iv) da Figura 3.15

□

3.5.2 Realização de Grafo Árvore

Teorema 3.2. *Qualquer árvore com peso zero em cada um de seus vértices e pelo menos uma aresta pode ser realizada por uma aplicação de Gauss estável em uma imersão da*

esfera, $\mathcal{N} : S^2 \rightarrow S^2$.

Demonstração. A prova é por indução no número de vértices. A imersão padrão de S^2 em \mathbb{R}^3 possui a identidade como sua aplicação de Gauss e assim o grafo associado consiste de um único vértice. Realizando uma transição L na esfera obtemos o primeiro passo da indução.

Então nós assumimos que a nossa afirmação é verdadeira para qualquer árvore com pelo menos k vértices e suponha que \mathcal{T} é uma árvore com $k + 1$ vértices. Removendo um vértice extremo v de \mathcal{T} juntamente com a (única) aresta vw que ele está conectado obtemos uma árvore \mathcal{T}' com k vértices. Então a hipótese de indução nos garante que existe alguma imersão $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss possui \mathcal{T}' como grafo. Seja \mathcal{R}_w a região de S^2 correspondendo ao vértice w de \mathcal{T}' . Podemos aplicar uma transição L nesta região e obter uma nova imersão $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss é obtida adicionando um vértice a \mathcal{T}' no vértice w , isto é, é o grafo \mathcal{T} . \square

Definição 3.3. Uma *árvore não-estrelada* é uma árvore em que todos os vértices possuem grau 2, exceto os vértices extremos.

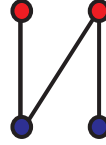


Figura 3.19: Árvore não-estrelada

Exemplo 3.5.1. A Figura 3.19 é um exemplo de árvore não-estrelada com 3 arestas.

Definição 3.4. Uma *árvore estrelada de grau n positiva (negativa)* é uma árvore que possui apenas um vértice positivo (negativo) com grau n .

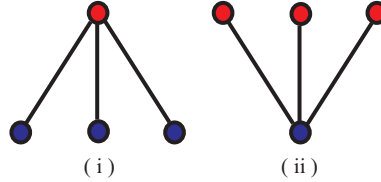


Figura 3.20: Árvore Estreladas

Exemplo 3.5.2. A Figura 3.20 é um exemplo de árvores estreladas de grau 3, sendo (i) uma árvore positiva e (ii) uma árvore negativa.

Observação 3.3. Qualquer árvore pode ser decomposta em um conjunto de árvores não-estreladas e um conjunto de árvores estreladas positivas e/ou negativas.

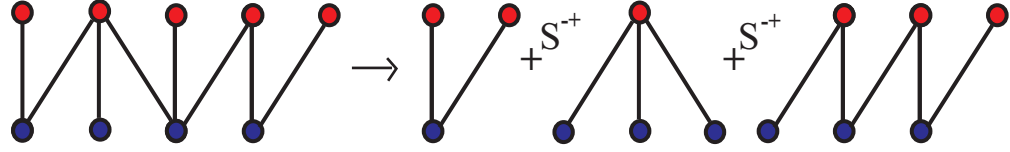


Figura 3.21: Decomposição de um grafo

Exemplo 3.5.3. A Figura 3.21 nos mostra como decompor um grafo dado de acordo com a Observação 3.3. Do lado esquerdo temos o grafo que queremos fazer a decomposição, enquanto do lado direito apresentamos uma decomposição deste grafo e as cirurgias utilizadas para reconstruí-lo.

Tal decomposição foi realizada de forma que utilizamos apenas a cirurgia S^{-+} para recompor o grafo no entanto é sempre possível decompor o grafo de forma que utilizamos a cirurgia S^{+} para recompô-lo. A vantagem de se utilizar a cirurgia S^{+} no lugar de S^{-+} aparece quando queremos minimizar o número de cúspides na realização de um determinado grafo pois a cirurgia S^{+} desaparece todas as cúspides que “nascem” durante o processo e o mesmo não ocorre em S^{-+} .

Proposição 3.8. *Toda árvore estrelada positiva (negativa) de grau n e peso zero em seus vértices é realizável por uma aplicação de Gauss estável com*

$$\sum s(c_i) = 2n \left(\sum s(c_i) = 2(2 - n) \right),$$

além disso o mínimo de cúspides é $2n(2(2 - n))$ cúspides positivas (negativas).

Demonstração. Sabemos que esta árvore pode ser realizada devido ao Teorema 3.2. Provaremos para o caso da árvore positiva, sendo o caso negativo análogo.

Sabendo que M^{+} possui apenas uma componente conexa e M^{-} possui n componentes conexas temos que $\chi(M^{+}) = 2$ e $\chi(M^{-}) = 2n$, aplicamos agora o Teorema de Quine, observando que $g(M) = 0$, e obtemos:

$$\begin{aligned} \sum s(c_i) &= 2\deg(\mathcal{N}) - 2 + 2n \\ \sum s(c_i) &= 2(1 - g(M)) - 2 + 2n \\ \sum s(c_i) &= 2n. \end{aligned}$$

Para o caso da árvores estrelada negativa obtemos $\sum s(c_i) = 2(2 - n)$.

Agora, observamos que conhecemos o valor da diferença entre o número de cúspides positivas e negativas é conhecido para árvores estreladas. Além disso, sabemos que em cada transição L “nascem” duas cúspides, sendo duas positivas se a transição é realizada numa região de curvatura negativa e duas negativas se a transição é realizada numa região de curvatura positiva.

Portanto, podemos realizar um grafo estrelado positivo de grau $n \leq 2$ pode ser resolvido obtido realizando n transições L distintas em S^2 , assim teremos 0 cúspides negativos e $2n$ cúspides positivas.

Para realizar um grafo estrelado negativo de grau $n \leq 2$ observamos que a Figura 3.6 apresenta a superfície M que realiza o grafo (iii) da Figura 3.5 com nenhuma cúspide. Assim, para $n = 2$ é realizado com o mínimo de cúspides dada pela superfície M que possui nenhuma cúspide e para $n > 2$ basta realizar $n - 2$ transições L realizadas na região de curvatura negativa que nos dará 0 cúspides positivas e $2(n - 2)$ cúspides negativas. \square

Exemplo 3.5.4. Para o caso de vértices $n = 5$ temos a árvore estrelada positiva de grau 5 dada realizando 5 transições L na esfera S^2 , obtendo a Figura 3.22.

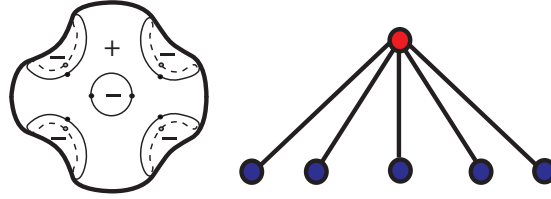


Figura 3.22: Árvore Estrelada Positiva de grau 5

Para a árvore estrelada negativa de grau 5 podemos realizá-la de duas formas, dadas pelas Figuras 3.23 e 3.24. Observe que estas duas aplicações não são equivalentes visto que na Figura 3.23 caso possui 2 cúspides negativas em cada componente conexa do conjunto parabólico e na Figura 3.24 1 componente conexa não possui cúspides e as outras duas componentes do conjunto parabólico possuem 3 cúspides negativas cada.

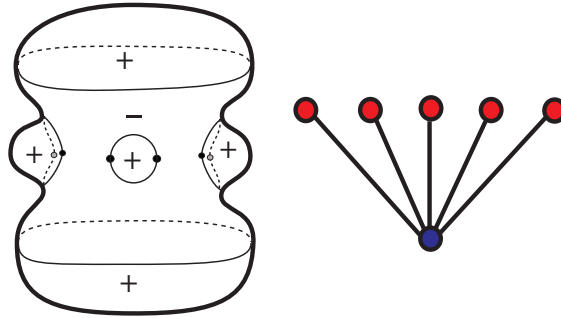


Figura 3.23: 1º Caso: Árvore Estrelada Negativa de grau 5

A Figura 3.23 é obtida a partir da Figura 3.6 que realiza o grafo (iii) apresentado na Figura 3.5, realizando três transições L . Já a Figura 3.24 é obtida a partir da sequência de transições apresentada na Figura 3.25, onde $2L$ e $2B$ representam a realização de duas transições L e duas transições B .

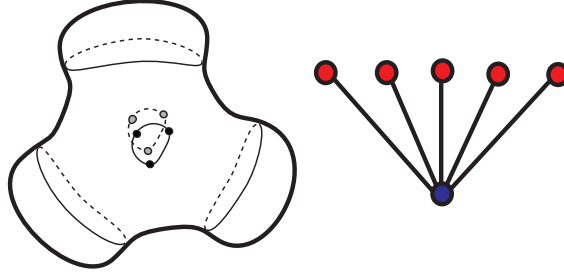


Figura 3.24: 2º Caso: Árvore Estrelada Negativa de grau 5

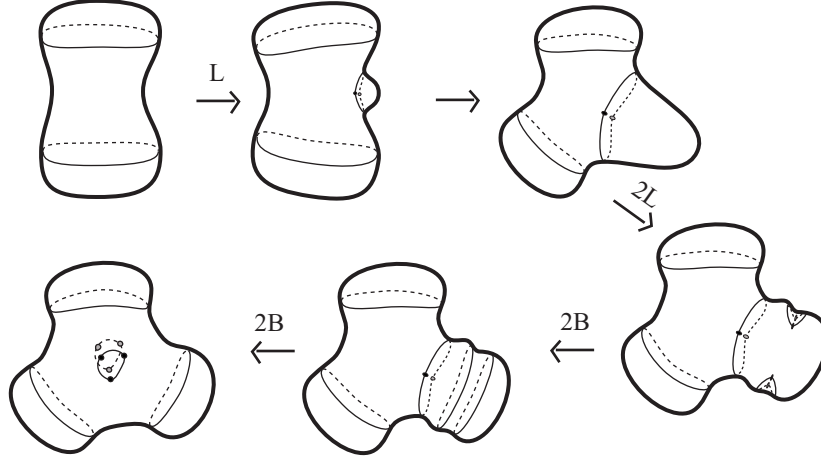


Figura 3.25: Transições para obter a árvore estrelada negativa de grau 5 apresentada na Figura 3.24

3.5.3 Realização de Grafos Bipartidos

Teorema 3.3. *Qualquer grafo bipartido o qual todos os vértices possuem peso zero pode ser realizado por uma aplicação de Gauss estável de uma superfície fechada orientável M , com $\chi(M) = 2 - 2\beta_1(G)$, onde $\beta_1(G)$ é o número de Betti de G (isto é, o número de loops independentes no grafo.)*

Demonstração. Provamos este teorema por indução no número ρ de ciclos independentes no grafo. O primeiro passo, correspondendo a $\rho = 0$ é dado pelo teorema anterior.

Suponha então que o resultado seja válido para grafos com $\rho \leq n$ e considere um novo grafo \mathcal{G} com $\rho = n + 1$. Considere um dos ciclos de \mathcal{G} e construa um novo grafo \mathcal{G}' com n ciclos pela separação de um dos vértices positivos v deste ciclo em dois vértices extremos v_1 e v_2 . Pela hipótese de indução, sabemos que existem imersões $g : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss possui \mathcal{G}' como seu grafo, com $\chi(M') = 2 - 2n$. Aplicando uma cirurgia S^+ às regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 correspondentes aos vértices (positivos) v_1 e v_2 de \mathcal{G}' , obtemos uma superfície M com $\chi(M) = 2 - 2(n + 1)$ e uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja aplicação de Gauss possui \mathcal{G} como seu grafo. \square

Teorema 3.4. *Qualquer grafo bipartido \mathcal{G} com pesos em seus vértices pode ser realizado por uma aplicação de Gauss estável de uma superfície fechado e orientável M , com $\chi(M) = 2 - 2(\beta_1(\mathcal{G}) + w(\mathcal{G}))$, onde $\beta_1(\mathcal{G})$ é o número de ciclos independentes de \mathcal{G} (i.e. o número de Betti de \mathcal{G}), e $w(\mathcal{G})$ é a soma dos pesos em cada vértice de \mathcal{G} (peso total de \mathcal{G}).*

Demonstração. Vamos demonstrar este teorema por indução sobre o peso total de \mathcal{G} . O passo inicial ($w(\mathcal{G}) = 0$) é provado pelo Teorema 3.3. Suponha que o resultado seja válido para qualquer grafo com peso total $\leq p$ e considere um grafo \mathcal{G} com $w(\mathcal{G}) = p + 1$. Podemos escolher um vértice v com peso diferente de zero, digamos w_1 em \mathcal{G} e tomar um grafo \mathcal{G}' que coincide com \mathcal{G} exceto pelo fato de que o peso do vértice v é $w_1 - 1$. Pela hipótese de indução podemos encontrar uma superfície fechada orientável M' , com $\chi(M) = 2 - 2(\beta_1(\mathcal{G}) + p)$ e uma imersão $g : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ a qual a aplicação de Gauss possui o grafo \mathcal{G}' .

Suponha que v seja um vértice positivo e que \mathcal{R}_v é a região elíptica correspondente em M' . Nesse caso, uma cirurgia S^{-+} em \mathcal{R}_v com a superfície T_1^+ (toro) nos dá uma nova superfície M com $\chi(M) = 2 - 2(\beta_1(\mathcal{G}) + (p + 1))$ e uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ a qual a aplicação de Gauss possui o grafo \mathcal{G} como seu grafo. No caso em que v é um vértice negativo procedemos exatamente do mesmo modo usando a imersão T_1^- do toro ao invés de T_1^+ . \square

Teorema 3.5. *Para um grafo bipartido \mathcal{G} que realiza uma aplicação de Gauss temos que $\sum s(c_i) = 2(A - V - 2\omega(V^-))$, onde A é o número de arestas, $V = V^+ + V^-$ é o número de vértices e $\omega(V^-)$ é a soma dos pesos de V^- para o grafo \mathcal{G} .*

Demonstração. Pelo Corolário 3.1 temos $\sum s(c_i) = 2deg\mathcal{N} - \chi(M^+) + \chi(M^-)$ e além disso $\mathcal{N} = 1 - g(M)$ onde $g(M) = g(M^+) + g(M^-) + \beta_1(\mathcal{G})$. Logo,

$$\sum s(c_i) = 2 - 4g(M^-) + 2\beta_1(\mathcal{G}). \quad (3.6)$$

Pelo Teorema 1.5 temos que $\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - V + A$, e além disso $g(M^-) = \omega(V^-)$, de onde o resultado segue fazendo os cálculos. \square

Temos então o seguinte corolário do Teorema 3.5.

Corolário 3.3. *Uma condição necessária para que a aplicação de Gauss não possua cúspides é que o grafo associado a ela satisfaça a seguinte equação*

$$A - V = 2\omega(V^-).$$

Exemplo 3.5.5. Observamos que a condição dada no Corolário não é suficiente para que a aplicação de Gauss seja uma aplicação dobra, visto que o grafo do *Toro Retorcido* (grafo (iv) da Figura 3.5) satisfaz a equação mas seu conjunto singular dessa superfície possui 8 cúspides, sendo 4 positivas e 4 negativas.

3.6 Algoritmo para a Realização dos Grafos

Nesta seção vamos introduzir um algoritmo que têm por objetivo dar um método prático para a construção das Aplicações de Gauss Estáveis à partir de um certo grafo bipartido com pesos que possua pelo menos uma aresta.

Uma observação importante para a realização de um grafo qualquer é que precisamos considerar apenas grafos com peso igual à zero em seus vértices, visto que a Observação 3.1 nos dá uma forma de aumentar o peso de um vértice qualquer de um grafo, desde que o grafo possua pelo menos uma aresta.

Definição 3.5. Uma *árvore geradora* \mathcal{T} de um grafo \mathcal{G} é um conjunto maximal de arestas de \mathcal{G} que não possui ciclos, ou o conjunto minimal de arestas que contém todos os vértices de \mathcal{G} .

Observamos também que sempre é possível considerar um grafo \mathcal{T} que é a árvore geradora do grafo \mathcal{G} que queremos realizar.

Para realizar um grafo \mathcal{G} seguimos os seguintes passos:

Passo 1: Consideramos o grafo \mathcal{G} com peso igual a zero em todos os seus vértices;

Passo 2: Encontramos uma *árvore geradora* \mathcal{T} de \mathcal{G} ;

Passo 3: Realizamos a árvore geradora \mathcal{T} de \mathcal{G} da seguinte forma:

Passo 3.1: Como \mathcal{G} possui pelo menos uma aresta, assim também acontece com \mathcal{T} , portanto podemos escolher um vértice positivo v de \mathcal{T} e proceder da seguinte maneira, consideramos uma esfera S^2 como a região representada por v e para cada vértice negativo w_i de \mathcal{T} , que possui uma aresta ligando w_i a v realizamos uma transição L em S^2 , gerando uma região negativa que irá representar o vértice w_i em questão.

Passo 3.2: Agora, se o vértice que w_i representa no grafo original \mathcal{T} é um *vértice extremo* não há necessidade de alterar a região que este representa. Caso contrário, realizamos novamente o passo anterior para w_i a fim de obter as regiões que representam os vértices v_1^i, \dots, v_j^i , que estão ligados à w_i em \mathcal{T} , com exceção do vértice v onde começamos.

Observe que os passos 3.1 e 3.2 são realizados uma quantidade finita de vezes, devido à finitude dos vértices de \mathcal{G} . Dessa forma, obtemos uma superfície que realiza a árvore geradora de \mathcal{G} em questão, \mathcal{T} . Para realizar o grafo \mathcal{G} precisamos agora obter os ciclos deste grafo.

Observamos que qualquer ciclo é reconstruído unindo através de uma aresta um vértice positivo v à um vértice negativo w . Sejam então \mathcal{R}_v e \mathcal{R}_w às regiões representadas pelos vértices v e w , respectivamente.

Passo 4: Para realizar a superfície procurada devemos realizar uma transição L em \mathcal{R}_v criando uma região de curvatura negativa \mathcal{R}_{v-} e uma transição L em \mathcal{R}_w criando uma

região de curvatura positiva \mathcal{R}_{w+} . Agora, basta utilizar uma cirurgia S^{-+} unindo às regiões \mathcal{R}_v e \mathcal{R}_{w+} , e às regiões \mathcal{R}_w e \mathcal{R}_{v-} , obtendo assim uma superfície que possui uma aplicação de Gauss com grafo \mathcal{G} .

Obtemos assim uma realização do grafo \mathcal{G} sem pesos em seus vértices, basta agora utilizar a observação 3.1 para obter o peso de cada vértice, aumentando assim o gênero de cada região em questão.

Conclusão e Perspectivas Futuras

O objetivo deste trabalho foi estudar as singularidades de aplicações de Gauss estáveis de superfícies fechadas e orientadas mergulhadas em \mathbb{R}^3 na esfera. Para tanto, apresentamos resultados relevantes ao nosso estudo. Apresentamos também os grafos associados a aplicações de Gauss estáveis de superfícies na esfera e algumas relações do número mínimo de cúspides com o qual alguns grafos são realizados.

Além destes resultados, podemos através de pesquisas futuras estudar:

- 1. Número mínimo de cúspides com que um grafo se realiza**

No capítulo 3, verificamos quais grafos podem ser realizados por aplicações de Gauss estáveis de superfícies fechadas, orientadas e sem bordo. Agora, podemos verificar qual o número mínimo de cúspides em que um grafo dado se realiza;

- 2. Relação entre grafos de aplicações de Gauss estáveis e grafos de aplicações estáveis na esfera**

Em [18] os grafos também são apresentados como um invariante global de aplicações de superfícies fechadas, orientadas e sem bordo mergulhadas em \mathbb{R}^3 . Podemos agora verificar as relações existentes entre as superfícies que realizam um grafo por uma aplicação de Gauss estável e as que realizam o grafo de uma aplicação estável na esfera.

Referências Bibliográficas

- [1] Y. Ando. Existence theorems of fold maps. *Japan J. Math.*, 30:29–73, 2004.
- [2] V. Arnold. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. *Advances in Soviet Math.*, (41):33–91, 1994.
- [3] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko. *Singularities of Differentiable Maps: The classification of critical points, caustics and wave fronts*. Monographs in mathematics. Birkhäuser, 1985.
- [4] T. Banchoff, T. Gaffney, and C. McCrory. Cusps of gauss mappings. *Web version by Daniel Dreibelbis*, 1982.
- [5] J. Boardman. *Singularities of Differentiable Maps*. University of Warwick, 1965.
- [6] J. Bretas. Singularidades de aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas em s^2 . Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa, 2011.
- [7] J. W. Bruce and P. J. Giblin. *Curves and Singularities*. Cambridge University Press, 2 edition, 1992.
- [8] J. W. Bruce, P. J. Giblin, and F. Tari. Parabolic curves of evolving surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 17:291–306, 1996.
- [9] C. M. d. J. D. Hacon and M. R. Fuster. Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data. *Topology and Its Applications*, (154):166–175, 2007.
- [10] M. R. F. D. Hacon, C. Mendes de Jesus. Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint. *Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics*, 232:227–235, 2003.
- [11] M. P. do Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Coleção Textos Universitários. Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.
- [12] Y. Eliashberg. On singularities of folding type. *Math. USSR-Izv.*, 4:1119–1134, 1970.
- [13] W. Fulton. *Algebraic Topology: a First Course*. Springer, 1995.

- [14] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Stable Mappings and Their Singularities*. Number 14 in Graduated Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York Inc., 1973.
- [15] V. Goryunov. Local invariants of mappings of surfaces into three-space. *Matematisk Institut, Universitet*, 1994.
- [16] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential topology*. Mathematics Series. Prentice-Hall, 1974.
- [17] D. Hacon, C. M. de Jesus, and M. R. Fuster. Fold maps from the sphere to the plane. *Experimental Maths*, 15(4):491–497, 2006.
- [18] D. Hacon, C. Mendes de Jesus, and M. Romero Fuster. Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere. *To appear in Journal of Singularities*.
- [19] L. Kinsey. *Topology of Surfaces*. Springer Verlag - New York, 1994.
- [20] W. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer, 1991.
- [21] C. Mendes de Jesus, S. Moraes, and M. Romero Fuster. Stable gauss maps from a global viewpoint. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 42(1):87–103, 2011.
- [22] A. Montesinos. Software superficiesii, 2009. <http://www.uv.es/montesin/>.
- [23] T. Ohmoto. Vassiliev type invariants of order one of generic mappings from a surface to the plane. *Topology of Real Singularities and Related Topics*, pages 55–68, 1997.
- [24] I. Porteous. *Geometric differentiation: for the intelligence of curves and surfaces*. Cambridge University Press, 2001.
- [25] J. Quine. A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds. *Trans. AMS*, 236:307–314, 1978.
- [26] F. A. T. Ohmoto. First order local invariants of apparent contours. *Topology*, (45):27–45, 2006.
- [27] K. Tenenblat. *Introducao a geometria diferencial*. Ed. Univ. Brasilia, 1988.
- [28] L. L. T.H. Bröcker. *Differentiable Germs and Catastrophes*. Cambridge University Press, 1975.
- [29] R. Thom. *Structural Stability And Morphogenesis*. Addison-Wesley, Advanced Book Program, 1975.
- [30] V. Vasiliev. *Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1992.
- [31] A. White. *Graphs, Groups and Surfaces*. Mathematics Studies - Nort Holland, 1973.

- [32] H. Whitney. On singularities of mappings of euclidean spaces i: Mappings of the plane into the plane. *Ann of Math*, 62:374–410, 1955.
- [33] Yung-Che. *Singularity Theory and Introduction to Catastrophe*. Springer, 1976.

Índice Remissivo

- aplicação
 - de Gauss, 11
 - estável, 14
- cúspide
 - sinal de, 17
- característica de Euler, 5
- cirurgia
 - S^- , 31
 - S^{-+} , 32
 - S^+ , 33
- conjunto
 - bifurcação, 21
 - singular, 14
- curvatura
 - gaussiana, 18
 - média, 18
 - principal, 18
- espaço subjacente, 5
- espaço topológico triangulável, 6
- função altura, 20
- grafo, 9
 - árvore, 10
 - árvore estrelada, 49
 - árvore geradora, 54
 - árvore não-estrelada, 49
 - associado a superfície, 34
 - bipartido, 10
 - com peso, 10
 - número de Betti, 9
- grau
 - de um vértice, 35
- Monge
 - forma de, 21
- n -célula, 4
- n -complexo regular, 5
- n -variedade com bordo, 6
- região positiva, 16
- superfície, 6
 - compacta, 6
 - conexa, 6
 - gênero, 8
 - orientável, 11
 - soma conexa, 8
- topologia C^∞ de Whitney, 13
- topologia C^k de Whitney, 13
- triangulação de uma superfície, 6
- variedade
 - diferenciável, 10
 - ponto de bordo de uma, 6
 - variedade n -dimensional, 6