

GHEYZA FERREIRA DA SILVA

EMPARELHAMENTO DE ARESTAS DE POLÍGONOS GERADOS  
POR GRAFOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2011

GHEYZA FERREIRA DA SILVA

EMPARELHAMENTO DE ARESTAS DE POLÍGONOS GERADOS  
POR GRAFOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de fevereiro de 2011.

---

Edson Agustini

---

Sueli Irene Rodrigues Costa

---

Catarina Mendes de Jesus  
(Co-orientadora)

---

Kennedy Martins Pedroso  
(Co-orientador)

---

Mercio Botelho Faria  
(Orientador)

*Dedico aos meus pais.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, por iluminar meu caminho, pela saúde, força e determinação que me proporcionou nessa caminhada.

Agradeço à minha família, pelo carinho e por torcerem por mim. Em especial, agradeço aos meus pais, pela paciência, pela compreensão de minha ausência durante este período, pelo apoio, e pelo imenso amor. Ao meu irmão Jeferson, pelo incentivo e pela disposição. Ao meu irmão George, pessoa que sempre pude contar, pela confiança, companheirismo.

Ao professor Mercio Botelho Faria, pela orientação, paciência e pelos momentos de discussão.

À professora Catarina Mendes, pela co-orientação, pela disposição, pelas sugestões nessa dissertação e pelas conversas instrutivas em relação a formação profissional.

Ao professor Kennedy Martins Pedroso, pela co-orientação e pela disposição.

A todos os colegas do curso de mestrado, pelo incentivo e amizade. Em especial aos amigos e companheiros de estudo, Tiago, Luiz e Jane, pela grande amizade, pelas horas de discussões nos estudos e pela força.

Agradeço novamente ao meu grande amigo Tiago, por tornar muito menos árdua a minha primeira morada fora da casa de meus pais e pelo companheirismo em todos os momentos.

A todos os professores que contribuíram para a minha formação acadêmica até este momento. Em especial, a Simone Moraes pelo exemplo profissional, pela dedicação, pelas palavras de motivação, conselhos e pelas conversas instrutivas.

À CAPES pelo suporte financeiro durante a realização deste trabalho.

Agradeço a todos os membros da banca examinadora dessa dissertação pela leitura e pelas sugestões para este trabalho.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Transformações de Möbius . . . . .	3
1.1.1 Transformações de Möbius no plano Euclidiano . . . . .	3
1.1.2 Transformações de Möbius em um espaço de dimensão arbitrária . . . . .	7
1.1.3 O Grupo de Möbius . . . . .	11
1.1.4 Transformações Lineares Fracionárias . . . . .	12
1.2 Geometria Hiperbólica . . . . .	13
1.2.1 O modelo do plano de Lobatchevski . . . . .	13
1.2.2 O Modelo do Disco de Poincaré . . . . .	18
1.2.3 Área Hiperbólica . . . . .	19
1.2.4 Grupos Fuchsianos . . . . .	20
1.2.5 Domínios Fundamentais . . . . .	24
1.2.6 Grupos Fuchsianos Co-Compactos . . . . .	28
1.3 Teoria dos Grafos . . . . .	29
1.3.1 Conceitos Básicos . . . . .	29
1.4 Rotações de Grafos . . . . .	32
1.5 Topologia de Superfícies . . . . .	33
<b>2 Grafos Associados ao Emparelhamento de Arestas de um Polígono Fundamental com 18 Arestas</b>	<b>37</b>
2.1 Grafos trivalentes imersos em uma superfície de gênero 2 . . . . .	38
2.2 Caminhos Fechados . . . . .	39

2.3	Polígonos Fundamentais com 18 arestas para uma superfície de gênero 2	48
<b>3</b>	<b>Emparelhamento de arestas de polígonos com <math>(12g-6)</math> arestas</b>	<b>59</b>
3.1	Polígonos Fundamentais para superfícies de gênero 3	59
3.1.1	Caminhos fechados em grafos trivalentes	61
3.2	Emparelhamento de arestas de polígonos com $(12g-6)$ arestas	71
3.2.1	Grafos trivalentes conexos imersos em uma superfície de gênero $g$	71
<b>4</b>	<b>Emparelhamentos generalizados</b>	<b>100</b>
4.1	Generalização dos emparelhamentos da Proposição 3.2.1	100
4.2	Generalização dos emparelhamentos da Proposição 3.2.2	101
4.3	Generalização dos emparelhamentos da Proposição 3.2.3	102
4.4	Generalização dos emparelhamentos da Proposição 3.2.5	103
	<b>Considerações Finais</b>	<b>105</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>107</b>

# Lista de Figuras

1.1	Inversão de um ponto em um círculo. Figura reproduzida da página 3 em [21]. . . . .	4
1.2	Inversão de uma reta $l$ em uma circunferência. Figura reproduzida da página 4 em [21]. . . . .	5
1.3	Inversão de um círculo que não passa por $O$ . Figura reproduzida da página 5 em [21].	6
1.4	Reflexão de um ponto em $l$ . . . . .	7
1.5	Reflexão de um círculo em $l$ . . . . .	7
1.6	Reflexão de um círculo ortogonal à $l$ em $l$ . . . . .	7
1.7	Projeção Estereográfica. . . . .	8
1.8	Esferas ortogonais. . . . .	9
1.9	Geodésicas no plano $\mathbb{H}^2$ . . . . .	17
1.10	Geodésicas no disco de Poincaré. . . . .	19
1.11	Triângulos Geodésicos com 0, 1, 2 ou 3 vértices ideais no modelo do semi-plano superior. Figura reproduzida da página 12 em [12]. . . . .	19
1.12	Domínio fundamental do tipo $D_k$ do grupo cíclico $\Gamma = \langle T(z) = 2z \rangle$ . Figura reproduzida da página 78 em [5]. . . . .	25
1.13	Domínio Fundamental do Grupo Cíclico $\Gamma = \langle T(z) = z + 1 \rangle$ . Figura reproduzida da página 79 em [5]. . . . .	26
1.14	Grafo $G$ . . . . .	30
1.15	Variações de Grafos. . . . .	30
1.16	Grafo conexo e Grafo desconexo. . . . .	32
1.17	Grafos Isomorfos. . . . .	32
1.18	Rotações do vértice $i$ . Figura reproduzida da página 91 em [17]. . . . .	33
1.19	0-,1-, e 2-célula. Figura reproduzida da página 56 em [11] . . . . .	34
1.20	Construção de um 2-complexo: $K_0$ , $K_1$ e $K_2$ . . . . .	34
1.21	Esfera e Toro . . . . .	35
1.22	Superfícies de gênero 0,1 e 2, respectivamente. . . . .	36
2.1	Os 5 grafos que satisfazem a Proposição 2.1.1. Figura reproduzida da página 452 em [10]. . . . .	39

2.2	Rotações no grafo A. Figura reproduzida da página 454 em [10]. . . . .	41
2.3	Caminhos fechados no grafo A. . . . .	43
2.4	Emparelhamento de arestas do polígono de 18 arestas gerado pelo grafo A com as rotações da Figura 2.2. . . . .	46
2.5	Rotações no grafo B. Figura reproduzida da página 455 em [10]. . . . .	47
2.6	Caminhos fechados no grafo B. . . . .	50
2.7	Rotações no grafo B. Figura reproduzida da página 455 em [10]. . . . .	51
2.8	Caminhos fechados no grafo B. . . . .	52
2.9	Rotações no grafo C. Figura reproduzida da página 455 em [10]. . . . .	53
2.10	Caminhos fechados no grafo C. . . . .	54
2.11	Caminhos fechados no grafo C. . . . .	55
2.12	Rotações no grafo D. Figura reproduzida da página 456 em [10]. . . . .	56
2.13	Rotações no grafo E. Figura reproduzida da página 456 em [10]. . . . .	56
2.14	Emparelhamentos de arestas do polígono de 18 arestas. Figura baseada na Figura da página 457 em [10]. . . . .	57
2.15	Bitoros correspondentes aos emparelhamentos da Figura 2.14. Figura baseada na figura da página 459 em [10]. . . . .	58
3.1	Exemplo de um grafo imerso em uma superfície de gênero 3. Figura reproduzida da página 89 em [17]. . . . .	60
3.2	(A) e (B). Figura reproduzida da página 91 em [17]. . . . .	60
3.3	Três casos de (A). Figura reproduzida da página 91 em [17]. . . . .	61
3.4	Dois casos de (B). Figura reproduzida da página 91 em [17]. . . . .	61
3.5	Grafos em $\mathcal{G}$ . Figura reproduzida da página 90 em [17] . . . . .	64
3.6	Caminhos fechados no grafo B-14 . . . . .	65
3.7	Caminhos fechados no grafo B-14 . . . . .	66
3.8	Emparelhamento de arestas gerado por B-14 para $g=3$ . . . . .	67
3.9	Rotação no grafo B-10 . . . . .	67
3.10	Emparelhamento de arestas gerado por B-10 para $g=3$ . . . . .	68
3.11	Caminhos fechados no grafo A-3 das arestas a-j . . . . .	69
3.12	Caminhos fechados no grafo A-3 das arestas k-o . . . . .	70
3.13	Rotação no grafo B-1 . . . . .	70
3.14	Grafos trivalentes com $(12g - 6)/2$ arestas e $(12g - 6)/3$ vértices . . . . .	72
3.15	Grafos trivalentes com $(12g - 6)/2$ arestas e $(12g - 6)/3$ vértices . . . . .	72
3.16	Caminhos fechados no grafo B-14 para $g=4$ das arestas a-f . . . . .	76
3.17	Caminhos fechados no grafo B-14 para $g=4$ das arestas g-l . . . . .	77
3.18	Caminhos fechados no grafo B-14 para $g=4$ das arestas m-r . . . . .	78
3.19	Caminhos fechados no grafo B-14 para $g=4$ das arestas s-u . . . . .	79

3.20	Emparelhamento de arestas gerado por B-14 para $g=4$ . . . . .	80
3.21	Caminhos fechados no grafo B-14 para $g=5$ das arestas a-f . . . . .	81
3.22	Caminhos fechados no grafo B-14 para $g=5$ das arestas g-l . . . . .	82
3.23	Caminhos fechados no grafo B-14 para $g=5$ das arestas m-r . . . . .	83
3.24	Caminhos fechados no grafo B-14 para $g=5$ das arestas s-x . . . . .	84
3.25	Caminhos fechados no grafo B-14 para $g=5$ das arestas y, z e A . . . . .	85
3.26	Emparelhamento de arestas gerado por B-14 para $g=5$ . . . . .	86
3.27	Grafos trivalentes com $(12g - 6)/2$ arestas e $(12g - 6)/3$ vértices . . . . .	87
3.28	Emparelhamento de arestas gerado por B-10 para $g=4$ . . . . .	88
3.29	Emparelhamento de arestas gerado por B-10 para $g=5$ . . . . .	89
3.30	Grafos trivalentes com $(12g - 6)/2$ arestas e $(12g - 6)/3$ vértices . . . . .	90
3.31	Caminho fechado no grafo A-3 para $g=4$ . . . . .	91
3.32	Comprimento dos caminhos das arestas b e g do grafo A-3 para $g=4$ . . . . .	91
3.33	Comprimento dos caminhos das arestas do grafo A-3 para $g=4$ . . . . .	92
3.34	Caminho fechado no grafo A-3 para $g=5$ . . . . .	92
3.35	Caminho fechado no grafo A-3 para $g=6$ . . . . .	93
3.36	Grafos trivalentes com $(12g - 6)/2$ arestas e $(12g - 6)/3$ vértices . . . . .	93
3.37	Grafos trivalentes com $(12g - 6)/2$ arestas, $(12g - 6)/3$ vértices e com rotações . . . . .	98
3.38	Grafos trivalentes com $(12g - 6)/2$ arestas, $(12g - 6)/3$ vértices e com rotações . . . . .	99

# Resumo

SILVA, Gheyza Ferreira da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2011. **Emparelhamento de arestas de polígonos gerados por grafos.** Orientador: Mercio Botelho Faria. Co-orientadores: Catarina Mendes de Jesus e Kennedy Martins Pedroso.

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo de emparelhamentos de arestas para polígonos hiperbólicos com  $12g - 6$  arestas e ângulos iguais a  $2\pi/3$  gerados por meio de grafos trivalentes, no caso em que o quociente do plano hiperbólico por um grupo Fuchsiano  $\Gamma$  (gerado pelo emparelhamento do polígono),  $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ , é uma superfície fechada de gênero  $g$ ,  $g \geq 2$ . Assim, fizemos um estudo para o caso de  $g = 2$  baseado em [10] e para o caso de  $g = 3$ , baseado em [17]. Neste trabalho, nós deduzimos duas formas de obter os caminhos fechados nos grafos trivalentes citados em [10] e [17] e contribuimos com exemplos e resultados para casos em que  $g > 3$ . Além disso, encontramos generalizações para alguns desses emparelhamentos de arestas.

# Abstract

SILVA, Gheyza Ferreira da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2011.  
**Side-pairing of polygons generated by graphs.** Advisor: Mercio Botelho Faria.  
Co-advisers: Catarina Mendes de Jesus and Kennedy Martins Pedroso.

This work has as main objective the study of side-pairing patterns for hyperbolic polygons with  $12g - 6$  edges and angles  $2\pi/3$  generated by trivalent graphs, in the case when the quotient of the hyperbolic plane by a Fuchsian group  $\Gamma$  (generated by the side-pairing of the polygon),  $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ , is a closed surface of genus  $g$ ,  $g \geq 2$ . So we did a study in case of  $g = 2$ , based on [10] and for the case of  $g = 3$ , based on [17]. In this work, we deduce two ways to get closed paths in the trivalent graphs cited in [10] and [17] and we contribute with examples and results for cases of  $g > 3$ . Moreover, we find generalizations for some of these side-pairing patterns.

# Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo de emparelhamento de arestas de polígonos hiperbólicos com  $12g - 6$  arestas e ângulos iguais a  $2\pi/3$  gerado por meio de grafos, no caso em que o quociente do plano hiperbólico por um grupo Fuchsiano  $\Gamma$ ,  $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ , é uma superfície fechada de gênero  $g \geq 2$ . Assim, esses polígonos estão associados a tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ . Uma das motivações para o estudo de emparelhamentos das arestas de polígonos hiperbólicos com  $12g - 6$  arestas associados à tesselação  $\{12g - 6, 3\}$  é que tais tesselações fornecem empacotamentos de esferas com densidade máxima e, portanto, estão relacionadas com a construção de códigos ótimos cuja probabilidade de erro é mínima (veja [4]).

Em [10], Jorgensen-Naatanen fez o estudo para o caso de  $g = 2$ , mostrou que, a menos de reflexão, temos 8 formas diferentes de emparelhar as arestas de um polígono fundamental  $\mathcal{P}$  com 18 arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é compacta, orientável de gênero 2 e o grafo induzido formado pela fronteira de  $\mathcal{P}$  tem 9 arestas e 6 vértices, onde cada vértice possui exatamente 3 arestas, veremos este caso no Capítulo 2. Com ajuda do computador, Lee Mosher, em [15], mostrou que existem 1726 tipos diferentes de emparelhamentos de polígonos fundamentais  $\mathcal{P}_{12g-6}$  para gerar uma superfície de gênero 3. Se desconsiderarmos as imagens espelho desses padrões, então são essencialmente 927 padrões de emparelhamentos. Utilizando métodos semelhantes ao de [10] e considerando  $g = 3$ , Gou Nakamura, em [17] (veremos parte deste na seção 3.1) através de grafos trivalentes obteve os 927 padrões de emparelhamentos.

Em nosso trabalho, deduzimos duas formas de obter os caminhos fechados nos grafos trivalentes citados em [10] e [17]. Utilizando métodos semelhantes, estudamos alguns casos para  $g > 3$ , onde obtemos emparelhamentos de arestas para polígonos com  $12g - 6$  arestas, tais que todos os ciclos de vértices tem comprimento 3. Desse modo, temos que o grupo gerado pelo emparelhamento das arestas desses polígonos nos fornece, através do quociente pelo plano hiperbólico, uma superfície de Riemann  $S$  compacta orientável de gênero  $g$ . Além da proposta inicial, encontramos generalizações para alguns desses emparelhamentos. Em [6], [7], [8], Faria e Palazzo construíram as generalizações dos 8 casos possíveis de emparelhamentos para polígonos com 18 arestas

correspondentes a  $g = 2$  no ladrilhamento  $\{12g - 6, 3\}$  e que podem ser vistos na figura 2.14. Descreveremos abaixo brevemente os capítulos do presente trabalho.

O objetivo do primeiro capítulo é introduzir algumas definições e resultados que serão usados ao longo deste trabalho. Iniciaremos com o conceito de Transformação de Möbius que são transformações que mantêm invariante o plano hiperbólico, quando representado nos modelos Euclidianos de Poincaré, assim como o conjunto das linhas retas nesses modelos. Em seguida, apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos de Geometria Hiperbólica. Não demonstraremos a maioria dos resultados apresentados os quais podem ser encontrados nas referências bibliográficas [1], [19], [21], [12] e [5]. Abordaremos também conceitos e resultados básicos da teoria dos grafos e topologia de superfícies, cujas principais referências são [13], [22], [2], [23], [18], [11], [22] e [16].

No segundo capítulo, mostraremos que, desconsiderando a orientação, existem 8 formas essencialmente diferentes de emparelhar as arestas de um polígono fundamental de 18 arestas para obter uma superfície fechada de gênero 2. Isto é feito primeiramente exibindo os possíveis grafos  $G$  associados e então estudando os caminhos fechados que cada grafo permite. Através desses caminhos fechados em  $G$  obtém-se oito emparelhamentos distintos para  $\mathcal{P}$ , onde esses 8 padrões ocorrem como regiões de Dirichlet. Estes são vistos pela construção de um polígono de 18 arestas com ângulo  $\frac{2\pi}{3}$  e usando o teorema de Poincaré. Através da identificação das arestas, relacionadas pelos emparelhamentos, obtém-se uma superfície fechada correspondente com gênero  $g = 2$ . A principal referência para este capítulo é o artigo [10].

No terceiro capítulo, faremos o estudo do caso  $g = 3$  baseado em [17] e apresentaremos nossa contribuição que consiste em construir, através de grafos trivalentes citados em [17], novos grafos para  $g > 3$  afim de obtermos emparelhamentos de arestas de polígonos fundamentais hiperbólicos com  $12g - 6$  arestas, tais que todos os ciclos de vértices tenham comprimento 3. Assim, temos condição de concluir que o grupo gerado pelo emparelhamento das arestas desses polígonos nos fornece através do quociente do plano hiperbólico, uma superfície de Riemann  $S$  compacta orientável de gênero  $g$ .

No quarto capítulo, apresentamos as generalizações das proposições, vistas no capítulo anterior, sobre emparelhamentos de arestas dos polígonos fundamentais hiperbólicos com  $12g - 6$  arestas e ângulos internos iguais a  $2\pi/3$ , onde todos os ciclos de vértices tem comprimento 3 e portanto, são domínios fundamentais do ladrilhamento  $\{12g - 6, 3\}$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

O objetivo deste capítulo é introduzir algumas definições e resultados que serão usados ao longo deste trabalho. Iniciaremos com o conceito de Transformação de Möbius que são transformações que mantêm invariante o plano hiperbólico quando representado nos modelos Euclidianos de Poincaré, assim como o conjunto de suas linhas retas nesses modelos. Em seguida, apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos de Geometria Hiperbólica, de Teoria dos Grafos e de Topologia de Superfícies. As principais referências para este capítulo são [1], [19], [21], [12] e [5] para as seções de Transformações de Möbius e Geometria Hiperbólica, e [13], [22], [2], [23], [18], [11], [22] e [16] para as seções de Teoria dos Grafos e Topologia de Superfícies.

### 1.1 Transformações de Möbius

Nesta seção, veremos que uma transformação de Möbius de  $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  é uma composição de um número finito de reflexões em hiperplanos e inversões em esferas. O nosso interesse no estudo dessas transformações é o fato de que são as transformações que mantêm invariante o plano hiperbólico quando representado nos modelos Euclidianos de Poincaré, assim como o conjunto de suas linhas retas nesses modelos. Sendo assim, veremos esses dois tipos de transformações de Möbius, as reflexões e as inversões, suas principais propriedades geométricas e sua representação matricial. As referências mais utilizadas nesta seção são [1], [19], [21] e [5].

#### 1.1.1 Transformações de Möbius no plano Euclidiano

##### Inversões

Seja  $\Pi$  um plano euclidiano, transformações geométricas do plano  $\Pi$  em si mesmo associam a cada ponto  $P$  do plano um outro ponto  $P'$ , denominado **imagem** de  $P$  sob

a transformação. O ponto  $P$  é chamado **antecedente** de  $P'$ .

**Definição 1.1.1** *Seja  $\Pi$  um plano euclidiano e seja  $C = C(O, r)$  um círculo em  $\Pi$  de raio  $r$  e centro  $O$ . A **inversão**  $i_C : \Pi - \{O\} \rightarrow \Pi - \{O\}$  em torno de  $C$ , é tal que dado  $P \in \Pi, P \neq O$ ,  $i_C(P)$  é o único ponto  $P'$  da semi-reta  $\overrightarrow{OP}$  tal que*

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2. \quad (1.1)$$

Os pontos  $P$  e  $P'$  são chamados pontos inversos em relação a  $C$  (ver Figura 1.1). A partir desta definição decorre que, se  $P'$  é o ponto inverso de  $P$ , então  $P$  é o inverso de  $P'$ .

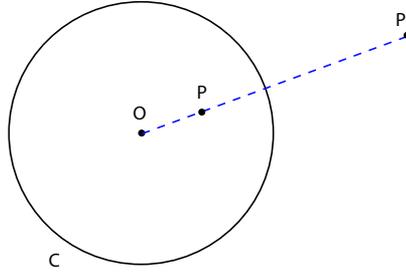


Figura 1.1: Inversão de um ponto em um círculo. Figura reproduzida da página 3 em [21].

**Observação 1.1.2** *Entenderemos por interior de  $C$  o conjunto  $\{P \in \Pi \mid |P - O| < r\}$  e por exterior de  $C$  o conjunto  $\{P \in \Pi \mid |P - O| > r\}$ .*

Uma inversão permuta as partes interna e externa do círculo  $C$ , uma vez que para  $OP < r$  temos  $OP' > r$ , e para  $OP > r$  temos  $OP' < r$ . Os únicos pontos do plano que permanecem fixos sob a inversão são os pontos sobre o próprio círculo  $C$ .

A regra (1.1) não define uma imagem para o centro  $O$ . Note que se um ponto móvel  $P$  aproxima-se de  $O$ , a imagem  $P'$  se afastará cada vez mais de  $O$ . Por esta razão, adicionamos a  $\Pi$  um ponto que denotaremos por  $\infty$  e vamos chamá-lo de **ponto no infinito** de  $\Pi$ . Assim, dizemos que o ponto  $O$  corresponde ao ponto no infinito sob a inversão, ou seja,  $i_C(O) = \infty$  e  $i_C(\infty) = O$ .

Dessa forma, a aplicação inversão

$$i_C : \Pi \cup \{\infty\} \rightarrow \Pi \cup \{\infty\}$$

é uma bijeção.

**Proposição 1.1.3** *A inversão transforma retas e círculos em retas ou círculos. Mais precisamente, seja  $C$  um círculo de centro  $O$  e raio  $r$ , após uma inversão:*

- (a) Uma reta que passa por  $O$  é levada em uma reta que passa por  $O$ .
- (b) Uma reta que não passa por  $O$  é levada em um círculo que passa por  $O$ .
- (c) Um círculo que passa por  $O$  é levado em uma reta que não passa por  $O$ .
- (d) Um círculo que não passa por  $O$  é levado em um círculo que não passa por  $O$ .

**Demonstração:** A afirmação (a) segue da definição de inversão, qualquer ponto sobre a reta tem como imagem um outro ponto sobre a mesma reta, de modo que, embora os pontos sobre a reta tenham suas posições permutadas, a reta como um todo é transformada nela mesma.

Para provar a afirmação (b), trace uma perpendicular de  $O$  até a reta  $l$  (Figura 1.2). Seja  $A$  o ponto onde esta perpendicular encontra  $l$  e seja  $A'$  o ponto inverso de  $A$ . Marque um ponto  $P \neq A$  sobre  $l$  e seja  $P'$  seu ponto inverso. Pela definição de inversão temos,  $OA' \cdot OA = OP' \cdot OP = r^2$  e daí

$$\frac{OA'}{OP'} = \frac{OP}{OA}.$$

E como  $\widehat{POA}$  é um ângulo em comum, os triângulos  $OP'A'$  e  $OAP$  são semelhantes. Portanto, o ângulo  $\widehat{OP'A'}$  é um ângulo reto. Por resultados da geometria elementar, segue-se que  $P'$  está contido no círculo  $K$  com diâmetro  $OA'$ , de modo que o inverso de  $l$  é este círculo.

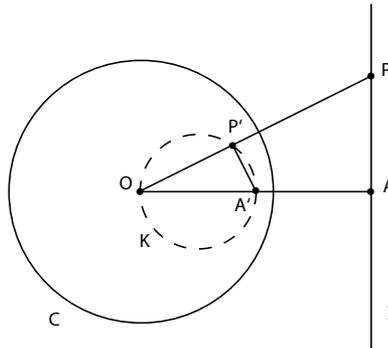


Figura 1.2: Inversão de uma reta  $l$  em uma circunferência. Figura reproduzida da página 4 em [21].

A afirmação (c) segue-se agora a partir do fato de que como o inverso de  $l$  é  $K$ , o inverso de  $K$  é  $l$ . De fato, considere uma circunferência  $K$  passando por  $O$ . Seja  $OA'$  um diâmetro de  $K$  e seja  $P'$  um ponto do círculo  $K$  distinto de  $A'$ . Sendo  $A, P$  respectivamente os inversos de  $A', P'$ . A semelhança de triângulos acima implica que o ângulo  $\widehat{OAP}$  é reto, pois  $\widehat{OP'A'}$  é reto. Assim, o ponto  $P$  está na única perpendicular ao suporte de  $OA'$  em  $A$ . A imagem do círculo  $K$  é então a reta  $AP$ .

Vamos agora provar a afirmação (d). Seja  $K$  um círculo qualquer que não passe por  $O$ , com centro em  $M$  e raio  $k$ . Para obter sua imagem, trace uma reta por  $O$  cortando  $K$  em  $A$  e  $B$  e, determine como as imagens  $A'$ ,  $B'$  variam quando a reta passando por  $O$  corta  $K$  de todas as maneiras possíveis (Figura 1.3). Trace uma reta tangente a  $K$  a partir de  $O$  e seja  $T$  o ponto de tangência.

Sejam as distâncias  $OA, OB, OA', OB', OM, OT$  dadas por  $a, b, a', b', m, t$ . Pela definição de inversão, temos  $aa' = bb' = r^2$ , e por uma propriedade geométrica elementar da circunferência  $ab = t^2$ . Se dividirmos as primeiras relações pela segunda, obteremos

$$\frac{a'}{b} = \frac{b'}{a} = \frac{r^2}{t^2} = c^2$$

onde  $c^2$  é uma constante que depende somente de  $r$  e  $t$ , e é a mesma para todas as posições de  $A$  e  $B$ .

Por  $A'$  trace uma reta paralela a  $BM$  encontrando  $OM$  em  $Q$ . Seja  $OQ = q$  e  $A'Q = \rho$ . Então, os triângulos  $A'OQ$  e  $BOM$  são semelhantes e  $q/m = a'/b = \rho/k$ . Logo,

$$q = \frac{ma'}{b} = mc^2 \quad \text{e} \quad \rho = \frac{ka'}{b} = kc^2.$$

Isto significa que, para todas as posições de  $A$  e  $B$ , o ponto  $Q$  será sempre o mesmo sobre  $OM$  e a distância  $A'Q$  terá sempre o mesmo valor. Analogamente,  $B'Q = \rho$ , uma vez que  $a'/b = b'/a$ . Assim, as imagens de todos os pontos  $A, B$  sobre  $K$  são pontos cuja distância a  $Q$  é sempre  $\rho$ , ou seja, a imagem de  $K$  é um círculo.

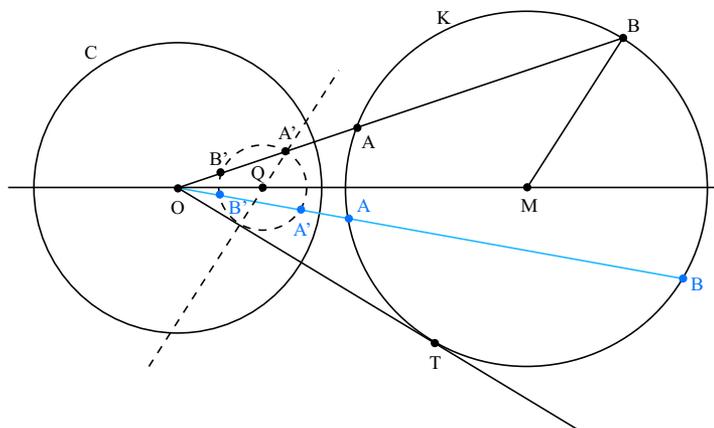


Figura 1.3: Inversão de um círculo que não passa por  $O$ . Figura reproduzida da página 5 em [21].

□

## Reflexões

**Definição 1.1.4** Dada uma reta  $l$  de  $\Pi$ , a **reflexão** em  $l$  é a aplicação  $i_l : \Pi \rightarrow \Pi$  que associa a cada ponto  $P \in \Pi$  um ponto  $i_l(P)$  tal que o segmento de reta por  $P$  e  $i_l(P)$  é ortogonal a  $l$  e intersecta a reta  $l$  em seu ponto médio. Isto quando  $P$  não pertence a  $l$ , se  $P \in l$  fazemos  $i_l(P) = P$  (Figura 1.4).

**Proposição 1.1.5** Seja  $i_l$  a reflexão em uma reta  $l$  então, para todo círculo  $C$ ,  $i_l(C)$  é um círculo (Figura 1.5).

**Proposição 1.1.6** Seja  $i_l$  a reflexão em uma reta  $l$  e seja  $C$  um círculo ortogonal a  $l$  então  $i_l(C) = C$  (Figura 1.6).

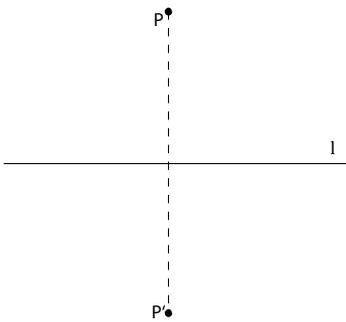


Figura 1.4: Reflexão de um ponto em  $l$ .

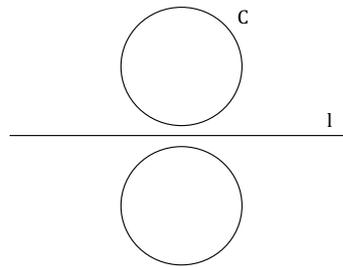


Figura 1.5: Reflexão de um círculo em  $l$ .

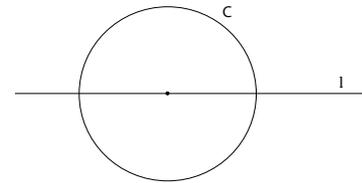


Figura 1.6: Reflexão de um círculo ortogonal à  $l$  em  $l$ .

## 1.1.2 Transformações de Möbius em um espaço de dimensão arbitrária

Podemos introduzir sem qualquer esforço adicional as transformações de Möbius de espaços de dimensão arbitrária. As demonstrações de muitos dos resultados citados nessa seção, podem ser encontradas na seção 3.2 de [1] e nas seções 2.1 e 2.2 de [5].

### Inversões

Consideremos o espaço euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  e sua compactificação por um ponto  $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ , onde as vizinhanças do assim chamado ponto ideal  $\infty$  são os conjuntos da forma  $(\mathbb{R}^n \setminus A) \cup \{\infty\}$  onde  $A$  é um conjunto compacto qualquer de  $\mathbb{R}^n$ . Com esta topologia,  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  é homeomorfo à esfera

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_{n+1} \mid |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

De fato, considerando a imersão

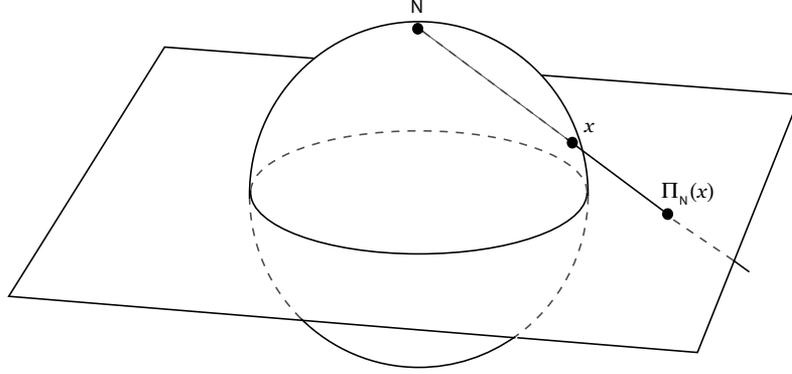


Figura 1.7: Projeção Estereográfica.

$$\begin{aligned}
 i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\
 (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0)
 \end{aligned}$$

e  $N = (0, \dots, 0, 1)$  o polo norte da esfera  $S^n$ . Seja  $\Pi_N : S^n \setminus \{N\} \longrightarrow i(\mathbb{R}^n) \cong \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$  definida da seguinte forma, dado um ponto  $x \in S^n \setminus \{N\}$ , considere a semi-reta  $\overrightarrow{Nx}$ . Sendo  $x \neq N$ , sua última coordenada é diferente de 1, logo a semi-reta  $\overrightarrow{Nx}$  intersecta o hiperplano  $i(\mathbb{R}^n)$  em um único ponto que denotaremos por  $\Pi_N(x)$ . Os pontos da semi-reta  $\overrightarrow{Nx}$  são da forma  $N + t(x - N)$ , com  $t > 0$ . Um tal ponto está no hiperplano  $\mathbb{R}^n$  quando sua última coordenada for igual a zero, ou seja,

$$\begin{cases} \overrightarrow{Nx} = N + t(x - N) \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{Nx} = (0, \dots, 1) + t(x_1 - 0, \dots, x_{n+1} - 1) \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + t(x_{n+1} - 1) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}.$$

Então,

$$\Pi_N(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, 0).$$

Podemos verificar diretamente que  $\Pi_N$  é um homeomorfismo. Além disto, se  $(x^n)_{n=1}^\infty$  for seqüência em  $S^n$ , constatamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = N \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |\Pi_N(x^n)| = \infty.$$

Logo, ao adicionarmos um ponto ideal a  $\mathbb{R}^n$  e definirmos suas vizinhanças como acima, a projeção estereográfica se estende a um homeomorfismo  $\Pi : S^n \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}^n}$ .

**Observação 1.1.7** Denotaremos por  $S_r(a)$  a esfera de  $\mathbb{R}^n$  de centro  $a$  e raio  $r$ . Por interior de  $S_r(a)$  entendemos o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < r\}$  e por exterior de  $S_r(a)$  o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| > r\}$ .

**Definição 1.1.8** Dada uma esfera  $S = S_r(a)$  no espaço euclidiano a **inversão**  $i_S : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  em torno de  $S$  é a aplicação tal que  $i_S(a) = \infty$ ,  $i_S(\infty) = a$  e para  $x \neq a, \infty$ ,  $i_S(x)$  é o único ponto da reta  $ax$  tal que  $|a - x||a - i_S(x)| = r^2$ .

**Proposição 1.1.9** Dada uma esfera  $S = S_r(a)$ , temos que para todo  $x \neq a, \infty$ ,

$$i_S(x) = a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}.$$

**Demonstração:** De fato, os pontos  $x$ ,  $a$  e  $a + r^2 \frac{x-a}{|x-a|^2}$  são colineares e

$$\begin{aligned} |a - x| \left| a - \left( a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2} \right) \right| &= |a - x| \left| r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2} \right| \\ r^2 |a - x| \left| \frac{x - a}{|x - a|^2} \right| &= r^2. \end{aligned}$$

□

**Observação 1.1.10** Daqui por diante entenderemos por esferas tanto as esferas  $S_r(a)$  como hiperplanos compactificados  $P_t(a) \cup \{\infty\}$ . Denotaremos por  $\Sigma$  as esferas  $P_t(a) \cup \{\infty\}$ , onde  $P_t(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = t\}$  é um subespaço afim de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 1.1.11** Seja  $i_S$  a inversão na esfera  $S$  então, para toda esfera  $\Sigma$ ,  $i_S(\Sigma)$  é uma esfera.

**Corolário 1.1.12** Sejam  $S = S_r(a)$  e  $S' = S_{r'}(a')$  esferas e  $P = P_t(b)$  um hiperplano. Então,

1. Se  $a \in P$ ,  $i_S(P) = P$  e se  $a \notin P$  então  $i_S(P)$  é uma esfera contendo o ponto  $a$ .
2. Se  $a \in S'$ ,  $i_S(S')$  é um plano e se  $a \notin S'$ , então  $i_S(S')$  é uma esfera.

Dizemos que duas esferas são ortogonais quando o ângulo entre suas retas tangentes num ponto em comum é  $\pi/2$  (Figura 1.8).

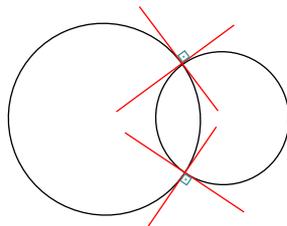


Figura 1.8: Esferas ortogonais.

**Proposição 1.1.13** *Sejam  $S = S_r(a)$  uma esfera e  $i_S$  a inversão em  $S$ . Seja  $\Sigma$  uma esfera ortogonal a  $S$  então  $i_S(\Sigma) = \Sigma$ .*

**Definição 1.1.14** *Uma aplicação diferenciável  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita conforme quando  $\Phi$  preserva ângulos entre curvas continuamente diferenciáveis.*

**Proposição 1.1.15** *Para toda esfera  $S = S_r(a)$ , a inversão  $i_S$  é uma aplicação conforme de  $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ .*

**Proposição 1.1.16** *Para toda esfera  $S = S_r(a)$ , a inversão reverte a orientação de  $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ .*

### Reflexões

**Definição 1.1.17** *Consideremos um hiperplano compactificado  $P = P_t(a) \cup \{\infty\}$ . A **reflexão**  $i_P$  em  $P$  é a aplicação que a cada ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  associa um ponto  $i_P(x)$  tal que o segmento de reta por  $x$  e  $i_P(x)$  é ortogonal a  $P$  e intercepta o plano  $P$  em seu ponto médio. Em particular,  $i_P$  mantém fixos os pontos de  $P_t(a)$  e por definição  $i_P(\infty) = \infty$ .*

**Proposição 1.1.18** *Dado um hiperplano compactificado  $P = P_t(a) \cup \{\infty\}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  temos:*

$$i_P(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2} a.$$

**Demonstração:** Consideremos o hiperplano  $P_t(a) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, a \rangle = t\}$  temos que o vetor  $a$  é ortogonal a  $P_t(a)$ . Assim, se considerarmos  $\Pi_P(x)$  a projeção ortogonal em  $P_t(a)$ , temos que  $\langle \Pi_P(x), a \rangle = t$ , pois  $\Pi_P(x) \in P_t(a)$  e  $x - \Pi_P(x) = \lambda a$ . Logo,

$$\langle x - \Pi_P(x), a \rangle = \langle \lambda a, a \rangle$$

$$\langle x, a \rangle - \langle \Pi_P(x), a \rangle = \lambda \langle a, a \rangle$$

$$\lambda = \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2}.$$

Mas  $i_P(x) = x - 2(x - \Pi_P(x))$  e fazendo as substituições necessárias nesta última equação obtemos que

$$i_P(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2} a.$$

□

**Teorema 1.1.19** *Dados um hiperplano  $P$  e pontos quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $|x - y| = |i_P(x) - i_P(y)|$ .*

**Teorema 1.1.20** *Seja  $i_P$  a reflexão em um hiperplano  $P$  então, para toda esfera  $\Sigma$ ,  $i_P(\Sigma)$  é uma esfera.*

**Teorema 1.1.21** *Sejam  $P = P_t(a)$  um hiperplano  $P$  e  $i_P$  a reflexão em  $P$ . Seja  $\Sigma$  uma esfera ortogonal a  $P$  então  $i_P(\Sigma) = \Sigma$ .*

**Teorema 1.1.22** *Para todo hiperplano  $P = P_t(a)$  a reflexão  $i_P$  é conforme.*

**Teorema 1.1.23** *Para todo hiperplano  $P = P_t(a)$  a reflexão  $i_P$  inverte orientação.*

### 1.1.3 O Grupo de Möbius

**Definição 1.1.24** *Uma **transformação de Möbius** de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  é uma composição de um número finito de reflexões em hiperplanos e inversões em esferas.*

O conjunto de transformações de Möbius de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  é um grupo com a operação composição chamado de **grupo geral de Möbius**, o qual denotamos por  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ .

Vamos verificar que  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  é um grupo. De fato, temos da definição que este é fechado por composição. Além disso,

- A composição é associativa;
- Todo elemento possui inverso. Basta observarmos que cada gerador  $\sigma$  de  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  (uma inversão ou um reflexão) é um elemento de ordem 2, ou seja,  $\sigma^2 = Id$ ;
- Pelo item anterior  $Id \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ , e  $Id \circ \sigma = \sigma \circ Id = \sigma$ , para todo  $\sigma \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ .

Logo,  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  é um grupo em relação a operação composição.

Neste estudo, teremos maior interesse em transformações de Möbius que preservam a orientação de  $\mathbb{R}^n$ . Assim, consideremos a seguinte definição.

**Definição 1.1.25** *O **grupo de Möbius**  $M(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  é um subgrupo de  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  formado pelas transformações de  $\mathbb{R}^n$  que preservam a orientação.*

Notemos que, sendo as reflexões e as inversões elementos que invertem a orientação de  $\mathbb{R}^n$ , temos que um elemento qualquer  $\sigma^2$  de  $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  preservará a orientação se, e somente se, for composição de um número par de inversões e reflexões. Pode-se verificar que a inversa de um elemento que preserva orientação também preserva orientação, assim como a composição de dois tais elementos.

### 1.1.4 Transformações Lineares Fracionárias

A definição abaixo está baseada em [20], página 197.

**Definição 1.1.26** Uma *transformação linear fracionária* é uma transformação  $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

com  $T(-d/c) = \infty$ ,  $T(\infty) = a/c$  se  $c \neq 0$  e  $T(\infty) = \infty$  se  $c = 0$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ .

Uma **transformação de Möbius** pode ser vista como uma transformação linear fracionária  $T(z)$  onde  $ad - bc \neq 0$ .

Seja  $\mathcal{M}$  o conjunto das transformações de Möbius, temos que  $\mathcal{M} = M(\widehat{\mathbb{R}^2})$  (ver [1] pg.57) onde  $M(\widehat{\mathbb{R}^2})$  é o grupo das Transformações de Möbius que preservam orientação.

Agora, consideremos o grupo linear especial  $SL(2, \mathbb{C})$

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}.$$

Para cada  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  associemos a transformação linear fracionária

$$\begin{aligned} T_A : \widehat{\mathbb{C}} &\rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

Temos que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M} \\ A &\longmapsto T_A \end{aligned},$$

é uma ação de grupo.

De fato,

- $T_{Id}(z) = z$  para todo  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  e  $Id \in SL(2, \mathbb{C})$  a identidade de  $SL(2, \mathbb{C})$ .
- $T_{AB}(z) = T_A(T_B)(z)$ , para todo  $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ ,  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

Claramente,  $\phi$  é sobrejetora. O núcleo de  $\phi$  é o conjunto

$$K = \{A \in SL(2, \mathbb{C}) \mid \frac{az + b}{cz + d} = z, \text{ com } z \in \widehat{\mathbb{C}}\} = \{Id, -Id\}.$$

Assim, pelo Teorema dos isomorfismos, a aplicação

$$\bar{\phi} : \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{Id, -Id\}} \longrightarrow \mathcal{M} \text{ é um isomorfismo.}$$

Denotamos por  $PSL(2, \mathbb{C}) = \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{Id, -Id\}} = \cup\{A, -A\}$ , este é chamado grupo linear especial projetivo. Dessa forma, segue o importante resultado:

**Teorema 1.1.27** *O grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$  é isomorfo ao grupo  $\mathcal{M}$ .*

Ou seja, o grupo linear especial projetivo é isomorfo ao grupo das transformações de Möbius que preservam orientação.

## 1.2 Geometria Hiperbólica

Nesta seção, apresentaremos dois modelos para a geometria hiperbólica plana, o modelo do semi-plano superior e o modelo do disco unitário. Veremos algumas definições e resultados em cada um desses modelos. Para um tratamento mais completo recomendamos [1], [19], [12], [5] e [4].

### 1.2.1 O modelo do plano de Lobatchevski

**Definição 1.2.1** *O modelo do **plano de Lobatchevski** (Semi-plano Superior) é dado pelo conjunto*

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

com fronteira

$$\partial\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$$

dotado da métrica riemanniana<sup>1</sup>  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ .

Munidos com uma métrica, nós podemos determinar o comprimento de curvas, a área de regiões e definir ângulos. Dessa forma, temos a seguinte definição.

**Definição 1.2.2** *Seja  $I = [0, 1]$  e  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$  uma curva continuamente diferenciável por partes, onde  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Então, o **comprimento**  $\|\gamma\|$  da curva  $\gamma([0, 1])$  é dada por*

$$\|\gamma\| = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt.$$

Observemos que o integrando provém da métrica riemanniana de  $\mathbb{H}^2$ .

**Definição 1.2.3** *Dados dois pontos  $p, q \in \mathbb{H}^2$ , a **distância** entre  $p$  e  $q$  é definida pela fórmula*

$$d(p, q) = \inf \|\gamma\|,$$

onde o ínfimo é considerado sobre todas as curvas  $\gamma$  unindo  $p$  e  $q$  em  $\mathbb{H}^2$ .

---

<sup>1</sup> A definição e detalhes sobre Métrica Riemanniana podem ser encontrados em [3].

Vamos verificar que  $d(\cdot, \cdot)$  é uma métrica:

Dados  $p, q$  e  $r \in \mathbb{H}^2$ ,

$$(i) \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{y(t)} \geq 0, \text{ pois } y > 0 \text{ e } \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} \geq 0.$$

E,

$$\begin{aligned} d(p, q) = \inf \|\gamma\| = 0 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{y(t)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = 0 \end{aligned}$$

Logo,  $d(p, q) = \inf \|\gamma\| = 0$  se, e somente se, a curva é um único ponto, ou seja,  $p = q$ .

$$(ii) d(p, q) = d(q, p).$$

De fato, seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$  uma curva qualquer ligando  $p$  a  $q$  com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$  e seja  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{H}^2$  definida por  $\tilde{\gamma}(r) = \gamma(1 - r) = (x(1 - r), y(1 - r))$  com  $r \in I$ . Então,  $\tilde{\gamma}(0) = q$  e  $\tilde{\gamma}(1) = p$ . Assim, fazendo  $t = 1 - r$  temos  $dt = -dr$ . Logo,

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = - \int_1^0 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(r)}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy(r)}{dr}\right)^2}}{y(1 - r)} dr \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(r)}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy(r)}{dr}\right)^2}}{y(1 - r)} dr = \|\tilde{\gamma}\|. \end{aligned}$$

Portanto,  $\inf \|\gamma\| = \inf \|\tilde{\gamma}\|$ , ou seja,  $d(p, q) = d(q, p)$ .

$$(iii) d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r).$$

De fato, sejam  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{H}^2$  caminhos com  $\gamma_1(0) = p, \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = q$  e  $\gamma_2(1) = r$ , então o caminho  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$  definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é um caminho diferenciável com  $\gamma(0) = \gamma_1(0) = p$ ,  $\gamma(1/2) = \gamma_2(0) = q$ ,  $\gamma(1) = \gamma_2(1) = r$  e  $\|\gamma\| = \|\gamma_1\| + \|\gamma_2\|$ . Logo, aplicando o ínfimo na equação anterior, obtemos

$$\inf \|\gamma\| = \inf(\|\gamma_1\| + \|\gamma_2\|) \leq \inf(\|\gamma_1\|) + \inf(\|\gamma_2\|)$$

e portanto,  $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ .

**Definição 1.2.4** Uma transformação de  $\mathbb{H}^2$  sobre si mesmo é uma **isometria** se preserva a distância hiperbólica sobre  $\mathbb{H}^2$ .

Veremos que  $PSL(2, \mathbb{R})$  está contido no conjunto das isometrias de  $\mathbb{H}^2$ . Denotaremos esse conjunto de isometrias por  $Isom(\mathbb{H}^2)$ .

**Teorema 1.2.5**  $PSL(2, \mathbb{R})$  age em  $\mathbb{H}^2$  por homeomorfismos.

**Demonstração:** Primeiro mostraremos que toda transformação de Möbius  $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$  aplica  $\mathbb{H}^2$  em  $\mathbb{H}^2$ . Seja  $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ , e  $w = T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Então,

$$w = \frac{(az + b)}{(c\bar{z} + d)} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}.$$

Temos que  $Im(u) = \frac{u - \bar{u}}{2i}$  para todo  $u \in \mathbb{C}$ , assim

$$\begin{aligned} Im(w) &= \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d) - (a\bar{z} + b)(cz + d)}{2i|cz + d|^2} \\ &= \frac{(ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd) - (ac|z|^2 + ad\bar{z} + bcz + bd)}{2i|cz + d|^2} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{2i|cz + d|^2} = \frac{(ad - bc)Im(z)}{2i|cz + d|^2} = \frac{Im(z)}{2i|cz + d|^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$Im(w) = \frac{Im(z)}{2i|cz + d|^2}, \quad (1.2)$$

se  $Im(z) > 0$  então  $Im(w) > 0$ . Portanto,  $T_A(\mathbb{H}^2) \subset \mathbb{H}^2$ . Agora, podemos constatar que a ação  $T_A$  é contínua em  $\mathbb{C}$  se  $c = 0$  e em  $\widehat{\mathbb{C}}$  se  $c \neq 0$ . Assim, se considerarmos fecho de  $\mathbb{H}^2$

$$\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \widehat{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\} \cup \infty,$$

podemos estender a ação de  $T_A$  fazendo  $T(-d/c) = \infty$ ,  $T(\infty) = a/c$  se  $c \neq 0$  e  $T(\infty) = \infty$  se  $c = 0$ . De forma análoga,  $T_A^{-1}(z) = \left(\frac{b-dz}{cz-a}\right)$  é contínua.  $\square$

**Teorema 1.2.6**  $PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H}^2)$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema anterior, toda transformação em  $PSL(2, \mathbb{R})$  é um homeomorfismo de  $\mathbb{H}^2$  em  $\mathbb{H}^2$ . Vamos mostrar que, se  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$  é um caminho diferenciável por partes em  $\mathbb{H}^2$ , então para qualquer  $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$  temos  $\|T_A(\gamma)\| = \|\gamma\|$ . Suponha que,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$  é dado por  $z(t) = (x(t), y(t))$  e  $w(t) = T(z(t)) = \frac{az(t)+b}{cz(t)+d} = u(t) + iv(t)$ . Temos

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Pela equação (1.2),  $Im(w) = v = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2} = \frac{y}{|cz+d|^2}$ , e daí,  $|\frac{dw}{dz}| = \frac{1}{|cz+d|^2} = \frac{v}{y}$ . Então,

$$\|T_A(\gamma)\| = \int_0^1 \frac{|\frac{dw}{dz}|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{|\frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt}|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{|\frac{dz}{dt}|}{y(t)} dt = \|\gamma\|.$$

□

### As geodésicas

**Definição 1.2.7** Uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  é dita **geodésica** quando para quaisquer pontos  $s, t \in [a, b]$  tivermos

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = \int_s^t \frac{\sqrt{(\frac{dx_1(t)}{dt})^2 + (\frac{x_2(t)}{dt})^2}}{x_2(t)} dt,$$

ou seja, quando  $\gamma$  minimizar a distância entre os pontos de seu traçado.

**Lema 1.2.8** Sejam  $l \in \mathbb{H}^2$  um semi-círculo ou semi-reta ortogonal ao eixo real que intersecta o eixo real em algum ponto finito  $\alpha$ . Então a transformação  $T_A(z) = -\frac{1}{(z-\alpha)} + \beta \in PSL(2, \mathbb{R})$ , e para um adequado  $\beta$  aplica  $l$  no semi-eixo imaginário.

**Teorema 1.2.9** As geodésicas em  $\mathbb{H}^2$  são as semi-retas e os semi-círculos ortogonais a  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ .

**Demonstração:** Sejam  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ . Suponha que  $z_1 = ia$  e  $z_2 = ib$  com  $b > a$ . Se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$  é um caminho diferenciável ligando  $ia$  e  $ib$ , tal que  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Então,

$$\|\gamma\| = \int_0^1 \frac{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|\frac{dy}{dt}|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{dy}{y} dy = \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

Mas  $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$  é o comprimento hiperbólico do segmento do eixo imaginário  $\tilde{\gamma}(t) = (1-t)a + tb$ , unindo  $ia$  e  $ib$ . Logo, as semi-retas ortogonais ao eixo real são geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ . Para  $z_1$  e  $z_2$  arbitrários em  $\mathbb{H}^2$  seja  $l$  o único semi-círculo ou semi-reta ortogonal ao eixo real passando por esses pontos. Pelo Lema 1.2.8, existe uma transformação  $T$  em  $PSL(2, \mathbb{R})$  que leva  $l$  no eixo imaginário. Como, pelo Teorema 1.2.6,  $T$  é isometria, então  $\|l\| = \|T(l)\|$  e, portanto o segmento geodésico unindo  $z_1$  e  $z_2$  é o segmento de  $l$  que os une.  $\square$

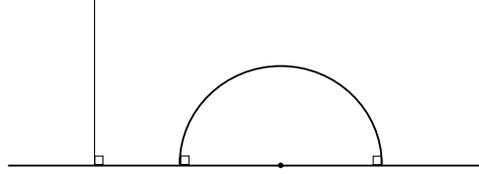


Figura 1.9: Geodésicas no plano  $\mathbb{H}^2$ .

Sabemos que as transformações lineares fracionárias levam círculos e retas em círculos e retas.  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$  transforma o eixo real sobre si mesmo e, portanto, as linhas e círculos ortogonais ao eixo real em linhas e círculos ortogonais ao eixo real. Dessa forma, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.10** *Qualquer transformação em  $PSL(2, \mathbb{R})$  leva geodésicas em geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ .*

Veremos agora expressões para a distância hiperbólica entre dois pontos arbitrários de  $\mathbb{H}^2$ . Consideremos  $d(\cdot, \cdot)$  a distância em  $\mathbb{H}^2$  e  $|\cdot - \cdot|$  a distância usual em  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.2.11** *Dados  $z, w \in \mathbb{H}^2$ ,*

$$\begin{aligned} d(z, w) &= \ln \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right) \\ \cosh(d(z, w)) &= 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \\ \sinh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) &= \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{\frac{1}{2}}} \\ \cosh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) &= \frac{|z - \bar{w}|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{\frac{1}{2}}} \\ \tanh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) &= \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} \end{aligned}$$

onde,  $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ ,  $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ,  $w = (x, y)$ ,  $\bar{w} = (x, -y)$ .

A equivalência entre as cinco igualdades decorre da manipulação de igualdades trigonométricas hiperbólicas. Algumas das igualdades acima são demonstradas em [1], [12] e [5].

## 1.2.2 O Modelo do Disco de Poincaré

Descreveremos agora um modelo da geometria hiperbólica em um disco unitário.

**Definição 1.2.12** *O modelo do **disco de Poincaré** é dado por*

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)| < 1\}$$

*disco unitário, com fronteira*

$$\partial\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

*dotado com métrica riemanniana  $ds = \sqrt{\frac{4(dx^2+dy^2)}{1-(x^2+y^2)}}$ .*

A aplicação

$$f(z) = \frac{zi + 1}{z + i}$$

é uma bijeção entre  $\mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{D}^2$ . E, com a métrica riemanniana definida acima  $f$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^2$  em  $\mathbb{D}^2$ . Assim, podemos trabalhar com esses modelos conforme seja conveniente.

Esses dois modelos da geometria hiperbólica,  $\mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{D}^2$ , são chamados **modelos de Poincaré**.

De modo análogo ao feito para o modelo  $\mathbb{H}^2$ , define-se comprimento hiperbólico e distância hiperbólica em  $\mathbb{D}^2$ .

**Definição 1.2.13** *Seja  $I = [0, 1]$  e  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{D}^2$  uma curva continuamente diferenciável por partes, onde  $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ . Então, o **comprimento**  $\|\tilde{\gamma}\|$  da curva  $\tilde{\gamma}([0, 1])$  é dada por*

$$\|\tilde{\gamma}\| = \int_0^1 2 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{1 - (x(t)^2 + y(t)^2)} dt.$$

**Definição 1.2.14** *Dados dois pontos  $p, q \in \mathbb{H}^2$ , a **distância** entre  $p$  e  $q$  é definida pela fórmula*

$$d^*(p, q) = \inf \|\gamma\|$$

*onde o ínfimo é considerado sobre todas as curvas  $\gamma$  unindo  $p$  e  $q$  em  $\mathbb{D}^2$ .*

**Teorema 1.2.15** *Dados  $z, w \in \mathbb{D}^2$ ,*

$$\begin{aligned} d^*(z, w) &= \ln \left( \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right) \\ \cosh^2 \left( \frac{1}{2} d^*(z, w) \right) &= \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \\ \sinh^2 \left( \frac{1}{2} d^*(z, w) \right) &= \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \\ \tanh \left( \frac{1}{2} d^*(z, w) \right) &= \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|}, \end{aligned}$$

onde  $\bar{w}$  é o conjugado complexo.

**Teorema 1.2.16** *As geodésicas no disco de Poincaré  $\mathbb{D}^2$  são os diâmetros e os arcos de círculos ortogonais a  $\partial_\infty \mathbb{D}^2$ .*

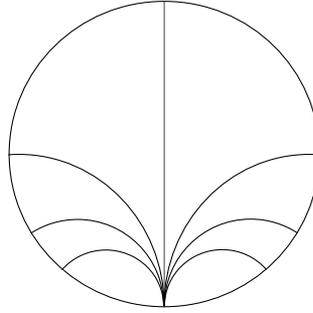


Figura 1.10: Geodésicas no disco de Poincaré.

### 1.2.3 Área Hiperbólica

Um **polígono hiperbólico** de  $n$ -arestas é um conjunto fechado de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  delimitado por  $n$  segmentos geodésicos hiperbólicos.

Dados três pontos  $v_a, v_b, v_c \in \overline{\mathbb{H}^2}$ , consideremos as geodésicas, raios ou segmentos geodésicos ligando estes pontos. Dessa forma, obtemos um triângulo geodésico  $\Delta$ . Os vértices que estão sobre  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  são chamados **vértices ideais**.

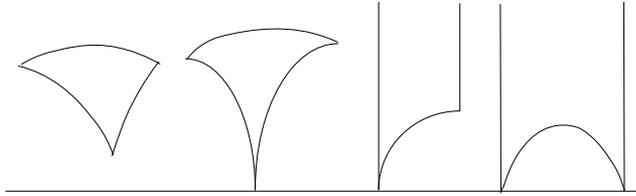


Figura 1.11: Triângulos Geodésicos com 0, 1, 2 ou 3 vértices ideais no modelo do semi-plano superior. Figura reproduzida da página 12 em [12].

**Definição 1.2.17** *Dado um conjunto  $\mathbb{A} \subset \mathbb{H}^2$ , definimos sua **área**  $\mu(\mathbb{A})$  como sendo a integral*

$$\mu(\mathbb{A}) = \int_{\mathbb{A}} \frac{dx dy}{y^2}$$

*se esta existir e for finita.*

Áreas, assim como comprimentos são invariantes por isometrias, ou seja, dada uma isometria  $T$  temos que  $\mu(T(A)) = \mu(A)$ .

**Teorema 1.2.18** (*Gauss-Bonnet*) *Seja  $\Delta$  um triângulo em  $\overline{\mathbb{H}}^2$  com ângulos internos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , então*

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

**Corolário 1.2.19** *Se  $\mathcal{P}$  é um polígono hiperbólico de  $n$  arestas, com ângulos internos  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , então*

$$\mu(\mathcal{P}) = (n - 2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n).$$

**Teorema 1.2.20** *Seja  $\mathcal{P}$  um polígono hiperbólico com ângulos internos  $\theta_1, \dots, \theta_n$ . Então  $\mathcal{P}$  é convexo se, e somente se,  $0 \leq \theta_i \leq \pi$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ .*

## 1.2.4 Grupos Fuchsianos

Apresentaremos nesta seção, alguns conceitos e resultados a respeito de grupos Fuchsianos que são grupos discretos de isometrias do plano hiperbólico. Para uma abordagem mais ampla e detalhada recomendamos [12], [5] e [1].

### Classificação dos elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$

Seja  $tr : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  a **função traço** dada por

$$tr(A) = tr \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d.$$

Chamaremos de **Tr** a aplicação  $Tr : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por  $Tr(A) = |tr(A)| = |a + d|$ . As transformações de  $PSL(2, \mathbb{R})$  podem ser classificadas em três tipos, dependendo do valor da função  $Tr$ .

**Definição 1.2.21** *Diremos que  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  e a transformação linear fracionária  $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$  é:*

1. **Elíptica** se  $Tr(A) < 2$ .
2. **Parabólica** se  $Tr(A) = 2$ .
3. **Hiperbólica** se  $Tr(A) > 2$ .

**Observação 1.2.22** *A classificação acima é invariante por conjugação.*

De fato, o traço de uma matriz é invariante por conjugação, isto é,  $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$ , para toda matriz  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  e toda matriz  $B \in GL(2, \mathbb{R})$ , onde  $GL(2, \mathbb{R})$  é o grupo linear geral das matrizes  $B_{n \times n}$  cujo  $det(B) \neq 0$ .

**Observação 1.2.23** *O número 2 da definição 1.2.21 depende exclusivamente do número de autovalores reais da matriz  $A$ .*

De fato, o polinômio característico de  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  é

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(xId - A) \\ p_A(x) &= x^2 - (a + d)x + ad - bc \\ &= x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A) \\ &= x^2 - \operatorname{tr}(A)x + 1, \end{aligned}$$

onde  $\Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4$ . Assim, temos os seguintes casos:

(i) Se  $\Delta > 0$ , então  $A$  possui dois autovalores reais distintos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Logo, por resultados de álgebra linear, temos que  $A$  é diagonalizável. Portanto, a menos de conjugação,  $A$  pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Como  $\det(A) = 1$  temos que  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ . Logo, se  $a \neq \pm 1$  temos

$$\operatorname{Tr}(A) = \left| \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right| > 2.$$

(ii) Se  $\Delta = 0$ , então  $A$  possui um único autovalor real. Logo,  $p_A(x) = (x - \lambda)^2$ . Mas como o termo constante  $\lambda^2$  deste polinômio deve ser o determinante de  $A$ , assim  $\lambda^2 = 1$ , donde segue que  $\lambda = \pm 1$  e  $\operatorname{Tr}(A) = |2\lambda| = 2$ .

(iii) Se  $\Delta < 0$ , então  $A$  possui dois autovalores complexos conjugados  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$ . Seu polinômio característico deve ser da forma  $P_A(x) = x^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)x + |\lambda|^2$ , onde  $|\lambda|^2 = \det(A) = 1$ . E como  $\lambda \neq \pm 1$ , temos que  $\operatorname{Re}(\lambda) < 1$ . Logo,  $\operatorname{Tr}(A) = |\operatorname{tr}(A)| = |2\operatorname{Re}(\lambda)| < 2$ .

## Isometrias

Antes de estudarmos os diferentes tipos de isometrias, consideremos o seguinte lema:

**Lema 1.2.24** *Sejam  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  e  $x, y \in \overline{\mathbb{H}^2}$  dois pontos fixos por  $T_A$ . Então, a geodésica  $\gamma$  contendo  $x$  e  $y$  é invariante por  $T_A$ . Se algum dos pontos for um ponto ordinário,  $T_A = Id$ .*

## Isometrias Elípticas

Consideremos a família de matrizes:

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \text{ onde } 0 < \theta < 2\pi.$$

Notemos que, para  $\theta \neq k\pi$ ,  $\operatorname{Tr}(A_\theta) = |2 \cos \theta| < 2$ , ou seja,  $T_\theta$  é de fato elíptica. Temos que  $T_\theta(i) = i$ .

De fato,

$$\begin{aligned} T_\theta(i) &= \frac{\cos(\theta)i + \operatorname{sen}(\theta)}{-\operatorname{sen}(\theta)i + \cos(\theta)} = \frac{(\cos(\theta)i + \operatorname{sen}(\theta))(\operatorname{sen}(\theta)i + \cos(\theta))}{|-\operatorname{sen}(\theta)i + \cos(\theta)|^2} = \\ &= \frac{(\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)) + (\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))i}{\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)} = i. \end{aligned}$$

Como  $T_\theta \neq \operatorname{Id}$  concluímos, pelo lema anterior, que  $i$  é o único ponto fixo de  $T_\theta$ .

### Isometrias Parabólicas

Consideremos a família de matrizes:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ onde } 0 \neq t \in \mathbb{R}.$$

Notemos que,  $\operatorname{Tr}(A_t) = |1 + 1| = 2$ , de modo que  $T_t = T_{A_t}$  é de fato isometria parabólica.

O único ponto fixo de  $T_t$  é o ponto ideal  $\infty$ .

Observemos que

$$T_t(z) = \frac{z + t}{0z + 1} = z + t,$$

então fica claro que para  $z \neq \infty$ ,  $T_t(z) \neq z$ . No entanto, se considerarmos a geodésica  $\gamma(s) = e^s i$  com  $\gamma(\infty) = \infty$ , temos que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T_t(\gamma(s)) = \lim_{z \rightarrow \infty} (e^s i + t) = \infty$$

de modo que  $T_t(\infty) = \infty$  e  $T_t$  possui apenas um ponto fixo em  $\overline{\mathbb{H}^2}$ .

### Isometrias Hiperbólicas

Consideremos a família de matrizes:

$$A_k = \begin{bmatrix} \sqrt{e^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e^k}} \end{bmatrix} \text{ com } k \neq 0.$$

Temos então que  $\operatorname{Tr}(A_k) = \sqrt{e^k} + \frac{1}{\sqrt{e^k}} > 2$  se  $k \neq 0$ , de modo que  $T_k = T_{A_k}$  é de fato isometria hiperbólica.

$T_k$  não possui pontos fixos em  $\overline{\mathbb{H}^2}$  com exceção do ponto ideal  $0 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$  e eventualmente do ponto  $\infty$ .

De fato, temos que

$$T_k(z) = \frac{\sqrt{e^k}z + 0}{0z + \frac{1}{\sqrt{e^k}}} = e^k z.$$

Para constatararmos que  $T_k(\infty) = \infty$  basta notarmos que a geodésica  $\gamma(t) = e^t i$  é invariante por  $T_k$ :  $T_k(\gamma(t)) = e^k e^t i = e^{k+t} i = \gamma(k+t)$ .

**Teorema 1.2.25** *Dada uma transformação  $Id \neq T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ , existe  $B \in SL(2, \mathbb{R})$  tal que  $T_B \circ T_A \circ T_B^{-1}$  é da forma  $T_\theta$ ,  $T_t$  ou  $T_k$ .*

## Grupos Discretos

O grupo  $PSL(2, \mathbb{R})$  é um espaço topológico em que uma transformação  $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  pode ser identificada com o ponto  $(a, b, c, d)$  do  $\mathbb{R}^4$ . Isto é, o espaço topológico  $PSL(2, \mathbb{R})$  pode ser identificado com o subconjunto do  $\mathbb{R}^4$  dado por

$$\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc = 1\}.$$

A norma de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , induzida pela norma do  $\mathbb{R}^4$ , é definida por

$$\|T_A\|_{PSL(2, \mathbb{R})} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

onde  $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$  e a métrica em  $PSL(2, \mathbb{R})$  é definida por

$$d_{PSL(2, \mathbb{R})}(T_A, T_B) = \|T_A - T_B\|_{PSL(2, \mathbb{R})}, \text{ com } T_A, T_B \in PSL(2, \mathbb{R}).$$

**Definição 1.2.26** *Um subgrupo  $\Gamma$  de  $Isom(\mathbb{H}^2)$  é dito **discreto** se a topologia induzida em  $\Gamma$  for uma topologia discreta, isto é, se  $\Gamma$  for um subconjunto discreto na topologia do espaço  $Isom(\mathbb{H}^2)$ .*

**Definição 1.2.27** *Um **grupo Fuchsiano** é um subgrupo discreto  $\Gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .*

**Definição 1.2.28** *Uma família  $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$  de subconjuntos de um espaço métrico  $X$  é dita **localmente finita** se para todo compacto  $K \subseteq X$  o conjunto*

$$\{\alpha \in A \mid X_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$$

*for finito.*

**Definição 1.2.29** *Sejam  $\Gamma$  um subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$  e  $z \in \mathbb{H}^2$ .*

1. A **órbita**  $\Gamma(z)$  de  $z$  é o conjunto

$$\Gamma(z) = \{T(z) \mid T \in \Gamma\}.$$

2. Chamamos de **estabilizador** de  $z$  ao subgrupo  $\Gamma_z = \{g \in \Gamma \mid g(z) = z\}$ .

**Definição 1.2.30** *Seja  $\Gamma$  um subgrupo de homeomorfismo de um espaço métrico  $X$ . Dizemos que a ação de  $\Gamma$  é **propriamente descontínua** se para todo  $x \in X$  a família*

$$\{\{g(x)\} \mid g \in \Gamma\}$$

*for localmente finita.*

Veja que se  $\Gamma(z)$  for localmente finita, então a ação  $\Gamma(z)$  é propriamente descontínua.

**Teorema 1.2.31** *Seja  $\Gamma$  um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico  $X$  localmente compacto. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- 1) *A ação de  $\Gamma$  é propriamente descontínua;*
- 2) *Para cada ponto  $x \in X$ , existe uma vizinhança aberta  $V_x$  tal que  $g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$  para apenas um número finito de elementos  $g$  de  $\Gamma$ ;*
- 3) *Cada ponto  $x$  de  $X$  possui uma vizinhança  $U_x$  tal que  $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$  implicando que  $g(x) = x$ ;*
- 4) *Dado subconjunto compacto  $K$  em  $X$ ,  $g(K) \cap K \neq \emptyset$  apenas para um número finito de elementos  $g$  de  $\Gamma$ .*

Da equivalência entre os itens 1 e 3 do teorema acima,  $\Gamma$  age de forma propriamente descontínua em  $X$  se, e somente se, cada órbita de qualquer ponto de  $x$  for discreta e a ordem do estabilizador de cada ponto for finito.

**Teorema 1.2.32** *Um subgrupo  $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$  é discreto se, e somente se, sua ação em  $\mathbb{H}^2$  for propriamente descontínua.*

## 1.2.5 Domínios Fundamentais

Vimos algumas definições e resultados envolvendo grupos fuchsianos. A seguir, apresentaremos algumas definições como domínio fundamental, ladrilhamento de um espaço métrico, domínio de Dirichlet e emparelhamento de arestas de polígonos e alguns resultados que poderão ser úteis em nosso trabalho. Para maiores informações acerca deste conteúdo, recomendamos [12], [5] e [1].

**Definição 1.2.33** *Sejam  $X$  um espaço métrico e  $\Gamma$  grupo de homeomorfismos agindo em  $X$  de maneira propriamente descontínua. Um subconjunto fechado  $\mathcal{D} \subset X$  é dito **Domínio Fundamental** ou **Região Fundamental** se:*

- 1)  $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{D}) = X$ .
- 2)  $\text{int}(\mathcal{D}) \cap T(\text{int}(\mathcal{D})) = \emptyset$ , para todo  $\text{Id} \neq T \in \Gamma$ .
- 3)  $\text{int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ .

**Definição 1.2.34** *O conjunto  $\partial\mathcal{D} = \mathcal{D} \setminus \text{int}(\mathcal{D})$  é chamado **fronteira** de  $\mathcal{D}$  e a família  $\{T(\mathcal{D}) \mid T \in \Gamma\}$  é dita um **ladrilhamento** de  $X$ .*

**Definição 1.2.35** *Um **ladrilhamento** (ou **tesselação**) do tipo  $\{p, q\}$  consiste de um conjunto de polígonos regulares com  $p$  arestas e ângulos iguais a  $2\pi/q$ , que cobrem todo o plano hiperbólico, sem auto-interseção de seus interiores, onde  $q$  representa a quantidade de polígonos que se encontram em cada vértice.*

**Exemplo 1.2.36** *Seja  $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$  o subgrupo cíclico gerado por  $T(z) = 2z$ . Temos então que para todo  $k > 0$ , o semi-anel*

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid k \leq |z| \leq 2k\}$$

*é um domínio fundamental de  $\Gamma$  e o ladrilhamento determinado por este domínio é a família  $\{\mathcal{D}_{2^n k} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .*

De fato, dado  $z \in \mathcal{D}_k$ , temos  
 $T(z) = 2z$ ,  $T^2(z) = T(2z) = 2^2z$ , ...,  $T^n(z) = 2^n z$ .  
 Assim,  $T^n(\mathcal{D}_k) = \mathcal{D}_{2^n k}$  e

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{2^n k} = \mathbb{H}^2, \quad (\mathcal{D}_{2^n k})^\circ \cap (\mathcal{D}_{2^m k})^\circ = \emptyset, \quad \text{se } n \neq m.$$

Portanto,  $\mathcal{D}_k$  é um domínio fundamental. E o ladrilhamento determinado por este domínio é a família  $\{\mathcal{D}_{2^n k} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

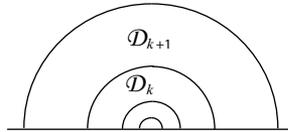


Figura 1.12: Domínio fundamental do tipo  $D_k$  do grupo cíclico  $\Gamma = \langle T(z) = 2z \rangle$ . Figura reproduzida da página 78 em [5].

**Exemplo 1.2.37** Seja  $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$  o grupo cíclico gerado por  $T(z) = z + 1$ . Temos então que  $\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid k \leq \operatorname{Re}(z) \leq k + 1\}$  é domínio fundamental da ação de  $\Gamma$  em  $\mathbb{H}^2$ .

De fato, temos  $\Gamma = \{T^n(z) = z + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , e (Figura 1.13)

i)  $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{D}) = \mathbb{H}^2$ .

ii)  $\operatorname{int}(\mathcal{D}) \cap T(\operatorname{int}\mathcal{D}) = \emptyset$ , para todo  $Id \neq T \in \Gamma$ .

iii)  $\operatorname{int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ .

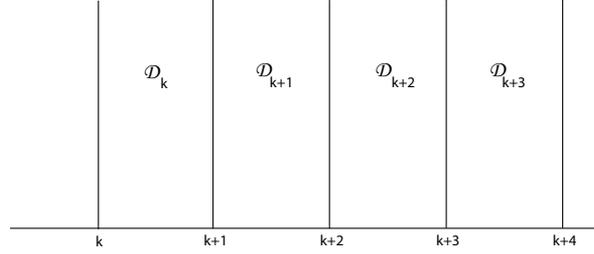


Figura 1.13: Domínio Fundamental do Grupo Cíclico  $\Gamma = \langle T(z) = z + 1 \rangle$ . Figura reproduzida da página 79 em [5].

## Domínio de Dirichlet

**Definição 1.2.38** Seja  $\Gamma$  grupo fuchsiano e  $p \in \mathbb{H}^2$ , tal que  $T(p) \neq p$  para todo  $T \in \Gamma$ . Chamamos de **Domínio de Dirichlet** centrado em  $p$  o conjunto:

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) \leq d(z, T(p)), \text{ para todo } T \in \Gamma\},$$

ou seja, consideramos a órbita  $\Gamma(p)$  e escolhemos os pontos  $z \in \mathbb{H}^2$  que estão mais próximos de  $p$  do que qualquer outro ponto da órbita  $\Gamma(p)$ . Como  $d(z, T(p)) = d(T^{-1}(z), p)$ , podemos considerar em cada órbita  $\Gamma(w)$  os pontos (pode haver mais de um) mais próximos de  $p$ , ou seja,

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) \leq d(T(z), p), \text{ para todo } T \in \Gamma\}.$$

**Teorema 1.2.39** Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano e  $\mathcal{D}_p(\Gamma)$  um domínio de Dirichlet centrado em  $p$ . Então  $\mathcal{D}_p(\Gamma)$  é domínio fundamental da ação de  $\Gamma$ .

**Corolário 1.2.40** Todo domínio de Dirichlet de um grupo fuchsiano é geodesicamente convexo, ou seja, dados  $z_1, z_2 \in \mathcal{D}_p(\Gamma)$ , o segmento geodésico  $\overline{z_1 z_2} \subset \mathcal{D}_p(\Gamma)$ .

**Teorema 1.2.41** Seja  $\Gamma$  grupo fuchsiano e  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$  domínio de Dirichlet. Então o ladrilhamento  $\{T(\mathcal{D}) \mid T \in \Gamma\}$  é localmente finito.

**Teorema 1.2.42** *Cada classe de equivalência de arestas de um domínio de Dirichlet  $\mathcal{D}_p(\Gamma)$  contém exatamente dois elementos.*

Vemos então que se  $\mathcal{D}_p(\Gamma)$  possui um número finito de arestas, este é necessariamente um número par. Mais ainda, dada uma aresta  $\mathcal{A}_1$  existe uma única outra aresta  $\mathcal{A}_2 \neq \mathcal{A}_1$  e um único elemento  $T \in \Gamma$  tal que  $T(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$ . Dizemos neste caso que  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$  é um par de arestas congruentes e que  $T$  relaciona o par, ou então que  $T$  *emparelha as arestas*. Observemos que se  $T$  relaciona o par  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ , então  $T^{-1}$  também o relaciona.

**Teorema 1.2.43** *Seja  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$  domínio de Dirichlet de  $\Gamma$ . Considere o conjunto  $\{T_i \mid i \in I\}$  de elementos de  $\Gamma$  que relacionam arestas distintas de  $\mathcal{D}$ . Então  $\{T_i \mid i \in I\}$  é um conjunto de geradores de  $\Gamma$ .*

**Definição 1.2.44** *Seja  $\Gamma$  grupo fuchsiano e  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$  um Domínio de Dirichlet de  $\Gamma$ . Definimos um **ciclo de vértices** (chamamos simplesmente de ciclo), como sendo uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, como um conjunto da forma:*

$$\{T(z) \mid T \in \Gamma, z \text{ e } T(z) \text{ são vértices de } \mathcal{D}_p(\Gamma)\}.$$

**Teorema 1.2.45** *Seja  $\mathcal{D}_p(\Gamma)$  domínio de Dirichlet de  $\Gamma$ . Sejam  $v_1, \dots, v_n$  vértices de um ciclo e sejam  $\theta_1, \dots, \theta_n$  as medidas dos ângulos internos nos respectivos vértices. Então, se denotarmos por  $m$  a ordem do estabilizador em  $\Gamma$  de um dos vértices do ciclo, temos que  $\theta_1 + \dots + \theta_n = \frac{2\pi}{m}$ .*

**Definição 1.2.46** *Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano então  $P$  é dito um **polígono fundamental convexo** de  $\Gamma$  quando  $P$  é convexo e localmente finito em um domínio fundamental de  $\Gamma$ .*

Sejam  $\mathcal{P}$  um polígono fechado convexo em  $\mathbb{H}^2$  e  $\mathcal{A}$  o conjunto de todas as arestas de  $\mathcal{P}$ .

**Definição 1.2.47** *Um **emparelhamento de arestas** é o conjunto  $\Phi = \{\gamma_\tau \mid \tau \in \mathcal{A}\}$  de isometrias que, para toda aresta  $\tau \in \mathcal{A}$  temos,*

- 1) *existe aresta  $\tau' \in \mathcal{A}$  com  $\gamma_\tau(\tau') = \tau$ ;*
- 2) *as isometrias  $\gamma_\tau$  e  $\gamma_{\tau'}$  satisfazem a relação  $\gamma_{\tau'} = \gamma_\tau^{-1}$ ;*
- 3) *se  $\tau$  for aresta de  $\mathcal{P}$  então  $\tau' = \mathcal{P} \cap \gamma_\tau^{-1}(\mathcal{P})$ .*

Nestas circunstâncias, diremos que  $\tau$  e  $\tau'$  são emparelhadas por  $\gamma_\tau$ . Veremos que, se  $\Phi$  gerar um grupo fuchsiano, poderemos considerar  $\mathcal{P}$  como um domínio de Dirichlet do grupo  $\Gamma = \langle \Phi \rangle$ .

**Teorema 1.2.48** (*Teorema de Poincaré*) *Seja  $\mathcal{P}$  um polígono fechado convexo em  $\mathbb{H}^2$ ,  $\Phi$  um emparelhamento de arestas e  $\Gamma = \langle \Phi \rangle$ . Sejam  $v_1, \dots, v_n$ , um ciclo finito com ângulos internos  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , respectivamente e  $m$  a ordem do estabilizador em  $\Gamma$  de um dos vértices do ciclo. Se todo ciclo de vértices for finito, e se  $\theta_1 + \dots + \theta_n = \frac{2\pi}{m}$  então  $\Gamma$  é um grupo discreto e  $\mathcal{P}$  é um domínio fundamental de  $\Gamma$ .*

## 1.2.6 Grupos Fuchsianos Co-Compactly

Nessa seção, veremos algumas condições para que o quociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  seja uma superfície compacta. Seja  $\Gamma$  um grupo Fuchsiano de  $PSL(2, \mathbb{R})$  agindo de maneira propriamente descontínua sobre  $\mathbb{H}^2$ . Dados  $z, w \in \mathbb{H}^2$ , definimos

$$z \sim w \Leftrightarrow \text{existe } T \in \Gamma \text{ tal que } w = T(z).$$

Temos que,  $\sim$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{H}^2$ . Onde a classe de equivalência

$$[z] = \{w \in \mathbb{H}^2 : w \sim z\} = \{T(z) : T \in \Gamma\}$$

é a órbita de  $z$ ,  $\Gamma(z)$ . Assim, obtemos a partição de  $\mathbb{H}^2 = \dot{\cup}_{z \in \mathbb{H}^2} \Gamma(z)$ .

Neste caso, o espaço das órbitas

$$\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma} = \frac{\mathbb{H}^2}{\sim} = \{\Gamma(z) : z \in \mathbb{H}\}$$

é um espaço topológico com a topologia induzida pela projeção

$$\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}.$$

Então, a restrição de  $\pi$  a  $\mathcal{D}$  identifica os pontos congruentes de  $\mathcal{D}$ , os quais estão necessariamente em sua fronteira  $\partial\mathcal{D}$ .

**Definição 1.2.49** *Um grupo fuchsiano  $\Gamma$  é dito **co-compacto** quando o espaço quociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  for compacto.*

Observe que se  $\Gamma$  possuir região fundamental compacta  $\mathcal{D}$ , então  $\Gamma$  é co-compacto, pois a restrição de  $\pi$  a  $\mathcal{D}$  é sobrejetora.

**Teorema 1.2.50** *Seja  $\Gamma$  grupo fuchsiano e suponha que  $\Gamma$  possua domínio fundamental convexo não-compacto então,  $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$  não é compacto.*

**Corolário 1.2.51** *Um grupo fuchsiano  $\Gamma$  é co-compacto se, e somente se, todo domínio de Dirichlet de  $\Gamma$  for compacto.*

**Teorema 1.2.52** *Seja  $\Gamma$  grupo fuchsiano co-compacto então,  $\Gamma$  não possui elementos parabólicos.*

**Teorema 1.2.53** *Seja  $\Gamma$  grupo fuchsiano e  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$  domínio de Dirichlet não compacto mas com área finita. Então:*

- i) Cada ponto  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{D}$  é ponto fixo de algum elemento parabólico  $T \in \Gamma$ .*
- ii) Se  $\eta \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$  é ponto fixo por algum elemento parabólico de  $\Gamma$ , existe  $S \in \Gamma$  tal que  $S(\eta) \in \partial_\infty \mathcal{D}$ .*

**Corolário 1.2.54** *Um grupo fuchsiano  $\Gamma$  é co-compacto se, e somente se, não possuir elementos parabólicos e  $\mu(\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}) < \infty$ .*

**Proposição 1.2.55** *Toda superfície compacta com gênero  $g \geq 2$  é modelada no plano hiperbólico.*

Em outras palavras, temos que para todo  $g > 1$  existe um grupo fuchsiano  $\Gamma$  agindo sobre  $\mathbb{H}^2$  tal que o quociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é a superfície compacta dada.

## 1.3 Teoria dos Grafos

O objetivo desta seção é introduzir alguns conceitos básicos sobre a Teoria dos Grafos que serão usados ao longo deste trabalho. As referências mais utilizadas neste capítulo são [13], [22], [2], [23] e [18].

### 1.3.1 Conceitos Básicos

**Definição 1.3.1** *Um **grafo**  $G$  consiste de um par de conjuntos  $V(G)$  e  $A(G)$ , onde  $V(G)$  é um conjunto não-vazio e  $A(G)$  é um conjunto de pares não ordenados de elementos de  $V(G)$ . Os elementos do conjunto  $V(G)$  são chamados **vértices** do grafo  $G$ , os elementos de  $A(G)$  são as **arestas** de  $G$ .*

Neste texto, vamos nos restringir a grafos em que o conjunto de vértices  $V(G)$  é finito. Denotaremos as arestas de um grafo, por exemplo,  $a = \{u, v\}$  por  $a = uv$  (ou  $vu$ ).

**Definição 1.3.2** *1. Para uma aresta  $a = uv \in A(G)$ , os vértices  $u$  e  $v$  são chamados **vértices finais** ou **extremos** de  $a$ .*

*2. Se  $u$  e  $v$  são os extremos de  $a \in A(G)$  diremos que estes são **adjacentes** (ou vizinhos) e que **incidem** com  $a$ .*

3. Duas arestas são **adjacentes** se possuem exatamente um vértice final em comum.

Geometricamente, os vértices correspondem a pontos e as arestas são representadas por uma curva que une as localidades de seus extremos.

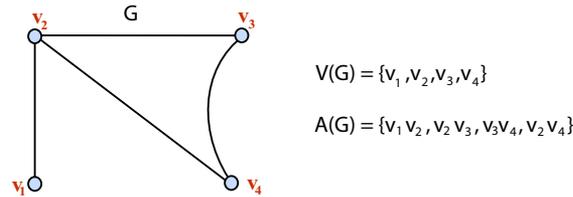


Figura 1.14: Grafo G.

### Variações de Grafos

Pela definição 1.3.1, um grafo não pode ter duas arestas diferentes com o mesmo par de extremos. Também não pode ter uma aresta com extremos coincidentes. Assim, segue abaixo extensões do conceito de grafo.

- Definição 1.3.3**
1. Um **laço** é uma aresta do tipo  $a = uu$ , ou seja, possui vértices finais iguais.
  2. **Arestas múltiplas** ou **paralelas** são arestas distintas contendo o mesmo par de vértices finais.
  3. Uma aresta é dita **dirigida** (ou o **orientada**) se é formada por um par ordenado de vértices distintos. Neste caso,  $uv \neq vu$ .
  4. Um grafo é dito ser **dirigido** (ou **orientado**) se possui todas as arestas dirigidas. Este também é denominado **digrafo**.

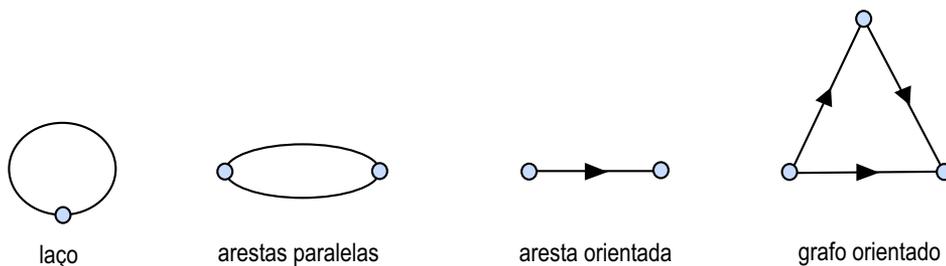


Figura 1.15: Variações de Grafos.

**Definição 1.3.4** Um grafo é dito **simples** se não possui laços ou arestas múltiplas.

**Definição 1.3.5** Um grafo  $H$  é um **subgrafo** de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $A(H) \subseteq A(G)$ . Um subgrafo  $H$  de  $G$  é **próprio** se  $V(H) \neq V(G)$  ou  $A(H) \neq A(G)$ .

Neste trabalho, utilizaremos caminhos em grafos conexos trivalentes, para gerar um emparelhamento de arestas de polígonos, assim segue as definições.

**Definição 1.3.6** 1. O **grau** (ou **valência**)  $g$  de um vértice  $v$  é o número de arestas (Cada laço conta duas vezes) incidentes a ele, ou seja,

$$g(v) = \#\{a \in A(G) \mid v \text{ é extremo de } a\}.^2$$

2. Um vértice de grau 0 é um vértice **isolado**.
3. Um grafo  $G$  onde cada vértice tem o mesmo grau  $k$  é um **grafo  $k$ -regular**.
4. Um grafo 3-regular é chamado **cúbico** ou **trivalente**.

**Definição 1.3.7** Um **caminho**  $C$  em um grafo é uma sequência alternada de vértices e arestas, iniciando e terminando com vértices, digamos

$$C = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, \dots, a_n, v_n$$

onde  $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ ,  $0 < i \leq n$ . Dizemos que  $C$  é um caminho de  $v_0$  a  $v_n$  e este pode ser denotado por  $v_0v_1v_2\dots v_n$ . O **comprimento** de um caminho é o número de arestas (não necessariamente distintas) que este possui. Assim no caso acima,  $C$  tem comprimento  $n$ . Se  $v_0 = v_n$ , o caminho é dito ser **fechado**. Um **ciclo** é um caminho fechado com  $n \geq 3$  vértices distintos (exceto  $v_0 = v_n$ ).

Por exemplo, na Figura 1.14,  $C_1 = v_1, v_2, v_3, v_4$  e  $C_2 = v_1, v_2, v_4$  são caminhos de  $v_1$  a  $v_4$ .

## Grafos Conexos

**Definição 1.3.8** Um grafo  $G$  é **conexo** se, para qualquer par,  $u$  e  $v$ , de vértices de  $G$  existe um caminho com extremos  $u$  e  $v$ . Caso contrário,  $G$  é **desconexo**.

Na representação geométrica,  $G$  é descontínuo, se  $G$  for desconexo.

**Definição 1.3.9** A **distância**,  $d(u, v)$ , entre dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  é o comprimento de um menor caminho que une  $u$  e  $v$  se tal caminho existir, caso contrário,  $d(u, v) = \infty$ . A maior distância em um grafo é o **diâmetro** do gráfico.

---

<sup>2</sup># representa a quantidade de elementos do conjunto.

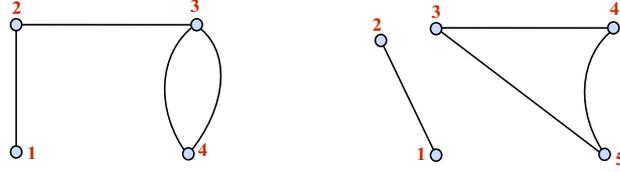


Figura 1.16: Grafo conexo e Grafo desconexo.

Nesse trabalho, iremos construir grafos trivalentes com um certo número de arestas e vértices e precisaremos distinguir os grafos que são equivalentes. Para isso, consideremos a seguinte definição.

### Isomorfismos de Grafos

**Definição 1.3.10** *Dois grafos  $G$  e  $H$  são **isomorfos** (denotado por  $G \cong H$ ), se existe uma bijeção  $\gamma : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que*

$$uv \in A(G) \iff \gamma(u)\gamma(v) \in A(H),$$

*para todo  $u, v \in G$  e além disso, o número de arestas unindo  $u$  e  $v$  em  $G$  é igual ao número de arestas unindo  $\gamma(u)$  e  $\gamma(v)$ .*

Observe que, se  $G \cong H$  então, dois vértices  $u$  e  $v$  são adjacentes em  $G$ , se e somente se,  $\gamma(u)$  e  $\gamma(v)$  são adjacentes em  $H$ .

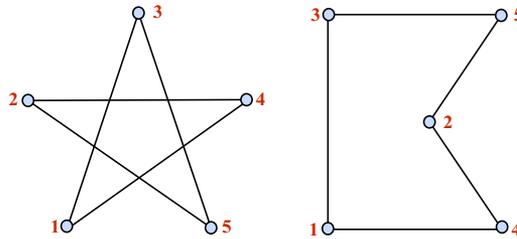


Figura 1.17: Grafos Isomorfos.

## 1.4 Rotações de Grafos

**Definição 1.4.1** *Dado um grafo  $G$ , uma **rotação** de um vértice  $v$  de  $G$  é uma permutação cíclica de todas as arestas incidentes com  $v$ .*

No presente trabalho, os grafos são trivalentes. Assim, como os vértices tem grau 3, existem apenas duas rotações não triviais, a rotação no sentido horário (que corresponde caminhar para a aresta da esquerda) e a rotação no sentido anti-horário (que corresponde caminhar para a aresta da direita), indicados por um círculo preenchido ( $\bullet$ ) e por um círculo vazio ( $\circ$ ), respectivamente.

**Exemplo 1.4.2** [17] *Se andarmos na aresta  $a$  em direção ao vértice  $i$ , então temos duas maneiras diferentes  $b$  ou  $c$  para proseguir o caminho (ver Figura 1.18). Se o círculo vazio (ou preenchido) é atribuído ao  $i$ , então andamos na aresta  $b$  (ou  $c$ ).*

*Da mesma forma, se o círculo vazio é atribuído ao vértice  $i$ . Depois de caminharmos para  $i$  ao longo da aresta  $b$  (ou  $c$ ), caminhamos, de  $i$ , na aresta  $c$  (ou  $a$ ).*

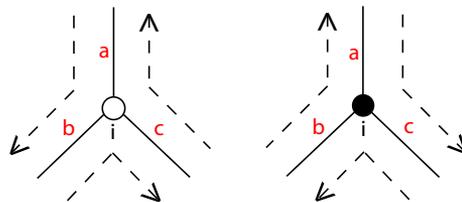


Figura 1.18: Rotações do vértice  $i$ . Figura reproduzida da página 91 em [17].

**Definição 1.4.3** *Uma rotação  $\sigma$  de um grafo  $G$  é uma coleção de rotações, uma para cada vértice de  $G$ . O símbolo  $(G, \sigma)$  significa um grafo  $G$  com uma certa rotação  $\sigma$ .*

## 1.5 Topologia de Superfícies

Nesta seção, vamos apresentar a definição de característica de Euler de superfícies compactas. Para isso, apresentaremos a construção de complexos regulares em espaços topológicos. As referências para esta seção são [11], [22] e o Capítulo 1 de [16].

Dado um subconjunto  $A$  de um espaço topológico, vamos denotar por  $Int(A)$ ,  $Cl(A)$  e  $Fr(A)$ , respectivamente, o interior, o fecho e a fronteira do subconjunto  $A$ .

Denotaremos por  $\mathbb{B}^n$  a bola unitária  $n$ -dimensional  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ , com interior  $\mathbb{D}^n = Int(\mathbb{B}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ , e fronteira a  $(n - 1)$ -esfera  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ .

**Definição 1.5.1** *Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff conexo, um **complexo regular**  $K$  em  $X$  é definido como segue:*

- (0) *Seja  $K_0$  um conjunto finito de pontos em  $X$ . Os elementos de  $K_0$  são chamados de vértices ou 0-células.*

- (1) Construímos  $K_1$  adicionando um número finito de arestas, ou 1-células, conectando os vértices de  $K_0$  de tal forma que o conjunto de pontos em  $K_1 - K_0$  é uma união disjunta finita de arestas abertas. E se  $a$  é uma dessas, então existe um homeomorfismo do intervalo  $[0, 1]$  num subconjunto de  $X$  que leva  $(0, 1)$  na aresta  $a$ , e os pontos finais 0 e 1 nos pontos finais de  $a$  em  $K_0$ .
- (2) Construímos  $K_2$  adicionando um número finito de faces poligonais, ou 2-células, expandindo essas arestas, de forma que o conjunto de pontos em  $K_2 - K_1$  seja uma união disjunta finita de faces abertas. E se  $\gamma$  é um dessas faces, então existe um homeomorfismo da bola  $\mathbb{B}^2$  num subconjunto de  $X$  que leva o disco  $\mathbb{D}^2 = \text{int}(\mathbb{B}^2)$  em  $\gamma$  e o círculo  $\mathbb{S}^1 = \text{Cl}(\mathbb{B}^2) - \text{Int}(\mathbb{B}^2)$  em  $\text{Cl}(\gamma) - \text{Int}(\gamma) \subset K_1$ .
- (k) Construímos  $K_k$  de modo que o conjunto de pontos em  $K_k - K_{k-1}$  é uma união disjunta finita de  $k$ -discos (ou  $k$ -células), ou seja, se  $\gamma$  é um desses  $k$ -discos, então existe um homeomorfismo da bola  $\mathbb{B}^k$  num subconjunto de  $X$  levando  $\mathbb{D}^k = \text{Int}(\mathbb{B}^k)$  em  $\gamma$  e levando  $\mathbb{S}^{k-1} = \text{Cl}(\mathbb{B}^k) - \text{Int}(\mathbb{B}^k)$  em  $\text{Cl}(\gamma) - \text{Int}(\gamma) \subset K_{k-1}$ .

Desta maneira, construímos conjuntos  $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq \dots K_n$  tais que todos pontos em  $X$  estão em uma célula em algum  $K_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Definimos então o **n-complexo regular**  $K = \cup_{k=0}^n K_k$ .

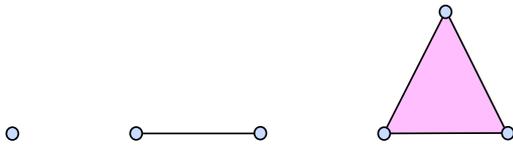


Figura 1.19: 0-,1-, e 2-célula. Figura reproduzida da página 56 em [11]

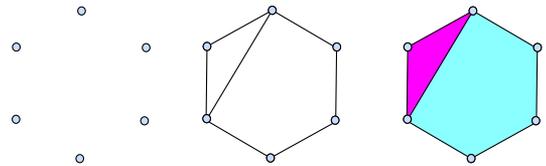


Figura 1.20: Construção de um 2-complexo:  $K_0$ ,  $K_1$  e  $K_2$

Note que o  $n$ -complexo regular deve ser distinguido do espaço original. O espaço original  $X$  é um conjunto de pontos, enquanto o complexo  $K$  é um conjunto de células.

Na seção anterior, vimos a definição de grafos. Um grafo conexo  $G$  também pode ser visto como um 1-complexo conexo.

**Definição 1.5.2** A **característica de Euler** de um  $n$ -complexo regular  $K$ , denotada por  $\chi(K)$ , é definida pela soma alternada

$$\chi(K) = \#(0\text{-célula}) - \#(1\text{-célula}) + \#(2\text{-célula}) \dots + (-1)^n \#(n\text{-célula}),$$

onde  $\#(r\text{-célula})$  denota o número de  $r$ -células do complexo  $K$ .

Para um 2-complexo, sejam  $f = \#\{\text{faces}\}$ ,  $a = \#\{\text{arestas}\}$  e  $v = \#\{\text{vértices}\}$ . A característica de Euler pode ser escrita como

$$\chi(K) = v - a + f.$$

**Definição 1.5.3** Uma **superfície** é uma variedade conexa 2-dimensional, isto é, um espaço Hausdorff no qual cada ponto tem uma vizinhança aberta homeomorfa ao disco aberto de dimensão 2,  $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ . A superfície é orientável, se todo caminho fechado preserva orientação. Caso contrário, se existe um caminho que inverte orientação, a superfície é não orientável.

Um exemplo de uma superfície compacta orientável é a 2-esfera  $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ . Outra superfície compacta orientável importante é o toro, que pode ser descrito como uma superfície que é homeomorfa a superfície de um anel sólido. Um exemplo de uma superfície compacta não-orientável é o plano projectivo real, que pode ser descrito como uma superfície que é homeomorfo ao espaço quociente entre a 2-esfera  $\mathbb{S}^2$  obtidos através da identificação de cada par de pontos diametralmente opostos.

Observe que, as superfícies podem ser vistas como um 2-complexos.

**Definição 1.5.4** Um grafo (1-complexo) é dito estar **imerso** em uma superfície  $S$  se este pode ser “desenhado” em  $S$  de modo que as arestas se interseptom apenas em seus vértices comuns.

**Exemplos 1.5.5** Vamos calcular a característica de Euler da esfera e do toro. Considere os 2-complexos mostrados na Figura 1.21. Em (a) temos um 2-complexo em  $\mathbb{S}^2$ , sendo  $v = 2$ ,  $a = 4$  e  $f = 4$ . Assim,  $\chi(\mathbb{S}^2) = 2 - 4 + 4 = 2$ . Em (b) podemos ver um 2-complexo em  $\mathbb{T}^2$ . Neste caso  $v = 2$ ,  $a = 3$  e  $f = 1$ . Assim,  $\chi(\mathbb{T}^2) = 2 - 3 + 1 = 0$ .

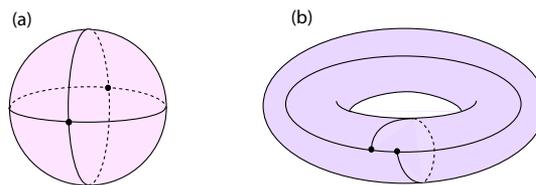


Figura 1.21: Esfera e Toro

**Definição 1.5.6** O gênero  $g$  de uma superfície é o número de alças que esta contém.

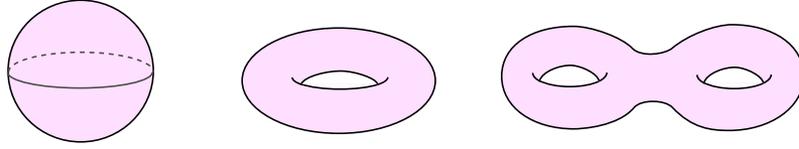


Figura 1.22: Superfícies de gênero 0,1 e 2, respectivamente.

Veremos agora uma relação entre a característica de Euler e o gênero de uma superfície.

**Teorema 1.5.7** *Seja  $S$  uma superfície compacta orientável, então  $\chi(S) = 2 - 2g$ .*

Dessa forma, podemos encontrar o gênero de uma superfície sabendo a característica de Euler da mesma.

Um outro resultado que será importante nos capítulos seguintes é o teorema abaixo.

**Teorema 1.5.8** [9] *Seja  $S$  uma superfície orientável de gênero  $g$ . Então existe  $g$  círculos disjuntos em  $S$  cujo complemento é conexo, mas qualquer  $g + 1$  círculos disjuntos desconecta  $S$ .*

Esse teorema nos é importante já que teremos interesse em grafos imersos em uma superfície de forma que se obtenha uma única 2-célula (face).

# Capítulo 2

## Grafos Associados ao Emparelhamento de Arestas de um Polígono Fundamental com 18 Arestas

Segundo Jorgensen-Naatanen, em [10], a menos de reflexão, temos 8 formas diferentes de emparelhar as arestas de um polígono fundamental  $\mathcal{P}$  com 18 arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é orientável de gênero 2 e o grafo induzido formado pela fronteira de  $\mathcal{P}$  tem 9 arestas e 6 vértices, onde cada vértice possui exatamente 3 arestas. Neste capítulo, mostraremos como foi feita essa relação entre o polígono fundamental de 18 arestas os grafos e as superfícies. A principal referência utilizada neste capítulo é [10].

Seja  $\Gamma$  um grupo Fuchsiano agindo de maneira propriamente descontínua sobre o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ . Podemos representar o espaço órbita  $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$  por um polígono fundamental. Esse polígono pode ser construído como domínios de Dirichlet<sup>1</sup>  $\mathcal{P} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$  centrados em um ponto  $p \in \mathbb{H}^2$ . Como as arestas de  $\mathcal{P}$  são congruentes em pares (Teorema 1.2.42), por certos elementos de  $\Gamma$ , se considerarmos o conjunto  $\Phi = \{T_i | i \in I\}$  de elementos de  $\Gamma$  que relacionam arestas distintas de  $\mathcal{P}$ , então  $\Phi$  é um conjunto de emparelhamentos de arestas que gera  $\Gamma$  (Teorema 1.2.43).

Estudaremos alguns dos possíveis diferentes emparelhamentos de arestas para polígonos com 18 arestas e ângulos  $\frac{2\pi}{3}$  que são Domínios de Dirichlet de uma superfície fechada de gênero  $g = 2$ ,  $S = \frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ , onde  $\Gamma$  é gerado pelas funções de emparelhamento.

Pode-se pensar em  $S$  como sendo obtida pela colagem das arestas equivalentes do

---

<sup>1</sup> $\mathcal{D}_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 | d(z, p) \leq d(z, T(p)), \text{ para todo } T \in \Gamma\}$

polígono fundamental  $\mathcal{P}$ . De uma forma natural, podemos ver as arestas do polígono que são identificadas sobre a superfície como arestas de um grafo e as interseções das arestas do polígono como vértices, formando assim um grafo conexo  $G$ , cujo complemento deste sobre a superfície é uma única componente conexa, correspondente ao polígono  $\mathcal{P}$ . Percorrer a vizinhança do bordo de  $\mathcal{P}$ , corresponde a um caminho fechado em  $G$ , onde cada aresta é atravessada exatamente uma vez em cada sentido.

## 2.1 Grafos trivalentes imersos em uma superfície de gênero 2

Seja  $G$  um grafo trivalente, imerso em uma superfície fechada  $S$  de gênero 2 de forma que  $S \setminus G$  tenha uma única componente conexa correspondente a um polígono  $\mathcal{P}$ . Sejam  $a$  e  $v$  o número de arestas e de vértices de  $G$ , respectivamente. Como  $S$  tem gênero 2, a fórmula de Euler nos dá:

$$2 - 2g = v - a + f \implies -2 = v - a + 1 \implies a = v + 3. \quad (2.1)$$

Cada aresta de  $G$  corresponde a dois lados do polígono fundamental  $\mathcal{P}$  e cada vértice de  $G$  corresponde a no mínimo três vértices de  $\mathcal{P}$ . Então  $G$  tem 9 arestas e, pela equação 2.1, 6 vértices. Assim, cortando  $S$  ao longo de  $G$  obtemos um polígono de 18 arestas  $\mathcal{P}$  com um emparelhamento de arestas associado. Percorrer ao redor da fronteira de  $\mathcal{P}$  uma vez, corresponde a um caminho fechado em  $G$  com condições:

- (a) cada aresta é atravessada exatamente uma vez em cada sentido;
- (b) passando por uma aresta em um sentido não é permitido voltar imediatamente na mesma aresta da qual viemos.

A condição (b) vem do fato que não existem pontos de ramificação. Estas duas condições implicam que cada vértice de  $G$  possui exatamente 3 arestas diferentes. Um outro fato relevante, é que como  $S$  é orientável de gênero 2, pelo Teorema 1.5.8, quaisquer três círculos disjuntos desconecta  $S$ , logo estamos interessados em grafos com no máximo 2 círculos disjuntos. Agora, temos as condições para enunciar a seguinte proposição:

**Proposição 2.1.1** *Existem 5 grafos  $G$  que satisfazem as condições:*

1.  $G$  tem 6 vértices e 9 arestas.
2.  $G$  contém no máximo 2 círculos disjuntos.
3. Cada vértice de  $G$  possui exatamente 3 arestas.

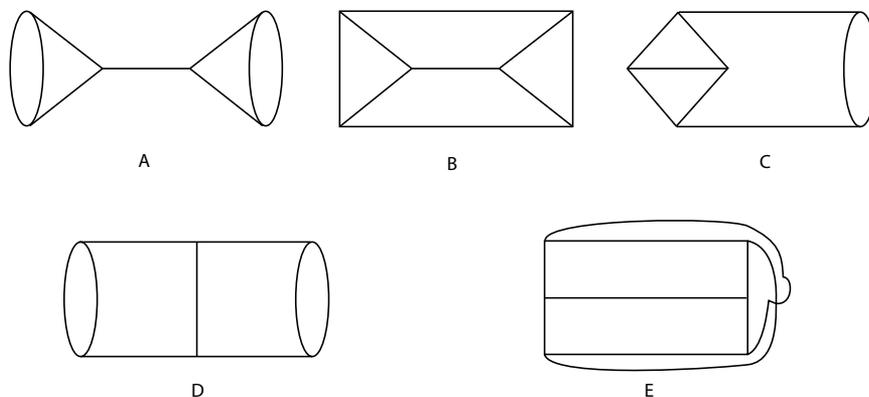


Figura 2.1: Os 5 grafos que satisfazem a Proposição 2.1.1. Figura reproduzida da página 452 em [10].

**Demonstração:** Se  $G$  contém dois triângulos disjuntos, existem as possibilidades  $A$  e  $B$  da Figura 2.1. Se  $G$  tem dois triângulos com uma aresta comum, existe somente uma possibilidade,  $C$  da Figura 2.1. O caso de  $G$  contendo exatamente um triângulo dado não tem solução. Se  $G$  não contém triângulo e possui um par de vértices conectados por duas arestas, existe, por causa da condição 2, apenas uma solução,  $D$  da Figura 2.1. O caso restante é que  $G$  não contém ciclos de menos que quatro arestas. Estes dão um grafo não-planar, equivalem à um hexágono com diâmetros. É rotulado  $E$  na Figura 2.1. □

## 2.2 Caminhos Fechados

No que segue, consideraremos os grafos  $G$  da Proposição 2.1.1 imersos em uma superfície  $S$  de forma que  $S \setminus G$  é conexo. Cortando  $S$  ao longo de  $G$  temos então um polígono de 18 arestas  $\mathcal{P}$  com um emparelhamento das arestas associado. Percorrer ao redor da fronteira de  $\mathcal{P}$  corresponde à um caminho fechado sobre  $G$  de forma que as condições (a) e (b) da Seção 2.1 sejam válidas. Na Proposição 2.2.2 encontramos os diferentes emparelhamentos de arestas para  $\mathcal{P}$  considerando tais caminhos fechados sobre os grafos da Figura 2.1.

**Observação 2.2.1** *A demonstração da Proposição 2.2.2 é demasiadamente longa, devido a necessidade de explicar detalhadamente o procedimento utilizado e das ilustrações, já que estas são de suma importância para a compreensão de como foram obtidas as sequências que dão as identificações das arestas do polígono. Esta, tem início na página 42 e término na página 51 neste texto.*

**Proposição 2.2.2** *Caminhos fechados sobre os grafos  $A, B, C, D$  e  $E$ , tais que as condições (a) e (b) sejam válidas dão origem a 8 formas diferentes de emparelhamentos de arestas do polígono de 18 arestas (sob a imagem espelho).*

**Demonstração:**

Consideremos os grafos  $A, B, C, D$  e  $E$  e encontremos então as rotações que induzem um caminho fechado no grafo tal que (a) e (b) sejam válidas. Se contarmos o número de arestas pelo caminho em ordem, para chegar na mesma aresta com direção oposta, obtemos uma sequência cíclica de números, dando as identificações no polígono de 18 arestas. Nas figuras de (I) a (VIII) da Figura 2.14, estes são os lugares no polígono de 18 arestas no sentido anti-horário. Todos os padrões obtidos, exceto por (VIII), são imagem-espelhos deles mesmos e independem da escolha do sentido. Em outras palavras, revertendo a sequência e trocando cada número  $x$  por  $16 - x$  teremos a sequência ciclicamente idêntica.

Seja  $(G, \sigma)$  um grafo com rotação  $\sigma$ . Primeiramente, tomaremos algumas observações sobre o efeito que a mudança  $\sigma$  tem sobre as identificações no polígono de 18 arestas.

Se  $G$  é invariante sobre a rotação por um ângulo  $\alpha$  e  $(G, \sigma')$  é obtida dando a cada vértice a rotação  $\sigma$  de sua pré-imagem, então “rotacionando pelo ângulo  $\alpha$ ”, temos que um caminho induzido por  $(G, \sigma)$  dá um caminho induzido por  $(G, \sigma')$ . As identificações não são mudadas.

Seja  $(G, \sigma')$  obtida de  $(G, \sigma)$  mudando a rotação em cada vértice. Invertendo todas direções em um caminho induzido por  $(G, \sigma)$  dá um caminho induzido por  $(G, \sigma')$ . As figuras correspondentes das identificações no polígono de 18 arestas a partir de  $(G, \sigma')$  são imagens espelho em relação a identificação feita a partir de  $(G, \sigma)$ .

Seja  $G$  contendo um eixo de simetria e seja  $\sigma'$  a rotação obtida dando a cada vértice de  $\sigma$  a rotação oposta do seu vértice simétrico. A “reflexão” de um caminho induzido por  $(G, \sigma)$  dá um caminho induzido por  $(G, \sigma')$ . A identificação permanece invariante.

Se  $\sigma'$  é a rotação obtida dando a cada vértice de  $\sigma$  a rotação de seu vértice simétrico, então invertendo todas direções no “refletido” caminho induzido por  $(G, \sigma)$  dá um caminho induzido por  $(G, \sigma')$ . As figuras correspondentes das identificações no polígono de 18 arestas a partir de  $(G, \sigma')$  são imagens espelho em relação a identificação feita a partir de  $(G, \sigma)$ .

Além disso, todos vértices de um subgrafo próprio de  $G$ , com limites uma componente de  $\mathbb{H}^2 \setminus G$  na Figura 2.1, não podem ter a mesma rotação, pois buscamos caminhos fechados de comprimento 18.

Portanto:

- Se os vértices  $V_1, V_2$  são conectados por duas arestas, então eles são de rotações diferentes. Ambas escolhas ocasionam a mesma identificação.
- Se  $V_1, V_2, V_3$  são vértices de um triângulo, então eles não podem ter todos a mesma rotação.
- Se dois triângulos têm uma aresta em comum, então os vértices da aresta comum não podem ter a mesma rotação.

Usando estas observações, encontraremos as próximas rotações para os grafos  $A, B, C, D$  e  $E$  que determinam identificações diferentes para o polígono de 18 arestas.

Para o primeiro caso mostrado abaixo (grafo  $A$ ), faremos uma descrição mais detalhada, pois a compreensão do método utilizado é de suma importância em nosso trabalho.

### O grafo $A$

É suficiente considerar as rotações da Figura 2.2.

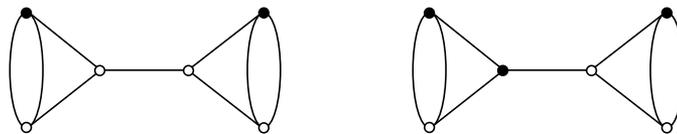


Figura 2.2: Rotações no grafo  $A$ . Figura reproduzida da página 454 em [10].

Eles dão a mesma identificação:

$$8 \ 2 \ 3 \ 3 \ 14 \ 2 \ 13 \ 13 \ 14 \ 8 \ 2 \ 3 \ 3 \ 14 \ 2 \ 13 \ 13 \ 14 \quad (2.2)$$

Esta sequência é referida por (I), e apresentada na Figura 2.14.

Mostraremos agora como encontrar esta sequência (2.2) que corresponde as identificações (emparelhamento) no polígono de 18 arestas.

Considere o primeiro grafo  $A$  da Figura 2.2 e observe que este satisfaz as condições citadas acima. Rotule as arestas do grafo  $A$  por  $a, b, \dots, i$  (ver Figura 2.3). Considere os caminhos fechados em cada aresta nos dois sentidos, ou seja, como cada aresta possui dois vértices extremos, considere os caminhos indo no sentido dos extremos. Lembre-se que esses caminhos são de forma que as condições (a) e (b) sejam válidas e que retorne ao vértice inicial por uma direção oposta, ou seja, que não retorne pela aresta do início do caminho. Denote por  $C_y$  o comprimento do caminho em cada aresta  $y = a, b, \dots, i$ . Teremos então dois números correspondentes ao comprimento  $C_y$ , um para cada sentido. Na Figura 2.3, distinguimos esses caminhos por dois tipos

de setas. A numeração em cada seta, corresponde ao comprimento do caminho em cada instante, até que este caminho seja fechado, logo a última numeração corresponde ao comprimento do caminho fechado.

Por exemplo, no primeiro grafo da Figura 2.3, calculamos o comprimento dos caminhos da aresta **a** nos dois sentidos. Neste caso, a seta escura corresponde ao caminho começando para “cima” e a outra seta para o caminho começando para “baixo”. Iniciando na aresta **a**, percorrendo o caminho para cima encontramos um vértice cheio, assim devemos ir para a aresta da esquerda e numerá-la por 1 (para contar o caminho). Em seguida, encontramos um vértice vazio, assim devemos ir para a aresta da direita e numerá-la por 2. O próximo vértice no caminho é um vértice vazio, logo devemos ir para a aresta da direita e numerá-la por 3. Agora chegamos ao vértice inicial por uma direção oposta, ou seja, temos um caminho fechado de comprimento 3, que satisfaz as condições citadas acima. Logo,  $C_a = 3$ . Da mesma forma, calcula-se o comprimento do caminho partindo da aresta **a** para “baixo” e obtém-se  $C_a = 13$ . Dessa forma, calculamos o comprimento dos caminhos da aresta **a** e das demais arestas na Figura 2.3. Agora, escolha um vértice de partida e um sentido e obtenha um caminho fechado de forma que todas as arestas sejam percorridas nos dois sentidos. Este caminho terá comprimento 18, já que agora todas as arestas são computadas (duas vezes). Em cada aresta percorrida, anote o comprimento do caminho (feito na Figura 2.3) dessa aresta de acordo com o sentido. Dessa forma, obtém-se uma sequência de 18 números. Coloque a sequência (2.2) no polígono  $\mathcal{P}$  no sentido anti-horário e identifique as arestas correspondentes  $x$  com  $16 - x$  observando que, como cada aresta do grafo corresponde a identificação de duas arestas do polígono, então o valor  $C_y = x$  do comprimento do caminho de uma aresta de  $G$ , deve ser identificado com o comprimento do caminho  $C_y = (16 - x)$  da mesma aresta  $y$ , para cada  $y = a, b, \dots, i$ . Assim, temos um emparelhamento para o polígono  $\mathcal{P}$  mostrado na Figura 2.14 rotulado por (I) (ilustrado também na Figura 2.4). Por exemplo, se começarmos o caminho fechado pelo vértice  $u$  na direção da aresta **e**, como pode ser visto no último grafo da Figura 2.3, a sequência é obtida pelos seguintes passos:

1. No sentido representado por 1 na aresta **e**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_e = 8$ , logo este é o primeiro termo da sequência.
2. A próxima aresta do caminho é a aresta **c** no sentido representado por 2, da qual vimos que o comprimento do caminho é  $C_c = 2$ , logo este é o segundo termo da sequência.
3. Em seguida, vamos para a aresta **b** no sentido representado por 3, da qual vimos que o comprimento do caminho é  $C_b = 3$ , logo este é o terceiro termo da sequência.

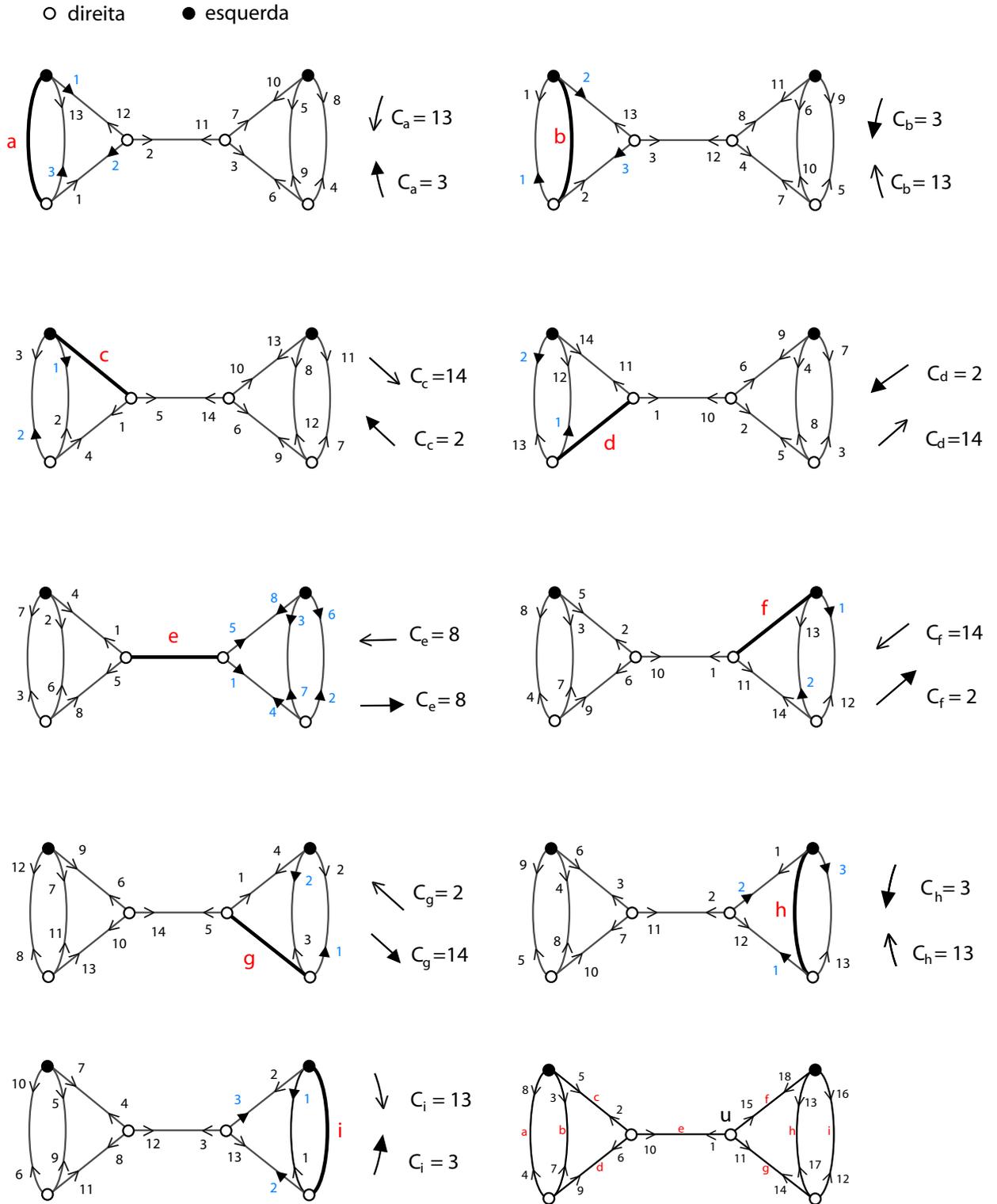


Figura 2.3: Caminhos fechados no grafo A.

4. Agora, vamos para a aresta **a** no sentido representado por 4, da qual vimos que o comprimento do caminho é  $C_a = 3$ , logo este é o quarto termo da sequência.
5. No sentido representado por 5 na aresta **c**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_c = 14$ , logo este é o quinto termo da sequência.
6. No sentido representado por 6 na aresta **d**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_d = 2$ , logo este é o sexto termo da sequência.
7. No sentido representado por 7 na aresta **b**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_b = 13$ , logo este é o sétimo termo da sequência.
8. No sentido representado por 8 na aresta **a**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_a = 13$ , logo este é o oitavo termo da sequência.
9. No sentido representado por 9 na aresta **d**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_d = 14$ , logo este é o nono termo da sequência.
10. No sentido representado por 10 na aresta **e**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_e = 8$ , logo este é o décimo termo da sequência.
11. No sentido representado por 11 na aresta **g**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_g = 2$ , logo este é o décimo primeiro termo da sequência.
12. No sentido representado por 12 na aresta **i**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_i = 3$ , logo este é o décimo segundo termo da sequência.
13. No sentido representado por 13 na aresta **h**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_h = 3$ , logo este é o décimo terceiro termo da sequência.
14. No sentido representado por 14 na aresta **g**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_g = 14$ , logo este é o décimo quarto termo da sequência.
15. No sentido representado por 15 na aresta **f**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_f = 2$ , logo este é o décimo quinto termo da sequência.
16. No sentido representado por 16 na aresta **i**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_i = 13$ , logo este é o décimo sexto termo da sequência.
17. No sentido representado por 17 na aresta **h**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_h = 13$ , logo este é o décimo sétimo termo da sequência.
18. No sentido representado por 18 na aresta **f**, o comprimento do caminho dessa aresta é  $C_f = 14$ , logo este é o décimo oitavo termo da sequência.

Explicaremos agora, como fazer a identificação entre as arestas do polígono. Primeiro distribua a sequência (2.2) no polígono  $\mathcal{P}$  no sentido anti-horário (ou horário), digamos,  $\tau_1$  e identifique as arestas da seguinte forma, veja Figura 2.4:

1. A aresta  $\tau_1$  correspondente ao primeiro termo da sequência, dever ser conectada à aresta  $\tau_{10}$ , pois no passo 1 encontramos  $C_e = 8$  e seu correspondente  $C_e = 16 - 8 = 8$  é o décimo termo da sequência.
2. A aresta  $\tau_2$  correspondente ao segundo termo da sequência, dever ser conectada à aresta  $\tau_5$ , pois no passo 2 encontramos  $C_c = 2$  e seu correspondente  $C_c = 16 - 2 = 14$  é o quinto termo da sequência.
3. A aresta  $\tau_3$  correspondente ao terceiro termo da sequência, dever ser conectada à aresta  $\tau_7$ , pois no passo 3 encontramos  $C_b = 3$  e seu correspondente  $C_b = 16 - 3 = 13$  é o sétimo termo da sequência.
4. A aresta  $\tau_4$  correspondente ao quarto termo da sequência, dever ser conectada à aresta  $\tau_8$ , pois no passo 4 encontramos  $C_a = 3$  e seu correspondente  $C_a = 16 - 3 = 13$  é o oitavo termo da sequência.
5. A aresta  $\tau_6$  correspondente ao sexto termo da sequência, dever ser conectada à aresta  $\tau_9$ , pois no passo 6 encontramos  $C_d = 2$  e seu correspondente  $C_d = 16 - 2 = 14$  é o nono termo da sequência.
6. A aresta  $\tau_{11}$  correspondente ao décimo primeiro termo da sequência, dever ser conectada à aresta  $\tau_{14}$ , pois no passo 11 encontramos  $C_g = 2$  e seu correspondente  $C_g = 16 - 2 = 14$  é o décimo quarto termo da sequência.
7. A aresta  $\tau_{12}$  correspondente ao décimo segundo termo da sequência, dever ser conectada à aresta  $\tau_{16}$ , pois no passo 12 encontramos  $C_i = 3$  e seu correspondente  $C_i = 16 - 3 = 13$  é o décimo sexto termo da sequência.
8. A aresta  $\tau_{13}$  correspondente ao décimo terceiro termo da sequência, dever ser conectada à aresta  $\tau_{17}$ , pois no passo 13 encontramos  $C_h = 3$  e seu correspondente  $C_h = 16 - 3 = 13$  é o décimo sétimo termo da sequência.
9. A aresta  $\tau_{15}$  correspondente ao décimo quinto termo da sequência, dever ser conectada à aresta  $\tau_{18}$ , pois no passo 15 encontramos  $C_f = 2$  e seu correspondente  $C_f = 16 - 2 = 14$  é o décimo oitavo termo da sequência.

Assim, temos um emparelhamento para o polígono  $\mathcal{P}$  mostrado na Figura 2.4.

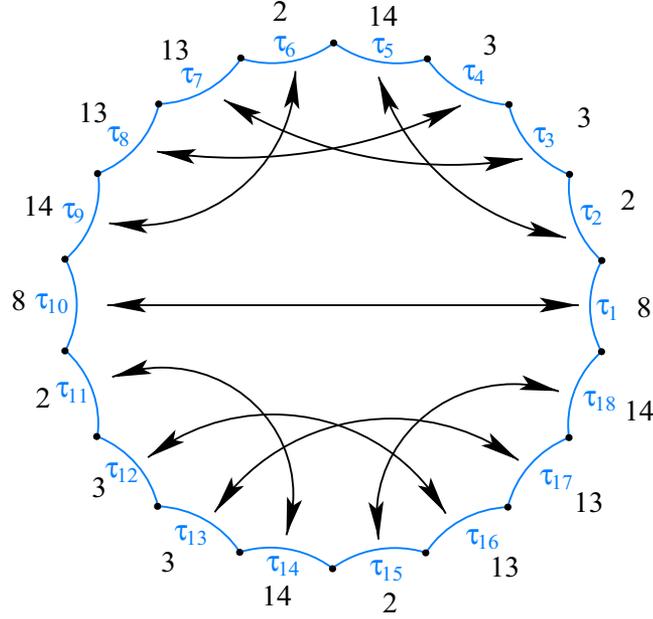


Figura 2.4: Emparelhamento de arestas do polígono de 18 arestas gerado pelo grafo A com as rotações da Figura 2.2.

Se começássemos por outra aresta no mesmo sentido (neste caso o sentido não interfere), iríamos obter a mesma sequência, porém com uma permutação cíclica. Analogamente, considerando a rotação do segundo grafo A da Figura 2.2 teremos a sequência cíclica (2.2).

**Observação 2.2.3** *Note que, a aresta que se calcula o comprimento não pertence ao caminho então esta não foi computada. E, cada uma das outras arestas foi percorrida uma única vez em cada sentido. Assim, se para um sentido  $C_y = x$  então para o outro sentido temos  $C_y = 16 - x$ .*

De acordo com a Observação 2.2.3, podemos simplificar os cálculos. Pois, se já está calculado o comprimento  $x$  de um caminho fechado para um sentido de uma aresta basta fazer  $16 - x$  para encontrar o comprimento do caminho para o outro sentido.

### O grafo B

Devido às observações acima, é suficiente considerar apenas os casos de dois ou de três vértices cheios. Os dois vértices cheios devem situar-se um em cada triângulo e em cada quadrângulo, no mínimo um no exterior (quina) de B. Isso deixa as duas possibilidades da Figura 2.5.

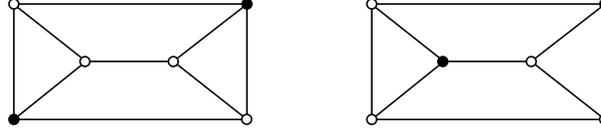


Figura 2.5: Rotações no grafo B. Figura reproduzida da página 455 em [10].

A primeira dá a identificação:

$$8 \ 11 \ 3 \ 12 \ 5 \ 11 \ 13 \ 4 \ 5 \ 8 \ 11 \ 3 \ 12 \ 5 \ 11 \ 13 \ 4 \ 5 \quad (2.3)$$

Esta sequência é referida por (VIII), e apresentada na Figura 2.14. O segundo caso, corresponde à imagem espelho.

Mostraremos o primeiro caso. O segundo é feito de forma análoga e obtem-se a sequência cíclica

$$8 \ 11 \ 12 \ 3 \ 5 \ 11 \ 4 \ 13 \ 5 \ 8 \ 11 \ 12 \ 3 \ 5 \ 11 \ 4 \ 13 \ 5 \quad (2.4)$$

Seguindo as mesmas considerações que fizemos anteriormente para o grafo  $A$  e agora utilizando também a Observação 2.2.3, obtemos os comprimentos dos caminhos fechados de todas as arestas do grafo  $B$ , como mostra a Figura 2.6. E, se começarmos o caminho fechado pelo vértice  $u$  da aresta  $e$ , como pode ser visto no último grafo da Figura 2.6, obtemos exatamente a sequência (2.3).

Para três vértices cheios estes permanecem os casos da Figura 2.7, pois os outros não dão um caminho fechado de comprimento 18. O último caso na Figura 2.7 é obtido do primeiro pela reflexão e mudança de rotação.

Todos eles dão identificações:

$$8 \ 12 \ 3 \ 6 \ 12 \ 5 \ 13 \ 5 \ 6 \ 8 \ 10 \ 11 \ 3 \ 11 \ 4 \ 10 \ 13 \ 4 \quad (2.5)$$

A sequência é referida por (V), e apresentada na Figura 2.14.

A Figura 2.8 mostra uma forma de encontrar a sequência (2.5) para a primeira rotação do grafo  $B$  da Figura 2.7.

### O grafo $C$

É suficiente considerar os casos com um ou dois vértices cheios sobre os dois triângulos, exatamente um sobre a aresta em comum. Devido à simetria, podemos considerar somente as rotações da Figura 2.9.

Para o primeiro grafo da Figura 2.9 temos a seguinte identificação:

$$7 \ 9 \ 2 \ 11 \ 11 \ 14 \ 3 \ 4 \ 9 \ 3 \ 13 \ 7 \ 12 \ 13 \ 2 \ 5 \ 5 \ 14 \quad (2.6)$$

A Figura 2.10 mostra uma forma de encontrar a sequência (2.6). A sequência formada é referida por (VII), e apresentada na Figura 2.14.

Para o segundo grafo da Figura 2.9 temos a seguinte identificação (ver Figura 2.11):

$$8 \ 9 \ 2 \ 10 \ 10 \ 14 \ 3 \ 9 \ 3 \ 8 \ 13 \ 7 \ 13 \ 2 \ 6 \ 6 \ 14 \ 7 \quad (2.7)$$

Esta é rotulado por (IV) e mostrado na Figura 2.14.

#### O grafo $D$

É suficiente considerar a rotação da Figura 2.12. Para o primeiro grafo da Figura 2.12 temos a seguinte identificação:

$$8 \ 2 \ 12 \ 12 \ 14 \ 2 \ 4 \ 4 \ 14 \ 8 \ 2 \ 12 \ 12 \ 14 \ 2 \ 4 \ 4 \ 14$$

A sequência é referida por (III), e apresentada na Figura 2.14.

Para o segundo grafo da Figura 2.12 temos a seguinte identificação:

$$8 \ 2 \ 8 \ 8 \ 14 \ 2 \ 8 \ 8 \ 14 \ 8 \ 2 \ 8 \ 8 \ 14 \ 2 \ 8 \ 8 \ 14$$

Esta sequência é rotulado por (II) e mostrado na Figura 2.14.

#### O grafo $E$

O grafo  $E$  é equivalente à um hexágono com diâmetros. É suficiente considerar os casos de um, dois ou três vértices cheios.

Se existem exatamente dois vértices cheios, eles nem podem ficar adjacentes nem opostos diametralmente para cada outro vértice. O caso restante é apresentado na Figura 2.13 com o caso de um vértice cheio. Três vértices não dão solução, pois os caminhos fechados não são de comprimento 18.

Ambas rotações da Figura 2.13 dão as identificações:

$$4 \ 12 \ 4 \ 6 \ 10 \ 12 \ 4 \ 12 \ 4 \ 6 \ 10 \ 12 \ 4 \ 12 \ 4 \ 6 \ 10 \ 12$$

Esta sequência é referida por (VI), e apresentada na Figura 2.14. □

## 2.3 Polígonos Fundamentais com 18 arestas para uma superfície de gênero 2

Combinando os resultados das seções anteriores obtemos o seguinte teorema:

**Teorema 2.3.1** *Existe, sob a imagem espelho, 8 formas essencialmente diferentes de emparelhar as arestas de um polígono  $\mathcal{P}$  de 18 arestas tal que, a superfície correspondente  $S$  é orientável de gênero 2 e o grafo induzido formado pela fronteira de  $\mathcal{P}$  tem 9*

*arestas e 6 vértices, onde cada vértice possui exatamente 3 arestas.*

**Demonstração:** Os possíveis grafos  $G$  estão na Proposição 2.1.1, que são os cinco grafos da Figura 2.1. Na Proposição 2.2.2, são dados os oito emparelhamentos para  $\mathcal{P}$ , obtidos por caminhos fechados em  $G$ .

Os padrões de identificação para  $\mathcal{P}$  estão desenhados na Figura 2.15. □

**Observação 2.3.2** *Note que todo ciclo de vértices de  $\mathcal{P}$  tem comprimento 3, já que esses são associados a grafos trivalentes. Em outras palavras, cada vértice de  $G$  corresponde a um ciclo de  $\mathcal{P}$ .*

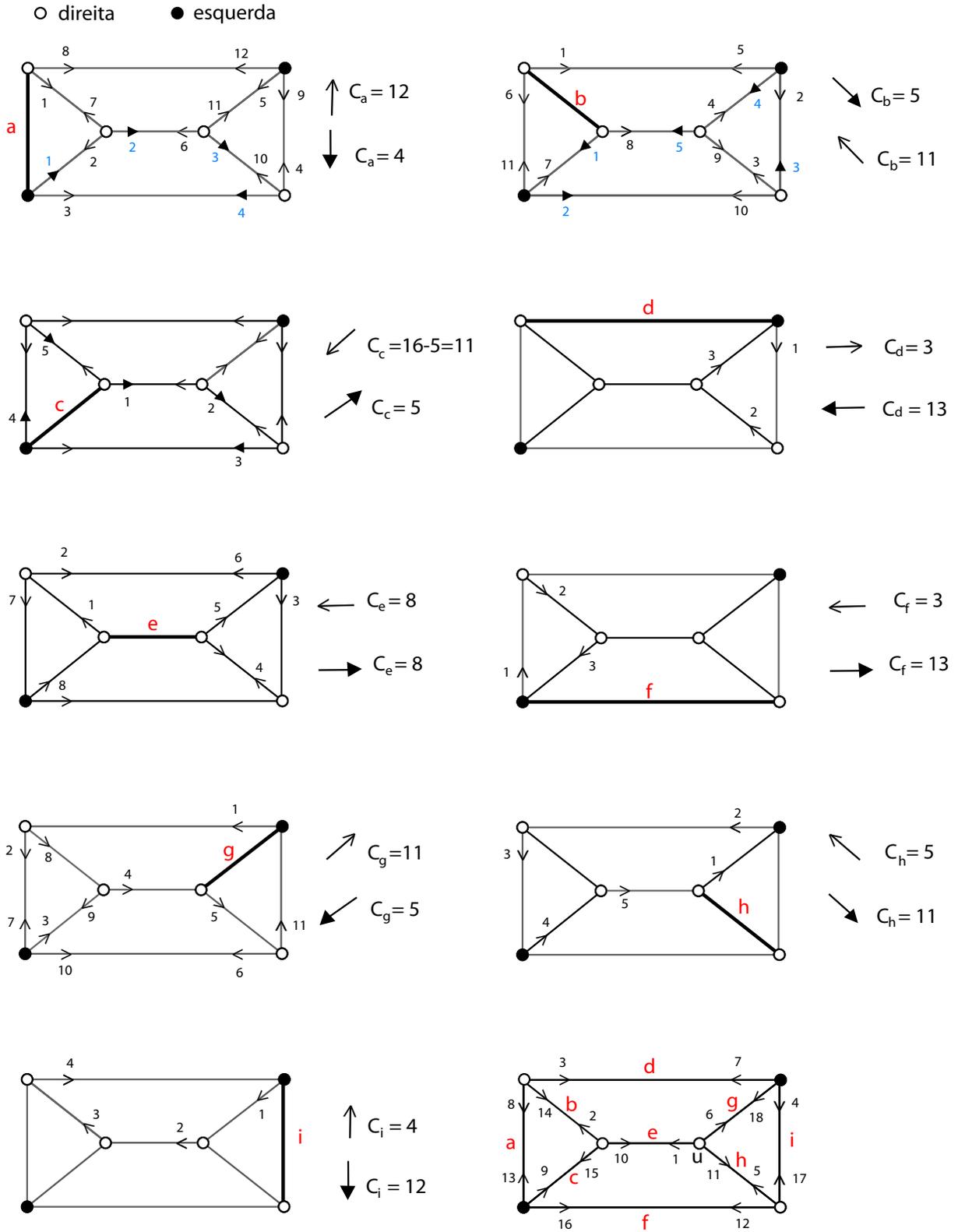


Figura 2.6: Caminhos fechados no grafo B.

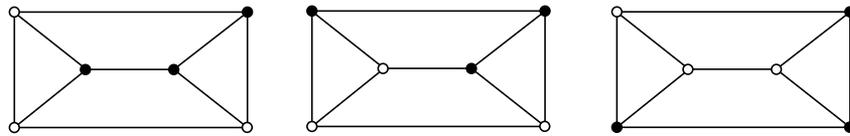


Figura 2.7: Rotações no grafo B. Figura reproduzida da página 455 em [10].

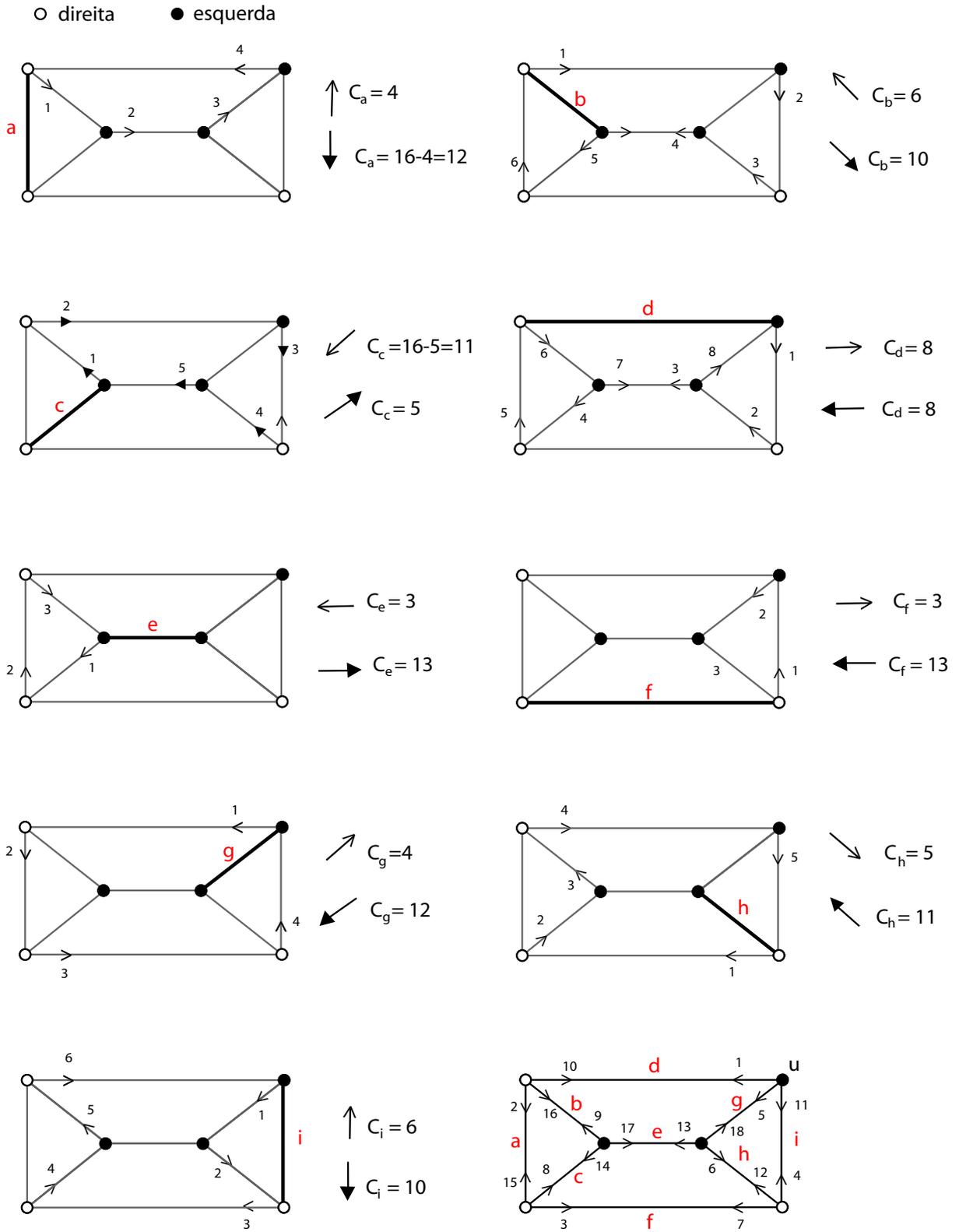


Figura 2.8: Caminhos fechados no grafo B.

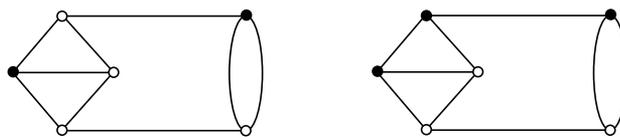


Figura 2.9: Rotações no grafo C. Figura reproduzida da página 455 em [10].

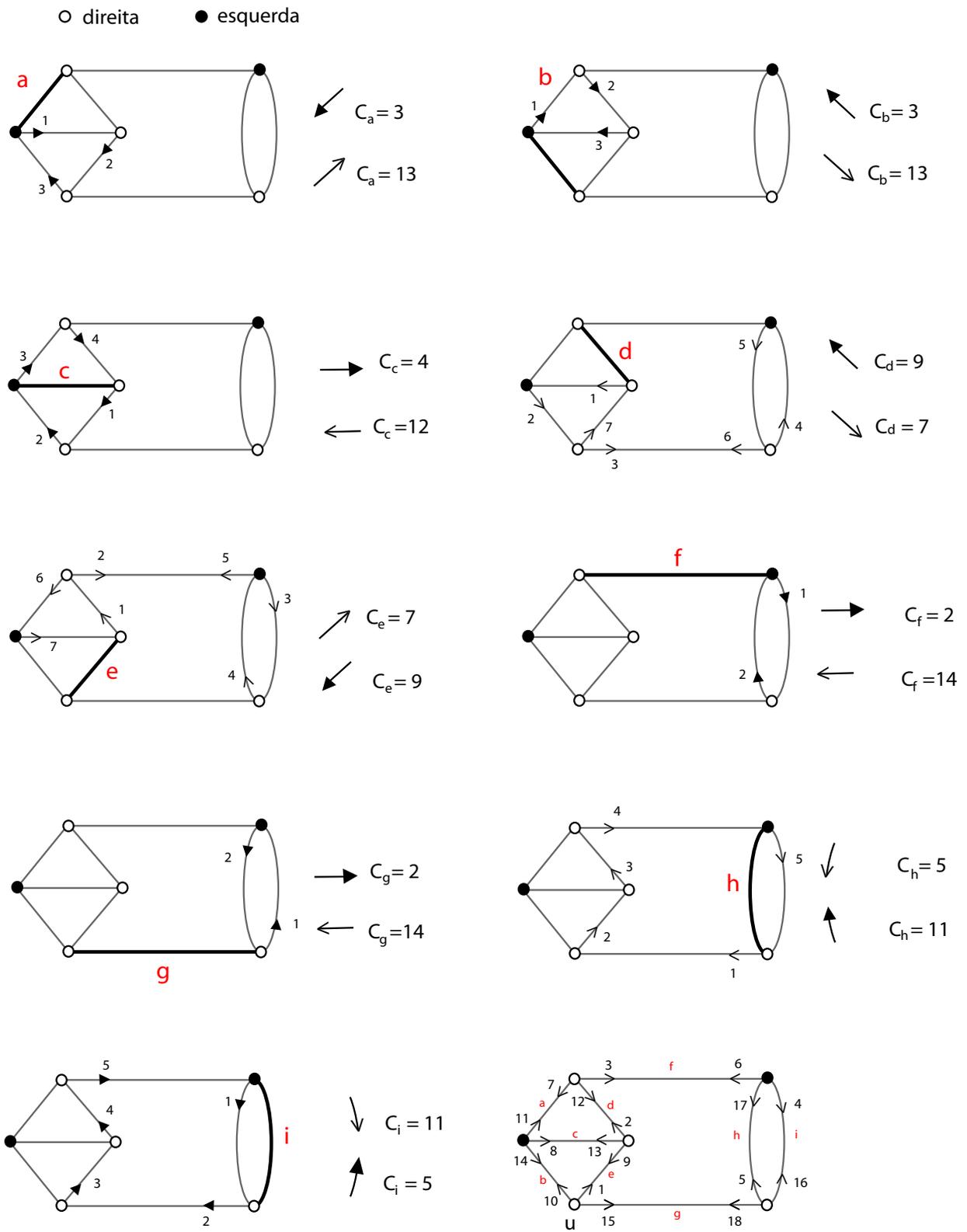


Figura 2.10: Caminhos fechados no grafo C.

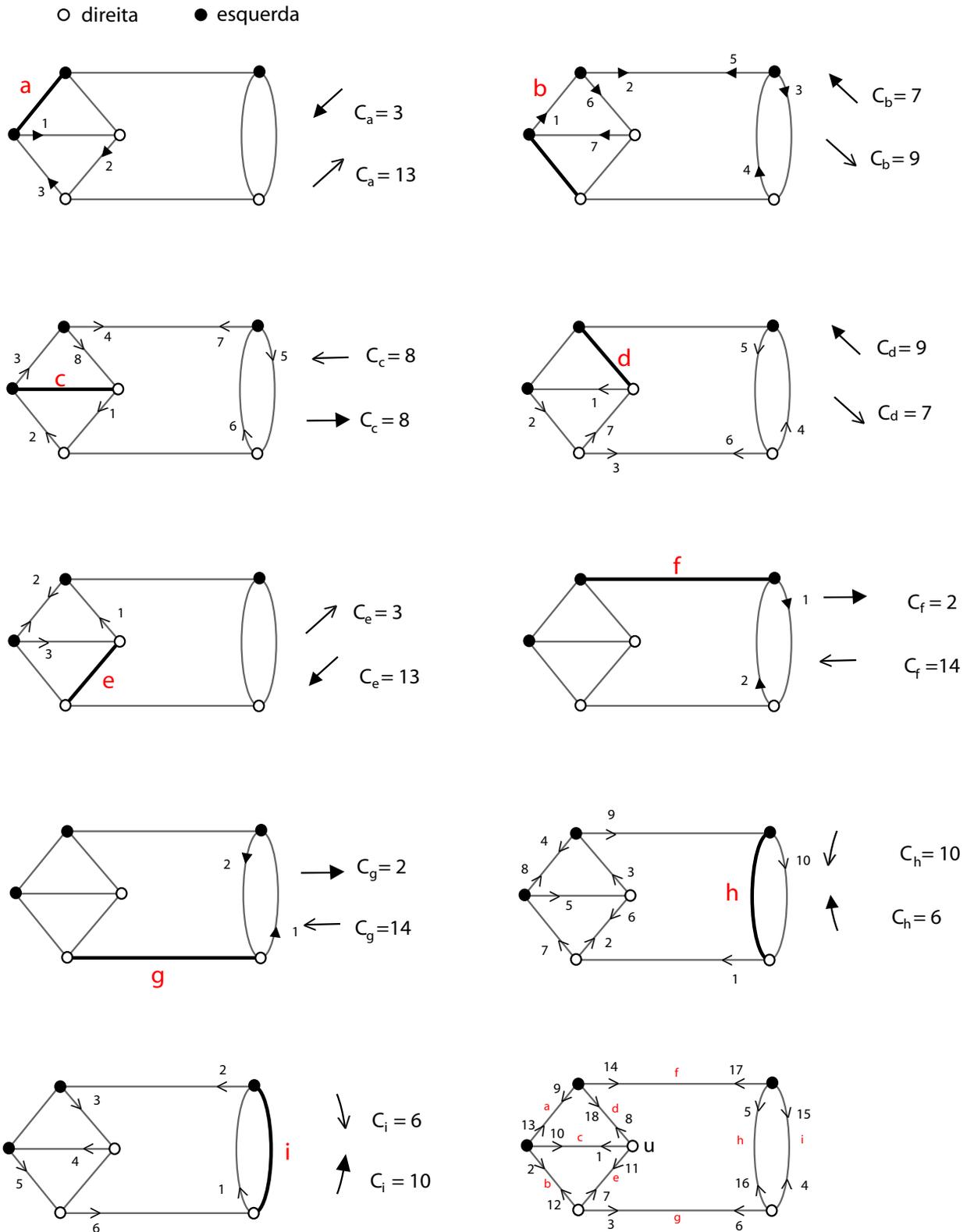


Figura 2.11: Caminhos fechados no grafo C.

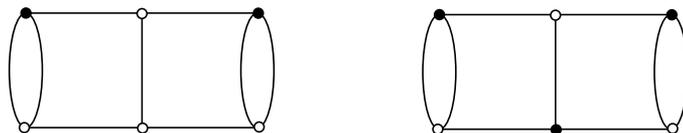


Figura 2.12: Rotações no grafo D. Figura reproduzida da página 456 em [10].

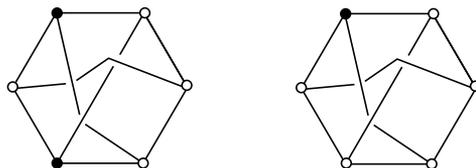


Figura 2.13: Rotações no grafo E. Figura reproduzida da página 456 em [10].

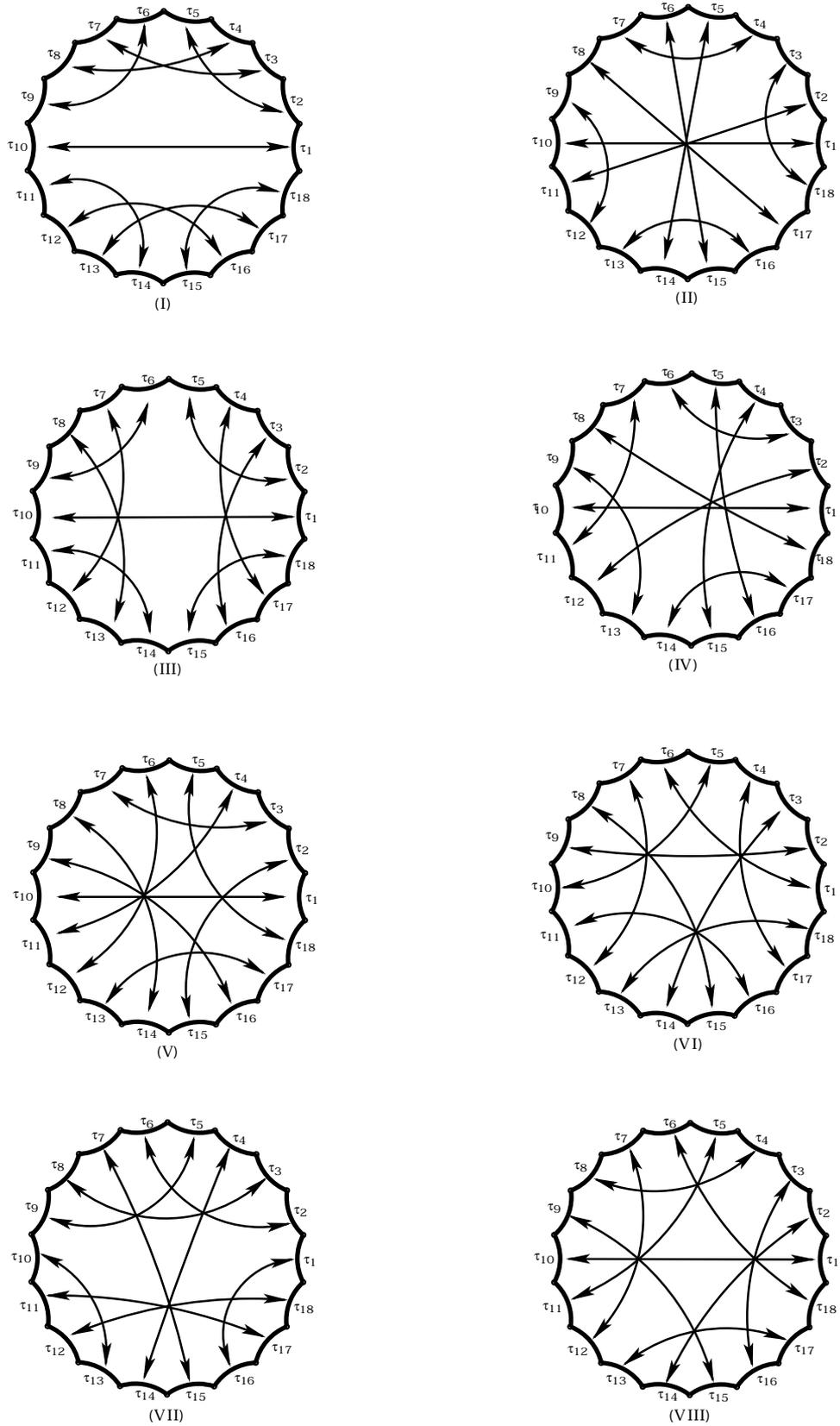


Figura 2.14: Emparelhamentos de arestas do polígono de 18 arestas. Figura baseada na Figura da página 457 em [10].

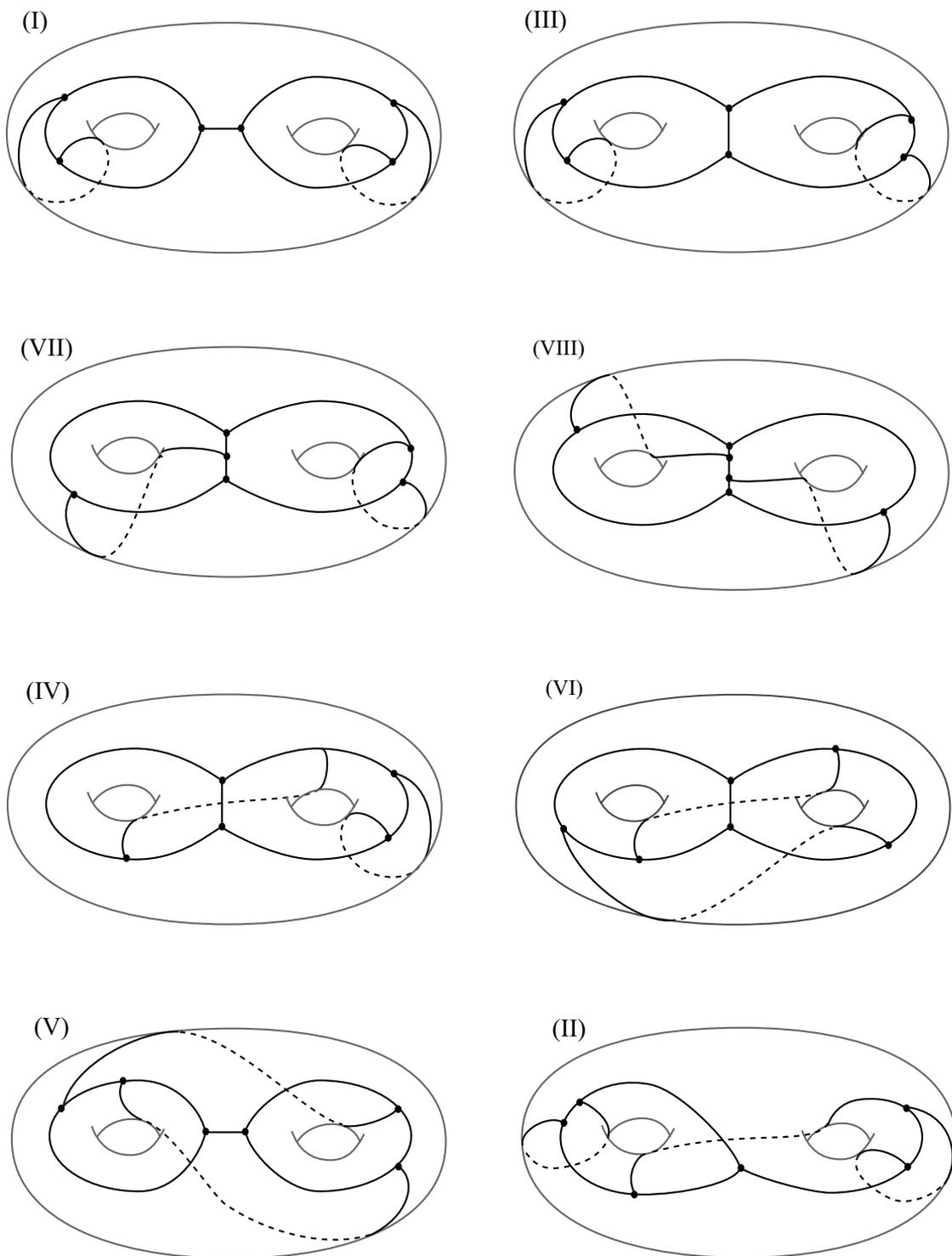


Figura 2.15: Bitoros correspondentes aos emparelhamentos da Figura 2.14. Figura baseada na figura da página 459 em [10].

# Capítulo 3

## Emparelhamento de arestas de polígonos com $(12g-6)$ arestas

Neste capítulo construiremos, através de grafos trivalentes, emparelhamentos de arestas de polígonos fundamentais hiperbólicos com  $12g - 6$  arestas, tais que todos os ciclos de vértices tenham comprimento 3.

Consideremos os polígonos  $\mathcal{P}_{12g-6}$  com  $12g - 6$  arestas. O caso de  $g = 2$  vimos no capítulo anterior, baseado em [10], os possíveis diferentes emparelhamentos de arestas para polígonos fundamentais hiperbólicos através das associações entre grafos, polígonos e superfícies. Para o caso  $g = 3$ , Gou Nakamura, em [17], fez um trabalho semelhante e veremos parte deste na Seção 3.1. Além destes, apresentaremos (Seção 3.1.1) os casos que nós construímos para  $g = 4$  e 5.

### 3.1 Polígonos Fundamentais para superfícies de gênero 3

Com ajuda do computador, Lee Mosher em [15] mostrou que existem 1726 tipos diferentes de emparelhamentos de polígonos fundamentais  $\mathcal{P}_{12g-6}$  para fazer uma superfície de gênero 3. Se desconsiderarmos as imagens espelho desses padrões, então são essencialmente 927 padrões de emparelhamentos. Em [17], Gou Nakamura exhibe completamente os 927 padrões de emparelhamentos. Os métodos que Nakamura usou são semelhantes aos de [10]. Se identificarmos cada par de arestas dos polígonos fundamentais regulares de 30 arestas para fazer uma superfície compacta  $S$  do gênero três, então duas arestas do polígono tornam-se uma curva em  $S$  e três vértices do polígono tornam-se um ponto em  $S$ . Portanto, temos uma figura em  $S$  com 10 pontos conectados por 15 curvas de tal forma que cada ponto é o ponto final de três curvas, ou seja, um grafo trivalente

com 10 vértices e 15 arestas (veja a Figura 3.1).

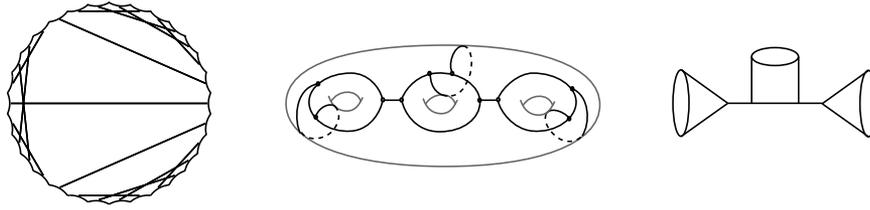


Figura 3.1: Exemplo de um grafo imerso em uma superfície de gênero 3. Figura reproduzida da página 89 em [17].

Seja  $G$  um grafo trivalente com 10 vértices e 15 arestas, tal que  $G$  pode ser imerso em uma superfície compacta  $S$  de gênero 3 de forma que  $S \setminus G$  seja uma única componente conexa. A fim de obter esses grafos, vamos numerar os vértices de 1 a 10 e conectar os 10 vértices por 15 arestas tal que cada vértice tenha três arestas. Primeiro, temos dois casos:

(A) o vértice 1 é conectado com três vértices diferentes 2, 3 e 4.

ou

(B) o vértice 1 é ligado a dois vértices diferente 2 e 3 (podemos supor que 1 e 2 são ligados por duas arestas diferentes) (veja Figura 3.2).

Em seguida, temos três casos a partir de (A) para ligar o vértice 2, com três vértices diferentes do seguinte modo:

(i) 2 está ligado com 3 e 4;

(ii) 2 está ligado com 3 e 5;

(iii) ou 2 está ligado com 5 e 6 (veja a Figura 3.3).

Em (A) é suficiente considerar os grafos de vértices distintos que não estão diretamente ligados por duas arestas.

Em (B), temos dois casos: 2 está ligado com 3 ou 2 está ligado com 4 (veja Figura 3.4).

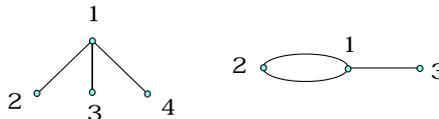


Figura 3.2: (A) e (B). Figura reproduzida da página 91 em [17].

Se repetirmos este processo para os outros vértices 3, 4, ..., 10, então temos grafos conexos trivalentes com 10 vértices e com 15 arestas. Para examinar se cada um desses

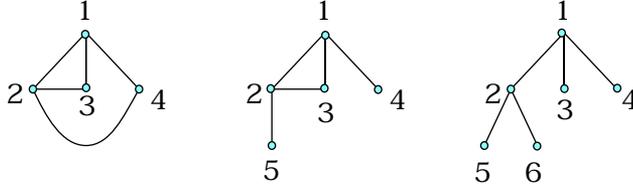


Figura 3.3: Três casos de (A). Figura reproduzida da página 91 em [17].

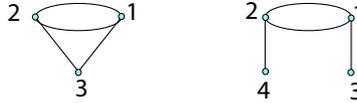


Figura 3.4: Dois casos de (B). Figura reproduzida da página 91 em [17].

grafos  $G$  é imerso em  $S$ , com complemento conexo, deve-se analisar se existem caminhos fechados em  $G$ , na condição que caminhamos em cada aresta de  $G$  exatamente uma vez em cada sentido e que não voltaremos imediatamente na mesma aresta da qual viemos (condições (a) e (b) do capítulo anterior). Para isso, deve-se atribuir a cada vértice uma rotação. Atribuindo as rotações dos 10 vértices de cada grafo Nakamura mostrou, por computador, que os grafos que possuem caminhos fechados são os que estão na Figura 3.5. Assim, em [17] verifica-se o seguinte resultado:

**Proposição 3.1.1** [17] *Seja  $\mathcal{G}$  o conjunto de grafos trivalentes conexos  $G$  com 10 vértices e 15 arestas tal que  $G$  pode ser imerso em uma superfície compacta de gênero três e que  $S \setminus G$  é simplesmente conexa. Então  $\mathcal{G}$  é composta dos seguintes 65 grafos (ver Figura 3.5).*

### 3.1.1 Caminhos fechados em grafos trivalentes

Consideremos alguns dos grafos da Figura 3.5 e encontremos então as rotações que induzem um caminho fechado no grafo  $G$ , ou seja, na condição que caminhamos em cada aresta de  $G$  exatamente uma vez em qualquer sentido e que não retornemos imediatamente na mesma aresta da qual viemos (condições (a) e (b) do capítulo anterior). Vamos verificar que o procedimento que deduzimos para o caso  $g=2$ , para encontrar os caminhos fechados também é válido para o caso  $g=3$ . Considere um polígono  $\mathcal{P}_{12g-6} \subset \mathbb{D}^2$  com  $12g - 6$  arestas,  $g = 3$ , onde  $\mathbb{D}^2$  representa o plano hiperbólico. Denotamos seus vértices no sentido anti-horário por  $\{v_1, v_2, \dots, v_{30}\}$  e suas arestas por  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{30}\}$  onde  $\tau_i$  é o segmento geodésico iniciando em  $v_i$  e findando em  $v_{i+1}$ ,  $imod(12g - 6)$ .

**Exemplo 3.1.2** *Considere o grafo B-14 da Figura 3.5. Vamos atribuir uma rotação a este grafo que satisfaça as condições citadas no texto, ver Figuras 3.6 e 3.7. Assim, temos a identificação:*

24 26 12 16 2 4 4 26 10 2 24 24 26 4 6 16 10 4 24 18 12 22 24 2 4 4 26 18 2 24

As Figuras 3.6 e 3.7 mostram uma forma de encontrar a sequência acima. Agora, coloque essa sequência no polígono  $\mathcal{P}_{30}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e depois identifique as arestas correspondentes  $\{x, 28 - x\}$ . Note que, como cada aresta do grafo corresponde a identificação de duas arestas do polígono, então o valor  $x$  do caminho de uma aresta de  $G$  deve ser identificado com o  $28 - x$  da mesma aresta. Assim, temos um emparelhamento  $\Phi_{30}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{30}$  mostrado na Figura 3.8.

**Exemplo 3.1.3** *Considere o grafo B-10 da Figura 3.5 vamos atribuir uma rotação a este grafos de forma a obter caminhos fechados, ou seja, deve satisfazer as condições e as observações feitas no capítulo 2, ver Figura 3.9. Assim, temos a identificação:*

25 26 20 8 2 3 3 26 2 25 25 26 20 8 2 3 3 26 2 25 25 26 20 8 2 3 3 26 2 25

Colocando essa sequência no polígono  $\mathcal{P}_{30}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e depois identificando as arestas correspondentes  $\{x, 28 - x\}$ , temos um emparelhamento  $\Phi_{30}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{30}$  mostrado na Figura 3.10.

**Exemplo 3.1.4** *Considere o grafo A-3 da Figura 3.5 vamos atribuir uma rotação a este grafos de forma a obter caminhos fechados. Considere então a rotação exibida nas Figuras 3.11 e 3.12, assim temos a seguinte identificação:*

4 5 11 23 3 24 8 23 25 16 9 11 4 14 17 20 12 24 3 4 19 3 25 17 24 25 12 5 14 16

As figuras 3.11 e 3.12 mostram uma forma de encontramos a sequência acima. Colocando essa sequência no polígono  $\mathcal{P}_{30}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e depois identificando as arestas correspondentes  $\{x, 28 - x\}$ , temos um emparelhamento  $\Phi_{30}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{30}$ .

**Exemplo 3.1.5** *Considere o grafo B-1 da Figura 3.5 vamos atribuir uma rotação a este grafos de forma a obter caminhos fechados. Considere então a rotação exibida na Figura 3.13, fazendo o procedimento análogo ao do exemplo anterior, temos a seguinte*

*identificação:*

8 2 3 3 26 2 25 25 26 20 2 4 4 26 14 2 24 24 26 8 2 3 3 26 2 25 25 26 20 14

Colocando essa sequência no polígono  $\mathcal{P}_{30}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e depois identificando as arestas correspondentes  $\{x, 28 - x\}$ , temos um emparelhamento  $\Phi_{30}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{30}$ .

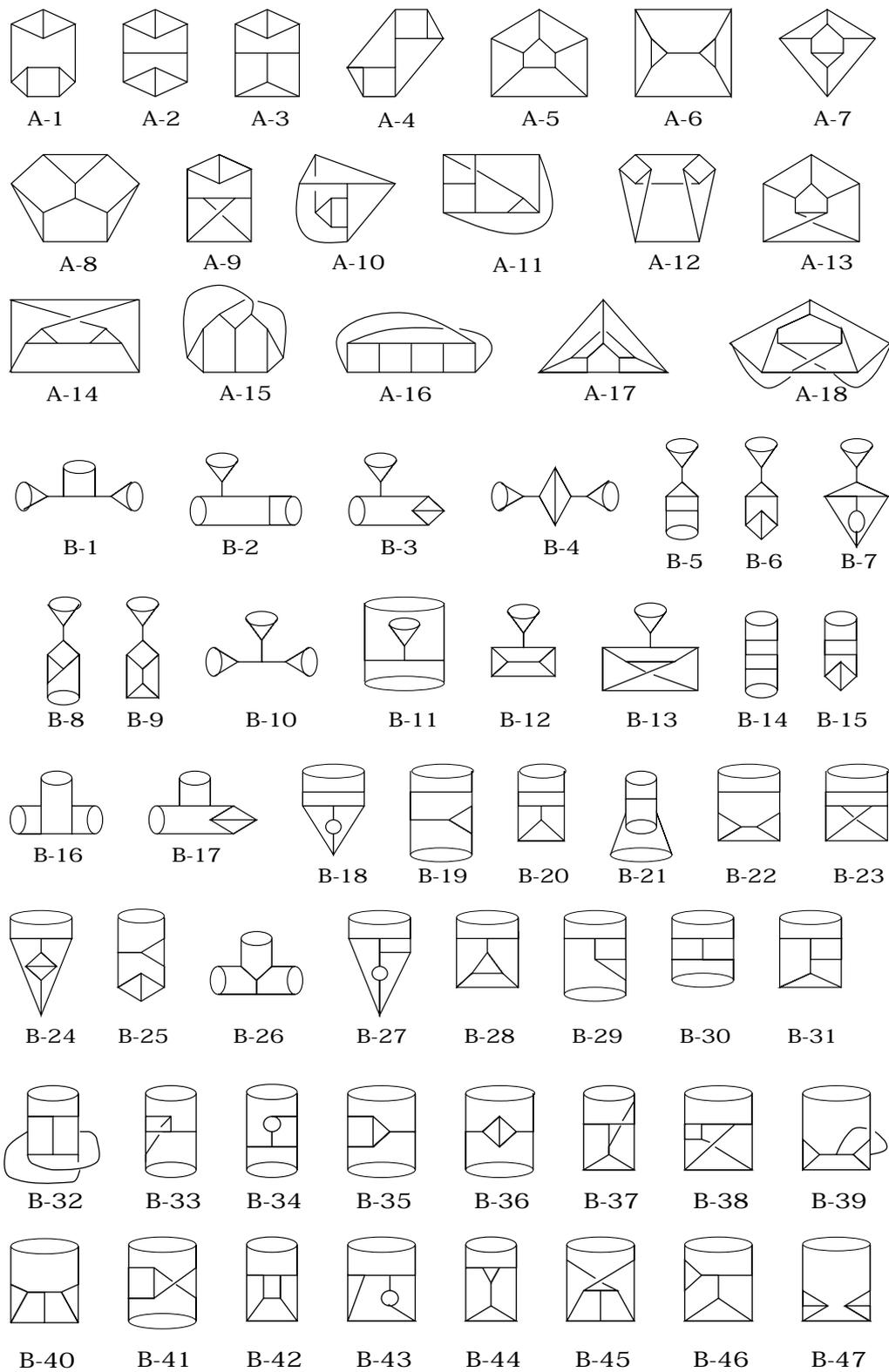


Figura 3.5: Grafos em  $\mathcal{G}$ . Figura reproduzida da página 90 em [17]



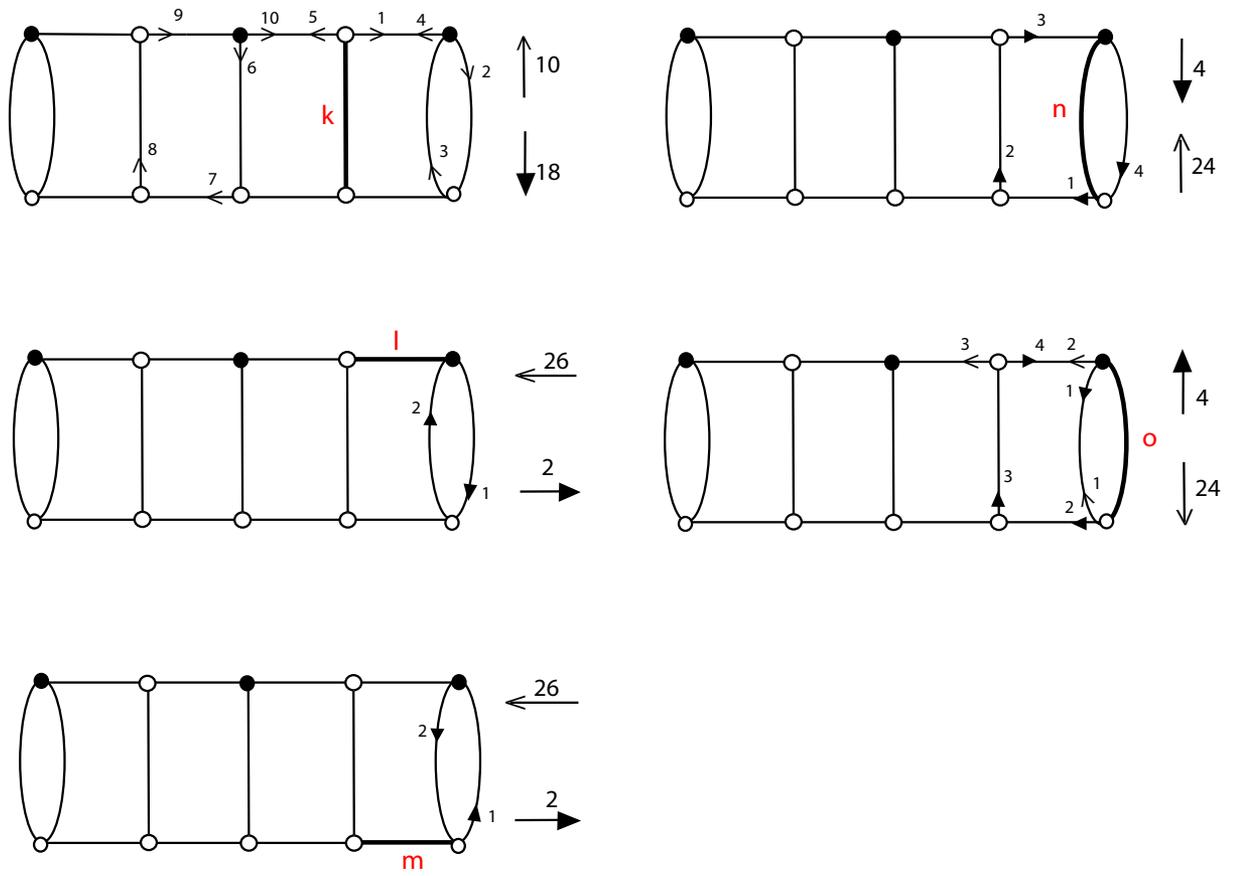


Figura 3.7: Caminhos fechados no grafo B-14

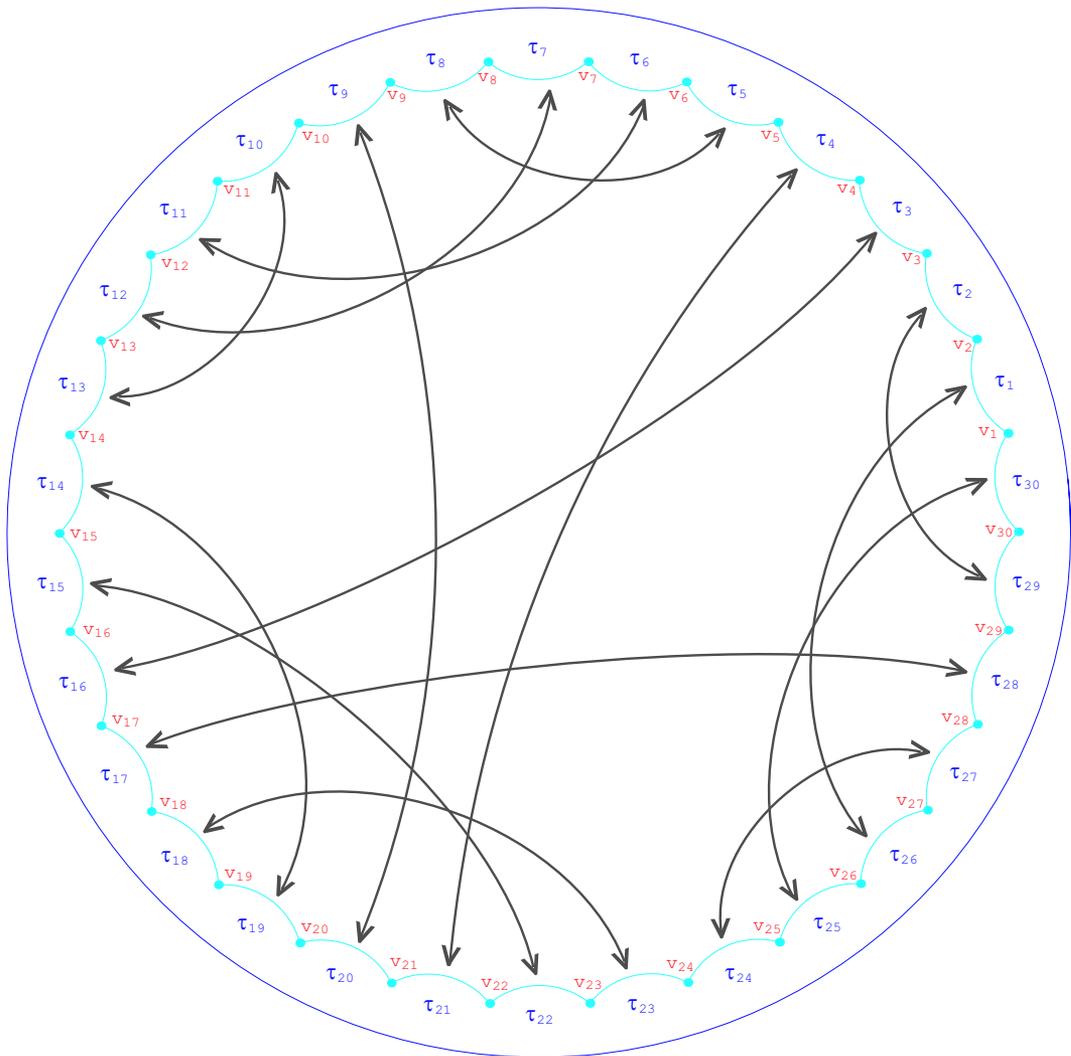


Figura 3.8: Emparelhamento de arestas gerado por B-14 para  $g=3$

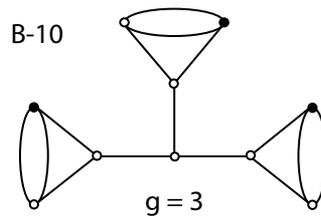


Figura 3.9: Rotação no grafo B-10

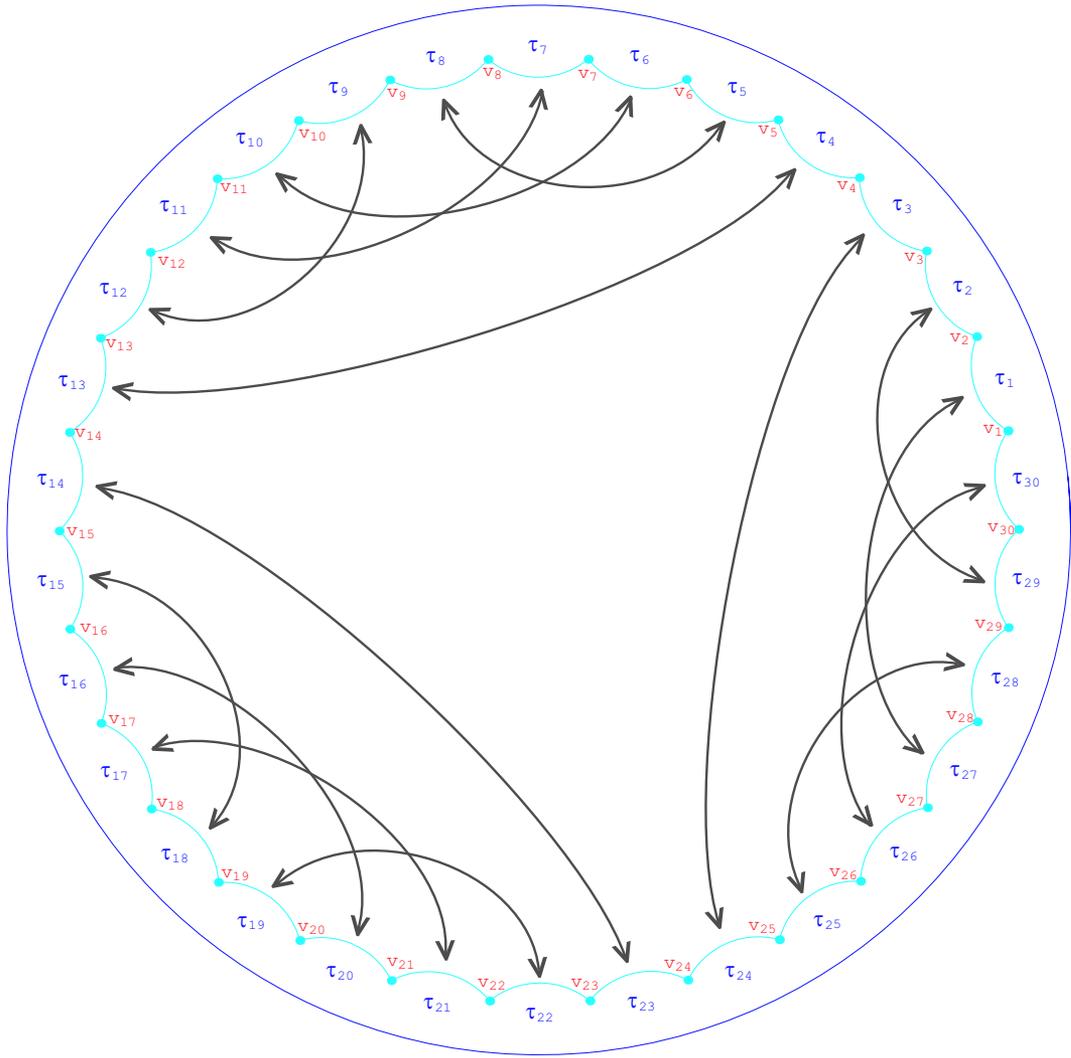


Figura 3.10: Emparelhamento de arestas gerado por B-10 para  $g=3$



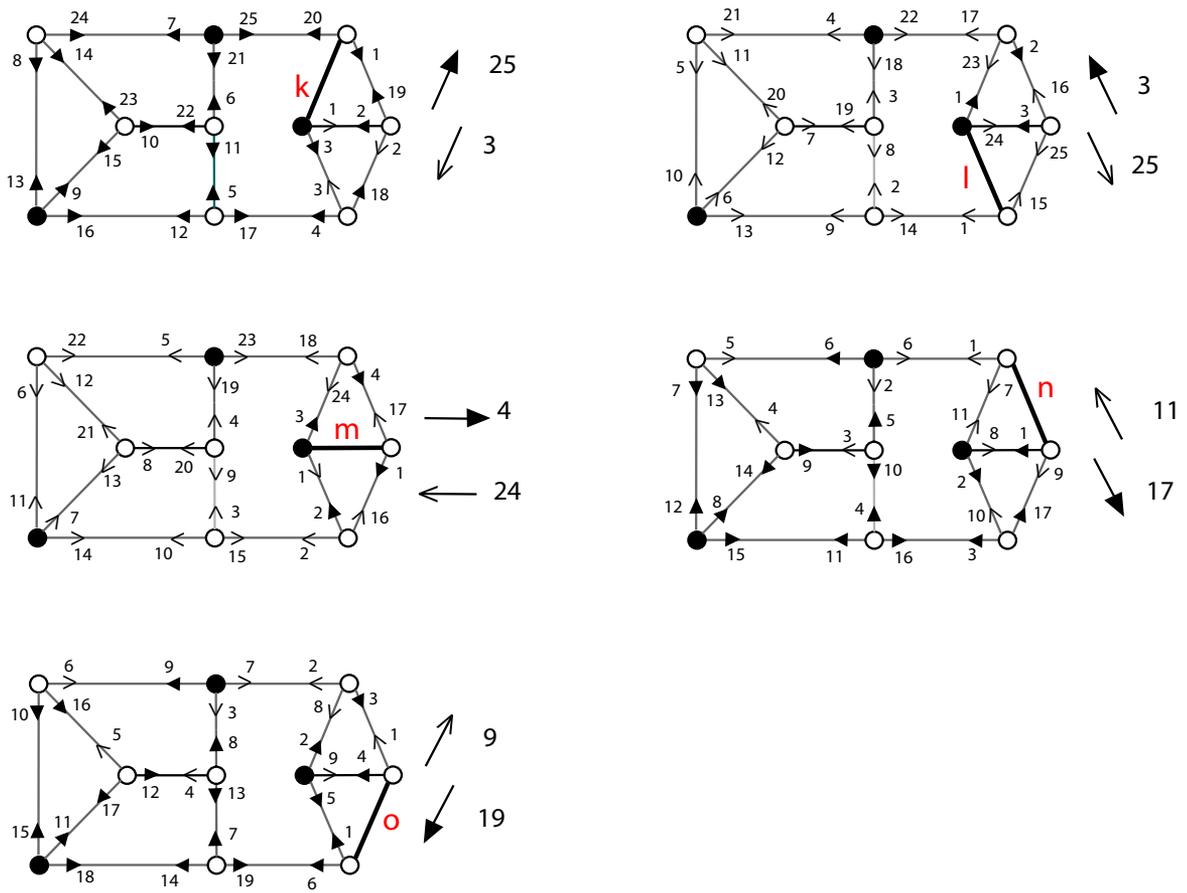


Figura 3.12: Caminhos fechados no grafo A-3 das arestas k-o

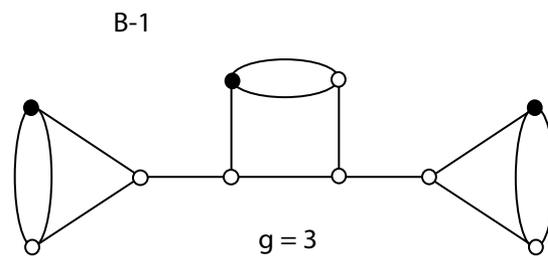


Figura 3.13: Rotação no grafo B-1

## 3.2 Emparelhamento de arestas de polígonos com (12g-6) arestas

Apresentaremos agora nossa contribuição que consiste em construir, através de grafos trivalentes citados em [10], novos grafos para  $g > 3$  afim de obtermos emparelhamentos de arestas de polígonos fundamentais hiperbólicos com  $12g - 6$  arestas, tais que todos os ciclos de vértices tenham comprimento 3. Assim, temos condições de concluir que o grupo gerado pelo emparelhamento das arestas desses polígonos nos fornece através do quociente pelo plano hiperbólico, uma superfície de Riemann  $S$  compacta orientável de gênero  $g$ . Além disso, mostraremos, na Proposição 3.2.3, uma outra forma de se obter a sequência cíclica correspondente ao emparelhamento do polígono.

### 3.2.1 Grafos trivalentes conexos imersos em uma superfície de gênero $g$

Seja  $G$  um grafo trivalente conexo, imerso em uma superfície fechada  $S$  de gênero  $g$  de forma que  $S \setminus G$  seja uma única componente conexa. Sejam  $a$  e  $v$  o número de arestas e de vértices de  $G$ , respectivamente. Então, pela Fórmula de Euler temos:

$$2 - 2g = v - a + f \implies 2 - 2g = v - a + 1 \implies a = v + 2g - 1. \quad (3.1)$$

Sabemos que cada aresta de  $G$  corresponde a duas arestas do polígono  $\mathcal{P}$  e cada vértice de  $G$  possui exatamente 3 arestas incidentes a ele, logo  $G$  possui  $(12g - 6)/2$  arestas e  $(12g - 6)/3$ . Então, para  $g=3$  temos  $a = 15$  e pela equação (3.1)  $v = 10$ . Analogamente, para  $g = 4$ , temos  $a = 21$  e  $v = 14$  e para  $g = 5$  temos  $a = 27$  e  $v = 18$ . Assim, cortando  $S$  ao longo de  $G$  obtemos um polígono fundamental  $\mathcal{P}_{12g-6}$  de  $12g - 6$  arestas com um emparelhamento de arestas de  $\mathcal{P}$  associado.

Vamos utilizar o procedimento e considerações feitos no capítulo anterior e mostrar que estes também são válidos pra casos de  $g > 3$ . Para isso, consideremos alguns dos grafos trivalentes da Figura 3.5. Através destes criamos novos grafos trivalentes para  $g = 4$  e para  $g = 5$  do seguinte modo: aumentamos o número de arestas de seis em seis buscando uma semelhança entre eles. A Figura 3.14 mostra os grafos criados a partir do grafo A-2,  $n_a$  e  $n_v$  denotam o número de arestas e de vértices de  $G$  respectivamente. Observe que desse modo, poderíamos continuar para  $g > 5$ .

Considere um polígono  $\mathcal{P}_{12g-6} \subset \mathbb{D}^2$  com  $12g - 6$  arestas,  $g > 2$ , onde  $\mathbb{D}^2$  representa o plano hiperbólico. Denotamos seus vértices no sentido anti-horário por  $\{v_1, v_2, \dots, v_{12g-6}\}$  e suas arestas por  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{12g-6}\}$  onde  $\tau_i$  é o segmento geodésico

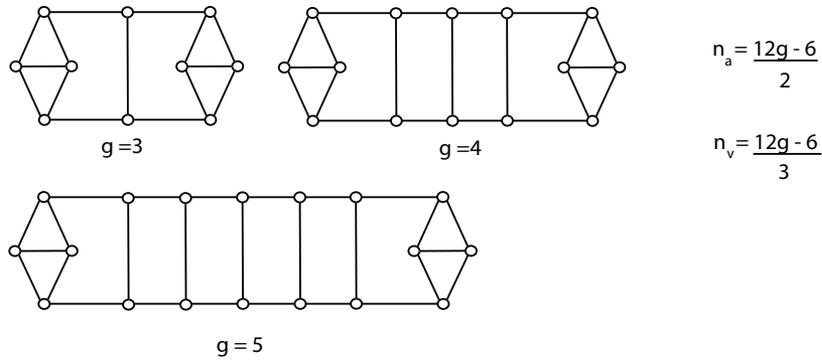


Figura 3.14: Grafos trivalentes com  $(12g - 6)/2$  arestas e  $(12g - 6)/3$  vértices

iniciando em  $v_i$  e findando em  $v_{i+1}$ ,  $\text{imod}(12g - 6)$ .

### Extensões do Grafo B-14

Considere o grafo B-14 da Figura 3.5 vamos estender esse grafo para  $g = 4$  e  $g = 5$  e atribuir uma rotação a este de modo a obter caminhos fechados, ou seja, deve satisfazer as condições e as observações feitas no capítulo 2. Assim, considere as rotações dos grafos na Figura 3.15. Note que, desse modo, poderíamos continuar para  $g > 5$ .

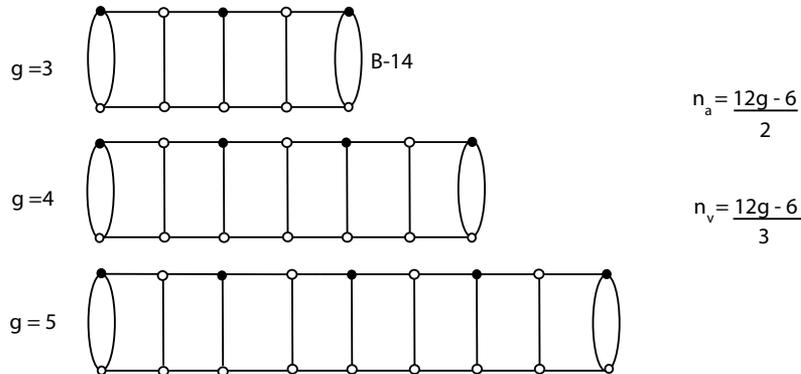


Figura 3.15: Grafos trivalentes com  $(12g - 6)/2$  arestas e  $(12g - 6)/3$  vértices

**Proposição 3.2.1** *Caminhos fechados sobre os grafos para  $g = 4$  e para  $g = 5$  da Figura 3.15 de forma que as condições (a) e (b) do capítulo anterior sejam válidas dão origem a um emparelhamento de arestas de um polígono fundamental  $\mathcal{P}$  com  $12g - 6$  arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é fechada orientável de gênero  $g$ .*

**Demonstração:** Considere as extensões do grafo B-14 da Figura 3.5 para  $g = 4$  e  $g = 5$ , denotaremos estes por  $G_{B14}^1$  e  $G_{B14}^2$ , respectivamente, e as rotações desses grafos

conforme a figura 3.15. Estas rotações satisfazem as condições e as observações feitas no Capítulo 2. Note que, desse modo, poderíamos continuar para  $g > 5$ . Mostraremos para  $g = 4$ , para  $g > 4$  é feito de forma análoga.

Rotule as arestas do grafo  $G_1$  por a, b, ..., u (ver Figuras 3.16, 3.17, 3.18 e 3.19). Considere os caminhos fechados em cada aresta nos dois sentidos, ou seja, como cada aresta possui dois vértices extremos, considere os caminhos indo no sentido dos extremos. Lembre-se que esses caminhos são de forma que as condições (a) e (b) são válidas e que retorne ao vértice inicial por uma direção oposta, ou seja, que não retorne pela aresta do início do caminho. Denote por  $C_y$  o comprimento do caminho em cada aresta  $y = a, b, \dots, u$ . Teremos então dois números correspondentes ao comprimento  $C_y$ , um para cada sentido. Nas figuras de 3.16 a 3.19, distinguimos esses caminhos por dois tipos de setas. A numeração em cada seta, corresponde ao comprimento do caminho em cada instante, até que este caminho seja fechado, logo a última numeração corresponde ao comprimento do caminho fechado.

Por exemplo, no primeiro grafo da Figura 3.16, calculamos o comprimento dos caminhos da aresta **a** nos dois sentidos. Neste caso, a seta escura corresponde ao caminho começando para “cima” e a outra seta para o caminho começando para “baixo”. Percorrendo o caminho para cima iniciando na aresta **a** encontramos um vértice preto, assim devemos ir para a aresta da esquerda e numerá-la por 1 (para contar o caminho). Em seguida, encontramos um vértice branco, assim devemos ir para a aresta da direita e numerá-la por 2. O próximo vértice no caminho é um vértice branco, logo devemos ir para a aresta da direita numerá-la por 3, em seguida temos um vértice branco, logo seguimos para direita e colocamos a numeração 4. Agora chegamos ao vértice inicial por uma direção oposta, ou seja, temos um caminho fechado de comprimento 4, que satisfaz as condições citadas acima. Logo,  $C_a = 4$ . Da mesma forma, calcula-se o comprimento do caminho partindo da aresta **a** para “baixo” e obtém-se  $C_a = 36$ . Note que, a aresta que se calcula o comprimento não pertence ao caminho então esta não foi computada. E, cada uma das outras arestas foi percorrida uma única vez em cada sentido. Assim, se para um sentido  $C_y = x$  então para o outro sentido temos  $C_y = 40 - x$ . Assim, podemos simplificar os cálculos pois, se já está calculado o comprimento  $x$  de um caminho fechado para um sentido de uma aresta basta fazer  $40 - x$  para encontrar o comprimento do caminho para o outro sentido. Dessa forma, calculamos o comprimento dos caminhos da aresta **a** e das demais arestas nas Figuras de 3.16 a 3.19.

Agora, escolha um vértice de partida e um sentido e obtenha um caminho fechado de forma que todas as arestas sejam percorridas nos dois sentidos. Este caminho terá comprimento 42, já que agora todas as arestas são computadas (duas vezes). Em cada

aresta percorrida, anote o comprimento do caminho (feito nas Figuras de 3.16 a 3.19) dessa aresta de acordo com o sentido. Dessa forma, obtem-se uma sequência cíclica de 42 números:

36 38 24 28 12 16 2 4 4 38 10 2 36 36 38 4 6 28 12 4 36 30 24 34 36 4  
6 16 10 4 36 28 12 34 36 2 4 4 38 30 2 36

Agora, coloque essa sequência no polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e depois identifique os lados correspondentes  $\{x, (12g-8) - x\}$ . Note que, como cada aresta do grafo corresponde a identificação de duas arestas do polígono, então o valor  $x$  do comprimento do caminho de uma aresta de  $G$  deve ser identificado com o  $(12g-8) - x$  da mesma aresta. Assim, temos um emparelhamento  $\Phi_{12g-6}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$  mostrado na Figura 3.20.

Para  $g = 5$  temos a identificação:

48 50 36 40 24 28 12 16 2 4 4 50 10 2 48 48 50 4 6 40 12 4 48 42 36 46 48  
4 6 28 12 4 48 40 24 46 48 4 6 16 10 4 48 40 12 46 48 2 4 4 50 42 2 48  
Ver Figura 3.21 a 3.25.

O emparelhamento correspondente a sequência acima para  $g = 5$  é ilustrado na Figura 3.26. Analogamente, podemos estender para  $g > 5$ .  $\square$

### Extensões do Grafo B-10

Considere o grafo B-10 da Figura 3.5 vamos estender esse grafo para  $g = 4$  e  $g = 5$  e atribuir uma rotação a estes grafos de forma a obter caminhos fechados, ou seja, deve satisfazer as condições e as observações feitas no Capítulo 2. Assim, considere as rotações dos grafos na Figura 3.27. Observe que poderíamos continuar para  $g > 5$ .

**Proposição 3.2.2** *Caminhos fechados sobre os grafos para  $g = 4$  e  $g = 5$  da Figura 3.27 de forma que as condições (a) e (b) do capítulo anterior sejam válidas dão origem a um emparelhamento de arestas de um polígono fundamental  $\mathcal{P}$  com  $12g - 6$  arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é fechada orientável de gênero  $g$ .*

**Demonstração:** Analogamente a demonstração da Proposição 3.2.1 encontramos as seguintes identificações:

Para  $g = 4$  temos a identificação:

37 38 32 20 8 2 3 3 38 2 37 37 38 32 8 2 3 3 38 2 37 37 38 32 20  
8 2 3 3 38 2 37 37 38 32 8 2 3 3 38 2 37

Para  $g = 5$  temos a identificação:

49 50 44 32 20 8 2 3 3 50 2 49 49 50 44 8 2 3 3 50 2 49 49 50 44 32 8 2 3 3 50  
2 49 49 50 44 20 8 2 3 3 50 2 49 49 50 44 8 2 3 3 50 2 49

Colocando essa sequência no polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e identificando as arestas correspondentes  $\{x, (12g-8) - x\}$ , temos um emparelhamento  $\Phi_{12g-6}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$  mostrado nas Figuras [3.28](#) e [3.29](#).

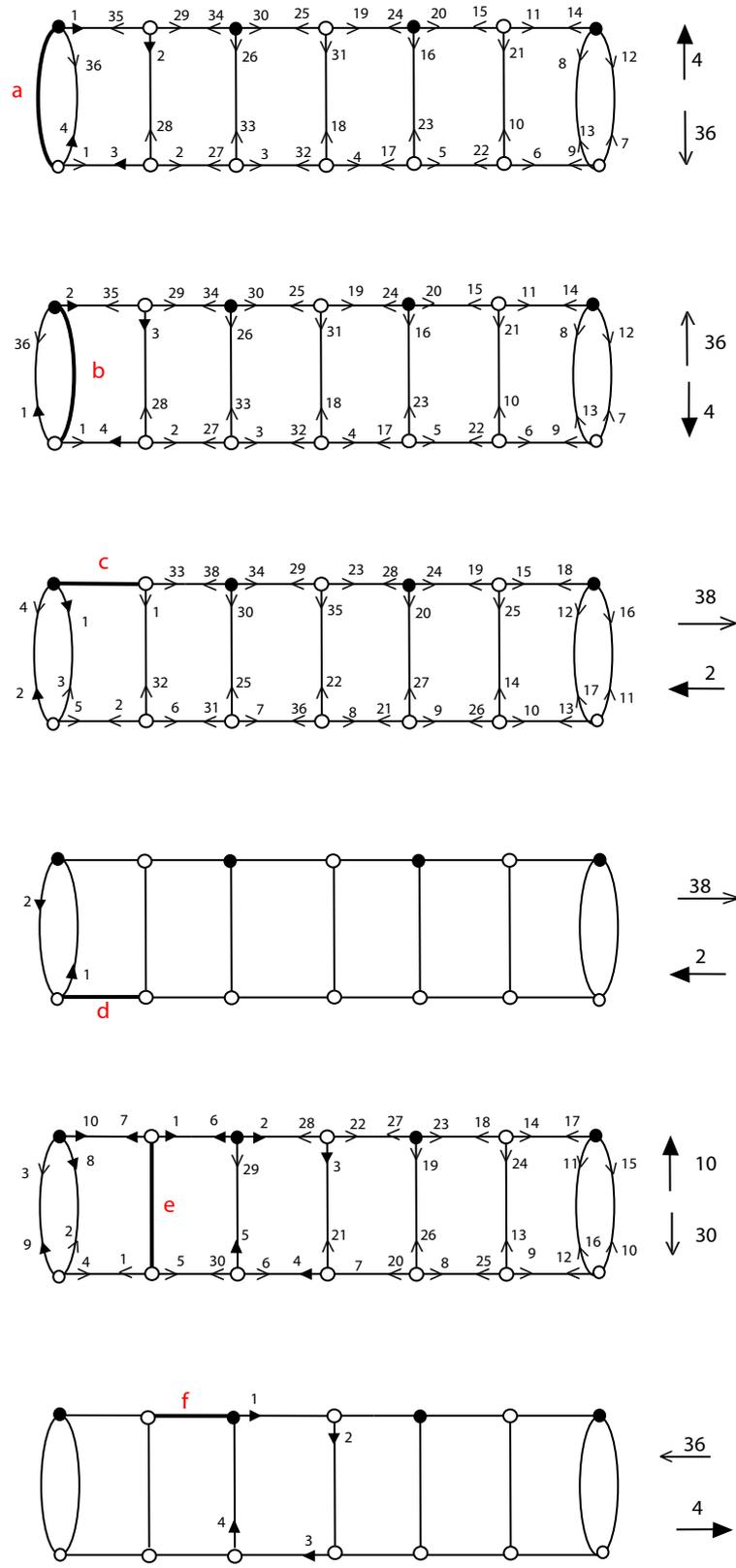


Figura 3.16: Caminhos fechados no grafo B-14 para  $g=4$  das arestas a-f



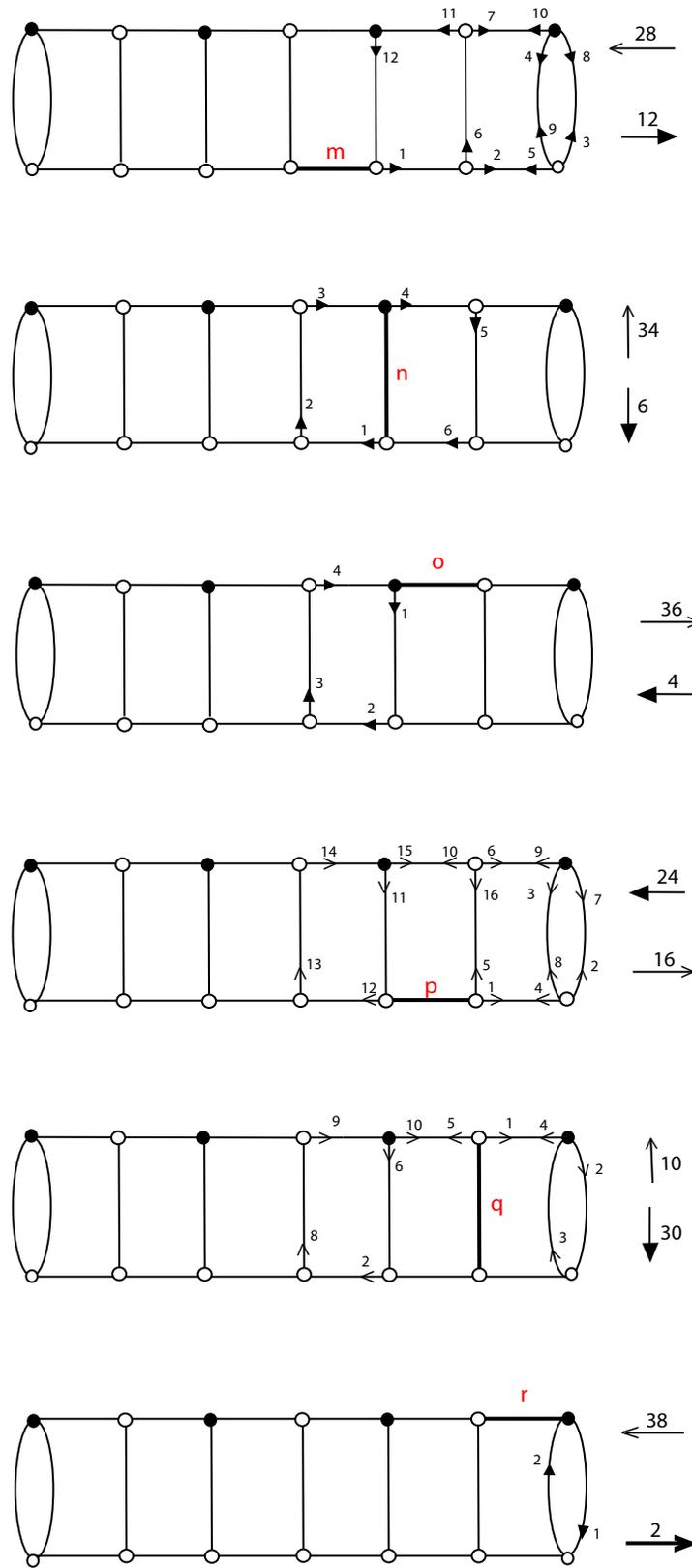


Figura 3.18: Caminhos fechados no grafo B-14 para  $g=4$  das arestas m-r

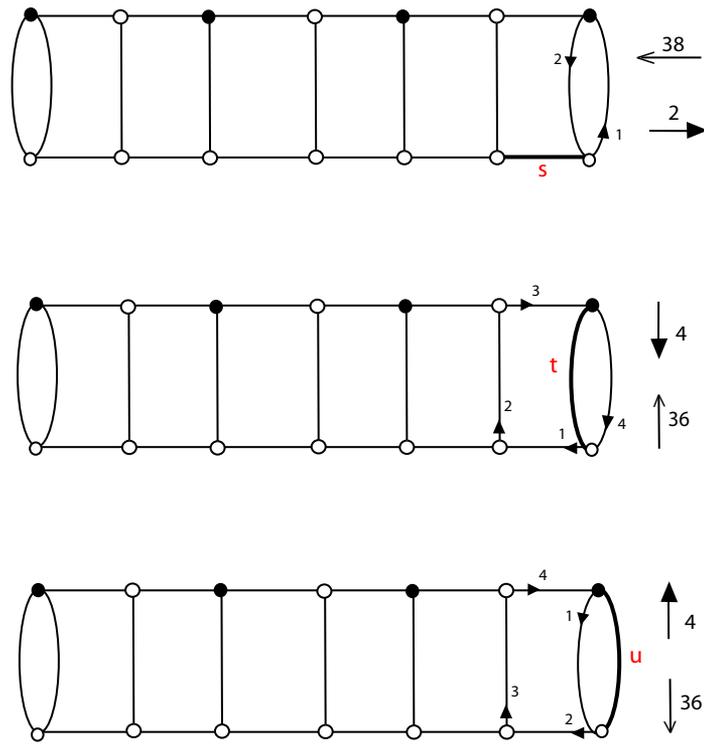


Figura 3.19: Caminhos fechados no grafo B-14 para  $g=4$  das arestas s-u

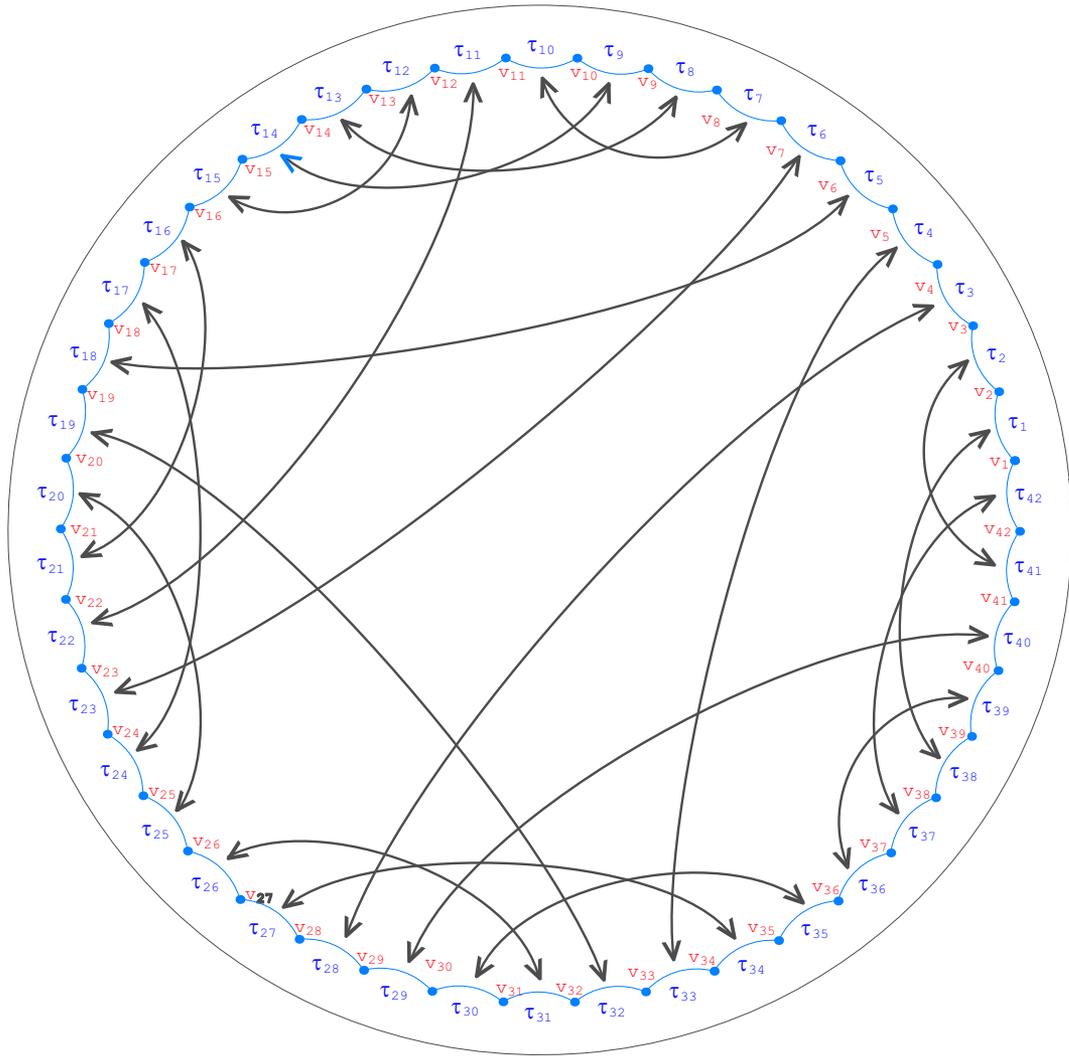


Figura 3.20: Emparelhamento de arestas gerado por B-14 para  $g=4$

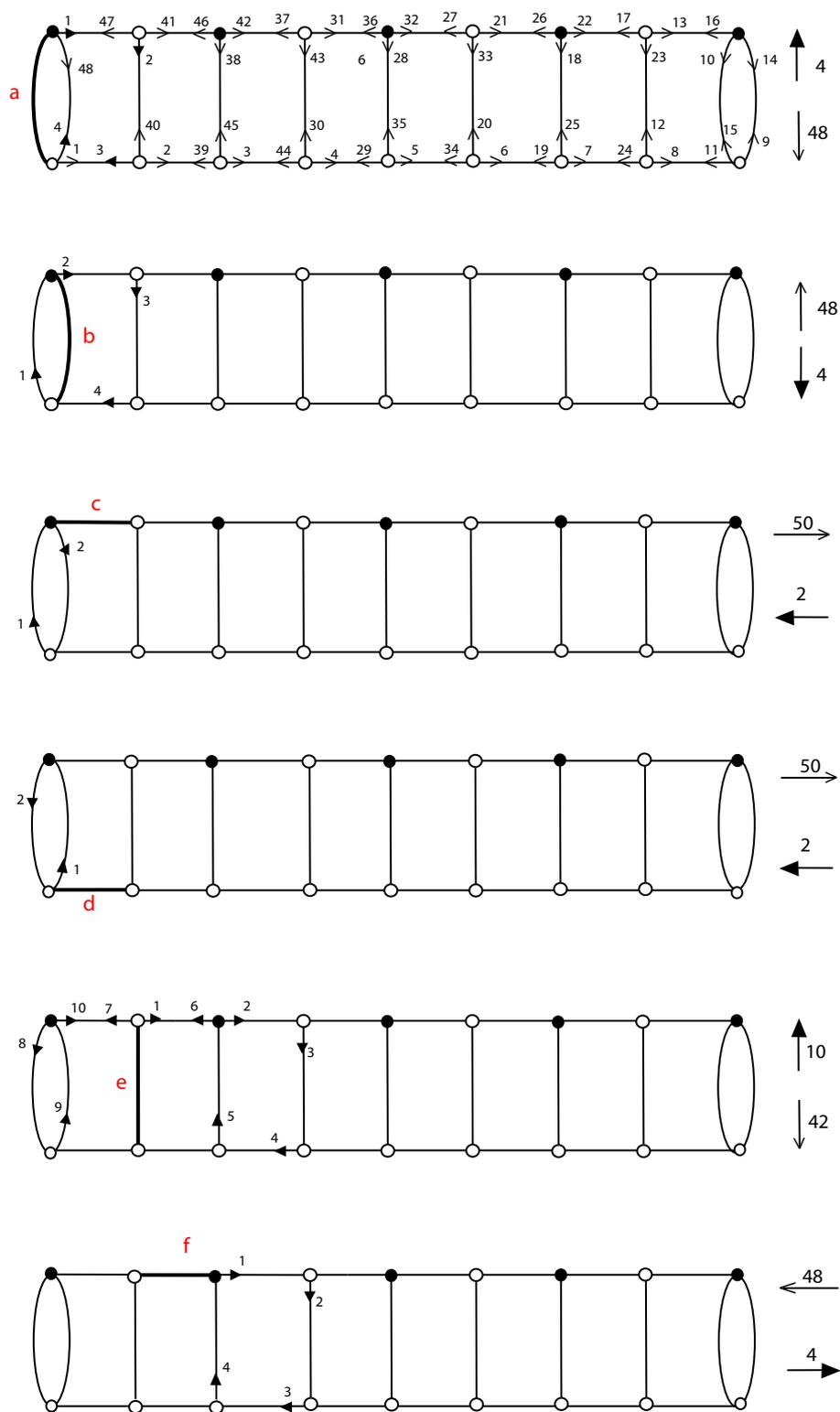


Figura 3.21: Caminhos fechados no grafo B-14 para  $g=5$  das arestas a-f

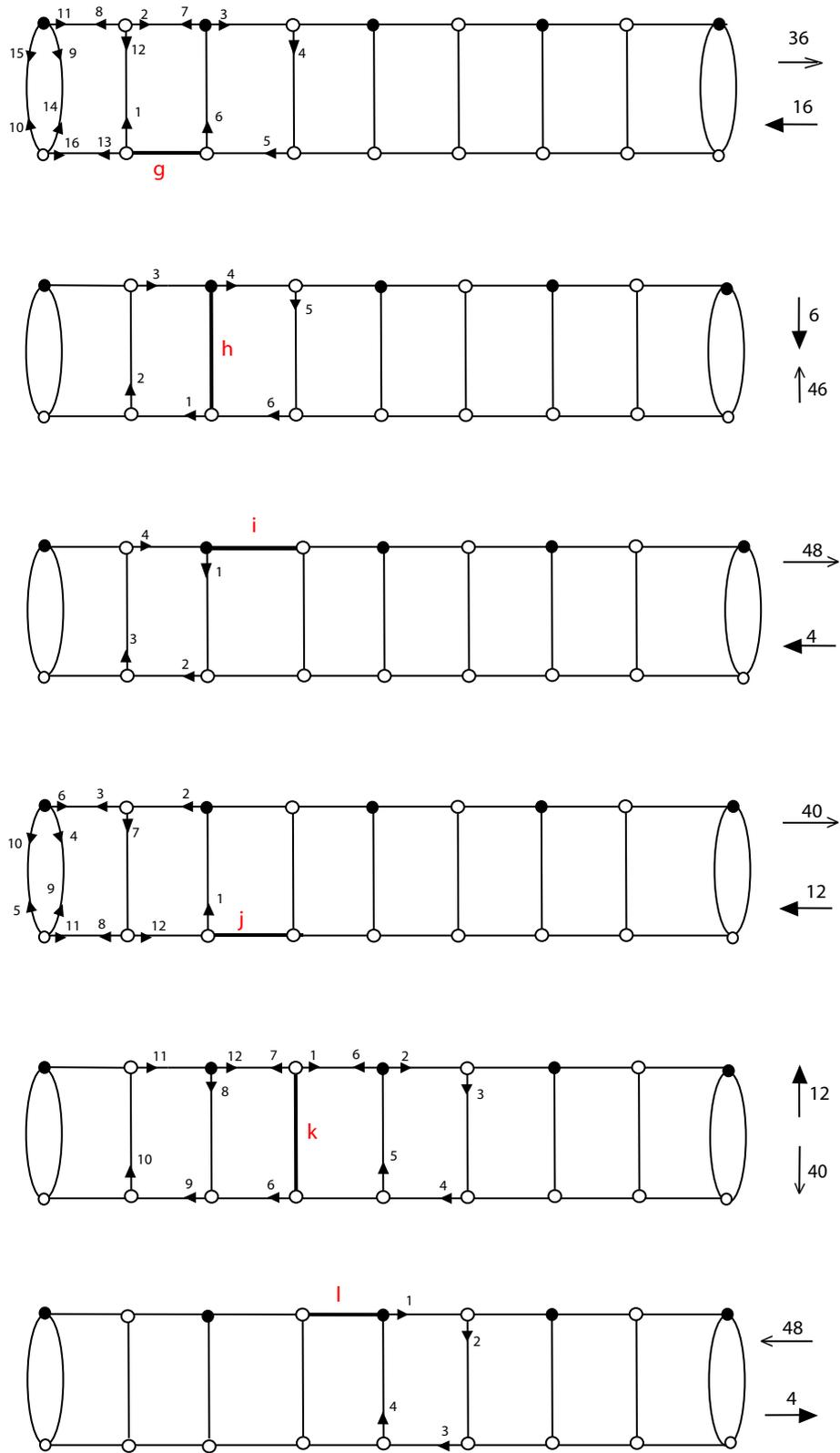


Figura 3.22: Caminhos fechados no grafo B-14 para  $g=5$  das arestas  $g-1$



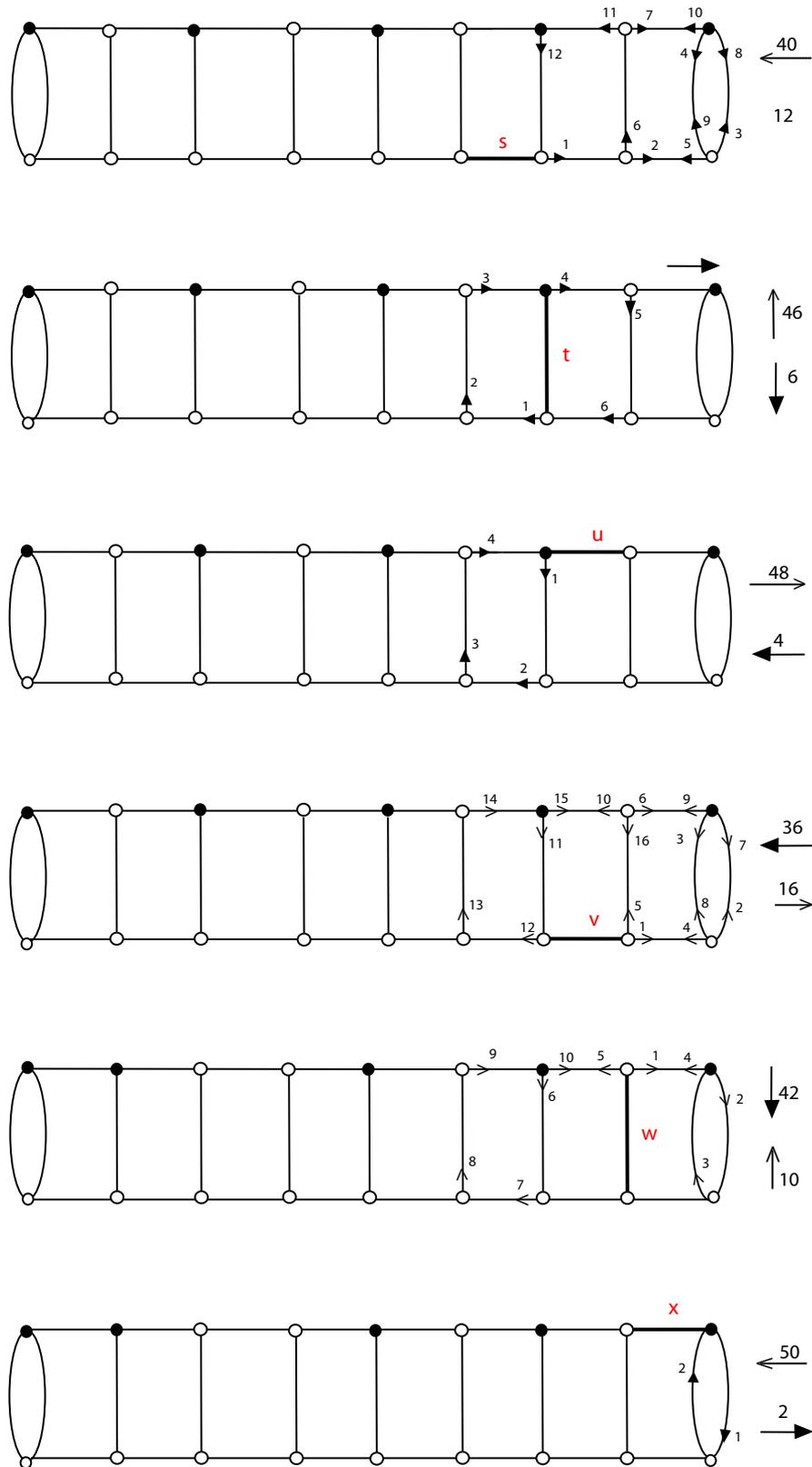


Figura 3.24: Caminhos fechados no grafo B-14 para  $g=5$  das arestas s-x

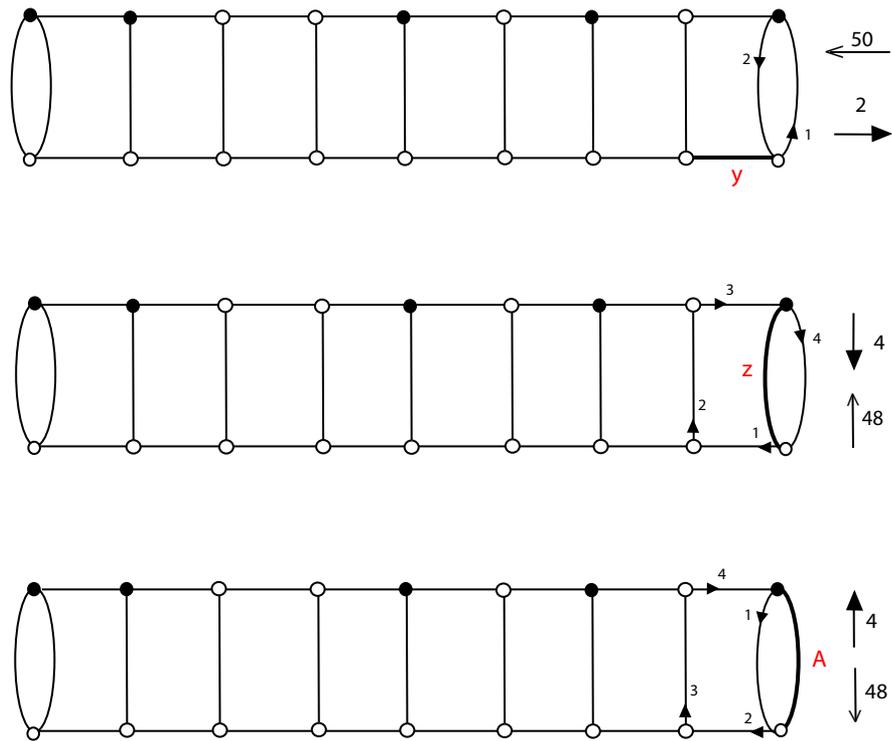


Figura 3.25: Caminhos fechados no grafo B-14 para  $g=5$  das arestas  $y$ ,  $z$  e  $A$

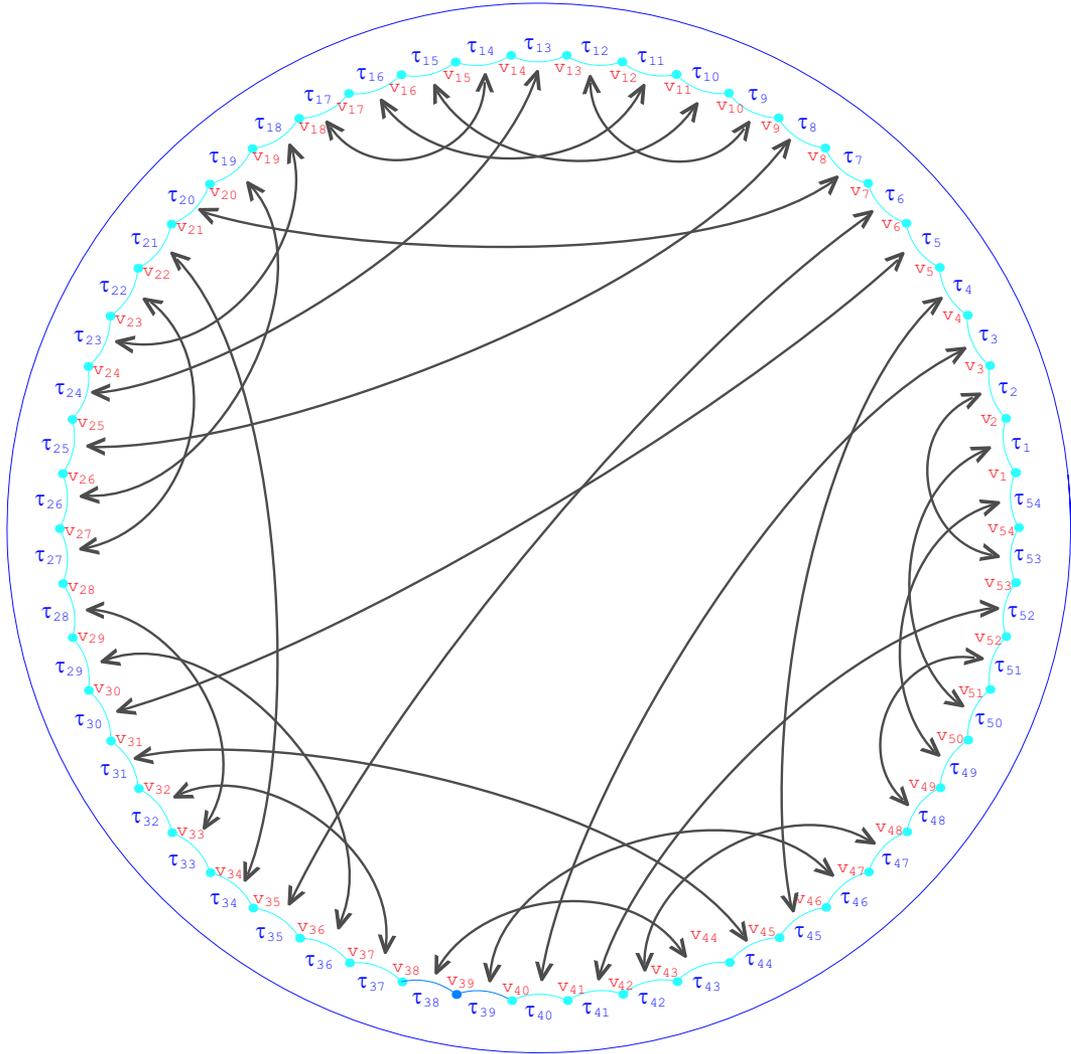


Figura 3.26: Emparelhamento de arestas gerado por B-14 para  $g=5$

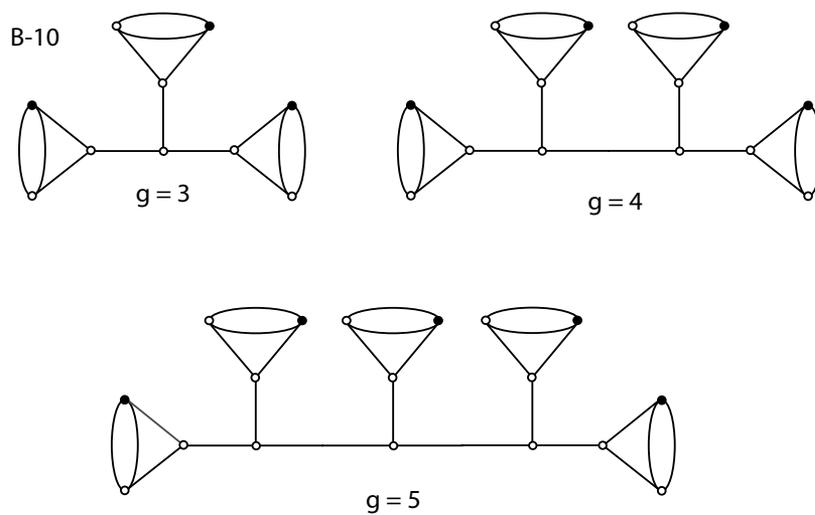


Figura 3.27: Grafos trivalentes com  $(12g - 6)/2$  arestas e  $(12g - 6)/3$  vértices

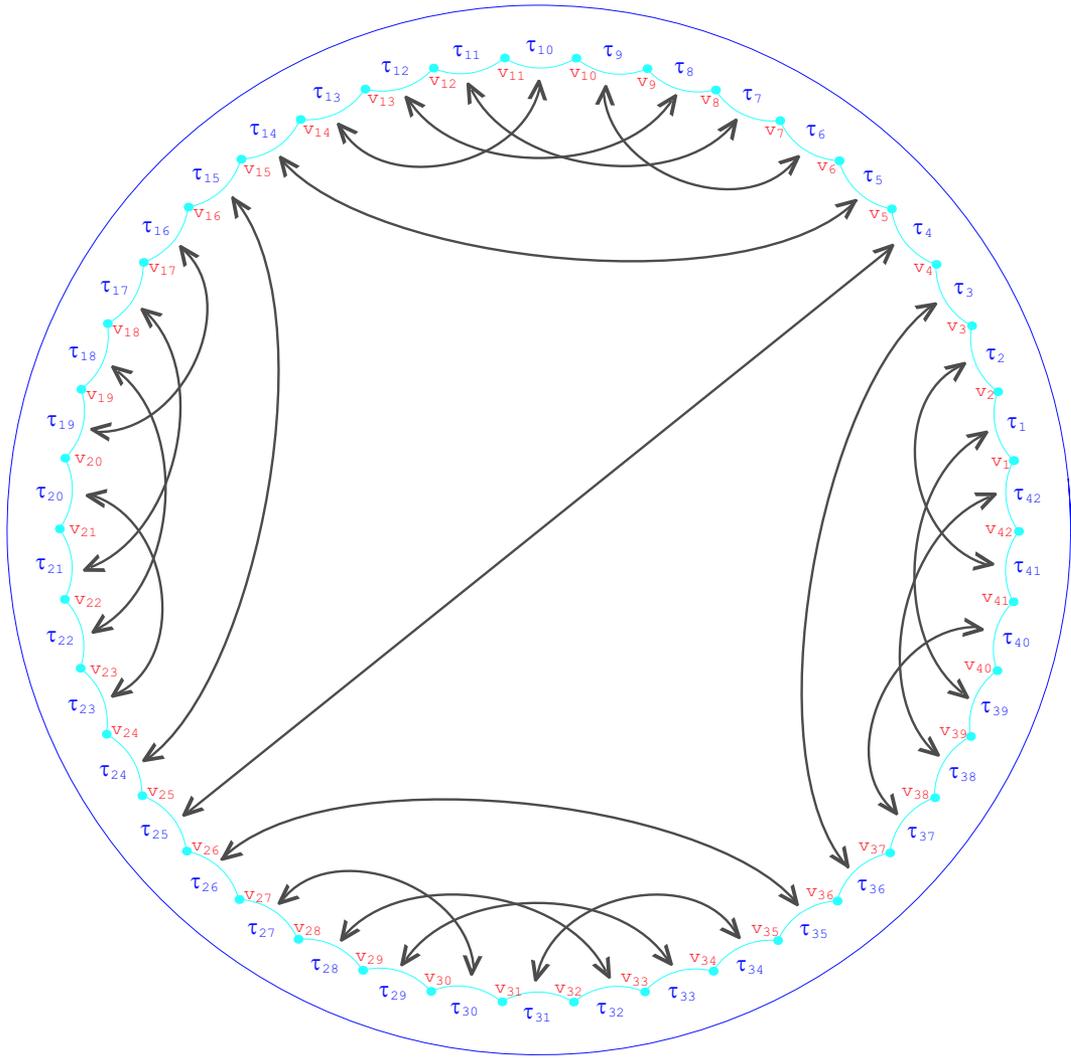


Figura 3.28: Emparelhamento de arestas gerado por B-10 para  $g=4$

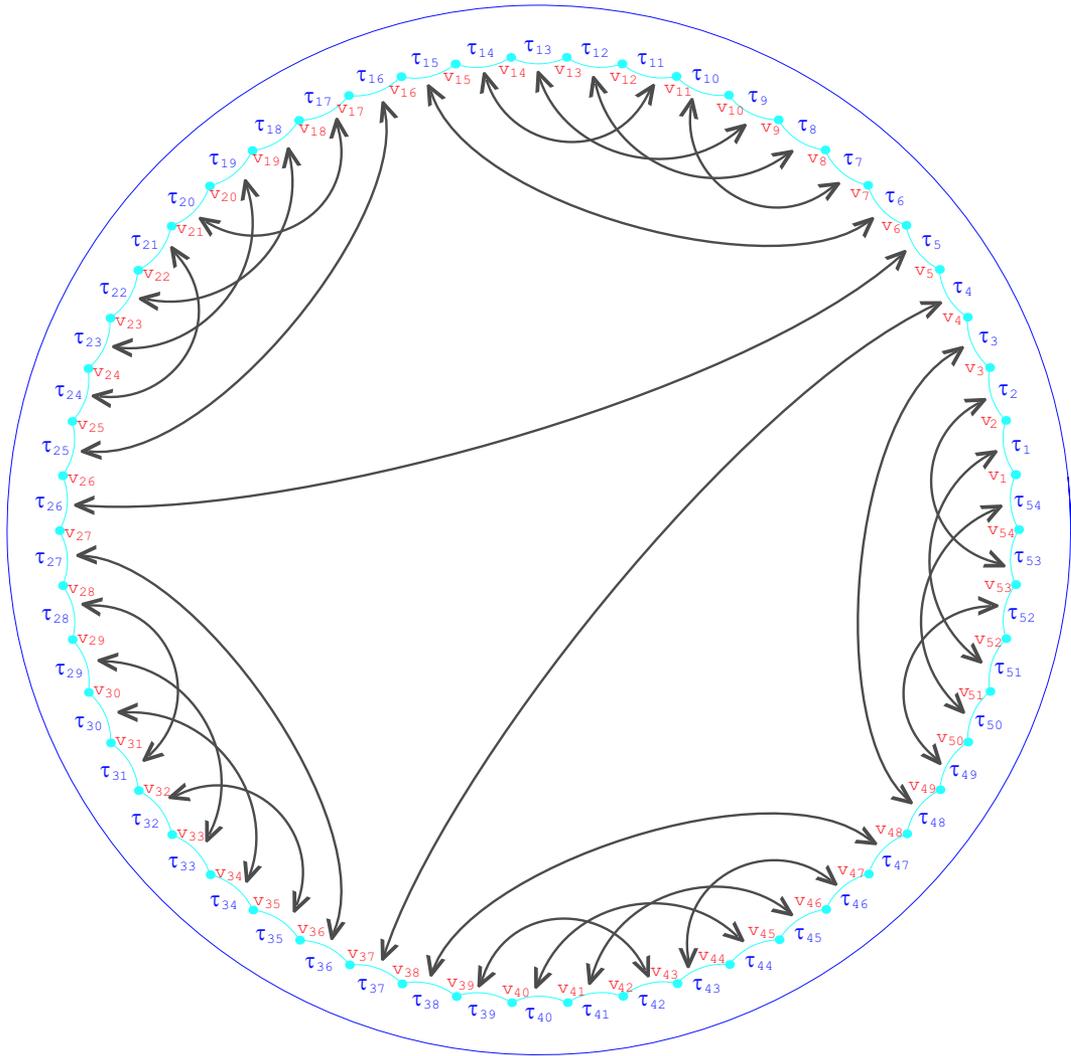


Figura 3.29: Emparelhamento de arestas gerado por B-10 para  $g=5$

### Extensões do Grafo A-3

Considere o grafo A-3 da Figura 3.5 vamos estender esse grafo para  $g = 4$  e  $g = 5$  e atribuir uma rotação a estes grafos de forma a obter caminhos fechados, ou seja, deve satisfazer as condições e as observações feitas no Capítulo 2. Assim, considere as rotações dos grafos na Figura 3.30. Observe que poderíamos continuar para  $g > 5$ .

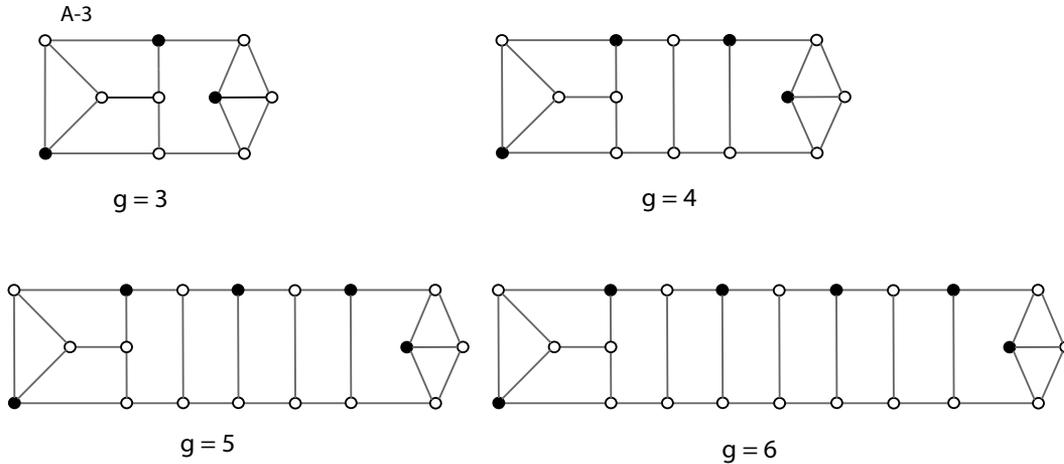


Figura 3.30: Grafos trivalentes com  $(12g - 6)/2$  arestas e  $(12g - 6)/3$  vértices

**Proposição 3.2.3** *Caminhos fechados sobre os grafos para  $g = 4$  e  $g = 5$  da Figura 3.30 de forma que as condições (a) e (b) do capítulo anterior são válidas dão origem a um emparelhamento de arestas de um polígono fundamental  $\mathcal{P}$  com  $12g - 6$  arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é fechada orientável de gênero  $g$ .*

**Demonstração:** Considere as extensões do grafo A-3 da Figura 3.5 para  $g = 4$  e  $g = 5$ , denotaremos estes por  $G_{A3}^1$  e  $G_{A3}^2$ , respectivamente e as rotações desses grafos conforme a figura 3.30. Estas rotações satisfazem as condições e as observações feitas no capítulo 2. Note que, desse modo, poderíamos continuar para  $g > 5$ . Mostraremos para  $g = 4$ , para  $g > 4$  é feito de forma análoga.

As Figuras 3.31 e 3.34 mostram uma outra forma de encontramos as sequências acima. Esta é bem mais prática que a forma mostrada anteriormente já que precisamos de apenas um grafo pra obter a sequência. Descreveremos o caso para  $g=4$ , para  $g=5$  é feito de forma análoga.

Tome o grafo A-3 para  $g = 4$  com a rotação da Figura 3.30. Rotule as arestas por a,b,c,...,u conforme a Figura 3.31. Escolha um vértice e um sentido e obtenha um caminho fechado respeitando as orientações dos vértices, as condições vistas anteriormente e de forma que cada aresta seja percorrida nos dois sentidos. Numere o caminho

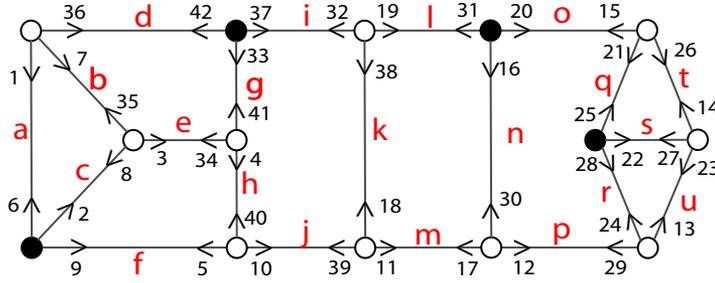


Figura 3.31: Caminho fechado no grafo A-3 para  $g=4$

percorrido. Observe que cada aresta possui uma (e somente uma) numeração em cada sentido. Assim, ao chegar no vértice inicial por uma direção oposta, temos um caminho fechado de comprimento  $12g - 6$ , já que o grafo possui  $(12g - 6)/2$  arestas. O módulo da diferença entre esses números menos um, para cada aresta, dá o comprimento  $x$  do caminho, no sentido do menor número para o maior. O comprimento do caminho para o outro sentido, é dado por  $(12g - 8) - x$ . Por exemplo, veja a Figura 3.32, nesta calculamos o comprimento dos caminhos nas arestas b e g do grafo A-3 para  $g=4$ .

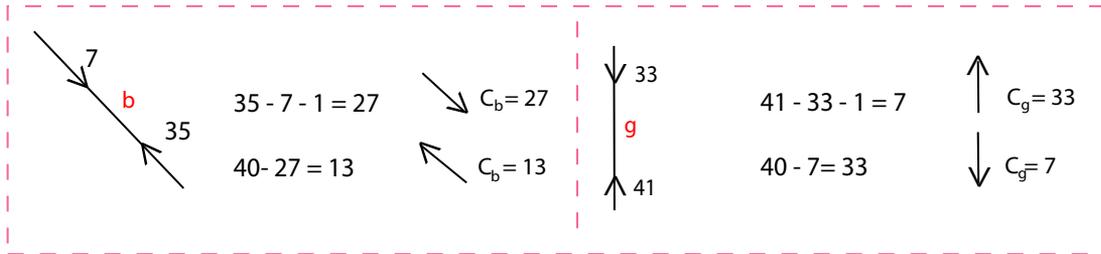


Figura 3.32: Comprimento dos caminhos das arestas b e g do grafo A-3 para  $g=4$

Da mesma forma, obtemos o comprimento dos caminhos, para os dois sentidos, das demais arestas mostrados na Figura 3.33.

Assim, se começarmos o caminho por 1 da aresta a e em cada aresta percorrida, anotarmos o comprimento do caminho dessa aresta (feito na Figura 3.33) de acordo com o sentido, obteremos a sequência cíclica de números exibida logo abaixo.

4 5 30 35 3 36 27 35 37 28 5 16 9 11 4 13 35 19 11 36 3  
 4 31 3 37 29 36 37 24 27 29 4 7 10 13 5 36 21 12 5 33 35

Colocando essa sequência no polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e identificando os lados correspondentes  $\{x, (12g - 8) - x\}$ , temos um emparelhamento  $\Phi_{12g-6}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ .

Analogamente, para  $g = 5$  temos a identificação:

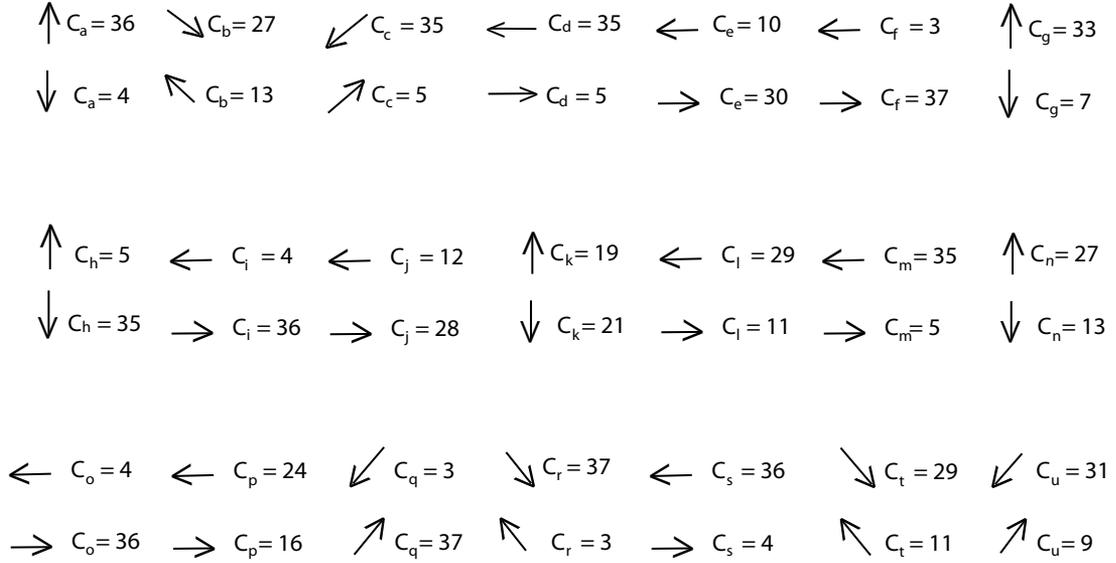


Figura 3.33: Comprimento dos caminhos das arestas do grafo A-3 para  $g=4$

4 5 42 47 3 48 39 47 49 40 24 28 5 16 9 11 4 13 47 19 11 48 3 4 43 3 49 41 48  
 49 36 39 41 4 6 28 12 4 48 33 24 46 48 4 7 10 13 5 48 40 12 5 45 47

E, colocando essa sequência no polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e identificando os lados correspondentes  $\{x, (12g-8)-x\}$ , temos um emparelhamento  $\Phi_{12g-6}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ .

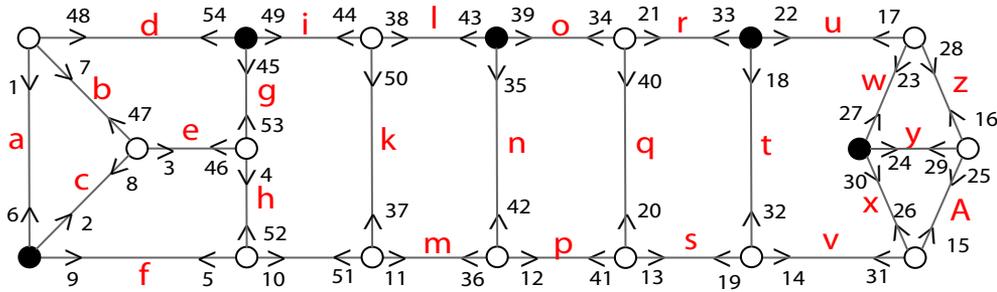


Figura 3.34: Caminho fechado no grafo A-3 para  $g=5$

Como mencionado anteriormente, o mesmo cálculo pode ser feito para  $g > 5$ , por exemplo, como na Figura 3.35.

□

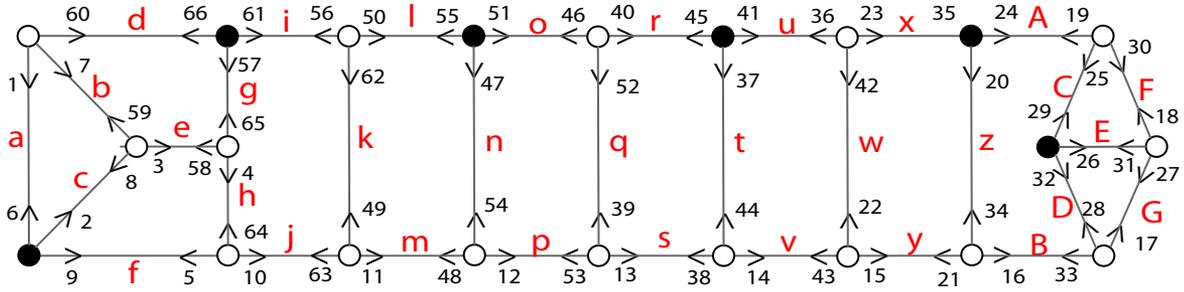


Figura 3.35: Caminho fechado no grafo A-3 para  $g=6$

**Observação 3.2.4** *Todas as seqüências obtidas nesse trabalho podem ser obtidas através dessa segunda forma mostrada na Proposição 3.2.3. Esta é mais prática, já que precisamos de apenas um caminho fechado de comprimento  $12g-6$  no grafo e um algoritmo simples para obter a seqüência que dá a identificação do polígono com  $12g-6$  arestas.*

### Extensões do Grafo B-1

Considere o grafo B-1 da Figura 3.5 vamos estender esse grafo para  $g = 4$  e  $g = 5$  e atribuir uma rotação a estes grafos de forma a obter caminhos fechados, ou seja, deve satisfazer as condições e as observações feitas no capítulo 2. Assim, considere as rotações dos grafos na Figura 3.36. Observe que poderíamos continuar para  $g > 5$ .

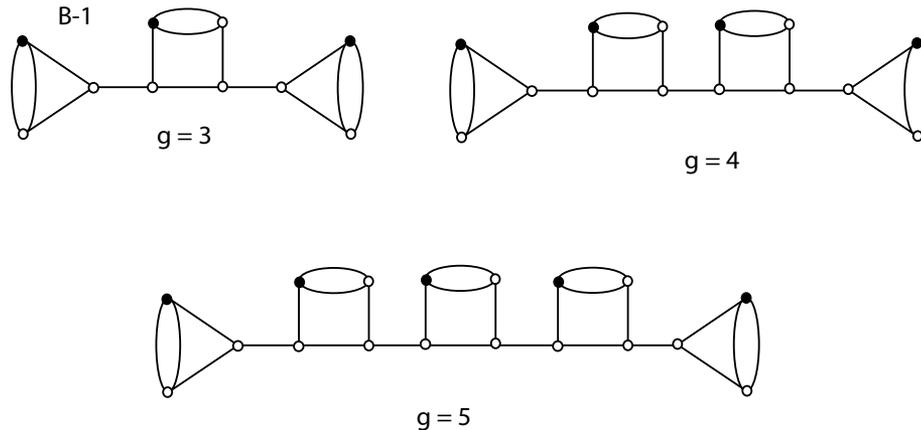


Figura 3.36: Grafos trivalentes com  $(12g - 6)/2$  arestas e  $(12g - 6)/3$  vértices

**Proposição 3.2.5** *Caminhos fechados sobre os grafos para  $g = 4$  e  $g = 5$  da Figura 3.36 de forma que as condições (a) e (b) do capítulo anterior são válidas dão origem a um emparelhamento de arestas de um polígono fundamental  $\mathcal{P}$  com  $12g - 6$  arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é fechada orientável de gênero  $g$ .*

Utilizando procedimentos análogos ao da demonstração da Proposição 3.2.3 temos as seguintes identificações:

Para  $g=4$ , temos:

8 2 3 3 38 2 37 37 38 32 2 4 4 38 26 2 36 36 38 20 2 4 4  
38 14 2 36 36 38 8 2 3 3 38 2 37 37 38 32 26 20 14

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

8 2 3 3 50 2 49 49 50 44 2 4 4 50 38 2 48 48 50 32 2 4 4 50 26 2  
48 48 50 20 2 4 4 50 14 2 48 48 50 8 2 3 3 50 2 49 49 50 44 38 32 26 20 14

Colocando essas sequências nos polígonos  $\mathcal{P}_{12g-6}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e identificando os lados correspondentes  $\{x, (12g-8)-x\}$ , temos um emparelhamento  $\Phi_{12g-6}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$  para cada  $g$ .

### Extensões de mais alguns grafos

**Proposição 3.2.6** *Caminhos fechados sobre os grafos com rotações, A-1(I), A-1(II), A-2(I), A-2(II), A-3(II), A-5, A-6, B-4(I), B-4(II), B-15, B-20(I) e B-20(II), das Figuras 3.37 e 3.38, para  $g = 4$  e  $g = 5$  de forma que as condições (a) e (b) do capítulo anterior são válidas dão origem a um emparelhamento de arestas de um polígono fundamental  $\mathcal{P}$  com  $12g-6$  arestas, tal que a superfície correspondente  $S$  é fechada orientável de gênero  $g$ .*

**Demonstração:** Utilizando procedimentos análogos ao da demonstração da Proposição 3.2.3 (ou da Proposição 3.2.1) temos as seguintes identificações:

Grafos estendidos de A-1(I).

Para  $g=4$ , temos:

23 24 3 17 23 16 37 17 32 25 27 20 3 4 15 3 37 13 36 37 8 23 24 3 17  
23 16 37 17 32 25 27 20 3 4 15 3 37 13 36 37 8

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

26 27 3 20 26 19 49 20 44 37 39 32 25 27 20 3 4 15 3 49 13 48 49 8 32 33  
3 26 32 25 49 26 44 37 39 32 3 4 27 3 49 25 48 49 20 3 4 15 3 49 13 48 49 8

Grafos estendidos de A-1(II).

Para  $g=4$ , temos a identificação:

28 29 3 22 28 21 37 22 32 3 27 3 26 37 25 37 20 3 4 15 3 37 13 36 37  
8 18 19 3 12 18 11 37 12 32 25 27 20 13 14 15 8

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

36 37 3 30 36 29 49 30 44 3 39 3 38 49 37 49 32 3 27 3 26 49 25 49 20 3  
4 15 3 49 13 48 49 8 22 23 3 16 22 15 49 16 44 37 49 32 25 26 27 20 13 14 15 8

Grafos estendidos de A-2(I).

Para  $g=4$ , temos a identificação:

29 31 24 35 5 16 9 11 4 13 35 26 11 36 3 4 31 3 37 29 36 37 24 27 29  
11 13 16 3 4 11 3 37 9 36 37 4 29 14 5 27 36

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

41 43 36 47 24 28 5 16 9 11 4 13 47 19 11 48 3 4 43 3 49 41 48 49 36 39  
41 4 6 28 19 4 48 33 24 46 48 11 13 16 3 4 11 3 49 9 48 49 4 41 33 5 39 48

Grafos estendidos de A-2(II).

Para  $g=4$ , temos a identificação:

29 31 24 35 10 16 3 11 3 10 37 9 37 4 8 30 21 6 36 29 30 31 24 32 34  
11 13 16 3 4 11 3 37 9 36 37 4 29 19 5 27 36

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

41 43 36 47 24 28 10 16 3 11 3 10 49 9 49 4 8 42 14 6 48 42 42 43 36 44  
46 4 6 28 19 4 48 38 24 36 48 11 13 16 3 4 11 3 49 9 48 49 4 41 33 5 39 48

Grafos estendidos de A-3(II).

Para  $g=4$ , temos a identificação:

4 5 30 35 3 36 27 35 37 28 10 16 3 11 3 10 37 9 37 4 8 30 14 6 36 29  
30 31 34 32 34 4 7 10 13 5 36 26 12 5 33 35

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

4 5 42 47 3 48 39 47 49 40 24 28 10 16 3 11 3 10 49 9 49 4 8 42 14 6 48 41 42  
43 36 44 46 4 6 28 12 4 48 38 24 46 48 4 7 10 13 5 48 40 12 5 45 47

Grafos estendidos de A-5.

Para  $g=4$ , temos a identificação:

36 17 24 34 36 4 6 16 23 4 36 28 12 34 36 15 17 4 9 23 15 33 36 9 24  
28 12 16 31 7 4 25 17 31 23 36 25 4 6 28 12 4

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

48 27 38 46 48 4 6 28 12 4 48 40 24 46 48 4 46 16 25 4 48 40 12 6 48 17 19 4 11  
25 35 9 48 11 36 40 24 28 12 14 41 43 4 35 27 41 33 48 17 4 6 40 12 4

Grafos estendidos de A-6.

Para  $g=4$ , temos a identificação:

20 4 5 15 23 3 36 12 35 37 24 18 4 10 23 16 8 36 10 25 28 20 12 15 30  
32 4 16 17 30 22 36 24 3 5 28 4 37 17 25 35 36

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

32 4 5 27 11 3 48 24 47 49 4 6 36 26 4 48 41 12 46 48 18 4 20 12 25 34 48 10 40  
16 40 25 28 20 12 15 40 48 42 34 26 12 4 32 18 3 5 40 4 49 27 37 47 48

Grafos estendidos de B-4(I).

Para  $g=4$ , temos a identificação:

37 38 32 25 27 20 13 15 8 2 3 3 38 2 37 37 38 32 3 4 27 3 37 25 36  
37 20 3 4 15 3 37 13 36 37 8 2 3 3 38 2 37

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

49 50 44 37 39 32 25 27 20 13 15 8 2 3 3 50 2 49 49 50 44 3 4 39 3 49 37 48  
49 32 3 4 27 3 49 25 48 49 20 3 4 15 3 49 13 48 49 8 2 3 3 50 2 49

Grafos estendidos de B-4(II).

Para  $g=4$ , temos a identificação:

37 38 32 25 27 20 3 15 3 14 37 13 37 8 2 3 3 38 2 37 37 38 32 25 26  
27 20 3 4 15 3 37 13 36 37 8 2 3 3 38 2 37

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

49 50 44 37 39 32 25 27 20 3 15 49 14 49 13 3 8 2 3 3 50 2 49 49 50 44 37 38  
39 32 3 4 27 3 49 25 48 49 20 3 4 15 3 49 13 48 49 8 2 3 3 50 2 49

Grafos estendidos de B-15(I).

Para  $g=4$ , temos a identificação:

36 38 24 28 5 16 9 11 4 13 35 19 11 36 3 4 31 3 37 29 36 37 24 27 29  
4 6 16 10 4 36 21 12 34 36 2 4 4 38 30 2 36

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

48 50 36 40 24 28 5 16 9 11 4 13 47 19 11 48 3 4 43 3 49 41 48 49 36 39 41 4  
6 28 12 4 48 33 24 46 48 4 6 16 10 4 48 40 12 46 48 2 4 4 50 42 2 48

Grafos estendidos de B-20(I).

Para  $g=4$ , temos a identificação:

4 5 30 35 3 36 27 35 37 28 12 16 2 4 4 38 10 2 36 36 38 4 6 28 12  
4 36 30 24 34 36 4 7 10 13 5 36 28 12 5 33 35

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

4 5 42 47 3 48 39 47 49 40 24 28 12 16 2 4 4 50 10 2 48 48 50 4 6 40  
12 4 48 42 36 36 48 4 6 28 12 4 48 40 24 46 48 4 7 10 13 5 48 40 12 5 45 47

Grafos estendidos de B-20(II).

Para  $g=4$ , temos a identificação:

34 35 25 35 28 12 16 2 4 4 38 10 2 36 36 38 4 6 28 12 4 36 30 24 34  
36 4 12 15 6 10 36 28 12 3 6 34 5 37 5 28 30

Para  $g = 5$ , temos a identificação:

46 47 15 47 40 24 28 12 16 2 4 4 50 10 2 48 48 50 4 6 40 12 4 48 42 36  
46 48 4 6 28 12 4 48 40 24 46 48 4 12 37 6 10 48 40 12 3 6 46 5 49 5 40 42

Agora, colocando cada uma dessas sequências, obtidas dos grafos das figuras 3.37 e 3.38, nos polígonos  $\mathcal{P}_{12g-6}$  no sentido anti-horário a partir de  $\tau_1$  e identificando os lados correspondentes  $\{x, (12g - 8) - x\}$ , temos emparelhamentos  $\Phi_{12g-6}$  para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$  para cada  $g$ . □

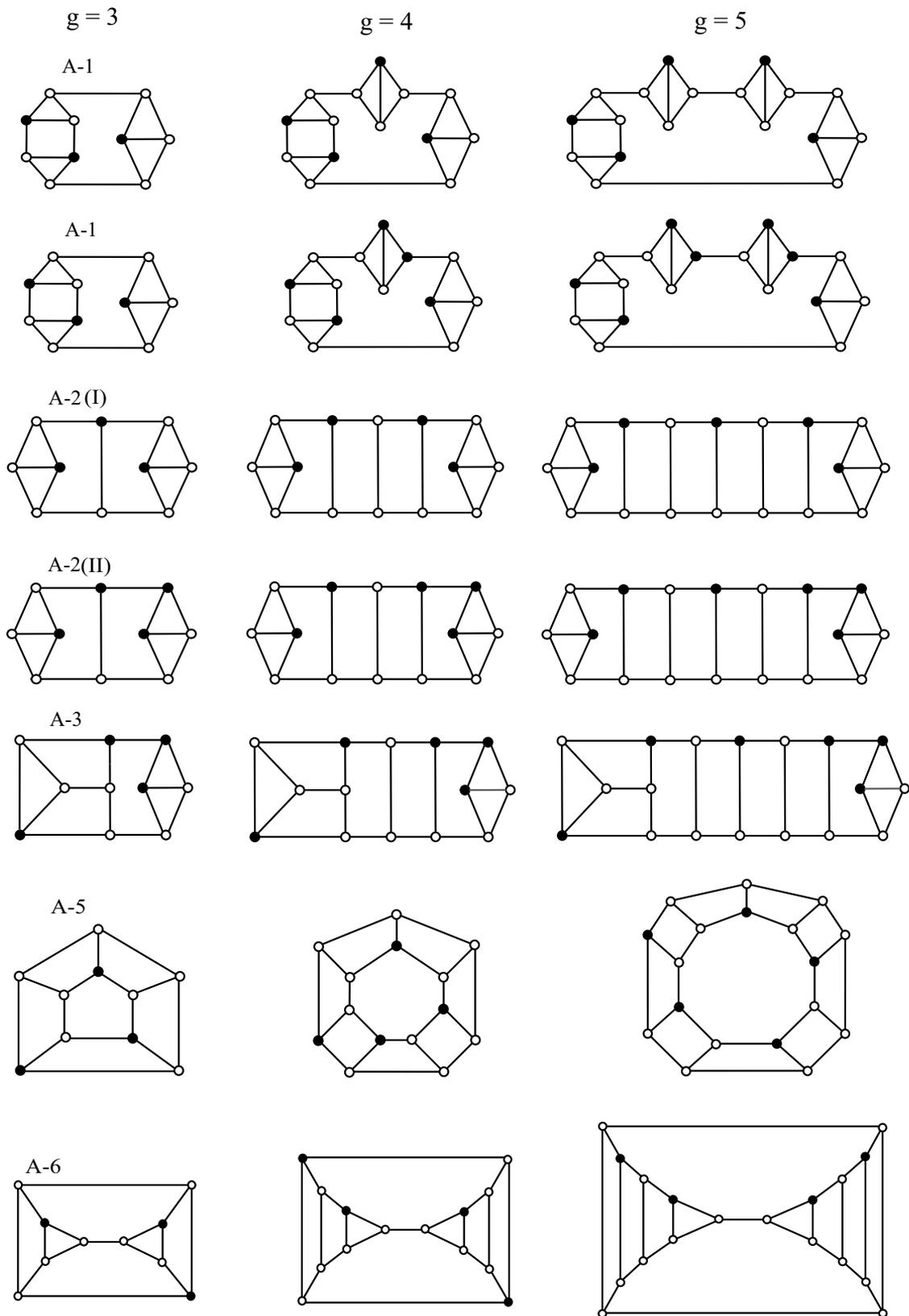


Figura 3.37: Grafos trivalentes com  $(12g - 6)/2$  arestas,  $(12g - 6)/3$  vértices e com rotações

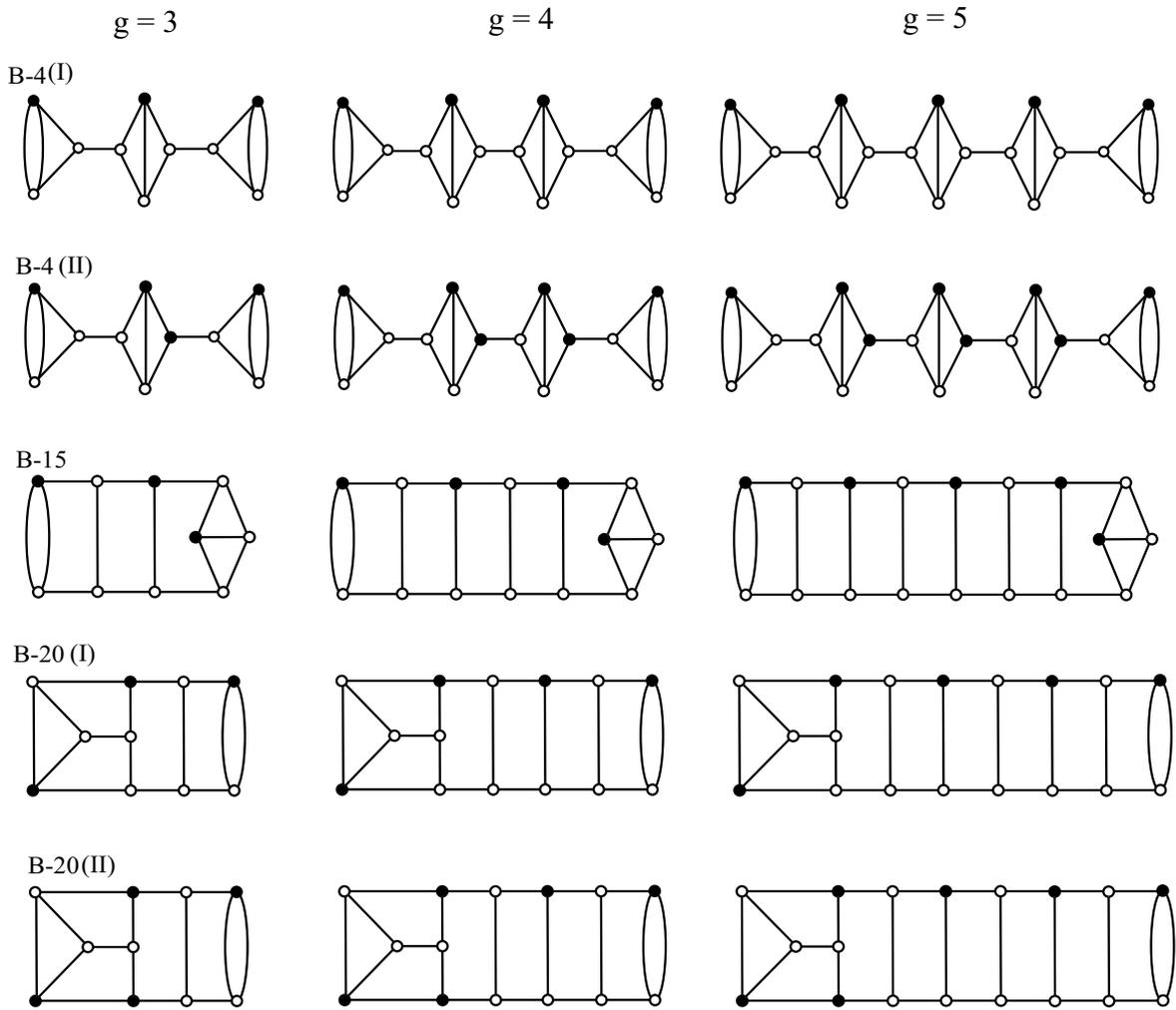


Figura 3.38: Grafos trivalentes com  $(12g - 6)/2$  arestas,  $(12g - 6)/3$  vértices e com rotações

# Capítulo 4

## Emparelhamentos generalizados

Neste capítulo, apresentamos as generalizações dos emparelhamentos de arestas dos polígonos fundamentais hiperbólicos, das proposições do capítulo anterior, com  $12g - 6$  arestas e ângulos internos iguais a  $2\pi/3$ , onde todos os ciclos de vértices tem comprimento 3 e portanto são domínios fundamentais da tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ . Assim, temos condições de concluir que o grupo gerado pelo emparelhamento das arestas desses polígonos nos fornece através do quociente pelo plano hiperbólico, uma superfície de Riemann  $S$  compacta orientável de gênero  $g$ .

Em [6], [7], [8], Faria e Palazzo construíram as generalizações dos 8 emparelhamentos vistos no Capítulo 2.

Denotaremos por  $\Phi_{12g-6}$  o emparelhamento para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ . E, denotaremos por  $\{a, b\}$  se a aresta  $a$  é identificada com a aresta  $b$ .

### 4.1 Generalização dos emparelhamentos da Proposição 3.2.1

Considere os emparelhamentos  $\Phi_{12g-6}$  dos polígonos  $\mathcal{P}_{12g-6}$  para  $g = 3$  do Exemplo 3.1.2, e para  $g = 4$  e  $5$ , da Proposição 3.2.1 do Capítulo 3, referentes ao grafo B-14. Estes foram construídos através de grafos “semelhantes” com rotações “semelhantes”. No sentido de que, seguindo o mesmo raciocínio poderíamos ter continuado a construir grafos para  $g > 5$ . Assim, buscamos uma relação entre suas identificações. Observamos uma forma geral de representar as identificações das arestas de  $\mathcal{P}_{12g-6}$  como segue:

$$\{\tau_{12g-12}, \tau_{12g-9}\}, \{\tau_{12g-11}, \tau_{12g-6}\}, \{\tau_{12g-10}, \tau_1\}, \{\tau_{12g-8}, \tau_{12g-19}\}, \{\tau_{12g-7}, \tau_2\}, \\ \{\tau_{2g-1}, \tau_{2g+2}\}, \{\tau_{2g}, \tau_{2g+5}\}, \{\tau_{2g+1}, \tau_{2g+6}\}, \{\tau_{2g+3}, \tau_{2g+14}\}, \{\tau_{2g+4}, \tau_{2g+7}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 3$  e  $g \geq 3$ :

$$\{\tau_{3+2k}, \tau_{12g-20-10k}\}, \{\tau_{4+2k}, \tau_{12g-15-10k}\},$$

$$\{\tau_{12g-22-10k}, \tau_{12g-17-10k}\}, \{\tau_{12g-21-10k}, \tau_{12g-14-10k}\},$$

$$\{\tau_{12g-18-10k}, \tau_{12g-13-10k}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 4$  e  $g > 3$

$$\{\tau_{12g-16-10k}, \tau_{12g-29-10k}\}.$$

Considere as isometrias que identificam os pares conforme segue:

$$\alpha_1(\tau_{12g-12}) = \tau_{12g-9}, \alpha_2(\tau_{12g-11}) = \tau_{12g-6}, \alpha_3(\tau_{12g-10}) = \tau_1, \alpha_4(\tau_{12g-8}) = \tau_{12g-19},$$

$$\alpha_5(\tau_{12g-7}) = \tau_2,$$

$$\alpha_6(\tau_{2g-1}) = \tau_{2g+2}, \alpha_7(\tau_{2g}) = \tau_{2g+5}, \alpha_8(\tau_{2g+1}) = \tau_{2g+6}, \alpha_9(\tau_{2g+3}) = \tau_{2g+14},$$

$$\alpha_{10}(\tau_{2g+4}) = \tau_{2g+7}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 3, g \geq 3$ :

$$\beta_{1+6k}(\tau_{3+2k}) = \tau_{12g-20-10k}, \beta_{2+6k}(\tau_{4+2k}) = \tau_{12g-15-10k},$$

$$\beta_{3+6k}(\tau_{12g-22-10k}) = \tau_{12g-17-10k}, \beta_{4+6k}(\tau_{12g-21-11k}) = \tau_{12g-14-10k},$$

$$\beta_{5+6k}(\tau_{12g-18-10k}) = \tau_{12g-13-10k}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 4, g > 3$ :

$$\gamma_{1+k}(\tau_{12g-16-10k}) = \tau_{12g-29-11k}.$$

Logo, o conjunto formado pelas isometrias acima é um emparelhamento para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ , onde  $g \geq 3$ .

## 4.2 Generalização dos emparelhamentos da Proposição 3.2.2

Considere os emparelhamentos  $\Phi_{12g-6}$  dos polígonos  $\mathcal{P}_{12g-6}$  para para  $g = 3$ , do exemplo 3.1.3, e para  $g = 4$  e  $5$ , da Proposição 3.2.2 do Capítulo 3, referentes ao grafo B-10. Seguindo o mesmo raciocínio poderíamos ter continuado a construir grafos para  $g > 5$ . Observamos uma forma geral de representar as identificações das arestas de  $\mathcal{P}_{12g-6}$  como segue:

$$\{\tau_3, \tau_{12g-12}\}, \{\tau_2, \tau_{12g-7}\}, \{\tau_1, \tau_{12g-9}\}, \{\tau_{12g-11}, \tau_{12g-8}\}, \{\tau_{12g-10}, \tau_{12g-6}\},$$

$$\{\tau_{g+1}, \tau_{g+10}\}, \{\tau_{g+2}, \tau_{g+5}\}, \{\tau_{g+3}, \tau_{g+7}\}, \{\tau_{g+4}, \tau_{g+8}\}, \{\tau_{g+6}, \tau_{g+9}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 3$  e  $g \geq 3$ :

$$\{\tau_{12g-22-11k}, \tau_{12g-13-11k}\}, \{\tau_{12g-21-11k}, \tau_{12g-18-11k}\}, \{\tau_{12g-20-11k}, \tau_{12g-16-11k}\}, \\ \{\tau_{12g-19-11k}, \tau_{12g-15-11k}\}, \{\tau_{12g-17-11k}, \tau_{12g-14-11k}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 4$  e  $g > 3$ :

$$\{\tau_{4+k}, \tau_{12g-23-11k}\}.$$

Considere as isometrias que identificam os pares conforme segue:

$$\alpha_1(\tau_3) = \tau_{12g-12}, \alpha_2(\tau_2) = \tau_{12g-7}, \alpha_3(\tau_1) = \tau_{12g-9}, \alpha_4(\tau_{12g-11}) = \tau_{12g-8}, \\ \alpha_5(\tau_{12g-10}) = \tau_{12g-6},$$

$$\alpha_6(\tau_{g+1}) = \tau_{g+10}, \alpha_7(\tau_{g+2}) = \tau_{g+5}, \alpha_8(\tau_{g+3}) = \tau_{g+7}, \alpha_9(\tau_{g+4}) = \tau_{g+8}, \\ \alpha_{10}(\tau_{g+6}) = \tau_{g+9}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 3$ ,  $g \geq 3$ :

$$\beta_{1+6k}(\tau_{12g-22-11k}) = \tau_{12g-13-11k}, \beta_{2+6k}(\tau_{12g-21-11k}) = \tau_{12g-18-11k}, \\ \beta_{3+6k}(\tau_{12g-20-11k}) = \tau_{12g-16-11k}, \beta_{4+6k}(\tau_{12g-19-11k}) = \tau_{12g-15-11k}, \\ \beta_{5+6k}(\tau_{12g-17-11k}) = \tau_{12g-14-11k}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 4$ ,  $g > 3$ :

$$\gamma_{1+k}(\tau_{4+k}) = \tau_{12g-23-11k}.$$

Logo, o conjunto formado pelas isometrias acima é um emparelhamento para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ , onde  $g \geq 3$ .

### 4.3 Generalização dos emparelhamentos da Proposição 3.2.3

Considere os emparelhamentos  $\Phi_{12g-6}$  dos polígonos  $\mathcal{P}_{12g-6}$  para  $g = 3$ , do Exemplo 3.1.4, e para  $g = 4$  e  $5$ , da Proposição 3.2.3 do capítulo 3, referentes ao grafo A-3. Seguindo o mesmo raciocínio poderíamos ter continuado a construir grafos para  $g > 5$ . Observamos uma forma geral de representar as identificações das arestas de  $\mathcal{P}_{12g-6}$  como segue:

Para  $g = 3$ , algumas identificações não se adéquam ao caso geral, assim colocaremos estas separadas como segue:

$$\{\tau_3, \tau_{15}\}, \{\tau_7, \tau_{16}\}, \{\tau_{14}, \tau_{29}\}, \{\tau_{17}, \tau_{30}\}.$$

Se  $g \geq 3$ , temos:

$$\{\tau_1, \tau_6\}, \{\tau_2, \tau_8\}, \{\tau_4, \tau_{-2}\}, \{\tau_5, \tau_9\}, \{\tau_{10}, \tau_{-3}\},$$

$$\{\tau_{2g+5}, \tau_{2g+15}\}, \{\tau_{2g+6}, \tau_{2g+18}\}, \{\tau_{2g+7}, \tau_{2g+12}\}, \{\tau_{2g+13}, \tau_{2g+17}\}, \{\tau_{2g+14}, \tau_{2g+19}\}, \\ \{\tau_{2g+16}, \tau_{2g+20}\}.$$

Se  $g \geq 4$ , temos:

$$\{\tau_{2g+3}, \tau_{2g+9}\}, \{\tau_{2g+4}, \tau_{2g+21}\}, \{\tau_{2g+10}, \tau_{2g+30}\}, \{\tau_{2g+11}, \tau_{2g+23}\}, \{\tau_{2g+8}, \tau_{2g+22}\},$$

$$\{\tau_{12g-16}, \tau_{12g-11}\}, \{\tau_{12g-15}, \tau_{12g-7}\}, \{\tau_{12g-12}, \tau_{12g-6}\}, \{\tau_3, \tau_{12g-14}\}, \{\tau_7, \tau_{12g-13}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 5$  e  $g \geq 5$ , temos:

$$\{\tau_{2g+24+10k}, \tau_{2g+29+10k}\}, \{\tau_{2g+25+10k}, \tau_{2g+32+10k}\}, \{\tau_{2g+27+10k}, \tau_{2g+40+10k}\},$$

$$\{\tau_{2g+28+10k}, \tau_{2g+33+10k}\},$$

$$\{\tau_{11+2k}, \tau_{12g-24-10k}\}, \{\tau_{12+2k}, \tau_{12g-19-10k}\}.$$

O conjunto das isometrias que identificam os pares acima é um emparelhamento para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ , para cada  $g \geq 3$ .

## 4.4 Generalização dos emparelhamentos da Proposição 3.2.5

Considere os emparelhamentos  $\Phi_{12g-6}$  dos polígonos  $\mathcal{P}_{12g-6}$  para para  $g = 3$ , do Exemplo 3.1.5, e para  $g = 4$  e  $5$ , da Proposição 3.2.5 do Capítulo 3, referentes ao grafo B-1. Seguindo o mesmo raciocínio poderíamos ter continuado a construir grafos para  $g > 5$ . Observamos uma forma geral de representar as identificações das arestas de  $\mathcal{P}_{12g-6}$  como segue:

$$\{\tau_1, \tau_{10}\}, \{\tau_2, \tau_5\}, \{\tau_3, \tau_7\}, \{\tau_4, \tau_8\}, \{\tau_6, \tau_9\},$$

$$\{\tau_{10g-10}, \tau_{10g-1}\}, \{\tau_{10g-9}, \tau_{10g-6}\}, \{\tau_{10g-8}, \tau_{10g-4}\}, \{\tau_{10g-7}, \tau_{10g-3}\}, \{\tau_{10g-5}, \tau_{10g-2}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, g - 3$  e  $g \geq 3$ :

$$\{\tau_{11+10k}, \tau_{14+10k}\}, \{\tau_{12+10k}, \tau_{17+10k}\}, \{\tau_{13+10k}, \tau_{18+10k}\}, \{\tau_{16+10k}, \tau_{19+10k}\}.$$

Se  $k = 0, 1, \dots, 2g - 6$  e  $g \geq 3$ :

$$\{\tau_{15+5k}, \tau_{12g-6-k}\}.$$

O conjunto das isometrias que identificam os pares acima é um emparelhamento para o polígono  $\mathcal{P}_{12g-6}$ , para cada  $g \geq 3$ .

# Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos o emparelhamento de arestas de polígonos hiperbólicos com  $12g - 6$  arestas e ângulos iguais a  $2\pi/3$  gerado por meio de grafos trivalentes, no caso em que o quociente do plano hiperbólico por um grupo Fuchsiano  $\Gamma, \frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ , é uma superfície fechada de gênero  $g \geq 2$ .

Em manuscrito, foram feitas várias tentativas de buscar a sequências vistas [10], já que estas não estavam claras no mesmo. Assim, deduzimos as duas formas de obter a sequência cíclica que corresponde ao emparelhamento do polígono vistas nos Capítulos 2 e 3. Além dos casos especificados neste texto, utilizamos essas duas formas para diversos outros casos e verificamos que todos os ciclos são de comprimento três. E, como todos os ciclos são de comprimento três, temos condições de concluir que o grupo gerado pelo emparelhamento das arestas desses polígonos nos fornece através do quociente pelo plano hiperbólico, uma superfície de Riemann  $S$  compacta orientável de gênero  $g$ .

A primeira forma foi apresentada de modo detalhado nas Proposições 2.2.2 e 3.2.1 e a segunda foi apresentada de modo detalhado na Proposição 3.2.3. Isso possibilita que o leitor verifique as sequências que foram citadas no texto e façam o emparelhamento, ou busque novas identificações através dos diversos grafos da figura 3.5.

Vale salientar que todas essas sequências podem ser obtidas através dessa segunda forma mostrada na Proposição 3.2.3. Esta é mais prática, já que precisamos de apenas um caminho fechado de comprimento  $12g - 6$  no grafo e um algoritmo simples para obter a sequência que dá a identificação do polígono com  $12g - 6$  arestas.

Agora, compreendendo estes processos, seria interessante um trabalho de pesquisa a respeito de programas computacionais que por exemplo: atribuam todos os tipos de rotações distintas nos grafos trivalentes que satisfaçam as condições citadas nesse trabalho, e/ou que determinem os caminhos fechados de comprimento  $12g - 6$  em grafos equivalentes, e/ou gerem as figuras desses emparelhamentos. (Lee Mocher em [15] e Gou Nakamura em [17] utilizaram algum programa computacional nesse sentido, porém não tivemos acesso aos mesmos).

No capítulo 4, obtemos quatro generalizações de emparelhamentos de polígonos

com  $12g - 6$ ,  $g > 3$ , com ângulos internos iguais a  $2\pi/3$ . De modo análogo, pode-se buscar novas generalizações através dos outros emparelhamentos relacionados com os grafos trivalentes da figura 3.5, por exemplo os emparelhamentos da Proposição 3.2.6.

# Referências Bibliográficas

- [1] BEARDON, A. F. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [2] Bollobás, B. *Modern Graph Theory*. Volume 184 de Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [3] CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [4] FARIA, M. B. *Empacotamento de esferas em espaços hiperbólicos*. Dissertação de mestrado, departamento de matemática, Imecc-Unicamp, 2001.
- [5] FIRER, M. *Grupos fuchsianos*. UNICAMP, Notas de Aulas, 1999.
- [6] FARIA, M. B. & Palazzo Jr, R. *Emparelhamentos generalizados associados a tesselação  $\{12 - 6, 3\}$* . Tema Tend. Mat. Apl. Comp., 11, No. 1 (2010), 59-67.
- [7] Faria, M. B. e Palazzo, R. *Emparelhamentos generalizados casos III e VI Associados a tesselação  $\{12g - 6, 3\}$* , Anais do XXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2009), Blumenau-SC, outubro, 2009.
- [8] Faria, M. B. e Palazzo, R. *Generalização de emparelhamento de arestas de polígonos hiperbólicos relacionados à tesselação  $\{12g - 6, 3\}$*  apresentado na forma de poster no *XXVII Colóquio Brasileiro de Matemática*, realizado no IMPA, Rio de Janeiro, julho, 2009.
- [9] Hirsch, M. W. *Differential Topology*. Graduate Text in Mathematics 33, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [10] JORGENSEN, T. & NAATANEN, M. *Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons*, Quart. J. Math. Oxford Ser, (2) 33 (1982), n° 132, 451-461.
- [11] Kinsey, L. C. *Topology of Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1997.

- [12] Katok, S. *Fuchsian Groups*. The University of Chicago Press, Chicago, 1991.
- [13] Mohar, B. & Thomassen, C. *Graphs on Surfaces*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 2001.
- [14] Munkres, J. R. *Topology - A first course*. Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [15] Mosher, L. *A user's guide to the mapping class group: once punctured surfaces*. Proc. of a Comput. Sci., Vol. 25 (1996), 101-174.
- [16] Massey, W. S. *A basic course in algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [17] NAKAMURA, G., *Generic fundamental polygons for surfaces of genus three*, Kodai Math. J. Volume 27, Number 1 (2004), 88-104.
- [18] Ringel, G. *Map Color Theorem*. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [19] Rocha, L. F. C. *Introdução à geometria hiperbólica plana*. Impa, 1987.
- [20] Soares, M. G. *Cálculo em uma variável complexa*. IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [21] SANTOS, S. A. *Geometria plana e desenho geométrico*. Notas de Aulas, 2003. <http://www.ime.unicamp.br/sandra/MA520/handouts/lab12.pdf>.
- [22] White, A. T. *Graphs of Groups on Surfaces*. Volume 188 de North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science B.V., Amsterdam, Netherlands, 2001.
- [23] West, D. B. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.