

ARTUR CÉSAR FASSONI

**SISTEMAS DINÂMICOS: BACIAS DE ATRAÇÃO E
APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2012**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

F249s
2012 Fassoni, Artur César, 1988-
Sistemas dinâmicos: bacias de atração e aplicações / Artur
César Fassoni. – Viçosa, MG, 2012.
vii, 138f. : il. ; 29cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Lucy Tiemi Takahashi

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 136-138

1. Equações diferenciais não-lineares. 2. Sistemas
dinâmicos diferenciais. 3. Biomatemática. 4. Dinâmica
populacional. 5. Estabilidade. 6. Dinâmica. I. Universidade
Federal de Viçosa. II. Título.

CDD 22. ed. 515.35

ARTUR CÉSAR FASSONI

**SISTEMAS DINÂMICOS: BACIAS DE ATRAÇÃO E
APLICAÇÕES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 28 de Fevereiro de 2012.

Láercio José dos Santos

Mehran Sabeti

Ricardo Martins da Silva Rosa

Marcelo Lobato Martins
(Coorientador)

Lucy Tiemi Takahashi
(Orientadora)

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela esperança de vida hoje e amanhã.

À minha esposa Andréia, que tantas vezes me fez continuar e trabalhar. Obrigado pelos momentos de alegria passados ao seu lado.

Aos meus pais Délio e Klênia, por tudo o que me ensinaram nesta vida.

Aos meus irmãos Alice e Timóteo, por quem eles são e representam.

A todos os meus familiares, avôs e avós, tios e tias, primos e primas, sogro e sogra, cunhados e cunhadas.

Aos meus amigos.

À Lucy, minha orientadora, pela disposição, por ter acreditado em mim e me orientar não só em matéria de Matemática.

Ao meu co-orientador Marcelo.

Aos colegas de Mestrado, em especial, Ana Paula, Fernando, Fred, Isaque e Vinícius, pelos momentos compartilhados juntos.

Aos professores do programa, pelas disciplinas lecionadas e atenção dispensada.

À coordenadora Simone, pela dedicação e excelência.

À Mírian, seu Jair e todos os demais funcionários do DMA.

Aos membros da banca, por aceitarem o convite e apresentarem sugestões valiosas.

À Capes, pela bolsa.

À FAPEMIG, Demanda Universal CEX APQ00149-08, pelo suporte financeiro.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 Equações Diferenciais Ordinárias	3
1.1 Equações Diferenciais Ordinárias - Definição	3
1.2 Existência e Unicidade	5
1.3 Retrato de Fase	6
1.3.1 O Pêndulo (Simples e Amortecido)	6
1.3.2 Competição entre espécies	8
1.4 O Fluxo de uma EDO	8
1.4.1 Significado geométrico do fluxo	10
1.4.2 Propriedades do Fluxo	11
1.5 Pontos de equilíbrio	12
1.6 Órbitas no espaço de fase e conjuntos limite	12
1.7 O Teorema do Fluxo Tubular	15
1.8 Sistemas Lineares de EDO's	17
1.8.1 Caso $n = 1$	17
1.8.2 Caso A diagonal	18
1.8.3 Caso A diagonalizável	21
1.8.4 Exponencial de Matrizes	22

1.8.5	Caso Geral: Uso da forma de Jordan	23
1.8.6	Subespaços estáveis e instáveis	25
1.9	Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio	25
1.10	O Teorema de Hartman-Grobman	27
1.11	Alguns conceitos sobre estabilidade	28
2	Teorema da Variedade Estável e Bacias de Atração	31
2.1	O Teorema da Variedade Estável	31
2.1.1	Demonstração do Teorema da Variedade Estável Local	32
2.1.2	Demonstração do Teorema da Variedade Estável Global	42
2.2	Bacias de Atração	45
2.2.1	Caracterização da fronteira da bacia de atração	48
2.2.2	Genericidade	52
2.3	Um método para a determinação da variedade estável de um equi- líbrio hiperbólico	53
2.3.1	Método para determinação de Variedades Estáveis	53
3	Aplicação a um sistema 2D	56
3.1	O modelo	56
3.2	Análise Qualitativa do Modelo	58
3.3	Bi-estabilidade e bacias de atração	61
3.4	O método das aproximações sucessivas para este modelo	64
3.4.1	Resultados com os parâmetros fixos	65
3.4.2	Resultados com α e β fixos e δ livre	67
3.4.3	Resultados com α e β livres e $\delta = 1$	68
3.5	Conclusão	72
4	Aplicação a um sistema 3D	74
4.1	Introdução	74
4.2	O Modelo	75

4.3	Pontos Fixos	77
4.4	Análise da Estabilidade dos Pontos Fixos	80
4.4.1	Análise do ponto P_5	83
4.5	A influência dos parâmetros sobre as bacias de atração	103
4.5.1	O método numérico	104
4.5.2	Os cenários no espaço de parâmetros	106
4.5.3	A respeito de bifurcações no sistema	119
4.6	Conclusões	120
5	Considerações Finais	122
A	Significado dos parâmetros dos Capítulos 3 e 4	123
A	Código do programa para determinar a Variedade Estável	124
A	Código do programa para determinar as Bacias	131
	Referências Bibliográficas	138

RESUMO

FASSONI, Artur César, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro, 2012. **Sistemas Dinâmicos: Bacias de Atração e Aplicações**. Orientadora: Lucy Tiemi Takahashi. Coorientador: Marcelo Lobato Martins.

O presente trabalho propõe-se a apresentar uma descrição da teoria sobre as bacias de atração de pontos de equilíbrio hiperbólicos de sistemas dinâmicos em tempo contínuo, a desenvolver um método para a determinação numérica dessas bacias e a examinar os resultados da aplicação da teoria e do método em modelos de dinâmica de populações. A determinação das bacias de atração permite o estudo de estratégias de controle sobre os parâmetros, de modo a aumentar ou diminuir tais regiões, conforme o interesse. Do ponto de vista de fenômenos biológicos, estas previsões são importantes, pois, se um ponto de equilíbrio representa a extinção de uma espécie que deve ser preservada, então procura-se garantir que as condições iniciais naturais não estejam na bacia de atração do mesmo, estudando-se estratégias de controle sobre os parâmetros para que a bacia do ponto diminua suficientemente. Do ponto de vista da análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema, a teoria de bacias de atração traz consequências topológicas ao espaço de fase que permitem, de forma indireta, realizar uma análise global, no espaço de parâmetros, da estabilidade dos pontos de equilíbrio, garantindo resultados mais amplos dos que se obtêm geralmente, quando não se faz uso desta teoria.

ABSTRACT

FASSONI, Artur César, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2012.
Dynamical systems: Basins of attraction and applications. Adviser: Lucy Tiemi Takahashi. Co-adviser: Marcelo Lobato Martins.

The present work proposes to present a description of the theory on the basins of attraction of hyperbolic equilibrium points of continuous dynamical systems, to develop a method for the numerical determination of these basins and to examine the results of applying the theory and method in models of population dynamics. The determination of the basins of attraction allows the study of control strategies on the parameters, in order to increase or decrease such regions, as interest. From the biological phenomena viewpoint, these predictions are very important, because if an equilibrium point represents the extinction of a species that must be preserved, then one seeks to guarantee that the natural initial conditions do not are in the basin of attraction of that point. This is made by studying control strategies on the parameters, for that the point basin decreases sufficiently. From the viewpoint of stability analysis of equilibrium points of dynamical systems, the theory of basins of attraction brings topological consequences to the phase space which allow, indirectly, conduct a global analysis in the parameters space, allowing wider results of which are generally obtained without this theory.

Introdução

Sistemas de equações diferenciais são utilizados para modelar fenômenos físicos, biológicos, econômicos, etc [22]. Embora, em geral, não seja possível determinar uma expressão analítica para a solução de um sistema, pode-se realizar um estudo qualitativo do mesmo, analisando a relação entre os seus parâmetros e a estabilidade dos seus pontos de equilíbrio, que representam os estados para os quais o sistema pode evoluir e permanecer. Obtem-se, assim, informações sobre o comportamento assintótico do fenômeno, apenas pela análise de seus parâmetros. Porém, em alguns casos podem ocorrer dois ou mais pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, fenômeno conhecido como biestabilidade [1]. Neste caso, não só os parâmetros terão influência sobre o comportamento das soluções mas também as condições iniciais, pois uma perturbação em uma condição inicial pode levar a um estado assintótico totalmente diferente do comportamento original. Do ponto de vista de aplicações, pode-se ter, por exemplo, um estado indesejável que é assintoticamente estável, de modo que é necessário entender o que deve ocorrer com as condições iniciais para evitar tal estado. Para compreender completamente esta dependência das condições iniciais, é fundamental caracterizar e determinar a bacia de atração de cada equilíbrio assintoticamente estável que é, por definição, o conjunto dos pontos que são condições iniciais de soluções que tendem para aquele equilíbrio quando o tempo tende a infinito [6]. Esta necessidade do estudo das bacias de atração de um sistema autônomo surge como um estágio natural após um curso de equações diferenciais ordinárias que abrange o Teorema do Fluxo Tubular, o Teorema de Hartman-Grobman e o Teorema da Variedade Estável [26, 33].

Inicialmente, no Capítulo 1, apresentamos uma revisão sobre parte da teoria qualitativa de EDO's [26, 33, 16].

No capítulo seguinte, apresentamos a teoria sobre Bacias de Atração em Sistemas Dinâmicos contínuos [6, 1]. Veremos que tais resultados tem um caráter global e trazem consequências topológicas a configuração do espaço de fase de um sistema autônomo. Estas consequências terão um papel fundamental na análise qualitativa do sistema estudado no Capítulo 4. Como estes resultados a respeito das bacias de atração relacionam a fronteira das mesmas como a união das variedades estáveis de certos pontos de equilíbrio do sistema, apresentamos, ainda no Capítulo 2, uma demonstração construtiva do Teorema da Variedade Estável, que fornece um método para a determinação destas variedades [8, 13]. Com

os resultados e métodos em mãos, apresentamos um algoritmo para determinar numericamente as regiões de estabilidade de um sistema autônomo.

No Capítulo 3, aplicamos a teoria e a rotina desenvolvidas a um modelo clássico de competição entre espécies em dimensão dois, onde ocorre bi-estabilidade [23], ampliando a análise qualitativa do mesmo, estudando a forma da separatriz entre as bacias de atração e a influência de cada parâmetro sobre o tamanho das mesmas, discutindo estratégias pertinentes a diminuição ou aumento dessas bacias.

No Capítulo 4, propomos um modelo que visa descrever a interação entre duas espécies de plantas, onde o *habitat* natural de uma delas é invadido pela outra que, além de competir com a espécie nativa pelos alimentos presentes no meio, produz uma fitotoxina que inibe o crescimento da espécie nativa, recurso conhecido como supressão alelopática. O modelo consiste de um sistema autônomo com três equações diferenciais e oito parâmetros. Na análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio, diante da ocorrência simultânea de dois equilíbrios assintoticamente estáveis, fizemos uso das ferramentas teóricas sobre bacias de atração apresentadas no Capítulo 2. As consequências destas ferramentas sobre a configuração topológica do espaço de fase permitem realizar uma análise qualitativa global, sem fixar nenhum valor numérico para os parâmetros, tendo assim, uma descrição da estabilidade dos pontos de equilíbrio em todo espaço de parâmetros. Tal estudo seria inviável sem a teoria estudada no Capítulo 2. Estudamos também a influência de cada um dos parâmetros sob as bacias de atração dos pontos de equilíbrio, o que possibilita o direcionamento de estratégias de controle que visem a sobrevivência ou extinção de cada uma das espécies.

Por último, no Capítulo 5 apresentamos as conclusões, ressaltando a relevância de se utilizar a teoria sobre bacias de atração para a análise qualitativa de sistemas dinâmicos não-lineares.

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo, apresentamos uma revisão de uma parte da teoria qualitativa dos sistemas autônomos de equações diferenciais. Todos os resultados, bem como suas demonstrações podem ser encontrados em [26], [16], [33] e [11]. Não apresentaremos as demonstrações dos resultados, pois elas fogem do escopo deste trabalho. O objetivo aqui é apenas apresentar as ferramentas básicas para o desenvolvimento da teoria estudada no Capítulo 2 e do método proposto no mesmo capítulo, que serão utilizados nos Capítulos 3 e 4.

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias - Definição

Um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias é um sistema da forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.1)$$

onde as incógnitas são funções diferenciáveis $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, que satisfaçam

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

O nome autônomo vem do fato das funções f_i do lado direito em (1.2) não dependerem explicitamente do tempo, mas apenas do ponto $x = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$. Todo sistema não autônomo pode ser colocado na forma autônoma introduzindo-se uma nova variável $x_{n+1} = t$, para a qual $\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$. Assim, define-se $f_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 1$ e adiciona-se a equação $\frac{dx_{n+1}}{dt} = f_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})$ ao sistema.

Escrevendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, o sistema (1.1) pode ser escrito na forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.3}$$

razão pela qual, (1.1) pode ser chamado de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) autônoma.

A aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser vista como um campo vetorial que a cada ponto $x_0 \in U$ associa um vetor $f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ com origem em x_0 e extremidade em $x_0 + f(x_0)$. E, reciprocamente, dado um campo de vetores $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, ele dá origem a EDO $\dot{x} = g(x)$. Portanto, EDO's e campos de vetores estão em correspondência biunívoca. Assim, muitas vezes nos referiremos a (1.1), ou a (1.3), como EDO's definidas pelo campo f e, nos referiremos a f como campo da EDO (1.3).

Na notação vetorial, a solução que procuramos para (1.3) é uma aplicação $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$. Geometricamente, procuramos uma curva diferenciável $x(t)$ contida em U tal que, em cada ponto $x(t)$, o seu vetor tangente $x'(t)$ coincida com o campo naquele ponto, isto é, queremos que $x(t)$ satisfaça

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Se escrevermos o sistema (1.3) adicionando uma condição inicial, temos um problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 . \end{cases} \tag{1.4}$$

Uma solução deste PVI será uma curva $x(t)$ que passe por $x_0 \in U$ no tempo $t = 0$ e que seja tangente ao campo f em cada ponto. Veja a Figura 1.1. Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 1.1 *Uma solução do PVI (1.4) em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

- $x(t) \in U, \forall t \in I$.
- $0 \in I$ e $x(0) = x_0$.
- $x'(t) = f(x(t)), \forall t \in I$.

É importante reforçar que esta definição diz quando uma curva é uma solução de (1.4) *em um intervalo específico* I . Note também que necessariamente $0 \in I$. Às vezes, quando não for importante especificar o intervalo, nos referiremos a uma tal solução de (1.4) como uma solução da EDO (1.3) passando por x_0 . Ainda, chamamos $x(t)$ de **curva integral de f** , ou **curva integral de f passando por x_0** , quando adicionarmos a condição inicial em (1.4) ou ainda, **trajetória do campo f** .

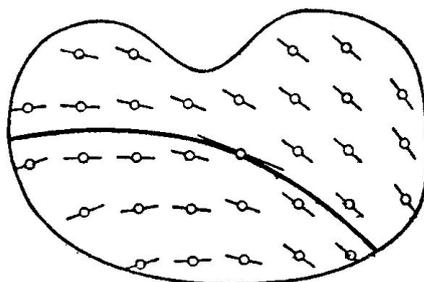


Figura 1.1: Campo num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e solução de um PVI associado ao campo. Figura retirada de [3].

1.2 Existência e Unicidade

Veremos agora alguns resultados que garantem a existência e a unicidade das soluções de uma EDO autônoma e também algumas de suas propriedades. Trabalharemos sempre com a hipótese de que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de classe C^1 definido num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Para denotar este fato, em toda a dissertação, usaremos a notação $f \in C^1(U)$, $U \stackrel{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2 (Existência e Unicidade De Picard) *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de classe C^1 no aberto U e $x_0 \in U$ então existe $a > 0$ tal que o PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

tem uma única solução $x(t)$ no intervalo $I = (-a, a)$.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [26], pp. 70-76. \square

Observe que o teorema garante a existência de um intervalo no qual existe uma única solução do PVI (1.5). Assim, para um intervalo dado, não sabemos ainda se existe ou não solução no mesmo, muito menos se ela é única. Ainda, não temos como precisar o raio a do intervalo dado pelo teorema. Contudo o próximo teorema nos dá um intervalo maximal.

Teorema 1.3 (Solução Maximal) *Seja $f \in C^1(U)$. Então, para cada $x_0 \in U$ existem um intervalo aberto $I(x_0)$ e $x : I(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução única de (1.5) em $I(x_0)$, com a seguinte propriedade:*

Se $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de (1.5) em $J \stackrel{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R}$, então $J \subseteq I(x_0)$ e $x|_J = y$.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [26], pp. 87-89. \square

Definição 1.4 A solução $x : I(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (1.5) dada pelo Teorema (1.3) é chamada solução maximal de (1.5) passando por x_0 .

Como $I(x_0)$ é aberto e $0 \in I(x_0)$, podemos escrever $I(x_0) = (-\alpha, \beta)$ com $\alpha, \beta > 0$, não excluindo as possibilidades $\alpha, \beta = \infty$. Com algumas hipóteses a mais, é possível determinar quando o intervalo maximal é a reta toda.

Teorema 1.5 Sejam $f \in C^1(U)$, $x_0 \in U$, e $x : I(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a solução maximal de (1.5) com $I(x_0) = (-\alpha, \beta)$. Então

- (i) Se $\beta \in \mathbb{R}$, então $x(t) \rightarrow \partial U$ quando $t \rightarrow \beta^-$, isto é, dado qualquer compacto $K \subset U$, existe $t \in (0, \beta)$ tal que $x(t) \notin K$.
- (ii) Se $\beta \in \mathbb{R}$ e existe o limite $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t)$ então $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t) \in \partial U$
- (iii) Se a trajetória $x(I(x_0))$ é limitada e $U = \mathbb{R}^n$, então $\beta = \infty$.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [26], pp. 90-91. \square

Podemos aplicar o Teorema 1.5 ao campo $-f$ para obter conclusões análogas para o extremo $-\alpha$ do intervalo maximal $I(x_0)$.

1.3 Retrato de Fase

O **espaço de fase** do sistema (1.3) é o aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ onde o campo f atua. Ele pode ser visto como o conjunto de todos os estados possíveis do sistema. O **retrato de fase** do sistema consiste do esboço das curvas integrais passando por determinados pontos de U de maneira que sejam evidenciados os aspectos mais importantes do comportamento qualitativo do sistema. Como ilustração, colocamos, sem contas ou justificativas, o esboço do retrato de fases de alguns sistemas autônomos.

1.3.1 O Pêndulo (Simples e Amortecido)

Considere um pêndulo de massa m , comprimento l , sob a ação da gravidade g . Suponha que ele esteja sujeito a uma força de amortecimento proporcional a sua velocidade. Seja θ o ângulo que descreve a sua inclinação em relação ao repouso, conforme ilustrado na Figura 1.2.

Considerando μ o coeficiente de amortecimento do pêndulo, pelas leis da física, temos que

$$ml^2\ddot{\theta} + ml^2\mu\dot{\theta} = -mgl\sin\theta \quad (1.6)$$

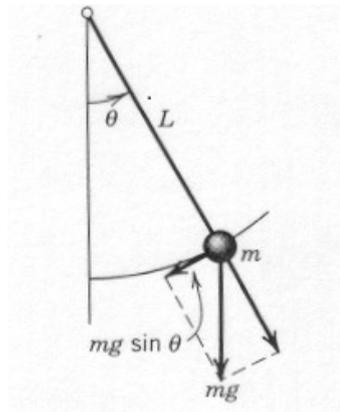


Figura 1.2: Decomposição das forças atuando sobre um pêndulo de massa m , comprimento l , sujeito a gravidade g . Figura retirada de <http://dmpeli.mcmaster.ca/Matlab/CLLsoftware/Pendulum/Pendulum.html>, 21 de dezembro de 2011.

Esta é uma das equações clássicas de segunda ordem que são estudadas num primeiro curso de EDO. Muitas daquelas equações podem ser transformadas em sistemas autônomos, de maneira análogo a que faremos com a equação do pêndulo. Escrevemos

$$x = \theta, \quad y = \dot{x}.$$

Daí, pondo $\frac{g}{l} = k$, (1.6) é equivalente ao sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\mu y - k \operatorname{sen} x . \end{cases} \quad (1.7)$$

Quando $\mu = 0$, o movimento não tem amortecimento, portanto, dependendo da velocidade inicial, o pêndulo irá oscilar em torno do eixo de equilíbrio ou irá girar indefinidamente no sentido do movimento inicial. O retrato de fase está esboçado na Figura 1.3.

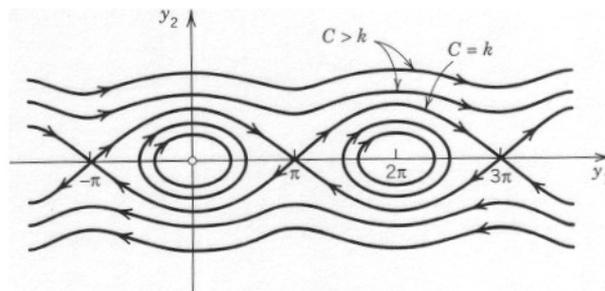


Figura 1.3: Retrato de fase do sistema (1.7) quando $\mu = 0$. Os ciclos representam a oscilação do pêndulo em torno da origem. As demais trajetórias representam o pêndulo girando em um único sentido. Figura retirada de <http://dmpeli.mcmaster.ca/Matlab/CLLsoftware/Pendulum/Pendulum.html>, 21 de dezembro de 2011.

Quando $\mu > 0$, o movimento é amortecido. O pêndulo irá oscilar em torno do equilíbrio até alcançar o repouso, ou irá dar um número finito de voltas e depois oscilará até o repouso. Podemos observar uma mudança significativa no retrato de fase, esboçado na Figura 1.4.

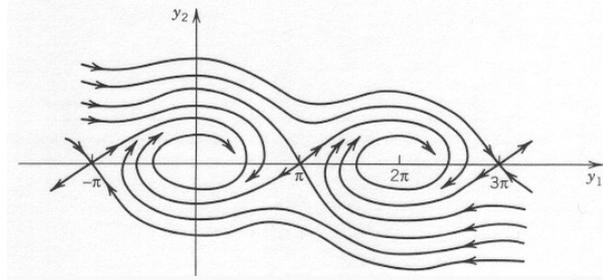


Figura 1.4: Retrato de fase do sistema (1.7) quando $\mu > 0$. Cada espiral em torno do ponto $(2k\pi, 0)$ representa o movimento do pêndulo dando k voltas e depois oscilando em torno do equilíbrio até chegar ao repouso (o que, matematicamente, acontece de fato somente quando $t \rightarrow \infty$). Figura retirada de <http://dmpeli.mcmaster.ca/Matlab/CLLsoftware/Pendulum/Pendulum.html>, 21 de dezembro de 2011.

1.3.2 Competição entre espécies

Veremos no Capítulo 3, que o sistema

$$\begin{cases} \dot{N} = N(1 - N - aI) \\ \dot{I} = rI(1 - I - bN) \end{cases} \quad (1.8)$$

onde a e b são constantes positivas, descreve a interação de duas espécies N e I vivendo num mesmo ambiente com recursos limitados e competindo entre si, por estes recursos. O retrato de fase de (1.8) está esboçado na Figura 1.5 para diferentes configurações dos parâmetros.

1.4 O Fluxo de uma EDO

Vimos até o momento que dados um campo f de classe C^1 no espaço de fase $U \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $x_0 \in U$, existem um intervalo aberto maximal $I(x_0)$ (que denotaremos por I_{x_0}) dependente da condição inicial e uma única solução $x : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $\dot{x} = f(x)$ em I_{x_0} . Tal solução $x(t)$ também depende da condição inicial, pois se mudarmos o ponto x_0 , o Teorema 1.3 nos dará outra aplicação y definida em outro intervalo. Por este motivo, mudaremos a notação para as soluções, escrevendo ϕ em vez de x , e explicitaremos que a solução ϕ também

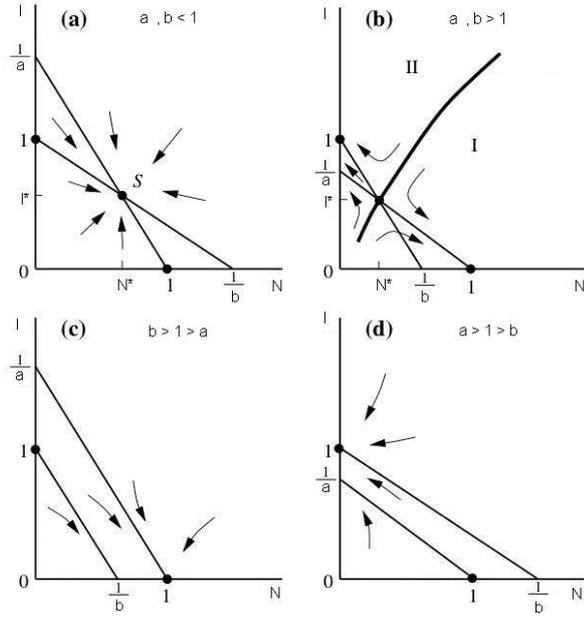


Figura 1.5: Espaço de fase do sistema (1.8) para diferentes configurações dos parâmetros. Na Figura (a), temos um cenário de coexistência das duas espécies. Na Figura (b), um cenário de exclusão competitiva: ou N sobrevive e I é extinta, ou o ocorre contrário, a depender das condições iniciais. Na Figura (c), apenas a espécie N sobrevive e na Figura (d) apenas a espécie I sobrevive. Figura adaptada de [23].

depende de x_0 . Assim a solução dada pelo Teorema 1.5 será denotada por

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, x_0) : I_{x_0} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \phi(t, x_0). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Note agora que, pela definição de solução (Definição 1.1), temos que a imagem direta $\phi(I_{x_0}, x_0)$ está contida em U . Assim, colocando $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_x\} \subset \mathbb{R}^n$, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \Omega &\longrightarrow U \\ (t, x) &\mapsto \phi(t, x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

A esta aplicação $\phi : \Omega \rightarrow U$ damos o nome de fluxo da EDO (1.1) ou fluxo gerado pelo campo f . Por uma razão de notação, que ficará mais clara adiante, muitas vezes escreveremos $\phi(t, x) = \phi_t(x)$, para $(t, x) \in \Omega$. A seguir, vejamos o significado geométrico do fluxo.

1.4.1 Significado geométrico do fluxo

Se fixarmos um ponto x_0 do espaço de fase U e considerarmos a aplicação

$$t \mapsto \phi_t(x_0), \quad t \in I_{x_0}$$

obtemos uma trajetória Γ em U que é a curva integral de $\dot{x} = f(x)$ passando por x_0 . Tal trajetória descreve o movimento do ponto x_0 sujeito ao campo de velocidades f . Na Figura 1.6, à esquerda, vemos esta trajetória descrita por x_0 .

Se fixarmos $t \in \mathbb{R}$ e tomarmos um conjunto $E \subset U$, a aplicação

$$x \mapsto \phi_t(x), \quad x \in E$$

descreve o estado de todos os pontos de E no tempo t . Ao fazermos um esboço de E e $\phi_t(E)$ em U , vemos o efeito do fluxo ϕ sobre a região E após um tempo t . Uma ilustração deste fato pode ser vista na Figura 1.6, ao centro e à direita.

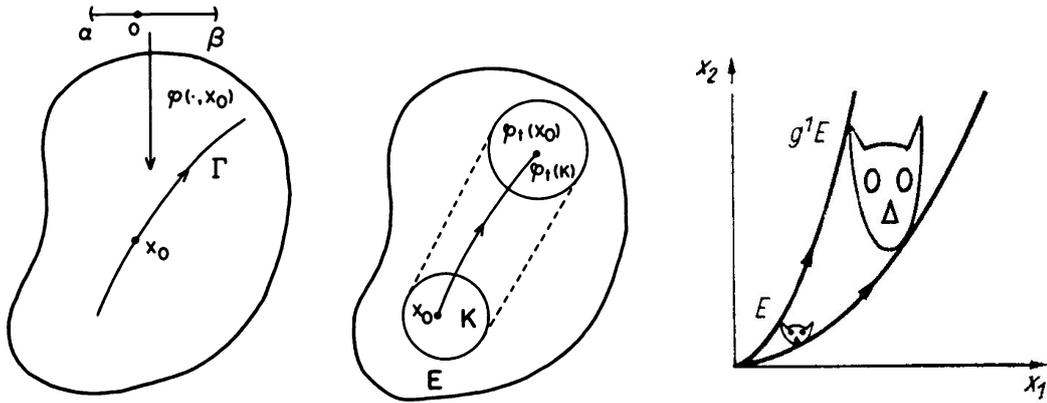


Figura 1.6: Na figura da esquerda, vemos a aplicação $t \mapsto \phi_t(x_0)$, que descreve o movimento de um único ponto no espaço de fase. Ao meio, vemos o efeito do fluxo após um tempo t sobre um conjunto E contido no espaço de fase. À direita, outro exemplo do efeito do fluxo sobre um conjunto E . Figuras retiradas de [26] e [3].

Assim, se pensarmos que o campo f descreve as velocidades de um fluido, cada trajetória $t \mapsto \phi_t(x_0)$ descreve o movimento individual de um ponto x_0 do fluido, enquanto $x \mapsto \phi_t(x)$ descreve o deslocamento e a contração, ou expansão, de uma fatia do fluido ou de todo ele.

Portanto, o estudo do fluxo de uma EDO é de suma importância para a previsão qualitativa do comportamento dos pontos e trajetórias no espaço de fase. Vejamos agora algumas propriedades do fluxo.

1.4.2 Propriedades do Fluxo

Uma importante propriedade é que se o campo f for de classe C^1 então o fluxo dependerá de forma continuamente diferenciável do tempo, dos parâmetros e das condições iniciais. As demonstrações dos Teoremas 1.6, 1.7, 1.8 e 1.9 que seguem abaixo podem ser encontradas em [26], páginas 95-99.

Teorema 1.6 *Nas notações acima, sejam $f \in C^1(U)$, $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_x\}$ e $\phi : \Omega \rightarrow U$ o fluxo de f . Então Ω é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e ϕ é de classe C^1 em Ω .*

Outra propriedade importante do fluxo é que ele tem uma estrutura de grupo (sob algumas hipóteses) em relação a composição de aplicações.

Teorema 1.7 *Seja $\phi : \Omega \rightarrow U$ o fluxo de um campo $f \in C^1(U)$ definido no aberto U . Então, para todo $x \in U$ e para todos $t \in I_x$ e $s \in I_{\phi_t(x)}$ tem-se $s + t \in I_x$ e*

$$\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x)).$$

Teorema 1.8 *Seja $\phi : \Omega \rightarrow U$ o fluxo de um campo $f \in C^1(U)$ definido no aberto U . Dado $(t, x_0) \in \Omega$ existe um aberto $A \subset U$ contendo x_0 tal que $t \times A \subset \Omega$. Daí, $B = \phi_t(A)$ é aberto,*

$$\phi_{-t}(\phi_t(x)) = x \quad \text{para todo } x \in A$$

e

$$\phi_t(\phi_{-t}(y)) = y \quad \text{para todo } y \in B.$$

Teorema 1.9 *Seja $\phi : \Omega \rightarrow U$ o fluxo de um campo $f \in C^1(U)$ definido no aberto U . Se $I_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in U$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$ a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi_t : U &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto \phi_t(x) \end{aligned} \tag{1.11}$$

é um difeomorfismo em $U \subset \mathbb{R}^n$ com inversa $\phi_{-t} : U \rightarrow U$ e mais, como $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$, o conjunto $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo de difeomorfismos em U e a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \\ t &\longmapsto \phi_t \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos.

1.5 Pontos de equilíbrio

Definição 1.10 Um ponto $x_0 \in U$ é um ponto de equilíbrio ou ponto singular do campo f se $f(x_0) = 0$. Se $f(x_0) \neq 0$, x_0 é um ponto regular de f .

Sejam $x_0 \in U$ um ponto de equilíbrio de f e ϕ o fluxo de f . Então $\phi(\cdot, x_0)$ é a curva integral de f passando por x_0 em $t = 0$. Logo, $\phi(0, x_0) = x_0$. Como $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$, pela Regra da Cadeia, para todo $t \in I_{x_0}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_t(x_0) &= \frac{d}{ds}\phi_{t+s}(x_0)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(\phi_t(\phi_s(x_0)))\Big|_{s=0} = \\ d(\phi_t)_{x_0} \cdot \left(\frac{d}{ds}\phi_s(x_0)\Big|_{s=0}\right) &= d(\phi_t)_{x_0} \cdot (f(\phi_0(x_0))) = d(\phi_t)_{x_0} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo, existe $c \in U$ tal que $\phi(t, x_0) = c$ para todo $t \in I_{x_0}$. Como $\phi(0, x_0) = x_0$, segue que

$$\phi(t, x_0) = x_0 \text{ para todo } t \in I_{x_0}.$$

Ou seja, o fluxo em x_0 é constante e igual a x_0 . Portanto, todo ponto de equilíbrio de f é um ponto fixo de ϕ_t , para todo t . Reciprocamente, se x_0 é um ponto fixo de ϕ_t então $\phi(t, x_0) = x_0$ para todo $t \in I_{x_0}$. Daí, $\frac{d}{dt}\phi(t, x_0) = 0$ para todo $t \in I_{x_0}$. Logo,

$$0 = \frac{d\phi(t, x_0)}{dt}\Big|_{t=0} = f(\phi(t, x_0))\Big|_{t=0} = f(x_0)$$

ou seja, x_0 é um ponto de equilíbrio de f . Portanto, todo ponto fixo do fluxo é um ponto de equilíbrio de f .

Sendo assim, iremos nos referir a pontos de equilíbrio como pontos fixos e vice-versa. Observamos também que, se uma solução passar ou começar em um ponto de equilíbrio x_0 ela deverá ser constante e igual a x_0 .

1.6 Órbitas no espaço de fase e conjuntos limite

Definição 1.11 Dado um campo $f \in C^1(U)$ e seu fluxo $\phi : \Omega \rightarrow U$, a órbita de f por um ponto $x \in U$ é o conjunto

$$\gamma_x = \{\phi(t, x) : t \in I_x\}.$$

A semi-órbita positiva de f por x é o conjunto $\gamma_x^+ = \{\phi(t, x) : t \in I_x \cap \mathbb{R}^+\}$ e a semi-órbita negativa de f por x é definida de maneira análoga.

Proposição 1.12 *Sejam $f \in C^1(U)$, $x_0 \in U$ e $\phi(\cdot, x_0) : I_{x_0} \rightarrow U$ a curva integral de f passando por x_0 . Se $\phi(\cdot, x_0)$ não é injetora então*

- $\phi(\cdot, x_0)$ é constante e $\gamma_{x_0} = \{x_0\}$ ou
- $\phi(\cdot, x_0)$ é periódica e γ_{x_0} é uma curva fechada (periódica).

Esta proposição nos informa como são as trajetórias de qualquer sistema onde o campo é de classe C^1 . Ou elas são, curvas parametrizadas simples (no caso em que $\phi(\cdot, x_0)$ é injetora) ou pontos fixos ou órbitas periódicas. Veja sua demonstração em [33], páginas 217-218.

Os conjuntos ω -limite e α -limite tem grande importância na teoria qualitativa. A grosso modo, eles caracterizam o(s) ponto(s) final(is) e inicial(is) de uma trajetória do campo.

Definição 1.13 *Sejam $f \in C^1(U)$ um campo no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ e $\phi(t, x_0)$ a solução de $\dot{x} = f(x)$ passando por x_0 , definida no seu intervalo maximal $I(x_0) = (\alpha, \beta)$. Se $\beta = +\infty$, definimos o conjunto ω -limite de x_0 como sendo o conjunto*

$$\omega(x_0) = \{y \in U : \exists(t_n), \text{ com } I(x_0) \ni t_n \rightarrow \infty \text{ e } \phi_{t_n}(x_0) \rightarrow y, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Analogamente, se $\alpha = -\infty$, definimos o conjunto α -limite de x_0 como

$$\alpha(x_0) = \{y \in U : \exists(t_n), \text{ com } I(x_0) \ni t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi_{t_n}(x_0) \rightarrow y, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

A seguir, apresentamos a definição de conjunto invariante, que também é de suma importância no estudo qualitativo.

Definição 1.14 *Seja $f \in C^1(U)$ um campo no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto $S \subset U$ é chamado invariante quando $x \in S$ implica $\phi(t, x) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

O próximo Teorema nos dá informações topológicas a respeito dos conjuntos limite. Sua demonstração pode ser encontrada em [33], páginas 245-247.

Teorema 1.15 *Sejam f um campo de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e γ_p^+ (respectivamente γ_p^-) a semi-órbita positiva (respectivamente a semi-órbita negativa) do campo f pelo ponto p . Se γ_p^+ (respectivamente γ_p^-) está contida num subconjunto compacto $K \subset U$, então*

- (i) $\omega(p) \neq \emptyset$ (respectivamente $\alpha(p)$).
- (ii) $\omega(p)$ é compacto (respectivamente $\alpha(p)$).
- (iii) $\omega(p)$ é invariante por ϕ_t (respectivamente $\alpha(p)$).

(iv) $\omega(p)$ é conexo (respectivamente $\alpha(p)$).

Como consequência deste Teorema, se $U = \mathbb{R}^n$, ou uma solução “explode”, isto é, $|\phi(t, x)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, ou ela se aproxima de um conjunto não-vazio, compacto, conexo e invariante.

A seguir, apresentamos o enunciado do Teorema de Poincaré-Bendixon, um importante resultado para campos em \mathbb{R}^2 que caracteriza completamente os conjuntos limite das curvas integrais. Em particular, ele afirma que não pode existir “caos” em dimensão dois (não daremos a definição de caos aqui). A demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixon pode ser encontrada em [33], páginas 248-253.

Teorema 1.16 (Teorema de Poincaré-Bendixon) *Sejam $f \in C^1(U)$ um campo no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $\phi(t, p)$ a curva integral de f passando por p . Suponha que $\phi(t, p)$ está definida para todo $t \geq 0$, que γ_p^+ está contida em um compacto $K \subset U$ e que f possua um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Então, uma das seguintes possibilidades ocorre:*

- (i) *Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*
- (ii) *Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quanto $t \rightarrow \pm\infty$.*
- (iii) *Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.*

A próxima proposição é uma consequência do Teorema de Poincaré-Bendixon e nos fornece uma condição necessária para a existência de uma órbita fechada. Podemos usá-la para provar a não-existência de tais órbitas. Sua demonstração também pode ser encontrada em [33], na página 254.

Proposição 1.17 *Seja f um campo de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Se γ é uma órbita fechada de f cujo interior esteja contido em U , então existe um ponto singular de f no interior de γ .*

A proposição a seguir nos fornece uma maneira de determinar conjuntos limite. Uma idéia de sua demonstração pode ser encontrada em [33], página 280.

Proposição 1.18 *Seja f um campo de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se existe uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0 \text{ para todo } x \in U$$

então, para todo $p \in U$, o conjunto ω -limite de p está contido no conjunto $\Sigma = \{x \in U : \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0\}$.

Apresentamos a seguir, um resultado que segue como corolário da Proposição 1.18 e será muito importante nos Capítulos 3 e 4.

Corolário 1.19 *Sejam f um campo de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e A um subconjunto aberto de U . Se existe uma função $V : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0 \text{ para todo } x \in A \quad (1.12)$$

então, para todo $p \in A$, tem-se $\omega(p) \cap A = \emptyset$.

Demonstração: Seja $p \in A$. Observe que a definição de conjunto ω -limite (Definição 1.13) depende do conjunto aberto no qual o campo está definido. Com isto em mente, podemos aplicar a Proposição 1.18 à restrição $f|_A$, do campo f ao aberto A , e chegar a conclusão de que $\omega_A(p) \subset \Sigma = \{x \in A : \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = 0\} = \emptyset$ (por (1.12)), onde $\omega_A(p)$ é o conjunto ω -limite de p em A , isto é $\omega_A(p) = \{y \in A : \exists(t_n), \text{ com } I(x_0) \ni t_n \rightarrow \infty \text{ e } \phi(t_n, p) \rightarrow y, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$. Assim, temos $\omega_A(p) = \emptyset$. Portanto, $\omega(p) \cap A = \emptyset$, pois, do contrário, teríamos $\omega_A(p) \neq \emptyset$. \square

1.7 O Teorema do Fluxo Tubular

Definição 1.20 *Sejam f_1 e f_2 dois campos C^1 definidos em abertos $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ respectivamente e $\phi_1 : \Omega_1 \rightarrow U_1$ e $\phi_2 : \Omega_2 \rightarrow U_2$ os seus fluxos. Dizemos que f_1 e f_2 são C^r -conjugados se existe um difeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$ de classe C^r tal que*

$$h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x)) \quad \forall (t, x) \in \Omega_1. \quad (1.13)$$

Observação: Em relação a Definição 1.20, a igualdade (1.13) só é bem definida para $t \in I_1(x) \cap I_2(h(x)) := I(x)$. Notemos que $I(x)$ é aberto e $0 \in I(x)$. No entanto, neste caso, $I_1(x) = I_2(h(x))$, como mostramos a seguir. Seja $x \in U_1$. Derivando (1.13) em relação a t , em $t = 0$, temos

$$dh_x(f_1(x)) = f_2(h(x)) \quad (1.14)$$

Consideremos agora ψ definida por

$$\psi(t, x) = h \circ \phi_1(t, x), \quad t \in I_1(x), \quad x \in U_1.$$

Pela regra da cadeia e da equação (1.14), para todo $t \in I_1(x)$, temos que

$$\frac{d}{dt}\psi(t, x) = dh_{\phi_1(t, x)} \left(\frac{d}{dt}\phi_1(t, x) \right) = dh_{\phi_1(t, x)}(f_1(\phi_1(t, x))) = f_2(h \circ \phi_1(t, x)) = f_2(\psi(t, x)).$$

Logo, $\psi(t, x)$ é solução de $\dot{x} = f_2(x), x(0) = h(x), t \in I_1(x)$. Em particular, $h \circ \phi_1(t, x) = \phi_2(t, h(x)), \forall t \in I_1(x)$ e $I_1(x) \subset I_2(h(x))$. De modo análogo, usando h^{-1} , mostra-se que $I_2(h(x)) \subset I_1(x)$ para todo $x \in U_1$. Portanto, (1.13) vale para todo $(t, x) \in \Omega_1$.

Observe que h leva a órbita de f_1 passando em x_0 na órbita de f_2 passando por $h(x_0)$. Logo h leva órbitas periódicas em órbitas periódicas e pontos fixos em pontos fixos. Portanto, o conceito de conjugação é útil para descrever quando dois campos são equivalentes sob o ponto de vista topológico a respeito dos seus retratos de fase.

Definição 1.21 *Sejam f um campo de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e A um aberto em \mathbb{R}^{n-1} . Uma seção transversal local de f é uma aplicação $g : A \rightarrow U$ tal que para todo $a \in A$, $g'(a) \cdot (\mathbb{R}^{n-1})$ e $f(g(a))$ geram \mathbb{R}^n . Se g for um homeomorfismo sobre sua imagem $\Sigma = g(A)$, então dizemos que Σ é uma seção transversal de f .*

O Teorema do Fluxo Tubular diz que em uma vizinhança de um ponto regular, o fluxo é topologicamente equivalente ao fluxo do campo $h = (1, 0, \dots, 0)$, como ilustrado na Figura 1.7.

Teorema 1.22 (Fluxo Tubular) *Sejam $f \in C^1(U)$ um campo, $p \in U$ um ponto regular de f e $g : A \rightarrow U$ uma seção transversal local de f com $g(0) = p$. Então existem $\delta, \epsilon > 0$, uma vizinhança V de p em U e um difeomorfismo $F : (-\epsilon, \epsilon) \times B(0; \delta) \rightarrow V$ tais que:*

$$(i) F^{-1}(V \cap g(A)) = \{0\} \times B(0; \delta)$$

$$(ii) F \text{ é uma } C^r\text{-conjugação entre os campos } f|_V \text{ e } h : (-\epsilon, \epsilon) \times B(0; \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ h \equiv (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: A demonstração do Teorema do Fluxo Tubular pode ser vista nas páginas 222-223 de [33]. Convém observar que ela faz uso do Teorema da Função Inversa. \square

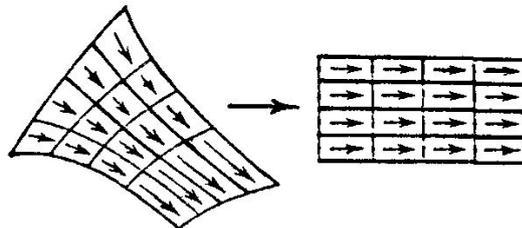


Figura 1.7: Teorema do Fluxo Tubular: o fluxo de qualquer campo de classe C^1 em torno de um ponto regular é topologicamente equivalente ao fluxo do campo "tubular" $h \equiv (1, 0, \dots, 0)$. Figura retirada de [3].

1.8 Sistemas Lineares de EDO's

Após sabermos da existência de soluções para uma EDO em que o campo é regular o suficiente, de termos estudado algumas propriedades do fluxo de uma EDO e o seu comportamento em torno de pontos regulares, surgem algumas questões: *é sempre possível resolver uma EDO e obter a expressão de seu fluxo? Qual é o comportamento das soluções em torno de um ponto de equilíbrio?* Nesta seção, obteremos as respostas dessas perguntas para campos lineares, isto é, campos na forma

$$\dot{x} = Ax \tag{1.15}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e A é uma matriz real $n \times n$.

Neste caso, a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema. Veremos que a partir de informações sobre os autovalores da matriz A será possível obter várias conclusões sobre o comportamento qualitativo das soluções e até mesmo, explicitá-las.

1.8.1 Caso $n = 1$

Considere o seguinte PVI em \mathbb{R} :

$$\dot{x} = ax \tag{1.16}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante não nula. Seu fluxo pode ser obtido diretamente por integração e é dado por

$$\phi(t, x) = xe^{at}. \tag{1.17}$$

O único ponto fixo de (1.16) é $x^* = 0$ e $\phi(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. O que não sabemos ainda é o comportamento assintótico das soluções, isto é, não sabemos se existe ou não, para x fixo, o limite de $\phi(t, x) = xe^{at}$ quando $t \rightarrow \infty$ e quanto vale este limite quando ele existe. Tudo depende do sinal de a . De fato, para x fixo, temos

- se $a > 0$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} xe^{at} = \pm\infty$, conforme o sinal de x . Portanto, as soluções de (1.16) passando por qualquer ponto são ilimitadas.
- se $a < 0$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} xe^{at} = 0 = x^*$, logo todas as soluções de (1.16) tendem a x^* quando $t \rightarrow +\infty$.

Portanto, quando $a > 0$, x^* “repele” todas as soluções e, quando $a < 0$, x^* “atrai” as soluções.

1.8.2 Caso A diagonal

Sejam agora $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a x_1 \\ \dot{x}_2 &= b x_2 \\ x(0) &= x_0 = (x_1, x_2). \end{cases} \quad (1.18)$$

Sua expressão matricial é

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a x_1 \\ b x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax. \quad (1.19)$$

Novamente, $x^* = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio. Como este é um sistema desacoplado, em que cada função f_i do lado direito depende apenas da variável x_i , podemos, da mesma maneira que no caso unidimensional, obter o fluxo diretamente por integração. Escrevendo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ele é dado por:

$$\phi(t, x) = \begin{bmatrix} \phi_1(t, x) \\ \phi_2(t, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 e^{at} \\ x_2 e^{bt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{bmatrix} x \quad (1.20)$$

Para saber o comportamento assintótico do sistema, calculamos os limites

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1 e^{at} \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2 e^{bt}$$

que dependem dos valores de x_1 , x_2 , a e b .

Por exemplo, se $a < 0$ e $b > 0$, então, para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$, temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_1(t, x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1 e^{at} = 0$. Porém, o limite de $\phi_2(t, x) = x_2 e^{bt}$ depende do valor de $x = (x_1, x_2)$:

- se $x_2 = 0$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_2(t, x) = 0$ e
- se $x_2 \neq 0$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_2(t, x) = \pm\infty$.

Assim, mais uma vez o comportamento assintótico depende basicamente dos sinais de a e b , que são os autovalores de A . No caso unidimensional, se pensarmos que tínhamos $A = [a]$, então o comportamento assintótico também dependia do sinal do autovalor de A .

Se olharmos as componentes $\phi_1(t, x)$ e $\phi_2(t, x)$ do fluxo em (1.20), decompomos o movimento do ponto x no espaço de fase em dois: o movimento em relação ao eixo- x_1 , cuja componente é $x_1 e^{at}$ e o movimento em relação ao eixo- x_2 , cuja componente é $x_2 e^{bt}$. Das considerações quando $a < 0$ e $b > 0$, com $x = (x_1, x_2)$, teremos que:

- se $x_2 \neq 0$, ou seja, se x não estiver no eixo- x_1 , então a componente no eixo- x_1 tenderá a zero quando $t \rightarrow \infty$ e a componente no eixo- x_2 tenderá a $\pm\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, embora uma das componentes convirja, o movimento resultante irá divergir, como vemos na Figura 1.8.
- se $x_2 = 0$, ou seja, se x estiver no eixo- x_1 , então a componente no eixo- x_1 tenderá a zero quando $t \rightarrow \infty$ e a componente no eixo- x_2 será nula. Portanto, o movimento terá apenas uma componente não nula, que converge para zero, logo o ponto não sairá do eixo- x_1 e convergirá para a origem. Veja a Figura 1.8.

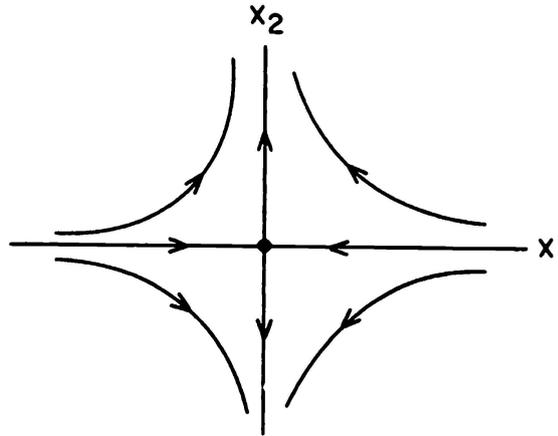


Figura 1.8: Retrato de fase do sistema linear (1.18). A projeção no eixo x_1 de qualquer solução se aproxima da origem. Já a projeção no eixo x_2 se afasta dela, exceto quando $x_2 = 0$. Figura retirada de [26].

Observe ainda que a direção da componente convergente de $\phi(t, x)$ é a direção dada pelo vetor $(1, 0)$, que é autovetor de A associado ao autovalor $a < 0$. Já a direção da componente divergente do fluxo é dada pelo vetor $(0, 1)$, que é autovetor de A associado ao autovalor $b > 0$.

Esta decomposição dos movimentos e a relação entre o sinal dos autovalores e o comportamento assintótico do sistema não é por acaso. Seja a matriz diagonal $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

e considere o sistema linear

$$\dot{x} = Ax \quad (1.22)$$

cuja forma matricial é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Cada equação do sistema é da forma

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i \quad (1.24)$$

e pode ser resolvida separadamente, de onde obtemos

$$x_i(t) = x_{0i} e^{\lambda_i t} \quad (1.25)$$

Daí, a expressão do fluxo de (1.22) e (1.23) é

$$\phi(t, x) = \begin{bmatrix} \phi_1(t, x) \\ \dots \\ \phi_n(t, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 e^{\lambda_1 t} \\ \dots \\ x_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = e^{At} x \quad (1.26)$$

onde definimos, para uma matriz diagonal $B = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$, a exponencial de B como sendo a matriz

$$e^B = \text{diag}[e^{d_1}, e^{d_2}, \dots, e^{d_n}] = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n} \end{bmatrix}.$$

Definindo desta maneira, a solução geral de um sistema linear diagonal da forma (1.23) segue o mesmo padrão de uma equação linear da forma (1.16).

Saberemos o comportamento assintótico das componentes $x_i e^{\lambda_i t}$ de $\phi(t, x) \in \mathbb{R}^n$ apenas observando o sinal de λ_i . Para $x = (x_1, \dots, x_n)$, com $x_i \neq 0$ para todo i , temos:

- se $\lambda_i > 0$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i e^{\lambda_i t} = \pm\infty$ (conforme o sinal de x_i).
- se $\lambda_i < 0$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i e^{\lambda_i t} = 0$.
- se $\lambda_i = 0$ então $x_i e^{\lambda_i t} \equiv x_i$.

Esta análise dos sinais determinará quais componentes de $\phi(t, x) \in \mathbb{R}^n$ serão divergentes, ou instáveis, quais serão convergentes, ou estáveis, e quais serão constantes.

Tais componentes decompõem o \mathbb{R}^n em três subespaços: o subespaço gerado por todas as componentes $x_i e^{\lambda_i t}$ que tem $\lambda_i > 0$, no qual o movimento é instável; o subespaço gerado por todas as componentes $x_i e^{\lambda_i t}$ que tem $\lambda_i < 0$, no qual o movimento é estável; e o subespaço gerado pelas componentes $x_i e^{\lambda_i t}$ tais que $\lambda_i = 0$, no qual o movimento será constante.

1.8.3 Caso A diagonalizável

Veremos agora que a situação apresentada para sistemas lineares cuja matriz é diagonal é a mesma situação que ocorre quando a matriz é diagonalizável. Para isto, relembremos o seguinte teorema da Álgebra Linear:

Teorema 1.23 *Se os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ da matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ são todos reais e dois a dois distintos, então existe uma base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n formada por autovetores de A , cada v_i associado a λ_i , tal que a matriz P , cujas colunas são os autovetores v_i , é inversível e*

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]. \quad (1.27)$$

Demonstração: Veja a demonstração deste teorema em [17], páginas 185-189. \square

Desta maneira, considerando o sistema linear

$$\dot{x} = Ax \quad (1.28)$$

onde A satisfaz as hipóteses do Teorema 1.23, seja P a matriz dada pelo teorema. Considere a mudança de coordenadas $y = P^{-1}x$. Então $x = Py$ e daí

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} \stackrel{(1.28)}{=} P^{-1}(Ax) = P^{-1}A(Py) = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]y \quad (1.29)$$

Assim, obtemos o sistema diagonal

$$\dot{y} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]y \quad (1.30)$$

cuja expressão do fluxo é dada por

$$\tilde{\phi}(t, y) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]y. \quad (1.31)$$

Note que se $\phi(t)$ é solução de $\dot{y} = Dy$, onde $D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, então $\psi(t) = P\phi(t)$ é solução de $\dot{x} = Ax$:

$$\dot{\psi}(t) = P\dot{\phi}(t) = PD\phi(t) = PDP^{-1}\psi(t) = A\psi(t). \quad (1.32)$$

Daí, obtemos o fluxo nas coordenadas originais $x = Py$

$$\phi(t, x) = P\tilde{\phi}(t, y) = P\tilde{\phi}(t, P^{-1}x) = P \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}x. \quad (1.33)$$

Para manter o mesmo padrão, podemos definir a exponencial de uma matriz B diagonalizável da seguinte maneira: seja Q tal que $Q^{-1}BQ = \operatorname{diag}[b_1, b_2, \dots, b_n]$. Então

$$B = Q \operatorname{diag}[b_1, b_2, \dots, b_n]Q^{-1}$$

e daí definimos a exponencial de B por

$$e^B = Q \operatorname{diag}[e^{b_1}, e^{b_2}, \dots, e^{b_n}]Q^{-1} \quad (1.34)$$

Assim, o fluxo do sistema linear (1.28), com $P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, é dado por

$$\phi(t, x) = P \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}x = e^{At}x. \quad (1.35)$$

1.8.4 Exponencial de Matrizes

Veremos agora que tanto a forma das soluções de sistemas diagonais e diagonalizáveis quanto as definições de exponencial dessas matrizes que demos até agora são, na verdade, casos particulares de um caso bem mais geral, que trará várias respostas sobre sistemas lineares de EDO's em geral.

Utilizando o isomorfismo canônico entre $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $L(\mathbb{R}^n)$, identificaremos indistintamente uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ com o operador $T_A \in L(\mathbb{R}^n)$ associado a A , dado por

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Proposição 1.24 *A expressão*

$$\|T\| = \max_{|x| \leq 1} |T(x)| \quad (1.37)$$

define uma norma em $L(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.25 *Dados $T \in L(\mathbb{R}^n)$ e $t_0 > 0$, a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n t^n}{n!} \quad (1.38)$$

é uniformemente e absolutamente convergente no intervalo $I = [-t_0, t_0]$.

Definição 1.26 *Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos a exponencial de At como sendo a matriz que é o limite da série*

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}. \quad (1.39)$$

Proposição 1.27 *Sejam $P, T \in L(\mathbb{R}^n)$, com P inversível. Se $S = PTP^{-1}$, então $e^S = Pe^TP^{-1}$.*

Corolário 1.28 *Se $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_j]$, então $e^A = P\text{diag}[e^{\lambda_j}]P^{-1}$, ou seja, a definição de exponencial por séries coincide com a definição de exponencial de matrizes diagonalizáveis que demos anteriormente.*

Proposição 1.29 *Se $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$ e $ST = TS$ então $e^{S+T} = e^Se^T$.*

Proposição 1.30 *Se $T \in L(\mathbb{R}^n)$ então $e^T \in GL(\mathbb{R}^n)$ e $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.*

Lema 1.31 *Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Então a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{At} \in L(\mathbb{R}^n)$ é diferenciável e*

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}. \quad (1.40)$$

Teorema 1.32 *Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Então, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a solução do PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.41)$$

está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (1.42)$$

O fluxo do sistema $\dot{x} = Ax$ é

$$\phi(t, x) = e^{At}x. \quad (1.43)$$

Todas as demonstrações das proposições e teoremas acima podem ser encontradas em [26], páginas 10-18.

1.8.5 Caso Geral: Uso da forma de Jordan

Sabendo que o fluxo do sistema $\dot{x} = Ax$ é

$$\phi(t, x) = e^{At}x \quad (1.44)$$

queremos obter a expressão do fluxo ou, pelo menos, suas propriedades qualitativas, como vínhamos fazendo até então. Quando A é semelhante a uma matriz diagonal, usando a Proposição 1.27, obtivemos a expressão do fluxo com base na exponencial de uma matriz diagonal, a qual é simples de calcular. Quando A não for diagonalizável, também usaremos a Proposição 1.27. Suponha que existam $B, P \in L(\mathbb{R}^n)$, P invertível, tais que $A = PBP^{-1}$. Então, $e^{At} = e^{PBP^{-1}t} = Pe^{Bt}P^{-1}$. Logo, (1.44) pode ser escrito como

$$\phi(t, x) = Pe^{Bt}P^{-1}x$$

Portanto, se soubermos calcular a exponencial e^{Bt} acima, teremos o fluxo $\phi(t, x)$. A matriz B mais simples que podemos obter, tal que $A = PBP^{-1}$, é dada pela forma canônica de Jordan de A (veja [16], páginas 126-132). Quando A é diagonal ou diagonalizável, sua forma de Jordan é a matriz diagonal formada pelos seus autovalores. Para uma matriz A qualquer, aplicando a teoria apresentada em [17], obtemos sua forma de Jordan. A partir daí, pode-se provar ([16], páginas 133-137) que os elementos nas entradas de e^{Pt} são sempre das formas

$$\frac{t^j}{j!}e^{\lambda_k t} \quad \frac{t^j}{j!}e^{a_k t} \cos b_k t \quad \text{ou} \quad \frac{t^j}{j!}e^{a_k t} \sin b_k t \quad (1.45)$$

onde $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ é um autovalor real de A e $a_k \pm b_k i \in \mathbb{C}$ é um autovalor complexo de A . Assim sendo, cada coordenada de $\phi(t, x) = Pe^{Bt}P^{-1}x$ é uma combinação linear das funções em (1.45). Esta última conclusão nos permitirá obter as informações que queremos. Como as exponenciais $t \mapsto e^{\lambda_k t}$, $t \mapsto e^{at} \sin bt$ e $t \mapsto e^{at} \cos bt$ são quem ditam o comportamento dessas componentes quando $t \rightarrow +\infty$, saberemos o que vai acontecer analisando os sinais de a_k e λ_k :

se $\lambda_k < 0$ e $a_k < 0$, então $e^{\lambda_k t}$, $e^{a_k t} \sin b_k t$ e $e^{a_k t} \cos b_k t \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

se $\lambda_k > 0$ e $a_k > 0$, então $e^{\lambda_k t}$, $e^{a_k t} \sin b_k t$ e $e^{a_k t} \cos b_k t \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$.

se $\lambda_k = 0 = a_k$, então $e^{\lambda_k t} = 1$ e $e^{a_k t} \sin b_k t = \sin b_k t$ e $e^{a_k t} \cos b_k t = \cos b_k t$ são periódicas.

Definição 1.33 *Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que o sistema linear $\dot{x} = Ax$ é hiperbólico e que a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico se todos os autovalores de A tem parte real não nula. Neste caso, dizemos que 0 é um*

- atrator se todos os autovalores de A tem parte real negativa.
- repulsor se todos os autovalores de A tem parte real positiva.
- uma sela se existe pelo menos um autovalor de A com parte real negativa e outro com parte real positiva.

Em cada um dos dois primeiros casos, dizemos que A é um operador contrativo e expansivo, respectivamente.

Sobre as componentes do fluxo, obtemos o seguinte teorema (veja [16], páginas 135-136):

Teorema 1.34 *Considere o sistema hiperbólico $\dot{x} = Ax$. Então*

- a origem é um atrator se, e só se, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- a origem é um repulsor se, e só se, $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At}x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

1.8.6 Subespaços estáveis e instáveis

Vimos nas últimas seções que o movimento dos pontos no espaço de fases de um sistema linear $\dot{x} = Ax$ é decomposto em três componentes: uma que tende a zero, uma que tende a $+\infty$ e outra que é constante ou periódica. Vimos também que tais movimentos estão intimamente relacionados aos autovalores da matriz A . Veremos agora que são os autovetores de A quem geram os subespaços que decompõem \mathbb{R}^n nessas três componentes.

Sejam então, $\lambda_j = a_j + ib_j$, $a_j, b_j, \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ os autovalores generalizados de $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Sejam $w_j = v_j + iu_j$ seus autovetores generalizados associados. Reordenando os índices, se necessário, de modo que $b_j = 0$ para $j \in \{1, \dots, k\}$ e $b_j \neq 0$ para $j \in \{k+1, \dots, n\}$, temos que

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_m, u_m\}, \quad \text{onde } m = \frac{n-k}{2},$$

é uma base de \mathbb{R}^n [26].

A partir daí, definimos os subespaços estável, instável e central do sistema linear $\dot{x} = Ax$, respectivamente por:

- $E^s = [v_j, u_j : a_j < 0]$
- $E^u = [v_j, u_j : a_j > 0]$
- $E^c = [v_j, u_j : a_j = 0]$

Note que esta definição está baseada nos sinais das partes reais a_j dos autovalores λ_j . No próximo teorema, veremos que a decomposição $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ nos dá exatamente a decomposição do fluxo em componentes que convergem para a origem, se afastam da origem ou se mantêm em torno dela.

Teorema 1.35 *Considere o sistema linear $\dot{x} = Ax$ e seja $\phi(t, x)$ o seu fluxo. Então $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$, cada um dos subespaços E^s , E^u e E^c são invariantes pelo fluxo e, ainda,*

- para todo $x \in E^s$, tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x = 0$.
- para todo $x \in E^u$, tem-se $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At}x = 0$.

Demonstração: Veja a demonstração deste teorema em [26], páginas 55-58. \square

1.9 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Veremos agora o comportamento do fluxo em torno de pontos de equilíbrio de sistemas não-lineares.

Definição 1.36 Sejam x_0 um ponto de equilíbrio do campo $f \in C^1(U)$ e ϕ o fluxo de f . Dizemos que x_0 é

(i) **estável** se as trajetórias começando próximas de x_0 se mantem próximas de x_0 no tempo futuro, isto é, se dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$\phi(t, x) \in B(x_0, \epsilon) \text{ para todos } t \geq 0 \text{ e } x \in B(x_0, \delta).$$

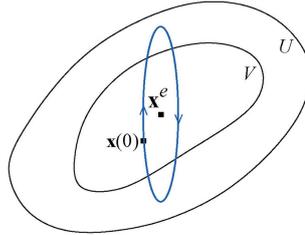


Figura 1.9: Ponto fixo estável. Figura retirada de [2].

(ii) **assintoticamente estável** se é estável e se as trajetórias começando próximas de x_0 convergem para ele, isto é, se existir $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_0 \text{ para todo } x \in B(x_0, \delta).$$

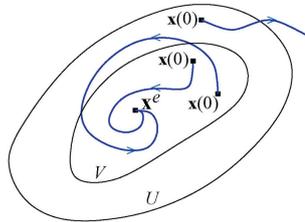


Figura 1.10: Ponto fixo assintoticamente estável. Figura retirada de [2].

(iii) **instável** se ele não for estável, portanto trajetórias começando suficientemente próximas de x_0 se afastam dele, isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existem $t > 0$ e $x \in B(x_0, \delta)$ tais que

$$\phi(t, x) \notin B(x_0, \epsilon).$$

Nas Figuras 1.9 e 1.10, podemos ver exemplos de um ponto fixo estável e outro assintoticamente estável, respectivamente.

Proposição 1.37 Sejam $f \in C^1(U)$ e $x_0 \in U$ um equilíbrio de f . Se todos autovalores de $f'(x_0)$ tem parte real negativa, então x_0 é assintoticamente estável.

Se um equilíbrio é assintoticamente estável então ele é estável. A recíproca não é verdadeira: existem campos que tem singularidades estáveis que não são assintoticamente estáveis. Porém, há a seguinte proposição:

Proposição 1.38 *Sejam $f \in C^1(U)$ e $x_0 \in U$ um equilíbrio de f . Se x_0 é estável então nenhum autovalor de $f'(x_0)$ tem parte real positiva.*

A contrapositiva desta proposição é útil para provar que um ponto fixo é instável.

Corolário 1.39 *Sejam $f \in C^1(U)$ e $x_0 \in U$ um equilíbrio de f . Se algum autovalor de $f'(x_0)$ tiver parte real positiva então x_0 é instável.*

Como visto, os autovalores de $f'(x_0)$ desempenham papel crucial na análise da estabilidade dos pontos fixos. Um caso importante, que será o contexto de muitos teoremas, é quando $f'(x_0)$ não tem autovalores com parte real nula. Neste caso x_0 é um ponto fixo hiperbólico.

Definição 1.40 *Dizemos que um ponto de equilíbrio $x_0 \in U$ do campo f é hiperbólico se todos os autovalores de $f'(x_0)$ tem parte real não-nula.*

Corolário 1.41 *Se $x_0 \in U$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $f \in C^1(U)$ então ou x_0 é assintoticamente estável ou x_0 é instável.*

As demonstrações dos resultados acima podem ser encontradas em [16], páginas 180-191.

1.10 O Teorema de Hartman-Grobman

O Teorema do Fluxo Tubular (Teorema 1.22) nos diz como é o comportamento do fluxo de um campo localmente num ponto regular. Para pontos singulares, hiperbólicos, temos o Teorema de Hartman-Grobman.

No caso linear, o comportamento assintótico do fluxo é completamente estudado quando conhecemos os autovalores e autovetores da matriz associada ao sistema. No caso não linear, pelo menos localmente, veremos que ocorre algo semelhante. Dado um campo f de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, sua derivada é uma boa aproximação local. Para cada $x \in U$ e h tal que $x + h \in U$ podemos escrever

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + R(x, h)$$

onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x, h)}{|h|} = 0$, ou seja, $f(x) + f'(x)h$ está mais próximo de $f(x + h)$ do que $x + h$ está de x .

Se x_0 for uma singularidade do campo, denotando a matriz jacobiana de f em x_0 por A , isto é, $f'(x_0) = A$, temos

$$f(x_0 + h) = Ah + R(x_0, h).$$

Assim, localmente em torno de x_0 , o sistema $\dot{x} = f(x)$ é equivalente ao sistema

$$\dot{x} = A(x - x_0) + R(x_0, x).$$

Portanto, a menos do infinitésimo $R(x_0, h)$, numa vizinhança próxima de x_0 , o campo f se comporta como o campo linear $x \mapsto Ax$. Quando x_0 é hiperbólico, veremos que esta perturbação infinitesimal no campo não afetará o fluxo localmente em termos de mudanças significativas, isto é, na vizinhança de um equilíbrio hiperbólico o fluxo de um sistema não-linear é topologicamente equivalente ao fluxo de sua parte linear numa vizinhança da origem de \mathbb{R}^n . Este é o conteúdo do Teorema de Hartman-Grobman, e está ilustrado na Figura 1.11.

Teorema 1.42 (Hartman-Grobman) *Sejam $f \in C^1(U)$ um campo no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $\phi : \Omega \rightarrow U$ o fluxo de f , $x_0 \in U$ uma singularidade hiperbólica de f e $A = f'(x_0)$. Então, existem V, W abertos de \mathbb{R}^n , com $x_0 \in V$ e $0 \in W$, $h : V \rightarrow W$ um homeomorfismo, com $h(x_0) = 0$, e $I_0 \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo a origem, tais que*

$$h(\phi(t, x)) = e^{At}h(x) \tag{1.46}$$

para todo $t \in I_0$ e todo $x \in V$.

Uma demonstração completa deste teorema, num contexto de campos de vetores e equações autônomas, e não num contexto de difeomorfismos, pode ser encontrada em [15], páginas 244-250.

1.11 Alguns conceitos sobre estabilidade

Apresentamos aqui, de modo intuitivo e sem nenhum rigor, alguns conceitos referentes a estabilidade de um sistema autônomo de EDO's.

Estabilidade das soluções em relação as condições iniciais

Dados dois pontos $x_1, x_2 \in U$, como o fluxo é contínuo em relação as condições iniciais, esperamos que as soluções $\phi(t, x_1)$ e $\phi(t, x_2)$ tenham comportamentos semelhantes. Porém, pode ocorrer que a longo prazo isto não aconteça, ou seja, condições iniciais próximas podem originar soluções com comportamento assintótico totalmente distinto, como mostra a Figura 1.12.

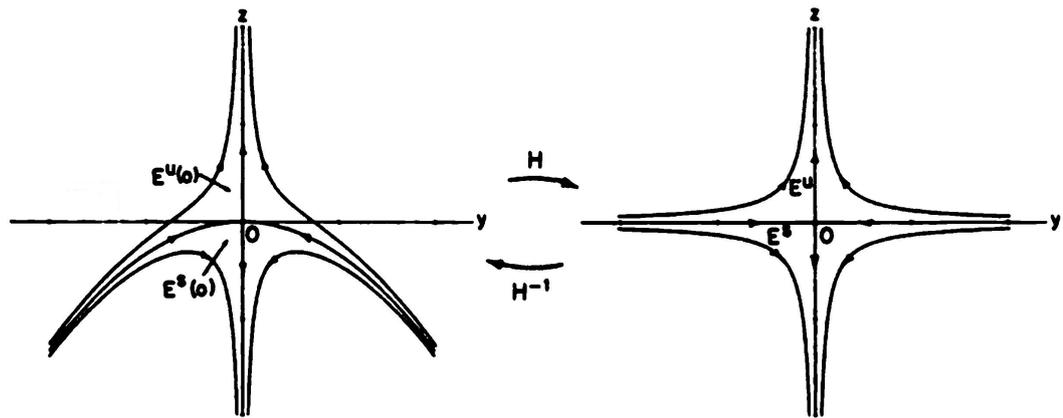


Figura 1.11: Teorema de Hartman-Grobman: o fluxo de um sistema não-linear é topologicamente equivalente ao fluxo de sua parte linear. Neste caso, H é o homeomorfismo e $x_0 = 0$. Figura retirada de [26].

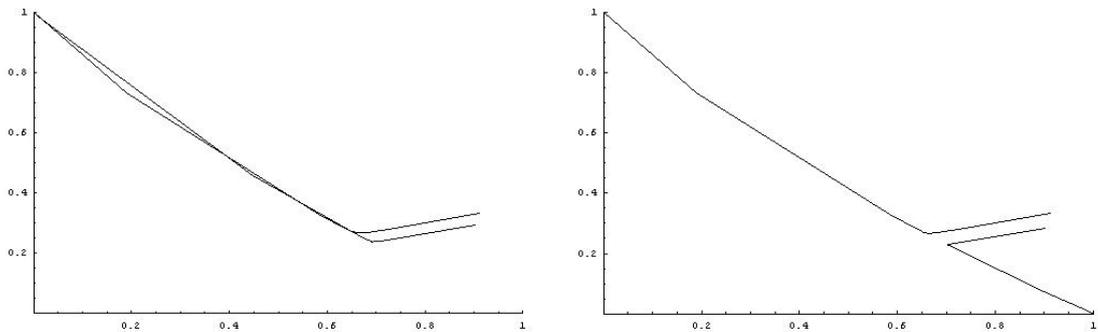


Figura 1.12: Soluções do sistema (1.8) no espaço de fase. Na figura à esquerda, duas soluções com condições iniciais próximas convergem para o mesmo ponto fixo. Na figura à direita, alterando um pouco uma das condições iniciais, a solução correspondente passa a convergir para outro ponto fixo.

Estabilidade estrutural (Estabilidade do fluxo em relação ao campo)

Outro conceito de estabilidade diz respeito à estabilidade com respeito a perturbações no campo. O fluxo pode ser estável ou não com relação a pequenas perturbações no campo, isto é, fazendo uma pequena perturbação no campo, a configuração topológica do retrato de fase pode permanecer a mesma ou mudar consideravelmente de comportamento, como mostra a Figura 1.13.

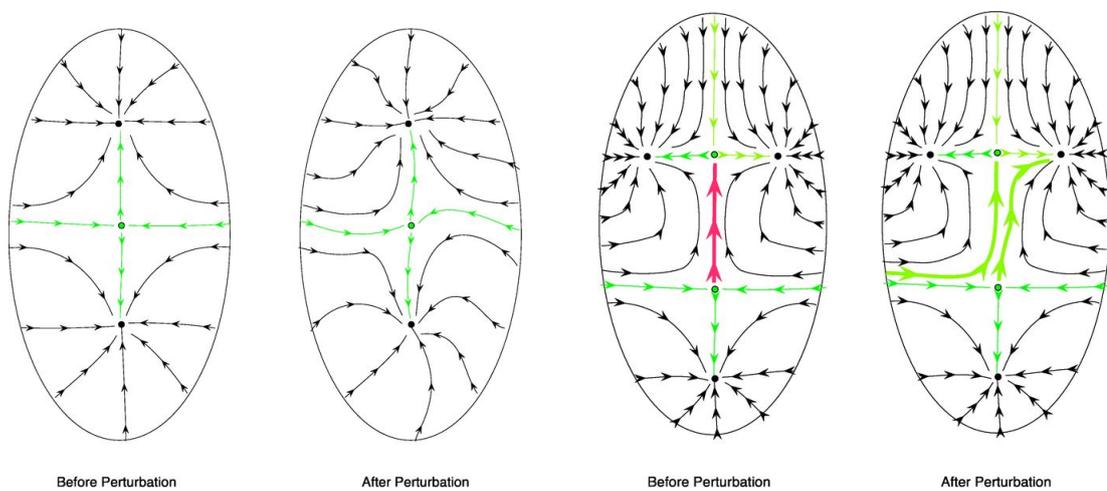


Figura 1.13: Na primeira figura, à esquerda, temos um campo estruturalmente estável; observe que embora a perturbação faça com que as trajetórias se curvem um pouco, na segunda figura, elas têm a mesma configuração topológica. Já na terceira figura, o campo é estruturalmente instável; observe o rompimento da trajetória vermelha na última figura.

Capítulo 2

Teorema da Variedade Estável e Bacias de Atração

Neste capítulo, na primeira seção, veremos o Teorema da Variedade Estável Local e uma demonstração construtiva do mesmo, adaptada de [8]. Em seguida, veremos o Teorema da Variedade Estável Global e sua demonstração [8, 26]. Na segunda seção, veremos os resultados de Chiang e outros, [6] que tratam de aspectos globais da teoria qualitativa, referentes as Bacias de Atração de equilíbrios estáveis (também conhecidas como regiões de estabilidade). Estes resultados caracterizam as fronteiras das bacias de atração como a união de certas variedades estáveis, o que acaba fazendo uma conexão entre as teorias local e global. Veremos também algumas consequências destes resultados que trazem informações sobre a configuração topológica do espaço de fase, as quais serão muito úteis na análise qualitativa do modelo proposto no Capítulo 4. Devido à esta caracterização dada para as fronteiras de bacias de atração, na última seção descreveremos um método, baseado na demonstração do Teorema da Variedade Estável, para determinar graficamente um esboço representativo da mesma.

2.1 O Teorema da Variedade Estável

Nesta seção, veremos que numa vizinhança de um equilíbrio hiperbólico, da mesma forma que no caso linear, é possível decompor o fluxo em componentes com comportamentos assintoticamente distintos. Este é, a grosso modo, o conteúdo do Teorema da Variedade Estável. Daremos uma demonstração deste Teorema, independente do Teorema de Hartman-Grobman. Iniciamos com a definição dos subespaços estável e instável, a qual é análoga a que vimos para sistemas lineares.

Definição 2.1 *Sejam $f \in C^1(U)$ e $x_0 \in U$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de f . Considere $\lambda_j = a_j + ib_j$, os autovalores generalizados de $f'(x_0)$ e $v_j + iu_j$ os autovetores generalizados associados ($j \in \{1, \dots, n\}$). Então*

- *O subespaço estável de $f'(x_0)$ é o supespaço $E^s = [v_j, u_j : a_j < 0]$.*

- O subespaço instável de $f'(x_0)$ é o supespaço $E^u = [v_j, u_j : a_j > 0]$.

Definição 2.2 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio hiperbólico do campo f . Dizemos que x_0 é do tipo k se $\dim E^u = k$.*

Teorema 2.3 (Teorema da Variedade Estável Local) *Sejam $f \in C^1(U)$ um campo no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi : \Omega \rightarrow U$ o fluxo de f , $x_0 \in U$ um ponto fixo hiperbólico de f do tipo $n - k$ e E^s e E^u , respectivamente, os subespaços estável e instável de $f'(x_0)$. Então existem $r > 0$ e variedades diferenciáveis S e U em \mathbb{R}^n , de dimensões k e $n - k$, respectivamente, ambas contendo x_0 tais que*

- $T_{x_0}S = E^s$ e $T_{x_0}U = E^u$.
- $S \subseteq \{x \in B(x_0, r) : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_0\}$.
- $U \subseteq \{x \in B(x_0, r) : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = x_0\}$.

As variedades S e U são chamadas respectivamente de variedade estável local de f em x_0 e variedade instável local de f em x_0 . Embora, pelo teorema, elas estejam definidas apenas localmente, podemos obter variedades globais, contendo as locais. A variedade estável global de x_0 é obtida fazendo o fluxo voltar no tempo e para obter a variedade instável global, fazemos o fluxo progredir no tempo:

Definição 2.4 *Com as notações e hipóteses do teorema da variedade estável, definimos a variedade estável global de f em x_0 e a variedade instável global de f em x_0 , respectivamente, como sendo os conjuntos*

$$W^s(x_0) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S) \quad e \quad W^u(x_0) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U).$$

Teorema 2.5 (Teorema da Variedade Estável Global) *Nas hipóteses do Teorema 2.3, $W^s(x_0)$ e $W^u(x_0)$ são únicas, invariantes pelo fluxo e*

$$W^s(x_0) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0\} \quad e \quad W^u(x_0) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = x_0\}.$$

2.1.1 Demonstração do Teorema da Variedade Estável Local

A demonstração utiliza os seguintes lemas, cujas demonstrações podem ser encontradas em [11].

Lema 2.6 *Sejam A uma matriz real $n \times n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ os seus autovalores generalizados. Se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são tais que*

$$c_2 \leq \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq c_1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

então existem $K_1, K_2 \geq 1$ tais que

$$(i) \|e^{At}\| \leq K_1 e^{c_1 t} \quad \forall t \geq 0$$

$$(ii) \|e^{At}\| \leq K_2 e^{c_2 t} \quad \forall t \leq 0$$

Lema 2.7 *Seja $R : U \xrightarrow{ab} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 tal que $R(0) = 0$ e $R'(0) = 0$. Então dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$|x|, |y| < \delta \Rightarrow |R(x) - R(y)| < \epsilon|x - y| \quad (2.1)$$

Lema 2.8 *Sejam M, N espaços métricos. Se N é completo, então o conjunto das aplicações contínuas e limitadas de M em N é completo na métrica da convergência uniforme.*

A seguir, apresentamos a demonstração do Teorema 2.3, o Teorema da Variabilidade Estável Local, dividida em 5 etapas. Esta demonstração foi adaptada de [8], páginas 330-333.

i) Mudança de Coordenadas

Para simplificar, podemos supor que $x_0 = 0$, pois, considerando a translação $T(x) = x + x_0$ e o campo $f \circ T$ em $\tilde{U} = U - x_0$, temos $0 \in \tilde{U}$, $f \circ T(0) = f(x_0) = 0$ e $(f \circ T)'(0) = f'(T(0)) \circ I = f'(x_0)$.

Como f é de classe C^1 , para todo $x \in \tilde{U}$ temos

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + R(x)$$

onde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{|x|} = 0$. A origem é um ponto de equilíbrio, portanto, denotando $f'(0) = A$, o sistema toma a forma

$$\dot{x} = Ax + R(x) \quad (2.2)$$

onde $x \in \tilde{U}$ e $R(0) = R'(0) = 0$ (pois $R'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x) - R(0)}{|x|}$). Da hiperbolicidade de $f'(0)$, a forma canônica de Jordan de A nos dá a decomposição estável-instável, isto é, existe uma matriz C invertível tal que

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

onde os autovalores de $P \in L(\mathbb{R}^k)$ tem parte real negativa e os de $Q \in L(\mathbb{R}^{n-k})$ parte real positiva. Escreveremos $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = B$. Fazendo a mudança de coordenadas $y = C^{-1}x$ no sistema (2.2) temos

$$\dot{y} = C^{-1}\dot{x} = C^{-1}(Ax + R(x)) = C^{-1}ACy + C^{-1}R(Cy)$$

Definindo $G(y) = C^{-1}R(Cy)$ temos que G é de classe C^1 e verifica $G(0) = 0$ e $G'(0) = C^{-1}R'(C0)C = 0$. Assim, o sistema original é conjugado ao sistema (via

o isomorfismo linear $y = C^{-1}x$)

$$\dot{y} = By + G(y) \quad (2.3)$$

onde $y \in \tilde{V} = C^{-1}(\tilde{U})$ e $G(0) = G'(0) = 0$. Note que a parte linear de (2.3) é By , e os autovalores e autovetores deste sistema são os autovalores e autovetores de B . Como a mudança de base foi tal que os subespaços estável e instável de B são ortogonais (pois $B = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$), segue que o subespaço estável de B (denotado por \tilde{E}_s) será $\tilde{E}_s = \mathbb{R}^k$ e o subespaço instável de B será $\tilde{E}_u = \mathbb{R}^{n-k}$. Portanto, todo $y \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como $y = (y_s, y_u) \in \tilde{E}_s \oplus \tilde{E}_u = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$.

Vejamos a decomposição da exponencial e^{Bt} . Sejam

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Qt} \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então, $e^{Bt} = U(t) + V(t)$ e

$$U'(t) = \begin{bmatrix} Pe^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BU(t).$$

De modo análogo, $V'(t) = BV(t)$.

ii) Motivação

Antes de começarmos a demonstração da existência, apresentaremos uma motivação para a escolha da equação integral com a qual trabalharemos.

Considere $\phi(t, y)$ o fluxo de (2.3) e suponha que $y_0 \in \mathbb{R}^n$ é uma condição inicial que satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, y_0) = 0. \quad (2.4)$$

Nem toda condição inicial satisfaz isto, já que alguns autovalores de $f'(x_0)$ possuem parte real positiva. Esta hipótese significa que y_0 está na variedade estável global da origem.

Vamos escrever o sistema (2.3) com condição inicial $y(0) = y_0$ na sua forma integral. Para $t \geq 0$, ela é

$$\phi(t, y_0) = e^{Bt}y_0 + \int_0^t e^{B(t-s)}G(\phi(s, y_0))ds, \quad (2.5)$$

pois $\phi(t, y_0)$ satisfaz $\phi(0, y_0) = y_0$ e também satisfaz (2.3), já que derivando (2.5) em relação a t e lembrando da Regra de Leibniz, dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(t, s) ds \right) = \frac{db(t)}{dt} f(t, b(t)) - \frac{da(t)}{dt} f(t, a(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) ds$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dt}(t, y_0) &= B e^{Bt} y_0 + e^{B(t-t)} G(\phi(t, y_0)) + \int_0^t B e^{B(t-s)} G(\phi(s, y_0)) ds \\
&= B(e^{Bt} y_0 + \int_0^t e^{B(t-s)} G(\phi(s, y_0)) ds) + G(\phi(t, y_0)) \\
&= B\phi(t, y_0) + G(\phi(t, y_0)).
\end{aligned}$$

A equação (2.5) deve ser satisfeita por qualquer solução $\phi(t, y_0)$ do sistema (2.3). Iremos escrevê-la de outra forma e, adicionando a hipótese (2.4), obteremos a equação integral que as soluções iniciando na variedade estável global da origem devem satisfazer. Como $e^{Bt} = U(t) + V(t)$ e $V(t-s) = V(t)V(-s)$, podemos reescrever (2.5) como

$$\begin{aligned}
\phi(t, y_0) &= U(t) y_0 + V(t) y_0 + \int_0^t U(t-s) G(\phi(s, y_0)) ds + \int_0^t V(t-s) G(\phi(s, y_0)) ds \\
&\quad + \int_t^\infty V(t-s) G(\phi(s, y_0)) ds - \int_t^\infty V(t-s) G(\phi(s, y_0)) ds \\
&= U(t) y_0 + \int_0^t U(t-s) G(\phi(s, y_0)) ds - \int_t^\infty V(t-s) G(\phi(s, y_0)) ds \\
&\quad + V(t) (y_0 + \int_0^\infty V(-s) G(\phi(s, y_0)) ds)
\end{aligned}$$

(por enquanto, estamos supondo que as últimas integrais existem). Definindo o vetor c , constante em relação a t , por

$$c = y_0 + \int_0^\infty V(-s) G(\phi(s, y_0)) ds$$

obtemos a nova forma de (2.5):

$$\phi(t, y_0) = U(t) y_0 + \int_0^t U(t-s) G(\phi(s, y_0)) ds - \int_t^\infty V(t-s) G(\phi(s, y_0)) ds + V(t) \cdot c \quad (2.6)$$

É possível mostrar que (e isto será feito mais adiante)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(U(t) y_0 + \int_0^t U(t-s) G(\phi(s, y_0)) ds - \int_t^\infty V(t-s) G(\phi(s, y_0)) ds \right) = 0$$

Portanto, se supormos que y_0 satisfaz (2.4), tomando o limite em (2.6) para $t \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \cdot c = 0.$$

Como $V(t)$ é a componente instável de e^{Bt} , o limite acima só pode ser zero se $c = 0$. Assim, a equação integral que uma solução de (2.3) que satisfaz $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, y_0) = 0$ deve ser

$$\phi(t, y_0) = U(t) y_0 + \int_0^t U(t-s)G(\phi(s, y_0))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\phi(s, y_0))ds. \quad (2.7)$$

Como esperamos que toda solução na variedade estável satisfaça o limite acima, é razoável pensar que esta equação está intimamente relacionada a tal variedade. Mostraremos que (2.7) tem uma solução $u(t, y)$ diferenciável, a partir da qual definiremos uma aplicação $\Psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ diferenciável de modo que o gráfico de Ψ será a variedade estável local \tilde{S} do sistema (2.3), no espaço y . A variedade estável S do sistema original (2.2), no espaço x , será então obtida através da mudança $x = Cy$.

Os próximos passos agora são na direção de obter algumas estimativas que ajudem a resolver (2.7) pelo método das aproximações sucessivas. Este método é proveniente do Teorema do Ponto Fixo de Banach:

Teorema *Se M é um espaço métrico completo e $F : M \rightarrow M$ é uma contração, então F tem um único ponto fixo, que é limite da sequência $(x_0, F(x_0), F^2(x_0), \dots, F^n(x_0), \dots)$.*

Não usaremos este teorema diretamente. Mostraremos que a sequência de iterações sucessivas para (2.7) é de Cauchy num espaço métrico completo.

iii) Algumas estimativas

Seja $y = (y_s, y_u) \in \mathbb{R}^n$ com $\|y\| \leq 1$. Então

$$U(t) \cdot y = \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_s \\ y_u \end{bmatrix} = e^{Pt} \cdot y_s$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\|U(t) \cdot y\| = |e^{Pt} \cdot y_s| \leq \|e^{Pt}\| \|y_s\| \leq \|e^{Pt}\| \|y\| \leq \|e^{Pt}\|$$

Portanto, $\|U(t)\| \leq \|e^{Pt}\|$ para todo t e, da mesma forma, $\|V(t)\| \leq \|e^{Qt}\|$ para todo t . Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ os autovalores (generalizados) de $f'(0)$ com $Re(\lambda_i) < 0$ para $i = 1, \dots, k$ e $Re(\lambda_i) > 0$ para $i = k+1, \dots, n$. Então os autovalores de P são $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e os de Q são $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$. Ainda, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$Re(\lambda_i) < -2\alpha < 0 < \beta < Re(\lambda_j)$$

para $i = 1, \dots, k$ e $j = k+1, \dots, n$. Daí, se $\sigma = \min\{\alpha, \beta\}$, então

$$Re(\lambda_i) < -2\alpha < -(\alpha + \sigma) < 0 < \sigma < \beta < Re(\lambda_j).$$

Pelo Lema 2.6, existem $K_1, K_2 \geq 1$ tais que

$$\|e^{tP}\| \leq K_1 e^{-(\alpha+\sigma)t}, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \|e^{tQ}\| \leq K_2 e^{\sigma t}, \quad \forall t \leq 0$$

Tomando $K = \max\{K_1, K_2\}$, temos

$$\|U(t)\| \leq K e^{-(\alpha+\sigma)t}, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \|V(t)\| \leq K e^{\sigma t}, \quad \forall t \leq 0. \quad (2.8)$$

A próxima estimativa segue do seguinte: G é de classe C^1 e verifica $G(0) = G'(0) = 0$. Logo, pela Lema 2.7, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (podemos tomar δ suficientemente pequeno para que $\overline{B(0, \delta)} \subseteq \tilde{V}$) tal que

$$|G(y_2) - G(y_1)| \leq \epsilon |y_2 - y_1|, \quad \forall y_1, y_2 \in B(0, \delta). \quad (2.9)$$

iv) Resolvendo a equação integral por Aproximações Sucessivas

Como vimos, soluções $u(t, y)$ da equação integral

$$u(t, y) = U(t)y + \int_0^t U(t-s)G(u(s, y))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s, y))ds \quad (2.10)$$

parecem ser soluções de (2.3) cujas condições iniciais estão na (suposta) variedade estável da origem.

Usando o método das aproximações sucessivas, mostraremos que existe uma tal u solução de (2.10), definida em $[0, \infty) \times B(0, r)$, para um certo $r > 0$.

Seja $r > 0$ (a determinar) e considere a sequência de aplicações $u_n : [0, \infty) \times B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\begin{aligned} u_{j+1}(t, y) &= U(t)y + \int_0^t U(t-s)G(u_j(s, y))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u_j(s, y))ds, \\ u_0(t, y) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para que esta sequência esteja bem definida e para usarmos (2.9), precisamos mostrar que

$$u_j(t, y) \in B(0, \delta), \quad \forall (t, y) \in [0, \infty) \times B(0, r), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Temos $u_0(t, y) = 0 \in B(0, \delta)$. Se $u_j(t, y) \in B(0, \delta)$, temos por (2.9), que

$$|G(u_j(t, y))| = |G(u_j(t, y)) - G(0)| \leq \epsilon |u_j(t, y) - 0| < \epsilon \delta. \quad (2.12)$$

Como $s \leq t$ implica $t - s \geq 0$ e $s \geq t$ implica $t - s \leq 0$, de (2.11), (2.8) e (2.12) temos que, se $(t, y) \in [0, \infty) \times B(0, r)$ então

$$\begin{aligned}
|u_j(t, y)| &\leq \|U(t)\| |y| + \int_0^t \|U(t-s)\| |G(u_j(s, y))| ds + \int_t^\infty \|V(t-s)\| |G(u_j(s, y))| ds \\
&\leq Ke^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} r + \int_0^t Ke^{-(\alpha+\sigma)t} \epsilon \delta ds + \int_t^\infty Ke^{\sigma(t-s)} \epsilon \delta ds \\
&\leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t} r + K\epsilon\delta \left\{ \left[\frac{e^{-(\alpha+\sigma)(t-s)}}{\alpha+\sigma} \right]_0^t + \left[\frac{-e^{\sigma(t-s)}}{\sigma} \right]_t^\infty \right\} \\
&\leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t} r + K\epsilon\delta \left\{ \frac{1 - e^{-(\alpha+\sigma)t}}{\alpha+\sigma} + \frac{1-0}{\sigma} \right\} \\
&\leq Kr + K\epsilon\delta \left\{ \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \right\} \stackrel{r \leq \frac{\delta}{2K}}{\leq} K \frac{\delta}{2K} + \frac{2K\epsilon\delta}{\sigma} \stackrel{\frac{2K\epsilon}{\sigma} < \frac{1}{2}}{<} \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta
\end{aligned}$$

desde que $r \leq \frac{\delta}{2K}$ e $\frac{2K\epsilon}{\sigma} < \frac{1}{2}$. Assim, dado $\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{4K} < \frac{\sigma}{4K}$, existe $\delta > 0$ tal que (2.9) se verifica. Tomamos $r = \frac{\delta}{2K}$. Definindo as u'_j s em $M = [0, \infty) \times B(0, \frac{\delta}{2K})$, temos para todo $(t, y) \in M$ que $u_{j+1}(t, y) \in B(0, \delta)$ sempre que $u_j \in B(0, \delta)$. Assim, a seqüência (u_n) está bem definida e cada u_n é limitada em M .

Note que G é de classe C^1 em $\tilde{V} \supset B(0, \delta) \supset B(0, \frac{\delta}{2K})$ (pois $K > 1$) e $U(t)$ e $V(t)$ são de classe C^∞ , portanto, por (2.11), se u_j for diferenciável então u_{j+1} também será. Como u_0 é diferenciável, todas u'_j s são diferenciáveis. Assim, (u_n) é uma seqüência de aplicações contínuas, diferenciáveis e limitadas de M em $B(0, \delta) \subseteq \tilde{B}(0, \delta)$. Como $\tilde{B}(0, \delta)$ é completo, segue do Lema (2.8) que se (u_n) for de Cauchy então existirá $u : M \rightarrow \tilde{B}(0, \delta)$ limitada e contínua, limite uniforme da seqüência (u_n) . Pela convergência uniforme u será diferenciável em M .

Afim de mostrar que (u_n) é de Cauchy, mostremos que

$$|u_{j+1}(t, y) - u_j(t, y)| \leq \frac{K|y|e^{-\alpha t}}{2^j} \quad \forall (t, y) \in M, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Para $j = 0$, temos

$$\begin{aligned}
|u_{j+1}(t, y) - u_j(t, y)| &= |u_1(t, y)| = |U(t)y + \int_0^t U(t-s)G(0)ds - \int_t^\infty V(t-s)G(0)ds| \\
&= |U(t)y| \leq \|U(t)\| |y| \stackrel{(2.8)}{\leq} Ke^{-(\alpha+\sigma)t} |y| < \frac{Ke^{-\alpha t} |y|}{2^0}.
\end{aligned}$$

Se vale a estimativa (2.13) para $j \in \mathbb{N}$ então temos que

$$\begin{aligned}
& |u_{j+1}(t, y) - u_j(t, y)| = \\
& \left| U(t)y + \int_0^t U(t-s)G(u_j(s, y))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u_j(s, y))ds \right. \\
& \left. - U(t)y - \int_0^t U(t-s)G(u_{j-1}(s, y))ds + \int_t^\infty V(t-s)G(u_{j-1}(s, y))ds \right| \\
& \leq \int_0^t \|U(t-s)\| |G(u_j(s, y)) - G(u_{j-1}(s, y))| ds \\
& + \int_t^\infty \|V(t-s)\| |G(u_j(s, y)) - G(u_{j-1}(s, y))| ds \\
(2.8), (2.9) & \leq \int_0^t K e^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} \epsilon |u_j(s, y) - u_{j-1}(s, y)| ds \\
& + \int_t^\infty K e^{\sigma(t-s)} \epsilon |u_j(s, y) - u_{j-1}(s, y)| ds \\
(\text{HI}) & \leq K \epsilon \left\{ \int_0^t e^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} \frac{K e^{-\alpha s} |y|}{2^{j-1}} ds + \int_t^\infty e^{\sigma(t-s)} \frac{K e^{-\alpha s} |y|}{2^{j-1}} ds \right\} \\
& = K \epsilon \left\{ \frac{K |y|}{2^{j-1}} e^{-(\alpha+\sigma)t} \int_0^t e^{\sigma s} ds + \frac{K |y|}{2^{j-1}} e^{\sigma t} \int_t^\infty e^{-(\alpha+\sigma)s} ds \right\} \\
& = K \frac{\sigma}{4K} \frac{K |y|}{2^{j-1}} \left\{ e^{-(\alpha+\sigma)t} \left[\frac{e^{\sigma t} - 0}{\sigma} \right] + e^{\sigma t} \left[\frac{0 + e^{-(\alpha+\sigma)t}}{\alpha + \sigma} \right] \right\} \\
& \leq \frac{K \sigma |y|}{2^{j+1}} \left\{ \frac{e^{-(\alpha+\sigma)t} e^{\sigma t}}{\sigma} + \frac{e^{\sigma t} e^{-(\alpha+\sigma)t}}{\sigma} \right\} \\
& = \frac{K \sigma |y|}{2^{j+1}} \left\{ \frac{e^{-\alpha t}}{\sigma} + \frac{e^{-\alpha t}}{\sigma} \right\} = \frac{K \sigma |y| 2 e^{-\alpha t}}{2^{j+1} \sigma} = \frac{K |y| e^{-\alpha t}}{2^j}
\end{aligned}$$

o que mostra que (2.13) vale para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, para todos $n \geq m \geq n_0$, temos

$$|u_n(t, y) - u_m(t, y)| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |u_{i+1}(t, y) - u_i(t, y)| \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{K |y| e^{-\alpha t}}{2^i} \leq K \frac{\delta}{2K} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\delta}{2^{n_0}}.$$

Logo, dado $\epsilon_0 > 0$, tomando n_0 tal que $\frac{\delta}{2^{n_0}} < \epsilon_0$, temos $|u_n(t, y) - u_m(t, y)| < \epsilon$ para todos $n, m \leq n_0$ e $(t, y) \in M$. Portanto, (u_n) é de Cauchy. Segue do Lema 4 que existe $u : M \rightarrow \overline{B(0, \delta)}$ limitada e contínua, limite uniforme da

sequência (u_n) . Por indução, e pela convergência uniforme, u é diferenciável em M . Tomando o limite (uniforme em (t, y)) para $j \rightarrow \infty$ em (2.11) temos que u satisfaz (2.10). Derivando (2.10) em relação a t e usando a Regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt}(t, y) &= U'(t)y + U(t-t)G(u(t, y)) + \int_0^t U'(t-s)G(u(s, y))ds \\
&\quad + V(t-t)G(u(t, y)) - \int_t^\infty V'(t-s)G(u(s, y))ds \\
&= BU(t)y + \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G(u(t, y)) + \int_0^t BU(t-s)G(u(s, y))ds \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} G(u(t, y)) - \int_t^\infty BV(t-s)G(u(s, y))ds \\
&= B(U(t)y + \int_0^t U(t-s)G(u(s, y))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s, y))ds) + G(u(t, y)) \\
&= Bu(t, y) + G(u(t, y))
\end{aligned}$$

ou seja, u é solução de (2.3). Ainda, por (2.13), temos

$$\begin{aligned}
|u_n(t, y)| &\leq |u_n(t, y) - u_{n-1}(t, y)| + |u_{n-1}(t, y) - u_{n-2}(t, y)| + \dots + |u_1(t, y) - u_0(t, y)| \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} |u_{j+1}(t, y) - u_j(t, y)| \stackrel{(2.13)}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} K|y|e^{-\alpha t} \frac{1}{2^j} = K|y|e^{-\alpha t} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2K|y|e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

para todos $(t, y) \in M$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que

$$|u(t, y)| \leq 2K|y|e^{-\alpha t} \quad (2.14)$$

para todos $(t, y) \in M$.

v) A Variedade Estável

Dada a existência da solução u de (2.10), vamos mostrar que ela define uma variedade de dimensão k em \mathbb{R}^n . De fato, para $t = 0$, com $y = (y_s, y_u)$, (2.10) se torna

$$\begin{aligned}
u(0, y) &= U(0)y + \int_0^0 U(-s)G(u(s, y))ds - \int_0^\infty V(-s)G(u(s, y))ds \\
&= (y_s, 0) - \int_0^\infty (0, e^{-Qs}G_u(u(s, y)))ds
\end{aligned}$$

ou seja,

$$u(0, y) = (y_s, - \int_0^\infty e^{-Qs}G_u(u(s, (y_s, y_u)))ds) \quad (2.15)$$

onde $G = (G_s, G_u)$. Mostremos que (2.15) não depende da componente y_u de $y = (y_s, y_u)$. Para isto, mostremos que as aproximações sucessivas u_j não dependem de y_u , isto é

$$\frac{\partial u_j}{\partial y_u}(t, (y_s, y_u)) = 0, \quad \forall (t, y) \in M, \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

De fato, como $u_0(t, y) \equiv 0$, o resultado vale para $j = 0$. Suponha que $\frac{\partial u_j}{\partial y_u}(t, (y_s, y_u)) = 0$. Da definição de (u_n) temos, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial y_u}(t, (y_s, y_u)) &= \frac{\partial}{\partial y_u}(e^{Pt}y_s, 0) + \int_0^t U(t-s) G'(u_j(s, (y_s, y_u))) \cdot \frac{\partial u_j}{\partial y_u}(s, (y_s, y_u)) ds \\ &\quad - \int_t^\infty V(t-s) G'(u_j(s, (y_s, y_u))) \cdot \frac{\partial u_j}{\partial y_u}(s, (y_s, y_u)) ds \\ &= 0 + \int_0^t U(t-s) G'(u_j(s, (y_s, y_u))) \cdot 0 ds \\ &\quad - \int_t^\infty V(t-s) G'(u_j(s, (y_s, y_u))) \cdot 0 ds = 0. \end{aligned}$$

Portanto, (2.16) é verdadeira e tomando ali o limite uniforme em (t, y) com $j \rightarrow \infty$, temos o resultado

$$\frac{\partial u}{\partial y_u}(t, (y_s, y_u)) = 0, \quad \forall (t, y) \in M.$$

Assim, (2.15) não depende de y_u , de modo que podemos tomá-lo como zero, portanto pode ser escrita como

$$u(0, (y_s, 0)) = (y_s, \Psi(y_s)) \quad (2.17)$$

onde $\Psi : B(0, \frac{\delta}{2K}) \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ é dada por

$$\Psi(y_s) = - \int_0^\infty e^{-Qs} G_u(u(s, (y_s, 0))) ds \quad (2.18)$$

e, portanto, é diferenciável. Logo, definindo $\tilde{S} = \{u(0, (y_s, 0)) : y_s \in B(0, \frac{\delta}{2K})\}$, temos $\tilde{S} = \{(y_s, \Psi(y_s)) : y_s \in B(0, \frac{\delta}{2K})\}$. Assim, \tilde{S} é o gráfico de Ψ e portanto, é uma variedade diferenciável de dimensão k .

Obteremos agora as propriedades de \tilde{S} . Da estimativa (2.14) temos $u(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$. Logo, $u(0, 0) = 0$ e daí $\Psi(0) = 0$, ou seja, $0 \in \tilde{S}$. Mostremos que o espaço tangente a \tilde{S} na origem, $T_0\tilde{S}$, é \tilde{E}_s . Dados $y_s \in B(0, \frac{\delta}{2K})$ e $h \in \tilde{E}^s = \mathbb{R}^k$ temos

$$\Psi'(y_s) \cdot h = - \int_0^\infty e^{-Qs} G'_u(u(s, (y_s, 0))) \cdot u'(s, (y_s, 0)) \cdot h ds.$$

Como $u(t, 0) = 0$, $\forall t \geq 0$ e $G'(0) = 0$, segue que

$$\Psi'(0) \cdot h = 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^k.$$

Logo, $T_0S = (Id_{\mathbb{R}^k}, 0_{\mathbb{R}^{n-k}}) \cdot \{e_1, \dots, e_n\} = \{e_1, \dots, e_k\} = \mathbb{R}^k$.

Mostremos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, y) = 0$ para todo $y \in \tilde{S}$. Seja $y_1 = u(0, y_0) \in \tilde{S}$, com $y_0 = (y_s, 0) \in B(0, \frac{\delta}{2K})$. Vimos que $t \mapsto u(t, y_0)$ é solução de (2.3) com condição inicial $y(0) = u(0, y_0)$. Como $y_1 = u(0, y_0)$, pela unicidade das soluções de (2.3), temos $u(t, y_0) = \phi(t, y_1)$. Portanto, de (2.14),

$$|\phi(t, y_1)| = |u(t, y_0)| \leq 2K|y_0|e^{-\alpha t} \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Logo, $\tilde{S} \subseteq \{y \in B(0, \frac{\delta}{2K}) : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, y) = 0\}$. Isto termina a demonstração. \square

2.1.2 Demonstração do Teorema da Variedade Estável Global

Mantendo a notação e os resultados da demonstração anterior, mostraremos inicialmente a seguinte afirmação: *se $y_0 \in B(0, \frac{\delta}{2K})$ é tal que a solução $\phi(t, y_0)$ de (2.3) satisfaz*

$$\phi(t, y_0) \in B(0, \delta), \quad \forall t \geq 0 \tag{2.19}$$

então, $\phi(t, y_0) = u(t, y_0)$ para todo $t \geq 0$. De fato, vimos que a forma integral de (2.3) com $y(0) = y_0$ é

$$\phi(t, y_0) = e^{Bt}y_0 + \int_0^t e^{B(t-s)}G(\phi(s, y_0))ds \tag{2.20}$$

que reescrevemos como

$$\begin{aligned} \phi(t, y_0) = & U(t)y_0 + \int_0^t U(t-s)G(\phi(s, y_0))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\phi(s, y_0))ds \\ & + V(t) \left(y_0 + \int_0^\infty V(-s)G(\phi(s, y_0))ds \right). \end{aligned} \tag{2.21}$$

A última integral existe, já que (2.19) e (2.9) implicam

$$|V(-s)G(\phi(s, y_0))| \leq Ke^{-\sigma s}\epsilon\delta, \quad \forall s \geq 0.$$

Havíamos definido

$$c = y_0 + \int_0^\infty V(-s)G(\phi(s, y_0))ds$$

de modo que (2.21) ficava

$$\phi(t, y_0) = U(t) y_0 + \int_0^t U(t-s)G(\phi(s, y_0))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\phi(s, y_0))ds + V(t) \cdot c \quad (2.22)$$

Daí, obtemos

$$-V(t) \cdot c = U(t) y_0 + \int_0^t U(t-s)G(\phi(s, y_0))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\phi(s, y_0))ds - \phi(t, y_0) \quad (2.23)$$

daí, por (2.8), (2.9) e (2.19), para todo $(t, y) \in M = [0, \infty) \times B(0, \frac{\delta}{2K})$, temos

$$\begin{aligned} |V(t) \cdot c| &\leq K e^{-(\alpha+\sigma)t} \frac{\delta}{2K} + \int_0^t K e^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} \epsilon \delta ds \\ &\quad + \int_t^\infty K e^{\sigma(t-s)} \epsilon \delta ds + \delta \\ &\leq \frac{\delta}{2} + K \epsilon \delta e^{-(\alpha+\sigma)t} \left[\frac{e^{(\alpha+\sigma)t} - 1}{\alpha + \sigma} \right] + K \epsilon \delta e^{\sigma t} \left[\frac{e^{-\sigma t} - 0}{\sigma} \right] + \delta \\ &\leq \frac{\delta}{2} + K \epsilon \delta \frac{1}{\alpha + \sigma} + K \epsilon \delta e^{\sigma t} \frac{1}{\sigma} + \delta \end{aligned}$$

Assim, $V(t) \cdot c$ é limitado para $t \geq 0$. Pondo $c = (c_s, c_u)$, temos que

$$V(t) \cdot c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Qt} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_s \\ c_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{Qt} c_u \end{bmatrix}.$$

Sabemos que cada entrada da matriz e^{Qt} é da forma

$$\frac{t^j}{j!} e^{a_l t} \cos b_l t \quad \text{ou} \quad \frac{t^j}{j!} e^{a_l t} \sen b_l t \quad (2.24)$$

onde $\lambda_l = a_l + ib_l$, $j = k + 1, \dots, n - k$ são os autovalores de $f'(0)$ com parte real positiva. Assim, cada coordenada de $e^{Qt} c_u$ será uma combinação linear das funções em (2.24). Se c_u for diferente do vetor nulo, como $a_l > 0$ para todo $l = k + 1, \dots, n$, podemos fazer $|V(t) \cdot c|$ tão grande quando queiramos, o que contradiz sua limitação dada pela última desigualdade. Portanto, necessariamente, $c_u = 0$ e daí $V(t) \cdot c = 0$.

Logo $\phi(t, y_0)$ satisfaz

$$\phi(t, y_0) = U(t) y_0 + \int_0^t U(t-s)G(\phi(s, y_0))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\phi(s, y_0))ds \quad (2.25)$$

De (2.10) e (2.25) e de (2.8), (2.9) e (2.19) temos

$$\begin{aligned}
|u(t, y_0) - \phi(t, y_0)| &\leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t}|y_0 - y_0| + \int_0^t \|U(t-s)\| |G(u(s, y_0)) - G(\phi(s, y_0))| ds \\
&+ \int_t^\infty \|V(t-s)\| |G(u(s, y_0)) - G(\phi(s, y_0))| ds \\
&\leq \int_0^t Ke^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} \epsilon |u(s, y_0) - \phi(s, y_0)| ds \\
&+ \int_t^\infty Ke^{\sigma(t-s)} \epsilon |u(s, y_0) - \phi(s, y_0)| ds.
\end{aligned}$$

Por (2.14) e (2.19), existe

$$M = \sup_{t \geq 0} |u(t, y_0) - \phi(t, y_0)|$$

Se $M \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
M &\leq K\epsilon M e^{-(\alpha+\sigma)t} \left[\frac{e^{(\alpha+\sigma)t} - 1}{\alpha + \sigma} \right] + K\epsilon M e^{\sigma t} \left[\frac{e^{-\sigma t} - 0}{\sigma} \right] \\
&\leq K\epsilon M \frac{1}{\sigma} + K\epsilon M \frac{1}{\sigma} = \frac{2K\epsilon}{\sigma} M < \frac{1}{2} M
\end{aligned}$$

o que é absurdo. Logo $M = 0$ e daí

$$u(t, y_0) = \phi(t, y_0), \quad \forall t \geq 0.$$

Resumindo, mostramos a seguinte afirmação: se $y_0 \in B(0, \frac{\delta}{2K})$, é tal que a solução $\phi(t, y_0)$ de (2.3) satisfaz

$$\phi(t, y_0) \in B(0, \delta), \quad \forall t \geq 0.$$

então $\phi(t, y_0) = u(t, y_0)$ para todo $t \geq 0$. Vamos mostrar agora que $\tilde{W}^s(0) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = 0\}$. De fato, seja $y \in \tilde{W}^s(0)$. Como $\tilde{W}^s(0)$ é definida por $\tilde{W}^s(0) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(\tilde{S})$, existem $t_y \leq 0$ e $y_0 \in \tilde{S}$ tais que $y = \phi(t_y, y_0)$. Como $y_0 \in \tilde{S}$, do Teorema da Variedade Estável Local, Teorema 2.3, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, y_0) = 0$. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(t_y, y_0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t + t_y, y_0) = 0$$

Assim, $\tilde{W}^s(0) \subseteq \{x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = 0\}$. Seja agora $x \in \{x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = 0\}$. Como $p(t, x) \rightarrow 0$, existe $T > 0$ tal que

$$t \geq T \Rightarrow \phi(t, x) \in B(0, \frac{\delta}{2K})$$

Seja $y_0 = \phi(T, x) \in B(0, \frac{\delta}{2K})$. Então

$$\phi(t, y_0) = \phi(t, \phi(T, x)) = \phi(t + T, x) \in B(0, \frac{\delta}{2K}) \subset B(0, \delta) \quad \forall t \geq 0$$

Logo, pela afirmação que provamos há pouco, $\phi(t, y_0) = u(t, y_0)$, $\forall t \geq 0$ e daí, $y_0 = \phi(0, y_0) = u(0, y_0) \in \tilde{S}$. Assim,

$$x = \phi(0, x) = \phi(-T, \phi(T, x)) = \phi(-T, y_0) \in \phi(-T, \tilde{S}) \subseteq \tilde{W}^s(0)$$

pois $-T \leq 0$. Portanto, $\tilde{W}^s(0) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = 0\}$. Esta última igualdade garante também a unicidade da Variedade Estável Global. Assim, a demonstração está concluída. \square

2.2 Bacias de Atração

Após estudar o comportamento do sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.26}$$

localmente em pontos regulares e singulares, no Capítulo 1, queremos agora, obter resultados mais globais. Uma questão que surge naturalmente quando temos um equilíbrio assintoticamente estável x_0 , porém não globalmente estável (nem todas as soluções convergem para x_0), é a seguinte: *qual é o conjunto de pontos que são levados para x_0 pelo fluxo? Como determinar este conjunto?* Tal conjunto será chamado de Bacia de Atração (também conhecido como Região de Estabilidade) de x_0 . Um grande número dos sistemas dinâmicos não-lineares apresenta equilíbrios deste tipo, e o estudo das bacias destes equilíbrios é de suma importância para o estudo qualitativo do sistema, como veremos nos próximos capítulos.

Nesta seção, baseados nas referências [6, 1], iremos definir a Bacia de atração de um equilíbrio assintoticamente estável, obter algumas de suas características topológicas e caracterizar sua fronteira. Ainda, como consequência desta caracterização, veremos o Teorema 2.27, que pode ser muito útil, de forma indireta, na análise de estabilidade de outros pontos de equilíbrio do sistema. De fato, no Capítulo 4, esta ferramenta será fundamental.

Definição 2.9 *Sejam $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do campo $f \in C^1(U)$ e $\phi : \Omega \rightarrow U$ o fluxo de f . A Bacia de Atração (ou Região de Estabilidade) de x_0 , denotada por $A(x_0)$ é o conjunto*

$$A(x_0) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_0\}.$$

A seguir, temos algumas propriedades topológicas de $A(x_0)$.

Proposição 2.10 $A(x_0)$ é invariante pelo fluxo.

Demonstração: Seja $p \in A(x_0)$. Então $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, p) = x_0$. Seja $s \in \mathbb{R}$ qualquer e $q = \phi(s, p)$. Então, pelas propriedades do fluxo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(s, p)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t + s, p) = x_0.$$

Logo, $q = \phi(s, p) \in A(x_0)$ e, como $s \in \mathbb{R}$ é arbitrário, segue que $A(x_0)$ é invariante pelo fluxo. \square

Proposição 2.11 $A(x_0)$ é um conjunto aberto em \mathbb{R}^n .

Demonstração: Seja $p \in A(x_0)$. Devemos mostrar que existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subseteq A(x_0)$. Como x_0 é assintoticamente estável, por definição, existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_0, \quad \forall x \in B(x_0, \delta). \quad (2.27)$$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, p) = x_0$, existe $T > 0$ tal que

$$\phi(t, p) \in B(x_0, \frac{\delta}{2}) \quad (2.28)$$

para todo $t \geq T$. Sabemos que o fluxo ϕ é de classe C^1 . Logo, a aplicação $\phi(T, \cdot)$ é contínua no ponto p . Portanto, existe $r > 0$ tal que

$$|q - p| < r \Rightarrow |\phi(T, q) - \phi(T, p)| < \frac{\delta}{2}. \quad (2.29)$$

Afirmamos que $B(p, r) \subseteq A(x_0)$. De fato, seja $q \in B(p, r)$. Então, de (2.29) e (2.28), temos

$$|\phi(T, q) - x_0| \leq |\phi(T, q) - \phi(T, p)| + |\phi(T, p) - x_0| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \quad (2.30)$$

Daí, segue de (2.27) que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(T, q)) = x_0$. Usando as propriedades de fluxo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t - T, \phi(T, q)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(T, q)) = x_0.$$

Portanto $q \in A(x_0)$ e daí $B(p, r) \subseteq A(x_0)$, o que mostra que $A(x_0)$ é aberto. \square

Proposição 2.12 $A(x_0)$ é um conjunto conexo.

Demonstração: É suficiente mostrar que $A(x_0)$ é conexo por caminhos. Inicialmente, observamos que, como x_0 é assintoticamente estável, existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_0, \quad \forall x \in B(x_0, \delta).$$

Como $A(x_0)$ é aberto, podemos tomar δ suficientemente pequeno para que $B(x_0, \delta) \subseteq A(x_0)$. Sejam $p, q \in A(x_0)$ e mostremos que existe um caminho em $A(x_0)$ ligando

p e q . Como $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, p) = x_0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, q) = x_0$, existem $T_1 > 0$ e $T_2 > 0$ tais que $t \geq T_1$ implica $\phi(t, p) \in B(x_0, \delta)$ e $t \geq T_2$ implica $\phi(t, q) \in B(x_0, \delta)$. Sejam $u = \phi(T_1, p)$ e $v = \phi(T_1, q)$. Então u e v pertencem a bola $B(x_0, \delta)$ e podem ser ligados por um caminho contido nesta bola. O caminho $t \mapsto \phi(t, p)$ liga o ponto p ao ponto u e está contido em $A(x_0)$, pois $p \in A(x_0)$ e $A(x_0)$ é invariante pelo fluxo. Analogamente, o caminho $t \mapsto \phi(t, q)$ está contido em $A(x_0)$ e liga q a v . Ligando os caminhos de p a u , de u a v e de v a q , temos um caminho, contido em $A(x_0)$, ligando p a q , o que mostra que $A(x_0)$ é conexa. \square

Lema 2.13 *Se A é um conjunto invariante pelo fluxo de um campo f , então ∂A também é invariante pelo fluxo.*

Demonstração: Seja $\bar{x} \in \partial A$. Dado $T \in \mathbb{R}$, queremos mostrar que $\phi(T, \bar{x}) \in \partial A$. Seja $r > 0$. Como $\phi(T, \cdot)$ é contínua em \bar{x} , existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |\phi(T, x) - \phi(T, \bar{x})| < r \quad (2.31)$$

Para este $\delta > 0$, como $\bar{x} \in \partial A$, existem $x_1, x_2 \in B(\bar{x}, \delta)$ tais que $x_1 \in A$ e $x_2 \in \mathbb{R}^n - A$. Como A é invariante, segue que $\phi(T, x_1) \in A$ e $\phi(T, x_2) \in \mathbb{R}^n - A$ (já que pela invariância de A , $\phi(T, x_2) \in A$ implicaria $x_2 = \phi(-T, \phi(T, x_2)) \in A$, o que é absurdo). Como $x_1, x_2 \in B(\bar{x}, \delta)$, segue de (2.31) que $\phi(T, x_1), \phi(T, x_2) \in B(\phi(T, \bar{x}), r)$. Ou seja, dados $\bar{x} \in \partial A$, $T \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, mostramos que existem $\phi(T, x_1), \phi(T, x_2) \in B(\phi(T, \bar{x}), r)$ com $\phi(T, x_1) \in A$ e $\phi(T, x_2) \in \mathbb{R}^n - A$, ou seja, mostramos que $\phi(T, \bar{x}) \in \partial A$, portanto ∂A é invariante pelo fluxo. \square

Proposição 2.14 *A fronteira $\partial A(x_0)$ da bacia de atração de x_0 é um conjunto fechado, invariante pelo fluxo e tem dimensão menor que n . Ainda, se $A(x_0)$ não é denso em \mathbb{R}^n então a dimensão de $\partial A(x_0)$ é $n - 1$.*

Demonstração: Do fato que a fronteira de qualquer conjunto é um conjunto fechado, segue que $\partial A(x_0)$ é um conjunto fechado. Do Lema 2.13 e da Proposição (2.10), segue que $\partial A(x_0)$ é invariante. Em [18], páginas 44-47, prova-se que a fronteira de um conjunto A aberto em \mathbb{R}^n tem dimensão menor que n e, além disso, se A não é denso em \mathbb{R}^n , então $\dim \partial A = n - 1$. Daí seguem as demais conclusões. \square

Como consequência imediata da última proposição temos o corolário abaixo, uma vez que, se há dois equilíbrios assintoticamente estáveis então a bacia de atração de cada um deles não é densa em \mathbb{R}^n .

Corolário 2.15 *Se x_1 e x_2 são dois pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis de f distintos, então $\dim \partial A(x_1) = \dim \partial A(x_2) = n - 1$.*

2.2.1 Caracterização da fronteira da bacia de atração

Os resultados a seguir fazem uma conexão entre a teoria local e a teoria global, caracterizando a fronteira da bacia de atração como união de variedades estáveis de pontos de equilíbrio hiperbólicos. O próximo teorema é o primeiro passo nesta direção, sem fazer nenhuma hipótese adicional sobre o campo f . Para provar este teorema e outros que virão, precisamos de um lema de grande importância na teoria de sistemas dinâmicos, conhecido como λ -Lema, e de um corolário seu. As demonstrações de ambos podem ser encontradas em [25], páginas 88-95.

Definição 2.16 *Uma seção transversal a $W^s(x^*)$ em q , de dimensão k , é a imagem $g(A)$ de um aberto $A \subset \mathbb{R}^k$ por um homeomorfismo diferenciável $g : A \rightarrow g(A) \subset U$ tal que $g(a) = q$ e $g'(a) \cdot (\mathbb{R}^k)$ e $T_q W^s(x^*)$ geram \mathbb{R}^n .*

Lema 2.17 (λ -Lema) *Sejam x^* um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo k de f e U um aberto contendo x^* . Seja $D^u \subseteq U \cap W^u(x^*)$ um aberto em $W^u(x^*)$. Se $q \in W^s(x^*)$ e S é uma seção transversal a $W^s(x^*)$ em q , de dimensão k , então D^u está contido no fecho do conjunto $\phi(\mathbb{R}_+, S)$.*

Definição 2.18 *Sejam x^* um ponto de equilíbrio hiperbólico de f e U uma vizinhança de x^* em $W^s(x^*)$, isto é, $U = A \cap W^s(x^*)$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto contendo x^* . Dizemos que ∂U é um domínio fundamental de $W^s(x^*)$ se ∂U for transversal ao campo f . Uma vizinhança fundamental $G(x^*)$ associada a $W^s(x^*)$ é um conjunto G que é uma seção transversal de f contendo ∂U e transversal a $W^s(x^*)$. Trocando-se acima $W^s(x^*)$ por $W^u(x^*)$, temos a definição de domínio fundamental de $W^u(x^*)$ e de vizinhança fundamental $G(x^*)$ associada a $W^u(x^*)$.*

Corolário 2.19 *Se x^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico de f , ∂U é um domínio fundamental de $W^s(x^*)$ e $G(x^*)$ é a vizinhança fundamental associada a $W^s(x^*)$, então*

$$W^s(x^*) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi(t, \partial U) \quad (2.32)$$

e existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo x^* tal que

$$(V - W^u(x^*)) \subset \left(\bigcup_{t \geq 0} \phi(t, G(x^*)) \right) \quad (2.33)$$

contém uma vizinhança de x^* . Trocando $W^s(x^*)$ por $W^u(x^*)$ e $t \geq 0$ por $t \leq 0$, tem-se resultados análogos.

Teorema 2.20 *Sejam x_0 um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (2.26) e x^* ($x^* \neq x_0$) um ponto de equilíbrio hiperbólico de (2.26). Então:*

(i) $(W^u(x^*) - \{x^*\}) \cap \overline{A(x_0)} \neq \emptyset$ se, e somente se, $x^* \in \partial A(x_0)$.

(ii) se x^* é do tipo k , com $k < n$, então $x^* \in \partial A(x_0)$ se, e somente se, $(W^s(x^*) - \{x^*\}) \cap \partial A(x_0) \neq \emptyset$.

Demonstração:

(i)(\Rightarrow) Suponha que $(W^u(x^*) - \{x^*\}) \cap \overline{A(x_0)} \neq \emptyset$. Então existe $y \in W^u(x^*) \cap A(x_0)$, $y \neq x^*$. Assim, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, y) = x^*$. Sabemos que $A(x_0)$ é invariante e, pelo lema (2.13), $\partial A(x_0)$ também é. Como $\overline{A(x_0)} = A(x_0) \cup \partial A(x_0)$, segue que $\overline{A(x_0)}$ também é invariante. Como $y \in A(x_0)$, temos que

$$\phi(t, y) \in \overline{A(x_0)} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.34)$$

Note que $x^* \in \overline{A(x_0)}$, pois $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, y) = x^*$ e $\overline{A(x_0)}$ é fechado. Agora, como x^* é equilíbrio de f , ele é ponto fixo de ϕ , daí $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} x^* = x^*$. Portanto $x^* \notin A(x_0)$. Logo $x^* \in \partial A(x_0)$.

(i)(\Leftarrow) Suponha que $x^* \in \partial A(x_0)$. Seja D um domínio fundamental de $W^u(x^*)$, isto é, existe um aberto A em \mathbb{R}^n tal que $x^* \in A$, $D := \partial(A \cap W^u(x^*))$ é transversal a f e $W^u(x^*) - \{x^*\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi(t, D)$. Seja $D_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, D) < \epsilon\}$ uma vizinhança de D em \mathbb{R}^n . Então D_ϵ é uma vizinhança fundamental associada a $W^u(x^*)$. Pelo Corolário 2.19, segue que existe um aberto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ contendo x^* tal que $V - W^s(x^*) \subseteq \bigcup_{t \leq 0} \phi(t, D_\epsilon)$. Como $x^* \in \partial A(x_0)$, por definição temos que $V \cap A(x_0) \neq \emptyset$. Mas sabemos que $W^s(x^*) \cap A(x_0) = \emptyset$. Logo, $(V - W^s(x^*)) \cap A(x_0) \neq \emptyset$. Logo existe $q \in (V - W^s(x^*)) \cap A(x_0)$. Mas $V - W^s(x^*) \subseteq \bigcup_{t \leq 0} \phi(t, D_\epsilon)$, daí $q \in \phi(T, D_\epsilon)$ para algum $T < 0$. Assim, existe $p_\epsilon \in D_\epsilon$ tal que $q = \phi(T, p_\epsilon)$. Como $q \in A(x_0)$ e $A(x_0)$ é invariante, temos que $p_\epsilon \in A(x_0)$. Note que ϵ é arbitrário, assim, tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$, construímos uma sequência $p_n \in A(x_0)$ com $p_n \in D_{\frac{1}{n}}$. Como D é limitado por definição, temos que cada $D_{\frac{1}{n}}$ também é limitado. Logo (p_n) é uma sequência limitada, portanto possui uma subsequência p_{n_j} convergente. Seja \bar{p} o limite de p_{n_j} . Como $p_n \in A(x_0) \cap D_{\frac{1}{n}}$, segue que $\bar{p} \in (\overline{A(x_0)} \cap D) \subseteq (\overline{A(x_0)} \cap W^u(x^*))$. Portanto $\overline{A(x_0)} \cap W^u(x^*) \neq \emptyset$.

(ii)(\Leftarrow) Suponha que $(W^s(x^*) - \{x^*\}) \cap \partial A(x_0) \neq \emptyset$. Então existe $p \in (W^s(x^*) - \{x^*\})$ com $p \in \partial A(x_0)$. Como $\partial A(x_0)$ é invariante, segue que $\phi(t, p) \in \partial A(x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, como $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, p) = x^*$ e $\partial A(x_0)$ é fechado, temos que $x^* \in \partial A(x_0)$.

(ii)(\Rightarrow) A demonstração desta implicação é muito semelhante a demonstração de (i)(\Leftarrow) e não será feita aqui. \square

Como $x^* \notin A(x_0)$, uma consequência imediata deste teorema é o seguinte

Corolário 2.21 *Nas hipóteses do Teorema 2.20, se $W^u(x^*) \cap A(x_0) \neq \emptyset$ então $x^* \in \partial A(x_0)$.*

O corolário anterior garante que se existe uma trajetória em $W^u(x^*)$ que se aproxima de x_0 , então $x^* \in \partial A(x_0)$. Uma vez que sua hipótese pode ser verificada numericamente (basta integrar o sistema com condições iniciais em $W^u(x^*)$ muito próximas de x^*), este corolário pode ser muito útil na prática, quando se quer

determinar se um equilíbrio x^* está ou não em $\partial A(x_0)$.

Adicionando algumas hipóteses (sendo as duas primeiras bem gerais), o resultado anterior pode ser melhorado, e teremos uma caracterização completa da fronteira da bacia de atração. Antes porém, precisamos definir o conceito de transversalidade de variedades para enunciar mais um lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [32].

Definição 2.22 *Duas variedades A e B em \mathbb{R}^n satisfazem a condição de transversalidade se*

(i) $A \cap B = \emptyset$ ou

(ii) *Para cada $x \in A \cap B$, tem-se $T_x(A) + T_x(B) = \mathbb{R}^n$, onde $T_x(A)$ é o espaço tangente a A em x e $T_x(B)$ é o espaço tangente a B em x .*

Lema 2.23 *Sejam x_1 e x_2 dois pontos de equilíbrio hiperbólicos de f . Suponha que $W^u(x_1)$ e $W^s(x_2)$ satisfazem a condição de transversalidade e que $(W^u(x_1) - \{x_1\}) \cap (W^s(x_2) - \{x_2\}) \neq \emptyset$. Então $\dim W^u(x_1) > \dim W^u(x_2)$.*

Vamos agora apresentar as hipóteses que nos permitirão obter os resultados que caracterizam a fronteira da bacia de atração.

Hipóteses 2.24 *Mantendo as notações anteriores, considere as seguintes hipóteses:*

(A1) *Todos os pontos de equilíbrio de f em $\partial A(x_0)$ são hiperbólicos.*

(A2) *Se $x_1, x_2 \in \partial A(x_0)$ são pontos de equilíbrio de f , então $W^s(x_1)$ e $W^u(x_2)$ satisfazem a condição de transversalidade.*

(A3) *Todas as trajetórias em $\partial A(x_0)$ tendem para um dos pontos de equilíbrio de f quando $t \rightarrow +\infty$.*

Teorema 2.25 *Sejam x_0 um equilíbrio assintoticamente estável do campo $f \in C^1(U)$ e x^* um ponto de equilíbrio de f . Se as hipóteses (A1)-(A3) estão satisfeitas, então:*

(i) $x^* \in \partial A(x_0)$ se e somente se $W^u(x^*) \cap A(x_0) \neq \emptyset$.

(ii) $x^* \in \partial A(x_0)$ se e somente se $W^s(x^*) \subseteq \partial A(x_0)$.

Antes de vermos a demonstração, uma observação a respeito das hipóteses do Teorema 2.25: na próxima seção, veremos o enunciado do Teorema de Kupka-Smale [25], que garante que as hipóteses (A1) e (A2) são propriedades genéricas para campos de classe C^1 , isto é, a grosso modo, elas são verdadeiras para quase todos os campos de classe C^1 . Assim, a única hipótese realmente restritiva é (A3).

Demonstração de Teorema (2.25): (i)(\Leftarrow) Suponha que $W^u(x^*) \cap A(x_0) \neq \emptyset$. Como $x^* \notin A(x_0)$, segue que $\emptyset \neq (W^u(x^*) - \{x^*\}) \cap A(x_0) \subseteq (W^u(x^*) - \{x^*\}) \cap \overline{A(x_0)}$. Pelo teorema (2.20) (i)(\Rightarrow), segue que $x^* \in \partial A(x_0)$.

(i)(\Rightarrow) Seja $x^* \in \partial A(x_0)$.

Suponha que x^* é do tipo 1. Pelo Teorema 2.20 (i)(\Leftarrow), temos que $(W^u(x^*) - \{x^*\}) \cap \overline{A(x_0)} \neq \emptyset$. Então existe $p \in \overline{A(x_0)}$, $p \neq x^*$, $p \in W^u(x^*)$. Devemos mostrar que $p \in A(x_0)$. Suponha que isto não aconteça. Então, como $p \in \overline{A(x_0)}$, segue que $p \in \partial A(x_0)$. Pela hipótese (A3), a solução $t \mapsto \phi(t, p)$ converge para algum ponto fixo $\bar{x} \in \partial A(x_0)$. Pela hipótese (A1), \bar{x} é hiperbólico. É óbvio que \bar{x} não é assintoticamente estável, pois $\bar{x} \in \partial A(x_0)$. Logo \bar{x} é do tipo $\bar{k} \geq 1$. Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, p) = \bar{x}$, segue que $p \in W^s(\bar{x})$. Mas também temos $p \in W^u(x^*)$. Logo, as variedades $W^u(x^*)$ e $W^s(\bar{x})$ se interceptam em p . Pela hipótese (A2), elas se interceptam transversalmente. Pelo Lema 2.23, temos que $\dim W^u(x^*) > \dim W^u(\bar{x})$. Mas $\dim W^u(x^*) = 1$ e $\dim W^u(\bar{x}) = k$. Logo $1 > k$, o que é absurdo. Portanto $p \in A(x_0)$. Assim, mostramos que se x^* é um ponto fixo do tipo 1 e $x^* \in \partial A(x_0)$, então $W^u(x^*) \cap A(x_0) \neq \emptyset$.

Suponha agora que x^* é do tipo 2. Procedendo da mesma maneira que no caso anterior, existe $p \in (W^u(x^*) - \{x^*\}) \cap \overline{A(x_0)} \neq \emptyset$ e daí existe $\bar{x} \in \partial A(x_0)$ equilíbrio hiperbólico do tipo $\bar{k} \geq 1$ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, p) = \bar{x}$, logo $p \in W^s(\bar{x}) \cap W^u(x^*)$. Usando as hipóteses e o Lema 2.23 chega-se, desta vez, a conclusão $\bar{k} < 2$. Logo, devemos ter $\bar{k} = 1$. Pela parte anterior aplicada ao ponto \bar{x} , segue que $W^u(\bar{x}) \cap A(x_0) \neq \emptyset$. Seja $y \in W^u(\bar{x}) \cap A(x_0)$. Como $A(x_0)$ é aberto, existe ϵ tal que $B(y, \epsilon) \subset A(x_0)$. Seja $D_\epsilon = B(y, \epsilon) \cap W^u(\bar{x})$. Seja N uma vizinhança de p em $W^u(x^*)$. Como $\dim W^u(x^*) = 2$, N está imersa em uma variedade de dimensão 2 e contém uma seção de dimensão $1 = \bar{k}$ transversal a $W^s(\bar{x})$ no ponto p . Pelo λ -lema (Lema 2.17), existe $q \in N \subset W^u(x^*)$ e $t_q \geq 0$ tal que $\phi(t_q, q) \in B(y, \epsilon)$. Como $B(y, \epsilon) \subset A(x_0)$ que é invariante, segue que $q = \phi(-t_q, \phi(t_q, q)) \in A(x_0)$, logo $A(x_0) \cap W^u(x^*) \neq \emptyset$.

Procedendo indutivamente da maneira descrita acima, sempre que $x^* \in \partial A(x_0)$ é do tipo $k > 1$, existe $\bar{x} \in \partial A(x_0)$ do tipo $k-1$ tal que existe $p \in W^s(\bar{x}) \cap W^u(x^*)$ e $A(x_0) \cap W^u(\bar{x}) \neq \emptyset$. Daí, usando o argumento acima baseado no λ -lema, os fatos $A(x_0) \cap W^u(\bar{x}) \neq \emptyset$ e $p \in W^s(\bar{x}) \cap W^u(x^*)$ implicam em $W^u(x^*) \cap A(x_0) \neq \emptyset$.

(ii)(\Rightarrow) Suponha que $x^* \in \partial A(x_0)$. Pela parte (i), $W^u(x^*) \cap A(x_0) \neq \emptyset$, logo existe $y \in (W^u(x^*) - \{x^*\}) \cap A(x_0)$. Seja $\epsilon > 0$ qualquer (como $A(x_0)$ é aberto, podemos tomar ϵ suficientemente pequeno para que $B_\epsilon(y) \subseteq A(x_0)$). Considere $D_\epsilon = B_\epsilon(y) \cap W^u(x^*)$. Sejam $p \in W^s(x^*)$ e S uma seção transversal a $W^s(x^*)$ em p . Pelo λ -lema (Lema 2.17), existem $z \in S$ em $t_z > 0$ tais que $\phi(t_z, z) \in B_\epsilon(y)$. Como $B_\epsilon(y) \subseteq A(x_0)$ e $A(x_0)$ é invariante, segue que $z \in A(x_0)$. Como $\epsilon > 0$ e a seção S podem ser arbitrariamente pequenos, existem pontos z_ϵ em $A(x_0)$ arbitrariamente próximos de p . Portanto, $p \in \overline{A(x_0)}$. Como também $p \in W^s(x^*)$, temos que $p \notin A(x_0)$. Daí $p \in \partial A(x_0)$. Mas p é arbitrário, logo, $W^s(x^*) \subseteq \partial A(x_0)$.

(ii)(\Leftarrow) Se $W^s(x^*) \subseteq \partial A(x_0)$, então, $x^* \in \partial A(x_0)$, pois $x^* \in W^s(x^*)$. \square

Finalmente, temos o teorema que caracteriza completamente a fronteira da bacia de atração.

Teorema 2.26 *Seja x_0 um equilíbrio assintoticamente estável de f . Suponha que*

as hipóteses (A1)-(A3) estão satisfeitas e que x_1, x_2, \dots são os pontos de equilíbrio de f que estão em $\partial A(x_0)$. Então

$$\partial A(x_0) = \bigcup_i W^s(x_i).$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.25, para todo ponto de equilíbrio $x_i \in \partial A(x_0)$, tem-se $W^s(x_i) \subseteq \partial A(x_0)$. Daí $\bigcup W^s(x_i) \subseteq \partial A(x_0)$. A hipótese (A3) garante que $\partial A(x_0) \subseteq \bigcup W^s(x_i)$ \square

Como consequências deste teorema, temos alguns importantes resultados que podem ser muito úteis no estudo das fronteiras das bacias de atração. Em especial, o próximo teorema terá papel essencial na análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema proposto no Capítulo 4. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em [6].

Teorema 2.27 *Se um campo $f \in C^1(U)$ tem dois pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis satisfazendo as hipóteses (A1)-(A3), então as fronteiras de suas bacias de atração devem conter pelo menos um ponto de equilíbrio do tipo $n-1$. Se, ainda, alguma dessas bacias é limitada, então sua fronteira deve conter também uma fonte.*

Como corolário do Teorema 2.27, se um sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ satisfaz as hipóteses (A1)-(A3) e possui três pontos de equilíbrio, então, se dois deles forem assintoticamente estáveis, o terceiro deve ser do tipo $n-1$. Para sistemas não-lineares, de dimensão alta, a análise da estabilidade dos equilíbrios, por meio dos autovalores da derivada do campo, geralmente é uma tarefa árdua, feita somente para determinados valores numéricos dos parâmetros. O Teorema 2.27 traz implicações topológicas a respeito do espaço de fase que nos dão, de maneira indireta, conclusões sobre a estabilidade de pontos de equilíbrio, com bons resultados, como veremos.

A seguir, outras consequências do Teorema 2.26 sobre a topologia do espaço de fase.

Corolário 2.28 *Seja x_0 um equilíbrio assintoticamente estável de f . Se (A1)-(A3) estão satisfeitas, $A(x_0)$ não é densa em U e se $\partial A(x_0)$ não contém nenhuma fonte, então $A(x_0)$ é ilimitada.*

Teorema 2.29 *Seja x_0 um equilíbrio assintoticamente estável de f . Se (A2) é satisfeita e se $\partial A(x_0)$ é compacta e de classe C^1 , então o número de pontos de equilíbrio em $\partial A(x_0)$ é par.*

2.2.2 Genericidade

Como comentado anteriormente, as hipóteses (A1) e (A2) são satisfeitas “por quase todos” os campos de classe C^1 . O sentido desta frase é esclarecido a seguir.

As demonstrações dos teoremas abaixo, bem como a definição de órbita fechada hiperbólica, que envolve a utilização da transformação de Poincaré, podem ser encontradas em [25], páginas 100-125.

Definição 2.30 *Um conjunto R num espaço topológico X é residual se é a interseção enumerável de conjuntos abertos densos em X .*

Definição 2.31 *Uma propriedade num espaço topológico X é genérica se ela é verdadeira em um conjunto residual R .*

Definição 2.32 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que um campo $f \in C^r(U)$ é de Kupka-Smale se*

- (i) *Os pontos de equilíbrio e as órbitas fechadas de f são hiperbólicos.*
- (ii) *Se σ_1 e σ_2 são pontos de equilíbrio ou órbitas fechadas, então $W^s(\sigma_1)$ e $W^u(\sigma_2)$ satisfazem a condição de transversalidade.*

Teorema 2.33 (Kupka-Smale) *O conjunto dos campos de Kupka-Smale é residual em $C^r(U)$. Dito de outro modo, ser um campo de Kupka-Smale é uma propriedade genérica.*

Corolário 2.34 *O conjunto dos campos que satisfazem (A1) e (A2) é genérico em $C^r(U)$, $r \geq 1$.*

2.3 Um método para a determinação da variedade estável de um equilíbrio hiperbólico

Visto que a fronteira da bacia de atração é formada por variedades estáveis, é importante conseguir determinar estas variedades. A demonstração do Teorema da Variedade Estável Local, Teorema 2.3, apresentada no início do capítulo fornece um método para determiná-la localmente. Combinando-o com o método da trajetória reversa [13], pode-se obter um esboço representativo da Variedade Estável Global e, quando $n = 2$, obtem-se toda ela. Com o objetivo de determinar as bacias de atração de sistemas dinâmicos não-lineares, implementamos no software *Mathematica* um programa que segue o roteiro descrito abaixo.

2.3.1 Método para determinação de Variedades Estáveis

- Dado o campo $f(x)$, escolhemos o equilíbrio x_0 (que deve ser hiperbólico) do qual queremos determinar a Variedade Estável.
- Numa vizinhança de x_0 temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + R(h)$$

com $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{|x|} = 0$. Daí

$$f(x_0 + h) = f'(x_0) \cdot h + R(h)$$

- Seja $A = f'(x_0)$.
- Seja $R(h) = f(x_0 + h) - f'(x_0) \cdot h$.
- Seja C a matriz invertível que dá a forma canônica de Jordan de A , ou seja, tal que

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = B$$

onde B é a forma de Jordan de A . Os autovalores de $P \in L(\mathbb{R}^k)$ devem ter parte real negativa e os autovalores de $Q \in L(\mathbb{R}^{n-k})$ parte real positiva.

- Seja G o novo resto do sistema, isto é, $G(y) = C^{-1}R(Cy)$.
 - Sejam $U(t) = \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Qt} \end{bmatrix}$, $t \geq 0$.
 - Então, as aproximações sucessivas que devemos calcular são $u_0(t, y) = 0$ e
- $$u_{j+1}(t, y) = U(t)y + \int_0^t U(t-s)G(u_j(s, y))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u_j(s, y))ds$$
- Cada conjunto $\{u_j(0, y) : \mathbb{R}^k\}$ é (localmente na origem) uma aproximação da variedade estável local do sistema conjugado ao original.
 - Voltando às coordenadas originais, os conjuntos $\{Cu_j(0, C^{-1}x) + x_0 : x \in \mathbb{R}^k\}$ são (localmente em x_0) aproximações da variedade estável local $W_{loc}^s(x_0)$ do sistema original.
 - Escolhemos $j_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequenos tais que cada $h_i \in W_{loc}^s(x_0)$, isto é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, u(0, h_i)) = x_0$$

- Como $W^s(x_0) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(x_0))$, utilizando o método da trajetória reversa, as órbitas negativas de cada h_i estarão contidas em $W^s(x_0)$ e formam um esboço de W^s .
- Quando $n = 2$, basta tomar $h_1, h_2 = -h_1$ em direções contrárias para que $W^s(x_0) = \{u(t, h_1) : t < 0\} \cup \{u(t, h_2) : t < 0\}$, o que nos dá a variedade estável global de x_0 .

Na Figura 2.1, temos a visualização das aproximações sucessivas e da variedade estável obtida pelo método da trajetória reversa.

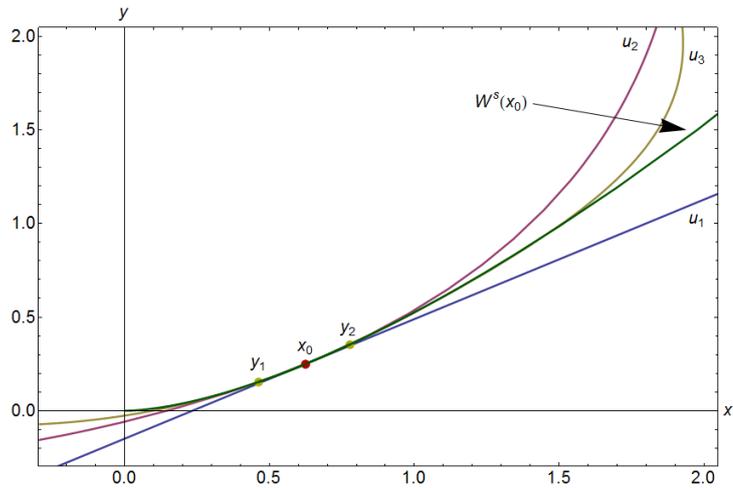


Figura 2.1: Aproximações u_1 , u_2 e u_3 da Variedade Estável $W_{loc}^s(x_0)$. Toma-se y_1 e y_2 em u_3 tais que $\phi(t, y_i) \rightarrow x_0$, o que significa que $y_1, y_2 \in W_{loc}^s(x_0)$. Depois, integrando-se o campo $-f$, obtêm-se as órbitas negativas de y_1 e y_2 , que formam, juntamente com suas órbitas positivas, a variedade estável global de x_0 , $W^s(x_0)$.

Um método muito parecido com este já é descrito na literatura há algum tempo [13]. Ele baseia-se em tomar pontos no subespaço estável do equilíbrio que também estejam na variedade estável, e depois usa-se o método da trajetória reversa para determinar as soluções contidas na variedade estável que passem por aqueles pontos. Basicamente, é um caso particular do apresentado aqui, pois toma condições iniciais no subespaço estável, que é a primeira aproximação (linear) $\{u_1(y, 0) : y \in B(0, r)\}$ da variedade estável. No Capítulo 3, veremos na prática, por meio da análise de um sistema de descreve um problema biológico, veremos algumas vantagens em se usar aproximações de maior ordem, como:

- Não precisamos necessariamente atribuir valores aos parâmetros para realizar a primeira parte do método, que trata de obter as expressões analíticas das aproximações da variedade estável. Isto nos possibilita analisar estas expressões em função dos parâmetros. Como cada aproximação é um polinômio de Taylor de uma parametrização da variedade, temos na verdade, os primeiros coeficientes de Taylor da mesma. Isto nos permite calcular curvaturas da variedade estável em função dos parâmetros.
- Em alguns casos, as aproximações convergem após um número finito de iterações, o que nos dá sua expressão analítica completa.

Capítulo 3

Aplicação a um sistema 2D

Neste capítulo daremos uma ilustração de como as ferramentas estudadas nos capítulos anteriores podem ser usadas em sistemas de EDOs's que modelam fenômenos biológicos e veremos como essas ferramentas podem ampliar a análise qualitativa do sistema estudado. Analisaremos a dinâmica, a formação e a configuração das bacias de atração em um modelo clássico de competição entre espécies [23], utilizando aqui o método proposto no Capítulo 2.

3.1 O modelo

O modelo (3.1) descreve a dinâmica de duas populações N e I competindo por recursos limitados em um ambiente fechado [23]. Admite-se que cada espécie tem crescimento logístico, devido a limitação dos recursos no ambiente, e, devido à competição, admite-se também que cada espécie exerça um efeito negativo sobre o crescimento da outra. Assim, a dinâmica de cada população é descrita no sistema de EDO's

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r_N N \left(1 - \frac{N}{K_N} - a_{21} \frac{I}{K_N}\right) \\ \frac{dI}{dt} = r_I I \left(1 - \frac{I}{K_I} - a_{12} \frac{N}{K_I}\right) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde todas as constantes são positivas. As constantes r_N e r_I são, respectivamente, a taxa de reprodução da espécie N e da espécie I , enquanto K_N e K_I são a capacidade de suporte de N e de I , de modo que os termos $r_N N \left(1 - \frac{N}{K_N}\right)$ e $r_I I \left(1 - \frac{I}{K_I}\right)$ descrevem o crescimento logístico de cada uma dessas espécies. A competição das espécies pelos recursos entre elas está representada pelos termos $-a_{21} \frac{I}{K_N}$ e $-a_{12} \frac{N}{K_I}$. Estes termos significam que quanto mais indivíduos de uma espécie estiverem presentes no ambiente, mais o crescimento da outra espécie será prejudicado. Por isso, a_{21} é a pressão competitiva que a espécie I exerce sobre a espécie N e a_{12} é a pressão competitiva que N exerce sobre I .

Este sistema tem seis constantes, o que dificulta o seu estudo qualitativo.

Contudo, podemos adimensionalizá-lo e reduzir o número de constantes. Para isto, considere a seguinte adimensionalização:

$$\bar{N} = \frac{N}{K_N}, \quad \bar{I} = \frac{I}{K_I} \quad \text{e} \quad \bar{t} = r_N t$$

com $\bar{N} = \bar{N}(\bar{t})$ e $\bar{I} = \bar{I}(\bar{t})$. Então

$$N = K_N \bar{N}, \quad I = K_I \bar{I} \quad \text{e} \quad t = \frac{\bar{t}}{r_N}. \quad (3.2)$$

Daí, usando a regra da cadeia e as equações de (3.1) e (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}}{d\bar{t}} &= \frac{d\bar{N}}{dN} \frac{dN}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{1}{K_N} r_N N \left(1 - \frac{N}{K_N} - a_{21} \frac{I}{K_N}\right) \frac{1}{r_N} \\ &= \bar{N} \left(1 - \bar{N} - a_{21} \frac{K_I \bar{I}}{K_N}\right) \quad \text{e} \\ \frac{d\bar{I}}{d\bar{t}} &= \frac{d\bar{I}}{dI} \frac{dI}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{1}{K_I} r_I I \left(1 - \frac{I}{K_I} - a_{12} \frac{N}{K_I}\right) \frac{1}{r_N} \\ &= \frac{r_I}{r_N} \bar{I} \left(1 - \bar{I} - a_{12} \frac{K_N \bar{N}}{K_I}\right). \end{aligned}$$

Definindo $\alpha = a_{21} \frac{K_I}{K_N} > 0$, $\beta = a_{12} \frac{K_N}{K_I} > 0$ e $\delta = \frac{r_I}{r_N} > 0$, e omitindo as barras da notação, a forma adimensionalizada do sistema (3.1) é

$$\begin{cases} \dot{N} &= N(1 - N - \alpha I) \\ \dot{I} &= \delta I(1 - I - \beta N). \end{cases} \quad (3.3)$$

Neste sistema, \bar{N} e \bar{I} representam a fração das populações N e I , respectivamente, em relação às suas capacidades de suporte, por exemplo, $\bar{N} = \frac{1}{2}$ significa que a população de N está ocupando 50% da sua capacidade suporte. O significado das constantes α , β e δ é semelhante aos das constantes de (3.1): α e β representam a pressão competitiva entre as espécies, e $\delta = \frac{r_I}{r_N}$ é a razão entre as taxas de reprodução de I e N . No Apêndice A, para consulta rápida, encontra-se um resumo do significado biológico dos parâmetros α , β e δ .

Resolvendo $\begin{cases} \frac{dN}{dt} = 0 \\ \frac{dI}{dt} = 0 \end{cases}$ isto é, $\begin{cases} N(1 - N - \alpha I) = 0 \\ \delta I(1 - I - \beta N) = 0 \end{cases}$ temos as seguintes possibilidades: $N = 0$ e $I = 0$, $N = 0$ e $I = 1$, $N = 1$ e $I = 0$ e $N + \alpha I = 1$ e $\beta N + I = 1$. Pelos três primeiros casos, temos os pontos de equilíbrio $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ e $P_3 = (0, 1)$. Eles correspondem, respectivamente, à extinção de ambas as espécies, à extinção de I e à extinção de N . Observe que estes pontos independem de α ou β . Para resolver o último caso, temos o sistema

$$\begin{cases} N + \alpha I = 1 \\ \beta N + I = 1 \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} N + \alpha I = 1 \\ (1 - \alpha\beta)I = 1 - \beta \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, temos os seguintes casos: se $\alpha = \beta = 1$ temos a família de pontos de equilíbrio $\{P_{N_0} = (N_0, 1 - N_0) : 0 \leq N_0 \leq 1\}$. Se $\alpha \neq \beta$ e $\alpha\beta = 1$, o sistema só teria solução se $\beta = 1$, mas isto implica em $\alpha = 1$, portanto o sistema não tem solução. Se $\alpha\beta \neq 1$, a única solução é o ponto de equilíbrio $P_4 = (\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta})$, que representa a coexistência das duas espécies.

Visto que no primeiro caso temos uma família infinita de pontos de equilíbrio P_{N_0} não hiperbólicos (basta calcular a matriz jacobiana em P_{N_0} e verificar que um de seus autovalores é nulo), e que no segundo caso não existe um ponto de equilíbrio não-trivial, não consideramos neste capítulo o caso $\alpha\beta = 1$. Suporemos sempre que α e β satisfazem a condição $\alpha\beta \neq 1$. Observamos ainda que a região dos pontos (α, β, δ) do espaço de parâmetros que satisfazem esta condição é densa no mesmo espaço de parâmetros. Sob esta condição temos os pontos de equilíbrio $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$ e $P_4 = (\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta})$.

Ainda, como N e I descrevem densidades populacionais, eles não fazem sentido quando uma de suas coordenadas é negativa. Portanto, o espaço de fase admissível é o conjunto dos pontos (N, I) no primeiro quadrante, e será denotado por \mathbb{R}_+^2 .

Iremos agora analisar a estabilidade de cada ponto fixo e depois estudaremos as regiões de estabilidade num cenário em que haverá bi-estabilidade.

3.2 Análise Qualitativa do Modelo

Pelo Teorema de Hartman-Grobman (Teorema 1.42), a estabilidade de um ponto fixo hiperbólico depende unicamente do sinal da parte real dos autovalores da matriz jacobiana calculada no ponto fixo.

Para o sistema deste capítulo, em um ponto qualquer (N, I) do espaço de fases, a matriz jacobiana, que denotaremos por $J(N, I)$, é dada por

$$J(N, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial N} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial N} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2N - \alpha I & -N\alpha \\ -\delta\beta I & \delta(1 - 2I - \beta N) \end{bmatrix}$$

onde $f(N, I) = N(1 - N - \alpha I)$ e $g(N, I) = \delta I(1 - I - \beta N)$. Para a análise da estabilidade do ponto P_4 , será necessário o critério de Routh-Hurwitz para polinômios [35], que fornece condições necessárias e suficientes para que todas as raízes de um polinômio tenham parte real negativa. Usaremos o critério para polinômios de grau dois.

Teorema 3.1 (Critério de Routh-Hurwitz para polinômios de grau dois)
 Sejam λ_1 e λ_2 as raízes do polinômio de coeficientes reais $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$.
 Então $Re(\lambda_i) < 0$ para $i = 1, 2$ se, e só se,

$$a_1 > 0 \text{ e } a_2 > 0.$$

Resumimos a análise da estabilidade dos equilíbrios do sistema (3.3) na seguinte

Proposição 3.2 *Os pontos de equilíbrio do sistema apresentam o seguinte comportamento:*

- $P_1 = (0, 0)$ é uma fonte, ou seja, a parte real dos autovalores de $J(P_1)$ é sempre positiva.
- $P_2 = (1, 0)$ é assintoticamente estável quando $\beta > 1$, sela 1-1 quando $\beta < 1$ e não é hiperbólico quando $\beta = 1$.
- $P_3 = (0, 1)$ é assintoticamente estável quando $\alpha > 1$, sela 1-1 quando $\alpha < 1$ e não é hiperbólico quando $\alpha = 1$.
- $P_4 = \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\right)$ está em \mathbb{R}_+^2 e é distinto de P_2 e P_3 se, e só se, α e β são ambos maiores que 1 ou ambos menores que 1. Se $\alpha, \beta > 1$, então P_4 é uma sela 1-1. Se $\alpha, \beta < 1$, então P_4 é assintoticamente estável.

Demonstração: Ao calcularmos $J(N, I)$ em P_1, P_2, P_3 e P_4 , obtemos:

- $J(P_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$, de modo que os autovalores de $J(P_1)$ são $\lambda_1 = 1 > 0$ e $\lambda_2 = \delta > 0$. Portanto, P_1 é sempre uma fonte.
- $J(P_2) = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha \\ 0 & \delta(1-\beta) \end{bmatrix}$. Logo, o polinômio característico de $J(P_2)$ é $p_2(\lambda) = -(1+\lambda)(\delta(1-\beta) - \lambda)$. Portanto, os autovalores de $P_2 = (1, 0)$ são $\lambda_1 = \delta(1-\beta)$ e $\lambda_2 = -1$. Assim, P_2 é assintoticamente estável se $\beta > 1$, sela 1-1 quando $\beta < 1$ e não é hiperbólico quando $\beta = 1$.
- De modo análogo, obtemos que os autovalores de $P_3 = (0, 1)$ são $\lambda_1 = -\delta$ e $\lambda_2 = (1-\alpha)$. Logo, P_3 é assintoticamente estável se $\alpha > 1$, sela 1-1 quando $\alpha < 1$ e não é hiperbólico quando $\alpha = 1$.
- Procedendo da mesma forma, obtemos que a equação característica de $J(P_4)$ é

$$\lambda^2 + \lambda \frac{\delta(\beta-1) + (\alpha-1)}{\alpha\beta-1} + \frac{\delta(\alpha-1)(\beta-1)}{1-\alpha\beta} = 0. \quad (3.4)$$

Note inicialmente que as coordenadas de P_4 devem ser positivas, pois representam populações. Como o denominador dessas coordenadas é o mesmo, para que elas sejam positivas, seus numeradores devem ter o mesmo sinal. Note também que se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 1$, então $P_4 = P_3$ e se $\beta = 1$ e $\alpha \neq 1$,

então $P_4 = P_2$. Assim, P_4 só está no espaço de fase admissível e é distinto de P_2 e P_3 se, e só se, $\alpha > 1$ e $\beta > 1$, ou, $\alpha < 1$ e $\beta < 1$, pois, caso isto não ocorra, uma de suas coordenadas será negativa.

Em vez de calcular explicitamente as raízes de (3.4), podemos usar o Critério de Routh-Hurwitz, Teorema 3.1. Temos que as raízes do polinômio em (3.4) terão parte real negativa se, e só se,

$$a_1 = \frac{\delta(\beta - 1) + (\alpha - 1)}{\alpha\beta - 1} > 0 \quad e \quad a_2 = \frac{\delta(\alpha - 1)(\beta - 1)}{1 - \alpha\beta} > 0 \quad (3.5)$$

Levando em conta as condições para que P_4 esteja no primeiro quadrante, examinemos quando estas desigualdades são satisfeitas:

- se $\alpha > 1$ e $\beta > 1$, então, de (3.5), vemos que $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$. Se λ_1 e λ_2 são as raízes de (3.4), então $\lambda_1\lambda_2 = a_2 < 0$. Logo, λ_1 e λ_2 possuem sinais contrários. Portanto, P_4 é uma sela 1-1.
- se $\alpha < 1$ e $\beta < 1$, então, de (3.5), $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$. Logo, pelo Teorema 3.1, P_4 é assintoticamente estável.

Portanto, a análise da estabilidade de P_4 está completa: se $\alpha > 1 > \beta$ ou $\beta > 1 > \alpha$ então P_4 não está no primeiro quadrante \mathbb{R}_+^2 . Se $\alpha > 1$ e $\beta > 1$, P_4 é uma sela 1 – 1 e se $\alpha < 1$ e $\beta < 1$, P_4 é assintoticamente estável. \square

Esta proposição nos permite saber quase todo o comportamento do sistema. Se as duas espécies estiverem sob regime de competição fraca ($\alpha, \beta < 1$), o único ponto assintoticamente estável será P_4 , correspondente à coexistência. Se a competição entre as espécies for desigual ($\alpha > 1 > \beta$ ou $\alpha < 1 < \beta$), apenas o ponto de equilíbrio que representa a sobrevivência da mais forte será assintoticamente estável. Porém, quando o regime for de competição forte ($\alpha, \beta > 1$), P_2 e P_3 são assintoticamente estáveis, de modo que existem condições iniciais que levam a extinção da espécie I (convergem para P_2) e condições que levam a extinção da espécie N (convergem para P_3). Assim, quando $\alpha, \beta > 1$, o fenômeno da bi-estabilidade faz com que um estudo adicional seja necessário.

É este o objetivo da próxima seção: determinar a fronteira entre as regiões de estabilidade de P_2 e P_3 e depois analisar a influência dos parâmetros sobre o tamanho e forma das bacias de atração e também estudar a relação entre a sobrevivência de cada espécie e as condições iniciais.

As considerações acima e a análise qualitativa do sistema (3.3) estão resumidas na Tabela 3.1. Em todo este capítulo, não consideramos as regiões do espaço de parâmetros onde $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$, pois, como vimos, nestas regiões, nem todos os pontos de equilíbrio são hiperbólicos. O fato de não analisarmos estes casos não limita a abrangência do estudo qualitativo feito, uma vez que a região $\alpha \neq 1$ e $\beta \neq 1$ é densa no espaço de parâmetros.

Tabela 3.1: Resumo da análise da estabilidade dos pontos fixos do sistema.

Condições	Equilíbrios assintoticamente estáveis	Pontos de sela
$\alpha, \beta < 1$ competição fraca	P_4 coexistência	P_2 e P_3
$\beta > 1 > \alpha$ ou $\alpha > 1 > \beta$ competição desigual	P_2 ou P_3 sobrevivência da mais forte	P_2 ou P_3
$\alpha, \beta > 1$ competição forte	P_4 e P_3 sobrevivência de uma das espécies dependendo das condições iniciais	P_4

3.3 Bi-estabilidade e bacias de atração

Visto que quando $\alpha, \beta > 1$, P_2 e P_3 são assintoticamente estáveis, queremos determinar as fronteiras $\partial A(P_2)$ e $\partial A(P_3)$. Sabemos que P_1 é um repulsor, portanto $W^s(P_1) = \{P_1\}$. Ainda, P_4 é uma sela 1-1, portanto terá variedade estável, $W^s(P_4)$ com dimensão igual a 1. Como todos os pontos são hiperbólicos, o sistema satisfaz a hipótese (A1) do Capítulo 2 (Definição 2.24). Se as hipóteses (A2) e (A3) do Capítulo 2 forem satisfeitas, como P_4 é o único ponto de sela que pode estar nas fronteiras $\partial A(P_2)$ e $\partial A(P_3)$, teremos, pelo Teorema 2.27, que

$$\partial A(P_2) \cap \partial A(P_3) = W^s(P_4)$$

Resta mostrar então que todas as soluções do sistema satisfazem (A2) e (A3). Na próxima proposição mostramos que (A2) é satisfeita. Em seguida, para mostrar que (A3) também é satisfeita, mostraremos que qualquer solução do sistema converge para um dos pontos fixos.

Proposição 3.3 *Se $\alpha > 1$ e $\beta > 1$, então o sistema (3.3) satisfaz a hipótese (A2) em relação a $A(P_2)$ e $A(P_3)$.*

Demonstração: Os pontos fixos do sistema (3.3) que estão em $A(P_2)$ são P_1 e P_4 . Devemos mostrar que as intercessões $W^s(P_1) \cap W^u(P_4)$ e $W^s(P_4) \cap W^u(P_1)$ satisfazem a condição de transversalidade. Como $W^s(P_1) = \{P_1\}$, segue que $W^s(P_1) \cap W^u(P_4) = \emptyset$ e a condição de transversalidade é satisfeita trivialmente. Note agora que, como P_1 é uma fonte, $\dim W^u(P_1) = 2$, portanto $T_x W^u(P_1) = \mathbb{R}^2$ para todo $x \in W^u(P_1)$. Logo, se $x \in W^s(P_4) \cap W^u(P_1)$, então $T_x W^s(P_4) + T_x W^u(P_1) = \mathbb{R}^2$. Portanto, $A(P_2)$ satisfaz a hipótese (A2). De modo análogo se mostra que $A(P_3)$ também satisfaz a hipótese (A2). \square

Proposição 3.4 *Todas as soluções do sistema (3.3), com condição inicial em \mathbb{R}_+^2 , convergem para um dos pontos fixos P_i , $i = 1, 2, 3, 4$, quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Iremos usar alguns resultados do Capítulo 1, o Teorema 1.15, o Corolário 1.19, a Proposição 1.17 e o Teorema de Poincaré Bendixon (Teorema 1.16).

Inicialmente, mostramos que o quadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ do plano NI é positivamente invariante pelo fluxo, ou seja, se uma solução passa dentro de Q então ela não sai de Q . Para provar isto, observamos que a fronteira de Q é composta pelos segmentos $R_1 = \{0\} \times [0, 1]$, $R_2 = [0, 1] \times \{1\}$, $R_3 = \{1\} \times [0, 1]$ e $R_4 = [0, 1] \times \{0\}$. Provaremos que R_1 e R_4 são invariantes e que o campo f , associado ao sistema, calculado sobre R_2 e R_4 aponta para dentro de Q . Escrevendo $q = (N, I) \in \mathbb{R}_+^2$ e denotando por e_1 e e_2 os vetores da base canônica de \mathbb{R}^2 , temos que

- (i) se $q \in R_1 \setminus \{P_1, P_3\}$, então $\langle f(q), e_2 \rangle = \delta I(1 - I) = \|f(q)\|$. Logo $f(q)$ tem mesma direção que e_2 , portanto, o segmento R_1 está contido na variedade instável de P_1 , e também em $A(P_3)$, de modo que R_1 é uma órbita heteroclínica (órbita que liga dois diferentes pontos de equilíbrio), ligando P_1 a P_3 . Pela invariância do fluxo nas variedades instáveis, nenhuma solução que algum momento passe fora de R_1 irá intersectar R_1 .
- (ii) se $q \in R_4 \setminus \{P_1, P_2\}$, então $\langle f(q), e_1 \rangle = N(1 - N) = \|f(q)\|$, de modo que $f(q)$ e e_1 tem a mesma direção, e daí R_4 é um ramo da variedade instável de P_1 e está contido em $A(P_2)$, ou seja, é uma órbita heteroclínica que liga P_1 a P_2 . Novamente, pela invariância da variedade instável, uma solução que algum momento passe fora de R_4 nunca irá intersectar R_4 .
- (iii) se $q \in R_2 \setminus \{P_3\}$, então $\langle f(q), e_2 \rangle = \delta(1 - 1 - \beta N) = -\delta\beta N < 0$, e daí o ângulo entre $f(q)$ e e_2 está entre 90 e 270 graus, ou seja, $f(q)$ aponta para dentro de Q . Portanto, nenhuma solução que passe dentro de Q pode sair de Q atravessando R_2 .
- (iv) se $q \in R_3 \setminus \{P_2\}$, então $\langle f(q), e_1 \rangle = 1(1 - 1 - \alpha I) = -\alpha I < 0$, de modo que o ângulo entre $f(q)$ e e_1 também estará entre 90 e 270 graus e daí $f(q)$ apontará para o interior de Q . Portanto, nenhuma solução que esteja dentro de Q poderá cruzar R_4 saindo de Q .

Conclusão: Se $(N, I) \in Q$ e $\phi(t, (N, I))$ é uma solução que passa em (N, I) , então $\phi(t, (N, I))$ não pode cruzar nenhum segmento da fronteira de Q e daí $\phi(t, (N, I)) \in Q$ para todo $t \geq 0$ e para todo $(N, I) \in Q$, ou seja, Q é positivamente invariante pelo fluxo.

Da mesma maneira que nos itens (i) e (ii) anteriores, podemos mostrar que os semi-eixos positivos N e I estão contidos em $A(P_2)$ e $A(P_3)$, respectivamente. Assim, não precisamos nos preocupar com soluções começando ou passando nestes eixos. Assim, consideremos agora o aberto A constituído de todos os pontos no primeiro quadrante \mathbb{R}_+^2 , fora dos eixos N e I , e fora de Q . Mostremos que, para toda condição inicial $q = (N, I)$ em A , seu conjunto ω limite é não-vazio e está contido em Q .

De fato, seja $q = (N, I) \in A$. Então, $N > 1$ e $I > 0$, ou $I > 1$ e $N > 0$. Daí

$$\langle f(q), e_1 \rangle = N(1 - N - \alpha I) < -\alpha NI < 0 \quad \text{ou}$$

$$\langle f(q), e_2 \rangle = \delta I(1 - I - \beta N) < -\delta\beta IN < 0.$$

Logo, o campo em q é não-nulo e aponta para baixo ou para a esquerda em *todo* ponto $q \in A$. Desta maneira, para todo $q = (q_1, q_2) \in A$, a semi-órbita positiva de q , $\gamma_+(q)$, está contida no compacto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq q_1 \text{ e } 0 \leq y \leq q_2\}$. Pelo Teorema 1.15, segue que $\omega(q) \neq \emptyset$.

Agora, considere a função $V_1(N, I) = \frac{N^2}{2}$. Seja A_1 o aberto $A_1 = \{(N, I) \in \mathbb{R}^2 : N > 1 \text{ e } I > 0\}$. Para todo $(N, I) \in A_1$, temos

$$\langle \nabla V_1(N, I), f(N, I) \rangle = N^2(1 - N - \alpha_1 I) < -\alpha_1 N^2 I < 0$$

Portanto, pelo Corolário 1.19, segue que $\omega(q) \cap A_1 = \emptyset$ para todo $q \in A_1$.

De modo análogo, considerando a função $V_2(N, I) = \frac{I^2}{2}$, no aberto $A_2 = \{(N, I) \in \mathbb{R}^2 : I > 1 \text{ e } N > 0\}$, temos $\langle \nabla V_2(N, I), f(N, I) \rangle < 0$ para todo $(N, I) \in A_2$. Daí, novamente pelo Corolário 1.19, temos $\omega(q) \cap A_2 = \emptyset$ para todo $q \in A_2$.

Seja $q \in A_1$. Suponhamos que $\omega(q) \cap A_2 \neq \emptyset$ e seja $p \in \omega(q) \cap A_2$. Consideremos (t_n) , $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\phi_{t_n}(q) \rightarrow p$. Como $p \in A_2$ e A_2 é aberto, existe t_0 tal que $\phi_{t_0}(q) \in A_2$. Pelo resultado do último parágrafo, $\omega(\phi_{t_0}(q)) \cap A_2 = \emptyset$. Do fato que $\omega(q) = \omega(\phi_{t_0}(q))$, temos que $\omega(q) \cap A_2 = \omega(\phi_{t_0}(q)) \cap A_2 = \emptyset$, que é uma contradição. Logo, $\omega(q) \cap A_2 = \emptyset$ para todo $q \in A_1$. De modo análogo, mostra-se que $\omega(q) \cap A_1 = \emptyset$ para todo $q \in A_2$.

Assim, como $A = A_1 \cup A_2$, concluímos que $\omega(q) \cap A = \emptyset$ para todo $q \in A$. Logo, $\omega(q) \subset Q$ para todo $q \in A$.

Da invariância positiva de Q pelo fluxo provada anteriormente, segue que $\omega(q) \subset Q$ para todo $q \in \mathbb{R}_+^2$. As únicas singularidades do campo são P_1, P_2, P_3 e P_4 . Como P_2 e P_3 são estáveis e P_1 é uma fonte, $\omega(q)$ pode conter no máximo uma singularidade de f , e esta não pode ser P_1 . Pelo Teorema de Poincaré-Bendixon (Teorema 1.16), segue que para $q \in \mathbb{R}_+^2$, ou $\omega(q)$ é um dos equilíbrios P_2, P_3 ou P_4 ; ou é uma órbita fechada, periódica. Mas $\omega(q)$ não pode ser uma órbita periódica pois, se fosse, pela Proposição 1.17, deveria existir uma singularidade no seu interior. Esta singularidade não pode ser P_1, P_2 ou P_3 , pois se fosse, tal órbita interceptaria os eixos N ou I , que estão contidos em $A(P_2)$ e $A(P_3)$ respectivamente. Esta singularidade também não pode ser o ponto P_4 , como mostramos no próximo parágrafo. Assim, segue que $\omega(q)$ é um dos equilíbrios P_2, P_3 ou P_4 .

Afirmção: Não existe órbita periódica fechada contida em Q e com P_4 em seu interior. De fato, escrevendo $P_4 = (\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, consideremos os segmentos $S_1 = \{(N, \bar{\beta}) : 0 < N < \bar{\alpha}\}$ e $S_2 = \{(\bar{\alpha}, I) : 0 < I < \bar{\beta}\}$. Note que $f(N, I) = (N(1 - N - \alpha I), \delta I(1 - I - \beta N))$ e que

$$\begin{aligned} 1 - \bar{\beta} - \beta N > 0 &\iff \beta N < 1 - \bar{\beta} = \frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha\beta-1} &\iff N < \bar{\alpha} \quad \text{e} \\ 1 - \bar{\alpha} - \alpha I > 0 &\iff \alpha I < 1 - \bar{\alpha} = \frac{\alpha(\beta-1)}{\alpha\beta-1} &\iff I < \bar{\beta} \end{aligned}$$

Logo, se $q_1 = (N, \bar{\beta}) \in S_1$ e $q_2 = (\bar{\alpha}, I) \in S_2$, então

$$\begin{aligned}\langle f(q_1), e_2 \rangle &= \delta \bar{\beta}(1 - \bar{\beta} - \beta N) > 0 \quad \text{e} \\ \langle f(q_1), e_1 \rangle &= \bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha} - \alpha I) > 0\end{aligned}$$

Assim, ao longo de S_1 , o campo aponta para cima e ao longo de S_2 o campo aponta para a direita. Portanto, as órbitas que iniciam no retângulo $[0, \bar{\alpha}] \times [0, \bar{\beta}]$ se saírem do retângulo, não retornam ao ponto inicial, e as que iniciam fora do retângulo não entram no mesmo. \square

Como consequência das Proposições 3.3 e 3.4, o sistema (3.3) satisfaz as hipóteses (A2) e (A3). Assim, temos o seguinte

Teorema 3.5 *Quando $\alpha > 1$ e $\beta > 1$, tem-se*

$$\partial A(P_2) \cap \partial A(P_3) = W^s(P_4)$$

Demonstração: O sistema (3.3) satisfaz as hipóteses (A1), (A2) e (A3), e P_4 é o único ponto de sela do tipo 1 que pode estar nas fronteiras $\partial A(P_2)$ e $\partial A(P_3)$. Portanto, pelos Teoremas 2.26 e 2.27,

$$\partial A(P_2) \cap \partial A(P_3) = W^s(P_4)$$

\square

Vemos, então, que sob regime de forte competição, a fronteira entre as bacias de atração de P_2 e P_3 será a variedade estável de P_4 . Assim, uma solução com condição inicial (N, I) no espaço de fase irá convergir assintoticamente para P_2 se (N, I) estiver abaixo de $W^s(P_4)$ e para P_3 se estiver acima de $W^s(P_4)$. Isto nos dá a completa previsão sobre o comportamento do sistema se soubermos a posição da condição inicial. A Figura 3.1 ilustra este comportamento.

De posse dessas informações, o próximo passo agora é determinar as aproximações de $W^s(P_4)$ e, usando o método da trajetória reversa, obter os gráficos de $W^s(P_4)$ para diferentes valores dos parâmetros α, β e δ . Deste modo, poderemos analisar a influência dos parâmetros sobre as fronteiras $\partial A(P_2)$ e $\partial A(P_3)$ e estudar as implicações biológicas destas relações.

3.4 O método das aproximações sucessivas para este modelo

Seguindo o roteiro descrito no Capítulo 2, implementamos uma rotina no software *Mathematica* que segue cada passo do método das aproximações sucessivas para determinar a expressão de uma aproximação da variedade estável de um ponto fixo e, em seguida, tendo esta aproximação, utilizando o método da trajetória reversa, obtém a variedade estável global daquele ponto.

Aplicando o método ao sistema (3.3), inicialmente determinamos expressões

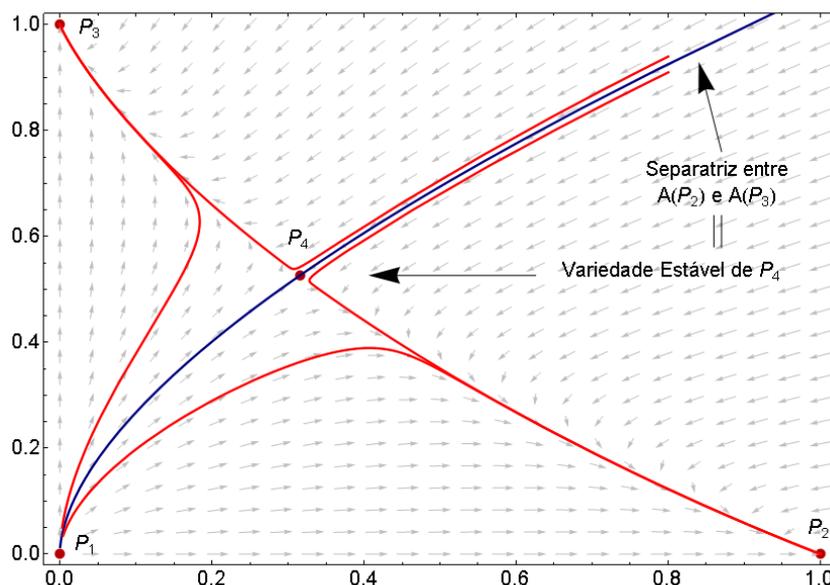


Figura 3.1: Retrato de fase do sistema (3.3) quando $\alpha, \beta > 1$. A fronteira entre as regiões de estabilidade de P_2 e P_3 é a variedade estável $W^s(P_4)$.

para aproximações de $W^s(P_4)$. Quando os parâmetros não assumem valores numéricos, as expressões envolvidas tornam-se muito complicadas. Por isso, apresentaremos os resultados em três abordagens diferentes.

Inicialmente apresentamos apenas o resultado final do método, isto é, os gráficos da fronteira entre as bacias $A(P_2)$ e $A(P_3)$ para diferentes configurações dos valores dos parâmetros. Em seguida, com o parâmetro δ livre e os parâmetros α e β fixados, apresentamos, para efeito de ilustração do método, cada passo dele e seus resultados, como a curvatura da fronteira no ponto P_4 em função do parâmetro δ . Por último, apresentamos os resultados quando fixamos o parâmetro $\delta = 1$ e deixamos α e β livres. Neste caso, foi possível obter alguns resultados analíticos, como uma parametrização da fronteira e a expressão do fluxo sobre ela.

3.4.1 Resultados com os parâmetros fixos

Para observar a influência das taxas α e β de competição de cada espécie e da taxa δ de reprodução relativa entre elas sobre a fronteira das bacias de atração e, conseqüentemente, sobre seu tamanho e forma, obtivemos a curva que descreve a fronteira para diferentes arranjos de parâmetros.

Inicialmente, fixamos $\alpha = 1, 20$ e $\delta = 1, 20$ e obtivemos a fronteira $\partial A(P_2) = W^s(P_4) = \partial A(P_3)$ para os valores de $\beta = 1, 05$, $\beta = 1, 20$ e $\beta = 1, 40$. Como β é a taxa de competição da espécie N , é de se esperar que quanto maior for β , maior será a bacia de atração do P_2 , que corresponde a sobrevivência de N e extinção de I . E foi isto exatamente o que aconteceu. Um aumento no valor

de β acarreta num afastamento, em relação ao ponto P_2 , do ponto P_4 , o que aumenta a bacia de atração de P_2 . Estes resultados podem ser observados na Figura 3.2. Analogamente, os mesmos resultados foram obtidos quando β foi fixado e variou-se o valor de α . Assim, confirmamos que, quanto maior for a pressão competitiva que uma espécie exerce sobre a outra, maior será sua bacia de atração, e conseqüentemente, mais condições iniciais levarão a sua sobrevivência.

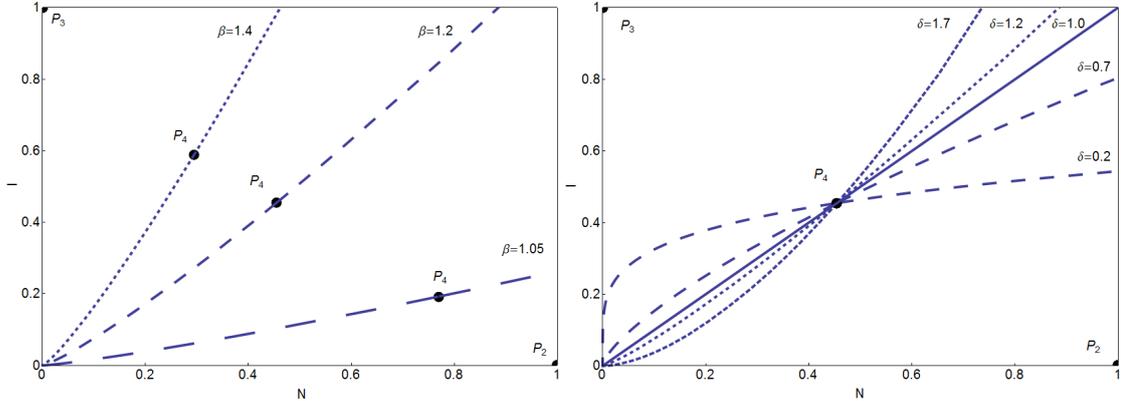


Figura 3.2: A fronteira $\partial A(P_2) = W^s(P_4) = \partial A(P_3)$ para vários arranjos dos parâmetros. Na primeira figura, à esquerda, β varia e $\alpha = 1, 2$ e $\delta = 1, 2$ estão fixos. Na segunda, à direita, δ varia e $\alpha = 1, 2$ e $\beta = 1, 2$ estão fixos.

Em seguida, observamos a influência do parâmetro δ . Fixamos $\alpha = 1, 20$ e $\beta = 1, 20$ e fizemos δ assumir os valores $\delta = 0, 20$, $\delta = 0, 70$, $\delta = 1, 00$, $\delta = 1, 20$ e $\delta = 1, 70$. Observamos que δ está relacionado a concavidade da fronteira entre as bacias, isto é, quando $\delta < 1$, a concavidade da fronteira é voltada para baixo, quando $\delta = 1$ a fronteira é uma reta e quando $\delta > 1$, a concavidade da fronteira é voltada para cima. Também podemos observar estes resultados na Figura 3.2. Mais adiante provaremos que a curvatura da fronteira de fato segue estas previsões e que, quando $\delta = 1$, ela é de fato uma reta.

Biologicamente, o que isto quer dizer?

Consideremos, inicialmente, um cenário, onde N é uma espécie nativa e a princípio está ocupando toda sua capacidade de suporte no ambiente e suponhamos que I seja uma espécie invasora, introduzida no ambiente. Este cenário corresponde a condições iniciais (N_0, I_0) no segmento (ou próximas dele) $R_3 = \{1\} \times [0, 1]$. Assim, para que a invasão seja bem sucedida, I_0 deve ser suficientemente grande de modo que (N_0, I_0) esteja acima da fronteira, ou seja, existe uma cota inferior $I_{0,min}$, tal que $(N_0, I_0) \in A(P_3)$ se, e só se, $I_0 > I_{0,min}$. Vemos nos gráficos que esta cota inferior $I_{0,min}$ varia de acordo com δ : quanto menor for o valor de δ , menor é $I_{0,min}$, ou seja, quanto menor for δ menor precisa ser o quantidade inicial de indivíduos da espécie invasora para que a invasão seja bem sucedida. Surpreendentemente, como $\delta = \frac{r_I}{r_N}$, vemos que a taxa de reprodução r_I da espécie I deve diminuir para que δ diminua e a invasão tenha mais chance de ser bem sucedida. De maneira análoga, para que N sobreviva a uma invasão, vemos que um aumento em δ aumenta a bacia de P_2 . E, para que δ aumente, r_N deve diminuir. Conclusão: em um cenário de invasão, isto é, quando uma espécie

está próxima de sua capacidade de suporte e outra invade o ambiente, aquela espécie que se reproduzir com menos velocidade terá mais chances de sobreviver. A princípio isto pode nos parecer estranho, mas em um cenário com recursos limitados e grandes populações competindo por eles (inclusive com competição entre indivíduos de uma mesma espécie, por causa do termo logístico), quanto menos uma espécie se reproduzir, com menos indivíduos de sua própria espécie ela precisará competir, o que diminui as mortes de indivíduos daquela espécie consequentes da competição.

Analisemos agora outro cenário biológico possível, que pode ser considerado como um cenário de pioneirismo. Suponha que as duas espécies estão começando a se desenvolver e explorar um ambiente e, portanto, os recursos ali não são tão limitados. Assim, as condições iniciais deste cenário devem corresponder a pontos perto da origem do sistema, próximos da reta $N = I$. Vemos que quando $\delta > 1$, a fronteira entre as bacias de atração passa abaixo desta reta, ou seja, a região correspondente às condições iniciais plausíveis estará em sua maior parte na bacia de P_3 o que aumentará a chance de I sobreviver e N ser extinta. Mas $\delta > 1$ corresponde a $r_I > r_N$, ou seja, neste cenário, é vantajoso para uma espécie se reproduzir mais rápido que a outra. Este fato é bem plausível já que, para pequenas condições iniciais, a competição não é tão prejudicial e o ambiente estará livre para que as espécies se desenvolvam. Assim aquela espécie que se reproduzir com maior rapidez irá se estabelecer e depois de um tempo, extrair do ambiente muito mais recursos que a outra, o que levará a extinção desta outra e completo domínio da primeira.

3.4.2 Resultados com α e β fixos e δ livre

Nestes próximos resultados, fixamos os parâmetros $\alpha = 1,5$ e $\beta = 1,2$ e deixamos δ livre. Para ilustrar os passos do método utilizado, apresentamos as expressões envolvidas, que se tornam bem extensas, em virtude de δ não assumir nenhum valor fixo. As matrizes $f'(P_4)$ e sua forma de Jordan B , os restos $R(x, y)$ e $G(x, y)$ e as partes estável e instável da exponencial de B , $U(t)$ e $V(t)$, todas necessárias para obter as aproximações sucessivas, são dadas por

$$f'(P_4) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & -\frac{15}{16} \\ -\frac{3\delta}{10} & -\frac{\delta}{4} \end{pmatrix} \text{ e } R(x, y) = \left(-x\left(x + \frac{3y}{2}\right), -\delta y\left(\frac{6x}{5} + y\right)\right).$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(-5 - 2\delta - \Delta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{16}(-5 - 2\delta + \Delta) \end{pmatrix}, \text{ onde } \Delta = \sqrt{25 + 52\delta + 4\delta^2}.$$

$$\begin{aligned}
G(x, y) = & -\frac{1}{24\delta\Delta}(125(x^2 + y^2) + 170x^2\delta - 330xy\delta + 20y^2\delta + 140x^2\delta^2 - 72xy\delta^2 - 172y^2\delta^2 \\
& + 24x^2\delta^3 + 24xy\delta^3 + 25\Delta(x^2 - y^2) + 8x^2\delta\Delta + 30xy\delta\Delta + 22y^2\delta\Delta + 12x^2\delta^2\Delta + 12xy\delta^2\Delta, \\
& -125(x^2 + y^2) - 20x^2\delta + 330xy\delta - 170y^2\delta + 172x^2\delta^2 + 72xy\delta^2 - 140y^2\delta^2 - 24xy\delta^3 \\
& -24y^2\delta^3 - 25\Delta(y^2 - x^2) + 22x^2\delta\Delta + 30xy\delta\Delta + 8y^2\delta\Delta + 12xy\delta^2\Delta + 12y^2\delta^2\Delta).
\end{aligned}$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{16}t(5+2\delta+\Delta)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{16}t(-5-2\delta+\Delta)} \end{pmatrix}.$$

$$s_0(x) = \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad s_1(x) = \left(\frac{5}{8} + \frac{5x(5-2\delta+\Delta)}{24\delta}, \frac{1}{4} + x\right), \quad x \in \mathbb{R} \quad e$$

$$\begin{aligned}
s_2(x) = & ((5(3\delta(12\delta^2 + 5(15 + \Delta) + 2\delta(78 + \Delta)) - 24x^2(12\delta^2 - 5(5 + \Delta) + \delta(4 + 6\Delta)) \\
& + 4x(-4\delta^3 + 2\delta^2(-16 + \Delta) + 25(5 + \Delta) + \delta(235 + 39\Delta))))/(24\delta\Delta(5 + 2\delta + 3\Delta)), \\
& (3\delta(12\delta^2 + 5(15 + \Delta) + 2\delta(78 + \Delta)) + 12x\delta(12\delta^2 + 5(15 + \Delta) + 2\delta(78 + \Delta)) + \\
& 8x^2(172\delta^2 - 25(5 + \Delta) + \delta(-20 + 22\Delta)))/(12\delta\Delta(5 + 2\delta + 3\Delta))), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Como comentado no Capítulo 2, uma das vantagens de se obter as expressões das aproximações da variedade estável de um ponto é que a partir delas podemos calcular a curvatura da mesma naquele ponto. De fato, observe que a expressão $s_2(x)$ da segunda aproximação de $W_{loc}^s(P_4)$ tem termos até segunda ordem e, por isto, a curva parametrizada por s_2 tem contato de segunda ordem com $W_{loc}^s(P_4)$ em P_4 . Assim, em P_4 , a curvatura de $W_{loc}^s(P_4)$ é igual a curvatura de s_2 , que pode ser calculada a partir da expressão de s_2 .

Efetuada os cálculos, obtemos

$$K_\delta(P_4) = \frac{120\sqrt{2}\delta(5+2\delta+3\Delta)(-125(5+\Delta)+2\delta(-325+2\delta(247+38\delta+35\Delta)))}{(3125(5+\Delta)+\delta(250(150+17\Delta)+\delta(19825-185\Delta+2\delta(5442+410\delta+83\Delta))))^{3/2}} \quad (3.6)$$

a curvatura de s_2 e $W_{loc}^s(P_4)$ em P_4 , em função do parâmetro δ . Observando o gráfico de $K_\delta(P_4)$ na Figura 3.3, confirmamos a previsão que os resultados numéricos anteriores nos forneceram, de que $K_\delta(P_4)$ é negativa para $\delta < 1$, nula para $\delta = 1$ e positiva para $\delta > 1$.

3.4.3 Resultados com α e β livres e $\delta = 1$

Nos resultados com os parâmetros fixados, quando $\delta = 1$, observamos que a fronteira entre as bacias parecia ser a semireta R_0 com origem em $P_1 = (0, 0)$

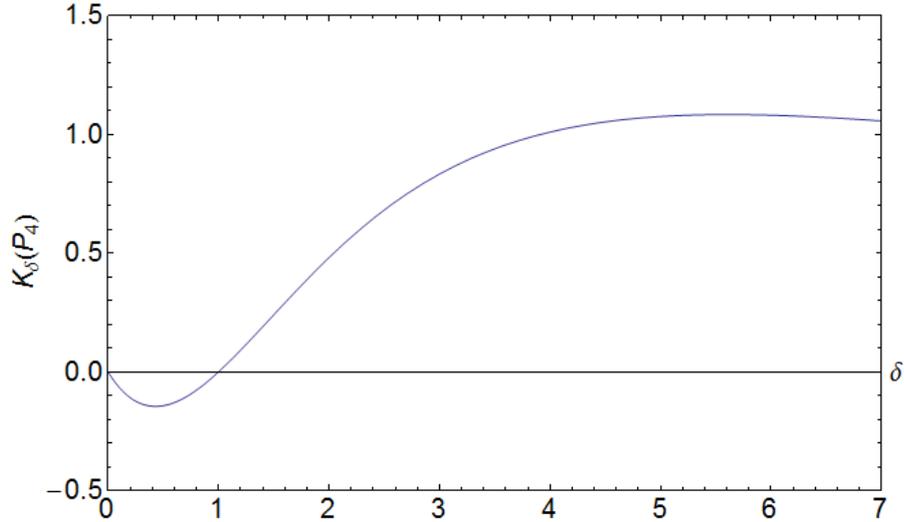


Figura 3.3: Gráfico da curvatura $K_\delta(P_4)$ de $W^s(P_4)$ em P_4 , dada por (3.6), com $\alpha = 1,5$ e $\beta = 1,2$. $K_\delta(P_4)$ é negativa para $\delta < 1$, nula para $\delta = 1$ e positiva para $\delta > 1$.

passando por $P_4 = \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\right)$. Ainda, aplicando o método das aproximações sucessivas, obtivemos que ele converge, localmente, para uma parametrização de R_0 , pois as iteradas são:

$$s_0(x) = \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\right), s_1(x) = s_2(x) = s_3(x) = \dots = \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta} + \frac{(\alpha-1)}{\beta-1}x, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} + x\right).$$

Para $x = \frac{\beta-1}{1-\alpha\beta}$, temos $s_2(x) = (0,0)$. Assim, as iteradas são parametrizações, centradas em $P_4 = \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\right)$, da semi-reta R_0 . Isto indica que a variedade estável local de P_4 é um segmento de reta centrado em P_4 contido na semireta R_0 . Porém, não podemos afirmar ainda se a variedade estável global $W^s(P_4)$ é R_0 , pois as expressões das aproximações sucessivas são válidas apenas localmente. Contudo, na demonstração do próximo Teorema, veremos que o campo ao longo de R_0 é paralelo a R_0 e, usando algumas idéias de reparametrizações, chegaremos ao resultado confirmando que $W^s(P_4) = R_0$.

Teorema 3.6 $W^s(P_4) = R_0$.

Antes de demonstrarmos o Teorema 3.6, precisamos de uma proposição, que é motivada pela seguinte observação:

Observação: Se γ é uma curva parametrizada cujo traço é uma curva integral do campo f , então, ao longo da curva γ , o campo f é paralelo a γ' .

De fato, sejam $f \in C^1(U)$ um campo qualquer no aberto $U \in \mathbb{R}^n$, $\phi(t)$ uma solução e suponha que $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \mapsto \gamma(s)$, é uma parametrização da curva $t \mapsto \phi(t)$. Então existe uma mudança de coordenadas entre $\phi(t)$ e $\gamma(s)$, isto é,

existe um difeomorfismo $h : I \overset{\text{ab}}{\subset} \mathbb{R} \rightarrow J$, $t \mapsto h(t) = s$, tal que

$$\phi(t) = \gamma \circ h(t), \quad \forall t \in I. \quad (3.7)$$

Seja $g : J \rightarrow I$, $s \mapsto g(s) = t$ é a inversa de h . Então,

$$\gamma(s) = \phi \circ g(s), \quad \forall s \in J. \quad (3.8)$$

Derivando esta última equação em relação a s , lembrando que $\phi(t)$ é solução e usando (3.7), temos

$$\gamma'(s) = \frac{d}{ds}(\phi(g(s))) = \frac{d\phi}{dt}(g(s))g'(s) = f(\phi(g(s)))g'(s) = f(\gamma(s))g'(s).$$

Assim, como $g'(s) \neq 0$ (pois g é um difeomorfismo), temos

$$f(\gamma(s)) = \frac{1}{g'(s)}\gamma'(s), \quad (3.9)$$

ou seja, o campo f sobre a curva γ é paralelo ao vetor $\gamma'(s)$. Os cálculos nesta observação nos fornecem as idéias para obter a expressão de uma solução do sistema a partir de uma parametrização de uma curva paralela ao campo. Este é o conteúdo da próxima proposição, a recíproca da observação acima.

Proposição 3.7 *Sejam $f \in C^1(U)$ um campo no aberto $U \in \mathbb{R}^n$, e $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada. Suponha que exista $c : J \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que*

$$\gamma'(s) = c(s)f(\gamma(s)) \quad (3.10)$$

e $c(s) \neq 0$ para todo $s \in J$. Então, definindo

$$g(s) = \int_{s_0}^s c(\tau) d\tau$$

tem-se que $g : J \rightarrow g(J)$ é um difeomorfismo, a curva

$$\gamma \circ g^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é uma solução de $\dot{x} = f(x)$ e γ é uma parametrização de ϕ .

Demonstração: Como c é contínua, g é de classe C^1 e $g'(s) = c(s) \neq 0$ para todo $s \in J$. Portanto, g é inversível sobre sua imagem e $(g^{-1})'(t) = \frac{1}{g'(g^{-1}(t))} = \frac{1}{c(g^{-1}(t))}$. Daí g é um difeomorfismo. Definindo $x(t) = \gamma \circ g^{-1}(t)$, por (3.10) temos que, com $s = g^{-1}(t)$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{d}{dt}(\gamma \circ g^{-1}(t)) = \frac{d\gamma}{ds}(g^{-1}(t)) \frac{dg^{-1}}{dt}(t) \\ &= c(g^{-1}(t))f(\gamma(g^{-1}(t))) \frac{1}{c(g^{-1}(t))} = f(\gamma(g^{-1}(t))) = f(x(t)). \end{aligned}$$

Logo, $x(t) = \alpha \circ g^{-1}(t)$ é uma solução de $\dot{x} = f(x)$. \square

Veremos agora na demonstração do Teorema 3.6 que o campo f , sobre a semireta R_0 , é paralelo a R_0 , e daí, usando a Proposição 3.7, obteremos a solução da qual R_0 é uma parametrização.

Demonstração do Teorema 3.6: Seja $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = (s, \frac{1-\beta}{1-\alpha}s)$ uma parametrização de R_0 . Então $\gamma'(s) = (1, \frac{1-\beta}{1-\alpha})$. O campo $f(x, y) = (x(1-x-\alpha y), y(1-y-\beta x))$ sobre a curva $\gamma(s)$ é dado por:

$$\begin{aligned} f(\gamma(s)) &= (\gamma_1(1-\gamma_1-\alpha\gamma_2), \gamma_2(1-\gamma_2-\beta\gamma_1)) \\ &= (s(1-s-\alpha\frac{(1-\beta)}{(1-\alpha)}s), \frac{(1-\beta)}{(1-\alpha)}s(1-\frac{(1-\beta)}{(1-\alpha)}s-\beta s)) \\ &= \frac{s}{1-\alpha}((1-s)(1-\alpha)-\alpha s+\alpha\beta s, \frac{(1-\beta)}{(1-\alpha)}((1-\alpha)(1-\beta s)-s+\beta s)) \\ &= \frac{s}{1-\alpha}(1-\alpha-s+\alpha\beta s, \frac{(1-\beta)}{(1-\alpha)}(1-\alpha-s+\alpha\beta s)) \\ &= \frac{(1-\alpha-s+\alpha\beta s)s}{1-\alpha}(1, \frac{(1-\beta)}{(1-\alpha)}) \\ &= \frac{(1-\alpha-s+\alpha\beta s)s}{1-\alpha}\gamma'(s). \end{aligned}$$

Portanto, o campo f ao longo de $\gamma(s)$ é paralelo a $\gamma'(s)$. Para concluir que $R_0 = W^s(P_4)$, usemos a Proposição 3.7. Definindo $c(s) = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha+s(\alpha\beta-1))s}$ no intervalo $J_1 = (0, \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1})$ temos que $c(s)$ é contínua e $\gamma'(s) = c(s)f(\gamma(s))$. Daí, pela Proposição 3.7, pondo

$$g_1(s) = \int_{s_0}^s c(\tau)d\tau$$

temos que $\phi_1(t) = \gamma \circ g_1^{-1}(t)$ é solução do sistema (3.3). Fazendo as contas, obtemos

$$\phi_1(t) = \frac{(1-\alpha, 1-\beta)}{e^{-t} + 1 - \alpha\beta}.$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_1(t) = \frac{(1-\alpha, 1-\beta)}{1-\alpha\beta} = P_4 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_1(t) = 0 = P_1.$$

Portanto, ϕ_1 é uma órbita heteroclínica que conecta P_1 a P_4 e é o fluxo na variedade estável de P_4 . Observe ainda que podemos reescrever $\phi_1(t)$ como

$$\phi_1(t) = \frac{1-\alpha\beta}{e^{-t} + 1 - \alpha\beta} \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} \right)$$

é paralelo a $\overrightarrow{P_1P_4}$, de modo que a trajetória $t \mapsto \phi_1(t)$ está contida no segmento de reta P_1P_4 . Assim, pelo menos P_1P_4 , que é parte de R_0 , está contido em $W^s(P_4)$.

Se definirmos $c(s)$ no intervalo $J_2 = (\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}, \infty)$, e fazermos as mesmas contas, obtemos outra solução $\phi_2(t)$, que, desta vez, é o ramo direito da variedade estável de P_4 e satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_2(t) = P_4 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_2(t) = +\infty.$$

□

Assim, vemos que, quando $\delta = 1$, a variedade estável de P_4 , que é fronteira entre $A(P_2)$ e $A(P_3)$, é a semi-reta, no 1º quadrante, passando por P_4 , com origem em $P_1 = (0, 0)$.

Observe que a equação desta semi-reta é dada por $I = \frac{(1-\beta)}{(1-\alpha)}N$. Sendo assim, podemos determinar os valores limiares para as condições iniciais que levam a extinção de cada uma das espécies. Façamos isto do ponto de vista de um cenário de invasão biológica, onde a espécie I invade o *habitat* natural da espécie N . Sendo o *habitat* é dominado por N , temos $N_0 = 1$ como condição inicial em N . Temos os seguintes casos:

- Se $\alpha > \beta > 1$: então I é mais forte que N . Existe uma condição inicial mínima $I_{0_{min}} = \frac{\beta-1}{\alpha-1}$ para que a solução leve ao sucesso da invasão.
- Se $\alpha = \beta > 1$ então I e N têm a mesma força. A separatriz será dada por $I = N$. Portanto, nenhuma condição inicial com $N_0 = 1$ poderá levar a extinção de N . A invasão deve ocorrer quando N não estiver na plenitude de sua capacidade de suporte, isto é, $N_0 < 1$. Neste caso, aquela espécie que estiver presente em maior quantidade no tempo $t = 0$ será bem-sucedida e a outra será extinta.
- Se $1 < \alpha < \beta$ então I é mais fraca que N então, novamente, não terá sucesso se N estiver em sua capacidade de suporte. I só terá sucesso se invadir um *habitat* onde N ainda esteja em desenvolvimento ou se recuperando de alguma queda em sua população, quando N_0 for menor que $N_{0_{max}} = \frac{\alpha-1}{\beta-1}$.

Na Figura 3.4 , podemos ver os valores limiares para as condições iniciais que levam a extinção de N ou de I .

3.5 Conclusão

Vimos, neste capítulo, que a determinação das bacias de atração dos equilíbrios estáveis do sistema (3.3) possibilitou uma compreensão mais profunda do fenômeno descrito pelo modelo, pois pudemos verificar quais condições iniciais levam a extinção de qual espécie, e também estudamos as variações nestas condições iniciais, decorrentes de alterações nos parâmetros do sistema.

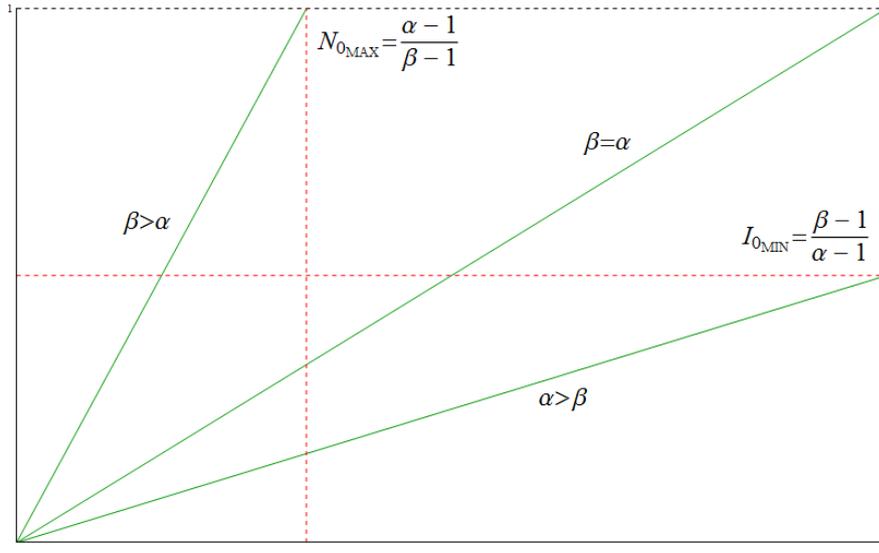


Figura 3.4: A variedade estável $W^s(P_4)$ é a reta $I = \frac{1-\beta}{1-\alpha}N$. Nesta figura, temos o seu gráfico para $\beta > \alpha > 1$, $\beta = \alpha > 1$ e $\alpha > \beta > 1$. Cada um destes casos determina diferentes limiares para as condições iniciais.

Vimos ainda, que o método descrito no Capítulo 2, além de nos fornecer a variedade estável, que é a fronteira entre as bacias de atração estudadas, nos forneceu a expressão da curvatura desta fronteira, o que aumentou nosso entendimento sobre a influência dos parâmetros na dinâmica do modelo, e também forneceu, no caso em que $\delta = 1$, a forma analítica de soluções do sistema.

Capítulo 4

Aplicação a um sistema 3D

Neste capítulo, propomos e estudamos um modelo que visa descrever as interações entre duas espécies em um contexto de invasão de plantas via alelopatia. Uma delas, introduz-se no *habitat* próprio da outra, e passa a competir pelos mesmos recursos naturais dos quais a espécie nativa se nutre. Além disto, a invasora produz uma toxina nociva à espécie nativa, que impede seu crescimento e dispersão espacial, recurso conhecido como alelopatia. Usaremos os resultados do Capítulo 2 para nos auxiliar na análise qualitativa do modelo e também estudaremos a influência dos parâmetros do modelo sobre as bacias de atração, e obteremos uma completa descrição do espaço de parâmetros e a influência dos mesmos nas bacias de atração, chegando assim, a conclusões sobre a dinâmica de interação entre as espécies.

4.1 Introdução

O fenômeno de invasões biológicas é uma questão de grande importância prática, pois está presente em todo o mundo e representa uma grande ameaça a conservação da biodiversidade de ecossistemas naturais, e à disponibilidade de recursos e integridade de sistemas agrícolas [28, 30, 10, 7]. Prevenir a disseminação das espécies invasoras e prever seus padrões de expansão surge como importante tarefa.

Do ponto de vista matemático, os padrões das invasões biológicas são um interessante exemplo da quebra espontânea da simetria em sistemas complexos. A disseminação de espécies advindas de outros ambientes em um certo ecossistema pode progredir de várias maneiras. Em ambientes homogêneos, a invasão frequentemente gera ondas viajantes regulares [27, 24], mas regimes mais complicados nos quais as ondas viajantes podem se tornar transientes ou oscilatórias, antes da formação de padrões espaciais, pode ser observada em ambientes heterogêneos ou sob influência de outras espécies [31, 29]. Muito se tem feito para entender, prever e controlar invasões de plantas vindas de outros ambientes. Entretanto,

as interações e a competição entre as espécies das plantas invasoras e nativas raramente têm sido consideradas [5].

Por isto, propusemos e estudamos qualitativamente um modelo matemático para descrever um cenário de invasão de plantas via alelopatia. A alelopatia é um mecanismo de defesa comum a muitas espécies de plantas; trata-se da produção e liberação no ambiente de compostos químicos que dificultam o crescimento e dispersão espacial de outras espécies [12]. No modelo, o *habitat* próprio de uma das espécies, a “nativa”, N , é invadido por outra espécie, a “invasora”, I , que se vale da alelopatia, a produção de uma fitotoxina, P , para se estabelecer.

4.2 O Modelo

Propomos a seguir, um sistema de equações de reação-difusão que descreve a dinâmica espaço-temporal da invasão de plantas mediada por alelopatia:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \mu N \left(1 - \frac{N + \alpha_1 I}{K_N}\right) - N\phi(P) + \vec{\nabla} \cdot (D_N(P)\vec{\nabla} N) \\ \frac{dI}{dt} = \delta I \left(1 - \frac{I + \alpha_2 N}{K_I}\right) + D_I \nabla^2 I \\ \frac{dP}{dt} = \nu I - \gamma P N - \tau P + D_P \nabla^2 P \end{cases} \quad (4.1)$$

onde N representa a planta nativa, I a planta invasora e P a fitotoxina. Ainda, μ é a taxa de reprodução da planta nativa e K_N é sua capacidade de suporte, que representa a limitação na fonte de recursos fornecidos pelo ambiente. Analogamente, δ é a taxa de reprodução da planta invasora e K_I a capacidade de suporte a ela associada. Como resultados experimentais [4] indicam que o crescimento das plantas nativas não tem influência direta nas espécies invasoras, assumimos que a dinâmica das plantas segue o modelo clássico de competição interespecífica pelos recursos disponíveis no ambiente. Os parâmetros α_1 e α_2 são os coeficientes de competição das plantas que representam a pressão (consumo) que cada planta exerce sobre os recursos usados pela outra planta. O termo $-N\phi(P)$ representa a diminuição das plantas nativas de acordo com seu envenenamento pela fitotoxina P . Assumimos que a resposta das plantas nativas aos efeitos da fitotoxina, descrita pela função $\phi(P)$, apresenta um limiar de envenenamento, θ , e, após uma certa quantidade da fitotoxina, uma saturação do efeito alelopático. Consideramos

$$\phi(P) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } P \leq \theta \\ \beta \frac{(P - \theta)^2}{\xi + (P - \theta)^2} & , \text{ se } P > \theta \end{cases} \quad (4.2)$$

Assim, os parâmetros β e ξ controlam a eficiência da fitotoxina em envenenar as plantas nativas. Já na terceira equação, o fator ν é a taxa de liberação da

toxina pelas raízes da planta invasora, enquanto τ é sua taxa de degradação natural. Assumimos $\nu > \tau$. O termo $-\gamma PN$ representa a quantidade consumida de fitotoxina pela espécie nativa, com uma taxa de absorção γP que depende linearmente da concentração da fitotoxina.

Assim, as duas grandes características na dinâmica do sistema são a função resposta sigmoideal com limiar de envenenamento para os efeitos da fitotoxina e a absorção da mesma por uma taxa proporcional à sua concentração.

Os termos de difusão modelam a propagação das espécies de plantas no espaço, que se dá pela dispersão estocástica de sementes e sua germinação, como a difusão espacial da fitotoxina. Os coeficientes de difusão, D_P , D_I , por simplicidade, foram considerados constantes, uniformes e $D_I < D_P$. Por sua vez, como a fitotoxina diminui a chance de germinação das sementes das plantas nativas, o coeficiente de difusão D_N é assumido como uma função decrescente da concentração de fitotoxina acima do seu limiar de envenenamento. Especificamente,

$$D_N(P) = \begin{cases} D_0 & , \text{ se } P \leq \theta \\ \frac{D_0}{1 + \eta(P - \theta)^2} & , \text{ se } P > \theta \end{cases} \quad (4.3)$$

onde D_0 é o coeficiente constante e uniforme de difusão das plantas nativas num cenário sem a espécie invasora, e η um fator de conversão tendo como unidades o inverso da concentração. Por simplicidade, usamos $D_0 = D_I$. Todos os parâmetros são números reais positivos.

Em resumo, as equações (4.1), (4.2) e (4.3) do modelo incluem a competição interespecífica entre as espécies nativa e invasora, sua dispersão espacial por difusão e a supressão alelopática da planta nativa ocasionada pela toxina produzida pela espécie invasora. Por simplicidade, usamos uma difusão normal e uma taxa constante de decaimento para a fitotoxina.

As capacidades de suporte K_N e K_I , o inverso da taxa de crescimento das plantas nativas μ^{-1} e o limiar de envenenamento θ são, respectivamente, densidades populacionais das plantas, a escala característica do tempo e uma propriedade típica da fitotoxina. Assim, é conveniente introduzir as variáveis adimensionais

$$N' = N/K_N, P' = P/\theta, I' = I/K_I, t' = \mu t, \text{ e } \vec{x}' = \vec{x}/\Delta$$

onde Δ é a escala espacial de comprimento, de modo que transformamos as equações (4.1) do modelo no sistema adimensional:

$$\begin{cases} \frac{dN'}{dt'} = N'(1 - N' - \bar{\alpha}_1 I') - N'\bar{\phi}(P') + \vec{\nabla}' \cdot (\bar{D}_N \vec{\nabla}' N') \\ \frac{dI'}{dt'} = \bar{\delta} I'(1 - I' - \bar{\alpha}_2 N') + \bar{D}_I \nabla'^2 I' \\ \frac{dP'}{dt'} = \bar{\nu} I' - \bar{\gamma} P' N' - \bar{\tau} P' + \bar{D}_P \nabla'^2 P' \end{cases} \quad (4.4)$$

onde

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 K_I / K_N, \bar{\nu} = \nu K_I / \mu, \bar{\gamma} = \gamma K_N / \mu, \bar{\tau} = \tau / \mu, \bar{\delta} = \delta / \mu, \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 K_N / K_I, \\ \bar{D}_P = D_P / \mu \Delta^2, \bar{D}_I = D_I / \mu \Delta^2.$$

Na nova escala, a função resposta $\bar{\phi}$ e o coeficiente de difusão \bar{D}_N são dados por:

$$\bar{\phi}(P') = \begin{cases} 0 & , \text{ se } P' \leq 1 \\ \bar{\beta} \frac{(P' - 1)^2}{\bar{\xi} + (P' - 1)^2} & , \text{ se } P' > 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

e

$$\bar{D}_N(P') = \begin{cases} \bar{D}_0 & , \text{ se } P' \leq 1 \\ \frac{\bar{D}_0}{1 + \bar{\eta}(P' - 1)^2} & , \text{ se } P' > 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

onde $\bar{\beta} = \beta \theta / \mu$, $\bar{\xi} = \xi / \mu$, $\bar{D}_0 = D_0 / (\mu \Delta^2)$, e $\bar{\eta} = \eta \theta$. A partir daqui iremos omitir os apóstrofes por simplicidade.

Para um estudo qualitativo, consideramos as soluções espacialmente homogêneas do sistema (4.4). O novo sistema é obtido desconsiderando os termos espaciais das equações:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(1 - N - \alpha_1 I - \phi) \\ \frac{dI}{dt} = \delta I(1 - I - \alpha_2 N) \\ \frac{dP}{dt} = \nu I - \gamma NP - \tau P \end{cases} \quad (4.7)$$

No Apêndice A, para consulta rápida, encontra-se um resumo do significado biológico dos parâmetros α_1 , α_2 , δ , ν , γ , τ , β e ξ .

Note que o campo f associado ao sistema (4.7) é de classe C^1 em \mathbb{R}_+^3 , de modo que podemos utilizar vários resultados vistos nos Capítulos 1 e 2.

Como N , I , e P representam as densidades das populações, só tem sentido as soluções passando em pontos com $N, I, P \geq 0$.

Definição 4.1 *O espaço de fase do sistema (4.7) será $\mathbb{R}_+^3 = \{(N, I, P) \in \mathbb{R}^3 : N, I, P \geq 0\}$.*

4.3 Pontos Fixos

Proposição 4.2 *Os pontos fixos do sistema (4.7) são*

- (i) $P_1 = (0, 0, 0)$
(ii) $P_2 = (1, 0, 0)$
(iii) $P_3 = (0, 1, \nu/\tau)$
(iv) $P_4 = \left(\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1-\alpha_2)}{\gamma(1-\alpha_1)+\tau(1-\alpha_1\alpha_2)} \right)$
(v) $P_5 = \left(\frac{\nu-\tau P}{\gamma P+\nu\alpha_2}, \frac{P(\gamma+\alpha_2\tau)}{\gamma P+\nu\alpha_2}, P \right) = \left(\frac{1-\alpha_1-\phi(P)}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{1-\alpha_2+\alpha_2\phi(P)}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1-\alpha_2+\alpha_2\phi(P))}{\gamma(1-\alpha_1-\phi(P))+\tau(1-\alpha_1\alpha_2)} \right)$
onde P é raiz da equação

$$(\xi + (P - 1)^2)(K_3P - K_4) + \xi\beta(\gamma P + \nu\alpha_2) = 0 \quad (4.8)$$

e K_3 e K_4 são dados por $K_3 = \gamma(1 - \alpha_1 - \beta) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)$ e $K_4 = \nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\beta)$.

Demonstração:

Devemos resolver $\frac{dN}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0$, afim de obter os pontos fixos.

Fazendo $A = 1 - N - \alpha_1 I - \phi$ e $B = 1 - I - \alpha_2 N$, segue que $\frac{dN}{dt} = 0$ implica em $N = 0$ ou $A = 0$, e que $\frac{dI}{dt} = 0$ implica $I = 0$ ou $B = 0$.

Se $N = I = 0$, então $\frac{dP}{dt} = -\tau P = 0$ implica $P = 0$. Portanto, o primeiro ponto fixo é $P_1 = (0, 0, 0)$.

Se $A = I = 0$, então $\phi = 0$. Daí, temos: $N = 1$ e $\frac{dP}{dt} = P(\gamma + \tau) = 0 \iff P = 0$. Logo, $P_2 = (1, 0, 0)$ é o segundo ponto fixo.

Se $N = B = 0$, então $I = 1$ e assim $\frac{dP}{dt} = \nu - \tau P = 0 \iff P = \frac{\nu}{\tau}$. Daí, $P_3 = (0, 1, \nu/\tau)$ é o terceiro ponto fixo.

Se $A = B = 0$, tem-se: $1 - N - \alpha_1 I - \phi(P) = 0$ e $1 - I - \alpha_2 N = 0$. Da segunda equação obtemos $I = 1 - \alpha_2 N$. Substituindo na primeira equação, temos

$$1 - \alpha_1 + (\alpha_1\alpha_2 - 1)N - \phi(P) = 0 \quad (4.9)$$

Ainda, $\frac{dP}{dt} = \nu(1 - \alpha_2 N) - P(\gamma N + \tau) = 0 \iff P = \frac{\nu(1 - \alpha_2 N)}{\gamma N + \tau}$. Temos então duas possibilidades:

- (i) $P \leq 1$ e conseqüentemente $\phi(P) = 0$: neste caso, de (4.9) temos $N = \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1\alpha_2}$. Substituindo este valor de N nas equações de I e P acima, obtemos o quarto ponto fixo:

$$P_4 = \left(\frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1 - \alpha_2)}{\gamma(1 - \alpha_1) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)} \right)$$

- (ii) $P > 1$ e então $\phi(P) \neq 0$: de $P = \frac{\nu(1-\alpha_2 N)}{\gamma N + \tau}$ obtemos $N = \frac{\nu-\tau P}{\gamma P+\nu\alpha_2}$. Substituindo esta expressão e $\phi = \frac{\beta(P-1)^2}{\xi+(P-1)^2}$ em (4.9), após manipulações, obtemos

a equação:

$$(\xi + (P - 1)^2)(K_3P - K_4) + \xi\beta(\gamma P + \nu\alpha_2) = 0 \quad (4.10)$$

com $K_3 = \gamma(1 - \alpha_1 - \beta) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)$ e $K_4 = \nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\beta)$. De $1 - I - \alpha_2N = 0$ e $N = \frac{\nu - \tau P}{\gamma P + \nu\alpha_2}$ segue que $I = \frac{P(\gamma + \alpha_2\tau)}{\gamma P + \nu\alpha_2}$. Assim, o quinto ponto fixo do sistema é

$$P_5 = \left(\frac{\nu - \tau P}{\gamma P + \nu\alpha_2}, \frac{P(\gamma + \alpha_2\tau)}{\gamma P + \nu\alpha_2}, P \right).$$

onde $P > 1$ é uma raiz da equação (4.10). Uma outra expressão para P_5 pode ser obtida da seguinte maneira: de (4.9) obtemos $N = \frac{1 - \alpha_1 - \phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}$. Substituindo esta equação nas expressões de I e P em termos de N acima, obtemos

$$P_5 = \left(\frac{1 - \alpha_1 - \phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P))}{\gamma(1 - \alpha_1 - \phi(P)) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)} \right)$$

□

Observação: Sempre que nos referirmos a

$$P_5 = \left(\frac{\nu - \tau P}{\gamma P + \nu\alpha_2}, \frac{P(\gamma + \alpha_2\tau)}{\gamma P + \nu\alpha_2}, P \right) = \left(\frac{1 - \alpha_1 - \phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P))}{\gamma(1 - \alpha_1 - \phi(P)) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)} \right),$$

iremos nos referir ao ponto que se obtêm substituindo o valor de uma das raízes P da equação (4.10). Como (4.10) é uma equação polinomial de grau 3, pode ser que ela tenha uma ou três raízes reais. Ainda, o ponto P_5 está definido em \mathbb{R}_+^3 só se as suas coordenadas forem não negativas. Logo, sua existência em \mathbb{R}_+^3 e multiplicidade dependem do número de raízes da equação (4.10) maiores ou iguais a 1 que deem origem a pontos com coordenadas não negativas. Portanto, podemos ter nenhum, um, dois ou três pontos P_5 no espaço de fase \mathbb{R}_+^3 . Mais adiante estudaremos esta questão. Os pontos P_1 , P_2 e P_3 sempre pertencem ao espaço de fase \mathbb{R}_+^3 e o ponto P_4 pertence quando suas coordenadas forem não negativas.

A interpretação para cada ponto fixo é a seguinte:

- $P_1 = (0, 0, 0)$ corresponde ao estado do sistema onde as duas espécies de plantas foram extintas.
- $P_2 = (1, 0, 0)$ representa a extinção da espécie invasora e a sobrevivência da planta nativa.
- $P_3 = (0, 1, \nu/\tau)$ correspondente ao êxito da espécie invasora, que elimina totalmente a espécie nativa. Observe que o valor que P assume (ν/τ) é a razão entre as taxas de produção e degradação natural da toxina.
- $P_4 = \left(\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1\alpha_2 - 1}, \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_1\alpha_2 - 1}, \frac{\nu(\alpha_2 - 1)}{\gamma(\alpha_1 - 1) + \tau(\alpha_1\alpha_2 - 1)} \right)$ representa a coexistência das espécies num cenário com a concentração da toxina abaixo do limiar de fitotoxicidade (na obtenção de P_4 supomos $P \leq 1$).

- $P_5 = \left(\frac{\nu - \tau P}{\gamma P + \nu \alpha_2}, \frac{P(\gamma + \alpha_2 \tau)}{\gamma P + \nu \alpha_2}, P \right)$, onde P é raiz da equação (4.8), representa a coexistência das espécies sob uma concentração de toxina acima do limiar de fitotoxicidade ($P > 1$).

4.4 Análise da Estabilidade dos Pontos Fixos

A estabilidade dos pontos fixos de um sistema autônomo está relacionada ao sinal da parte real das raízes λ 's da equação característica da matriz jacobiana do sistema em cada ponto fixo, dada por

$$\det |J(P_i) - \lambda I_d| = 0.$$

A matriz jacobiana do sistema (4.7) num ponto (N, I, P) é dada por

$$J(N, I, P) = \begin{bmatrix} 1 - 2N - \alpha_1 I - \phi & -N\alpha_1 & -N \frac{d\phi}{dP} \\ -\delta\alpha_2 I & \delta(1 - 2I - \alpha_2 N) & 0 \\ -\gamma P & \nu & -(\gamma N + \tau) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Lembramos que um equilíbrio hiperbólico x_0 de um campo $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é do tipo k se a matriz $f'(x_0)$ tem exatamente k autovalores com parte real positiva. Efetuando os cálculos, tem-se imediatamente o resultado abaixo sobre a estabilidade dos pontos P_1 , P_2 e P_3 . Ainda, usando a unicidade da variedade estável global de um ponto de equilíbrio hiperbólico, a expressão do campo do sistema (4.7) e calculando os autovetores de $J(N, I, P)$ em cada um destes pontos, é possível determinar a Variedade Estável Global de cada um deles.

Proposição 4.3 *Os autovalores de $J(P_1)$ são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \delta$, $\lambda_3 = -\tau$ (portanto P_1 é sempre do tipo 1) e a variedade estável de P_1 é $W^s(P_1) = \{(0, 0, P) : P \geq 0\}$.*

Vemos que este ponto é uma sela instável e só acontecerá a extinção das duas espécies se, num dado momento, o sistema estiver num estado correspondente a um ponto situado no eixo P , que corresponde a uma direção no espaço de fases onde a concentração de toxinas é qualquer e as populações já foram extintas. Desta forma, havendo qualquer quantidade de pelo menos uma das populações, em hipótese alguma, haverá a extinção de ambas.

Proposição 4.4 *Os autovalores de $J(P_2)$ são: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -(\gamma + \tau)$ e $\lambda_3 = \delta(1 - \alpha_2)$. Assim,*

- P_2 é assintoticamente estável se e só se $\alpha_2 > 1$.
- P_2 é do tipo 1 e sua variedade estável é o plano NP , isto é, $W^s(P_2) = \{(0, N, P), N, P \geq 0\}$ se, e somente se, $\alpha_2 < 1$.

P_2 será assintoticamente estável caso se tenha $\alpha_2 > 1$, isto é, caso a pressão competitiva das nativas sobre as invasoras for alta. Isto significa que, sob estas condições, se as invasoras forem suficientemente poucas, a invasão não será bem sucedida. Por outro lado, se a pressão competitiva exercida pelas nativas for baixa ($\alpha_2 < 1$), a invasão nunca será eliminada por completo. Conclusão: havendo baixa competitividade da espécie nativa, uma vez presente, a espécie invasora não desaparecerá. Não consideraremos o caso $\alpha_2 = 1$, pois neste caso P_2 não é hiperbólico e $P_4 = P_2$.

Proposição 4.5 *Os autovalores $J(P_3)$ são: $\lambda_1 = 1 - \alpha_1 - \phi(\frac{\nu}{\tau})$, $\lambda_2 = -\delta$, $\lambda_3 = -\tau$. Assim,*

- P_3 é assintoticamente estável se, e só se, $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$.
- P_3 é do tipo 1 e sua variedade estável é o plano IP , isto é, $W^s(P_3) = \{(0, I, P) : I, P \geq 0\}$ se, e somente se $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$.

A estabilidade de P_3 ocorrerá se $\alpha_1 + \phi(\frac{\nu}{\tau}) > 1$. Assim, quanto maior for a taxa de produção da toxina (ν) e eficiência desta em destruir a espécie nativa (β), menor precisa ser a capacidade de competição por recursos das invasoras para que eliminem as nativas completamente. Portanto, se a espécie invasora for uma competidora fraca mas produzir uma toxina poderosa, ainda assim terá vantagem sobre as nativas. Por outro lado, as plantas nativas, para sobreviverem, nada podem fazer a não ser diminuir a taxa β , ou seja, aumentar sua resistência ao veneno. Sua extinção depende muito mais da capacidade e dos meios que dispõem as invasoras do que das suas próprias características. Vemos que a produção de veneno pelas invasoras é um recurso eficaz de que dispõem, independentemente de características externas. Esta arma química não só garante sua sobrevivência como permite que uma espécie inicialmente pouco competitiva domine sobre outras mais competitivas.

Caso as condições do problema determinem a existência de outros pontos fixos estáveis, menos favoráveis à I (como P_2 e P_4), a invasão terá que se dar com quantidades de I e P suficientemente grandes para que o ponto inicial esteja na bacia de atração de P_3 .

Para a análise da estabilidade do ponto P_4 , será útil a Regra dos Sinais de Descartes.

Teorema 4.6 (Regra dos Sinais de Descartes) *Seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ um polinômio de coeficientes reais. Seja $\delta_{p(x)}$ o número de vezes que os termos da sequência $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, formada pelos coeficientes de $p(x)$, trocam de sinal. Então*

- O número de raízes reais positivas de $p(x)$ é $\delta_{p(x)} - 2k$, para algum inteiro k tal que $2k < \delta_{p(x)}$.
- O número de raízes reais negativas de $p(x)$ é $\delta_{p(-x)} - 2k$, para algum inteiro k tal que $2k < \delta_{p(-x)}$.

Demonstração: Veja demonstração em [20], páginas 13-20. \square

Proposição 4.7 *O ponto $P_4 = \left(\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1-\alpha_2)}{\gamma(1-\alpha_1)+\tau(1-\alpha_1\alpha_2)}\right)$ está em \mathbb{R}_+^3 se, e somente se, $\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1$ e $a_0 > 0$, **ou** $\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1$ e $a_0 < 0$, onde $a_0 = \gamma(1-\alpha_1) + \tau(1-\alpha_1\alpha_2) + \nu(\alpha_2-1)$. Ainda,*

- Se $\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1$ e $a_0 > 0$, então P_4 é estável.
- Se $\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1$ e $a_0 < 0$, então P_4 é do tipo 1.

Demonstração: Inicialmente observamos que para que P_4 esteja em \mathbb{R}_+^3 , o numerador e o denominador de cada uma de suas coordenadas devem ter o mesmo sinal e que a terceira coordenada de P_4 deve ser menor que 1. Isto acontece se, e somente se, ($\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1$ e $\gamma(1-\alpha_1) + \tau(1-\alpha_1\alpha_2) + \nu(\alpha_2-1) < 0$) ou ($\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1$ e $\gamma(1-\alpha_1) + \tau(1-\alpha_1\alpha_2) + \nu(\alpha_2-1) > 0$). Agora, lembramos da demonstração da Proposição 4.2 que escrevendo $P_4 = (N, I, P)$ temos, entre outras equações, $\phi(P) = 0$ e $1 - I - \alpha_2 N = 0$. Desta forma, a matriz jacobiana do sistema é:

$$J(P_4) = \begin{bmatrix} -N & -N\alpha_1 & 0 \\ -\delta\alpha_2 I & -\delta I & 0 \\ -\gamma P & \nu & -(\gamma N + \tau) \end{bmatrix}.$$

Logo o polinômio característico de $J(P_4)$ é

$$p_4(\lambda) = (\gamma N + \tau + \lambda)(\lambda^2 + \lambda(N + \delta I) + N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2)).$$

Suponha que $P_4 \in \mathbb{R}_+^3$. Daí, $\lambda_1 = -(\gamma N + \tau)$ é um autovalor negativo de $J(P_4)$ e λ_2 e λ_3 são raízes de:

$$q(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(N + \delta I) + N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2).$$

Os coeficientes de $q(\lambda)$ são 1, $(N + \delta I)$ e $N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2)$. Se $\alpha_1 < 1$ e $\alpha_2 < 1$ então $\delta_{q(\lambda)} = 0$ e $\delta_{q(-\lambda)} = 2$, logo, pela regra dos sinais de Descartes, as duas raízes de $q(\lambda)$ são reais e negativas, portanto P_4 é assintoticamente estável. Se $\alpha_1 > 1$ e $\alpha_2 > 1$ então $\delta_{q(\lambda)} = 1$ e $\delta_{q(-\lambda)} = 1$ e daí, pela regra dos sinais de Descartes, $q(\lambda)$ tem duas raízes reais, uma negativa e outra positiva. Logo, $p_4(\lambda)$ tem uma raiz real positiva e duas reais negativas, e, portanto, P_4 é do tipo 1. Não é necessário analisar a estabilidade quando $\alpha_1 > 1 > \alpha_2$ ou $\alpha_2 > 1 > \alpha_1$, pois nestes casos $P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$. \square

A última proposição nos diz que, para que haja coexistência entre as espécies, a competição entre elas deve ser fraca ($\alpha_1, \alpha_2 < 1$), pois se fosse forte ou desigual, o ambiente se tornaria muito hostil e uma eliminaria a outra ($\alpha_1, \alpha_2 > 1$ implica na existência dos atratores P_2^* e P_3^*). Ainda mais, da terceira condição para que P_4 seja estável, dada por, $a_0 = \gamma(1-\alpha_1) + \tau(1-\alpha_1\alpha_2) + \nu(\alpha_2-1) > 0$ segue que

$$\nu(1-\alpha_2) < \underbrace{\gamma(1-\alpha_1)}_{<1} + \underbrace{\tau(1-\alpha_1\alpha_2)}_{<1} < \gamma + \tau \implies \alpha_2 > 1 - \frac{\gamma + \tau}{\nu}$$

Isto significa que além de ter um limitante superior (1), a resistência da espécie nativa, α_2 , tem também um limitante inferior, que depende das taxas de produção e decaimento (ν e τ) da toxina e também da taxa de absorção da toxina (γ). Assim, a espécie nativa, devido a produção da toxina pela invasora, mesmo devendo ter baixa a sua pressão competitiva, não pode tê-la muito pequena; e este limite inferior é ditado pelas propriedades da toxina. Com este fato, a invasora pode aumentar a eficiência de sua toxina (maior ν e menor τ , por exemplo) e assim limitar o intervalo $(1 - \frac{\gamma+\tau}{\nu}, 1)$ onde deve estar α_2 até tornar impossível a coexistência sob baixa concentração de fitotoxina.

Um resumo da análise da estabilidade feita até o momento pode ser visto na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Estabilidade dos pontos fixos P_1, P_2, P_3 e P_4 .

	$\alpha_2 < 1 - P_2$ tipo 1	$\alpha_2 > 1 - P_2$ estável
$\alpha_1 < 1$	P_4 estável (se $a_0 > 0$)	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$
$\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$ P_3 tipo 1	P_2 tipo 1 P_3 tipo 1	P_2 estável P_3 tipo 1
$\alpha_1 < 1$	P_4 estável (se $a_0 > 0$)	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$
$\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$ P_3 estável	P_2 tipo 1 P_3 estável	P_2 estável P_3 estável
$\alpha_1 > 1$ P_3 estável	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ P_2 tipo 1 P_3 estável	P_4 tipo 1 (se $a_0 < 0$) P_2 estável P_3 estável

4.4.1 Análise do ponto P_5

Na análise do ponto P_5 , inicialmente não estaremos preocupados com a existência dele no espaço de fases. Vamos supor que isto acontece e analisar sua estabilidade. Para isto, necessitamos do Critério de Routh-Hurwitz para polinômios de grau três, Teorema 4.8. Precisaremos também dos seus corolários. Uma demonstração do Critério de Routh-Hurwitz pode ser encontrada em [35]. A demonstração dos seus corolários é imediata.

Teorema 4.8 (Critério de Routh-Hurwitz para polinômios de grau três)

Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes do polinômio de coeficientes reais $p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$. Então $Re(\lambda_i) < 0$ para $i = 1, 2, 3$ se, e só se,

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0.$$

Corolário 4.9 Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes do polinômio de coeficientes reais $p(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$, com $a_0 > 0$. Então $Re(\lambda_i) < 0$ para $i = 1, 2, 3$ se,

e só se,

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Corolário 4.10 *Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes do polinômio de coeficientes reais $p(\lambda) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$, com $a_0 > 0$. Então $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ para $i = 1, 2, 3$ se, e só se,*

$$a_1 < 0, \quad a_3 < 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 < 0.$$

Podemos utilizar Proposição (4.11) para calcular diretamente os coeficientes do polinômio característico de uma matriz 3×3 . Para demonstrá-la, basta agrupar os termos de $p(\lambda)$ com mesmo grau.

Proposição 4.11 *Seja $a = [a_{ij}]$ uma matriz real de ordem 3×3 . O polinômio característico de A é:*

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - \operatorname{tr}(A)\lambda^2 + B(A)\lambda - \det(A)$$

onde $B(A)$ é dada por

$$B(A) = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Por meio desta última proposição e o Critério de Routh-Hurwitz, obtemos, em termos dos elementos da matriz jacobiana de um campo em um ponto fixo, as condições necessárias e suficientes para que o ponto seja assintoticamente estável.

Corolário 4.12 *Sejam $f \in C^1(U)$ um campo no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de f , e $f'(x_0)$ a matriz jacobiana de f em x_0 . Então x_0 é assintoticamente estável se, e só se,*

$$\operatorname{tr}(f'(x_0)) < 0, \quad \det(f'(x_0)) < 0, \quad \det(f'(x_0)) - \operatorname{tr}(f'(x_0))B(f'(x_0)) > 0. \quad (4.12)$$

Admitindo por um momento a existência de P_5 em \mathbb{R}_+^3 , vamos provar sua instabilidade quando $\det(J(P_5)) > 0$ e mostrar que, neste caso, o seu índice de estabilidade é sempre 2 (Teorema 4.13), ou seja, que se $\det(J(P_5)) > 0$, então P_5 é do tipo 1. Em seguida, o Corolário 4.14 nos dará uma condição que implica em $\det(J(P_5)) > 0$. Finalmente, no Teorema 4.15, mostramos que a estabilidade de P_5 depende apenas de se ter $\det(J(P_5)) < 0$. Com isto, toda a análise da estabilidade deste ponto, quando ele está em \mathbb{R}_+^3 , fica dependendo apenas do sinal de $\det(J(P_5))$.

Teorema 4.13 *Se o ponto $P_5 = (\frac{\nu - \tau P}{\gamma P + \nu \alpha_2}, \frac{P(\gamma + \alpha_2 \tau)}{\gamma P + \nu \alpha_2}, P)$ está no espaço de fase \mathbb{R}_+^3 e se $\det(J(P_5)) > 0$ então P_5 é do tipo 1.*

Demonstração: Pela Proposição 4.11, o polinômio característico de P_5 é

$$p_5(\lambda) = \lambda^3 - \operatorname{tr}(J(P_5))\lambda^2 + B(J(P_5))\lambda - \det(J(P_5))$$

por hipótese, temos $-\det(J(P_5)) < 0$ e, como $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$, então $-\text{tr}(J(P_5)) = N + \delta I + \gamma N + \tau > 0$. Assim, os sinais dos coeficientes de $p_5(\lambda)$ são $++\pm-$ e os sinais dos coeficientes de $p_5(-\lambda)$ são $-+\mp-$. Logo, não importa o sinal de $B(J(P_5))$, sempre teremos $\delta_{p_5(\lambda)} = 1$ e $\delta_{p_5(-\lambda)} = 2$. Daí, pela regra dos sinais de Descartes, $p_5(\lambda)$ tem exatamente uma raiz real λ_1 positiva e as outras duas λ_2 e λ_3 ou são reais negativas ou são complexas conjugadas. Se λ_2 e λ_3 forem reais negativas, P_5 é do tipo 1. Suponha que elas são complexas conjugadas. Então $\text{Re}(\lambda_2) = \text{Re}(\lambda_3)$. Como $\lambda_1 > 0$, se $\text{Re}(\lambda_2) > 0$ então $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ para $i = 1, 2, 3$. Daí pelo Corolário 4.10, segue, em particular, que

$$-\text{tr}(J(P_5)) < 0$$

o que é um absurdo. Logo não pode ocorrer $\text{Re}(\lambda_2) > 0$. Portanto $\text{Re}(\lambda_2) = \text{Re}(\lambda_3) < 0$ e neste caso P_5 também é do tipo 1. \square

Corolário 4.14 *Se o ponto $P_5 = (\frac{\nu-\tau P}{\gamma P + \nu\alpha_2}, \frac{P(\gamma+\alpha_2\tau)}{\gamma P + \nu\alpha_2}, P)$ está no espaço de fase \mathbb{R}_+^3 e se $\alpha_1\alpha_2 > 1$ então P_5 é do tipo 1.*

Demonstração: Suponha que $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$ e que $\alpha_1\alpha_2 > 1$. Ao determinarmos P_5 (veja demonstração da Proposição 4.2), vimos suas coordenadas satisfaziam:

$$1 - N - \alpha_1 I - \phi(P) = 0 \quad \text{e} \quad 1 - I - \alpha_2 N = 0$$

Assim, escrevendo $P_5 = (N, I, P)$, a matriz jacobiana do sistema em P_5 é:

$$J(P_5) = \begin{bmatrix} -N & -N\alpha_1 & -N\frac{d\phi}{dP} \\ -\delta\alpha_2 I & -\delta I & 0 \\ -\gamma P & \nu & -(\gamma N + \tau) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Logo, como $\phi'(P) > 0$ (pois ϕ é crescente) e $\alpha_1\alpha_2 > 1$, temos

$$\det(J(P_5)) = N\delta I [\phi'(P)(\gamma P + \nu\alpha_2) + (\gamma N + \tau)(\alpha_1\alpha_2 - 1)] > 0$$

Portanto, pelo Teorema 4.13, P_5 é do tipo 1. \square

Teorema 4.15 *Se o ponto P_5 está no espaço de fase \mathbb{R}_+^3 , então ele é assintoticamente estável se, e só se,*

$$\det(J(P_5)) < 0.$$

Demonstração: Se P_5 está em \mathbb{R}_+^3 e é assintoticamente estável, então, pelo Corolário 4.12, $\det(J(P_5))$

< 0 . Reciprocamente, suponha que $\det(J(P_5)) < 0$. Para garantir a estabilidade de P_5 , basta mostrar que a matriz jacobiana $J(P_5)$ satisfaz as condições (4.12). A segunda delas está satisfeita por hipótese. A primeira também está satisfeita pois $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$ implica $\text{tr}(J(P_5)) = -N - \delta I - \gamma N - \tau < 0$. Resta mostrar então que $\det(J(P_5)) - \text{tr}(J(P_5))B(J(P_5)) > 0$. Da expressão do determinante de $J(P_5)$

dado pela equação (4.4.1), temos

$$\det(J(P_5)) = N\delta I [\phi'(P)(\gamma P + \nu\alpha_2) + (\gamma N + \tau)(\alpha_1\alpha_2 - 1)]. \quad (4.14)$$

Como $\det(J(P_5)) < 0$ por hipótese, necessariamente devemos ter $\alpha_1\alpha_2 < 1$. Ainda, como $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$, de (4.14) temos

$$\begin{aligned} \phi'(P)\gamma P + \phi'(P)\nu\alpha_2 + (\gamma N + \tau)(\alpha_1\alpha_2 - 1) &< 0 \\ \Rightarrow \phi'(P)\gamma P &< (\gamma N + \tau)(1 - \alpha_1\alpha_2) - \phi'(P)\nu\alpha_2 \\ \Rightarrow -\phi'(P)\gamma P &> -(\gamma N + \tau)(1 - \alpha_1\alpha_2) + \phi'(P)\nu\alpha_2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Da matriz jacobiana $J(P_5)$ dada em (4.13), temos

$$B(J(P_5)) = N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2) - \phi'(P)\gamma PN + (\gamma N + \tau)(N + \delta I).$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} &\det(J(P_5)) - \text{tr}(J(P_5))B(J(P_5)) \\ &= N\delta I(\phi'(P)(\gamma P + \nu\alpha_2) + (\gamma N + \tau)(\alpha_1\alpha_2 - 1)) \\ &\quad + (N + \delta I + \gamma N + \tau)(N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2) - \phi'(P)\gamma PN + (\gamma N + \tau)(N + \delta I)) \\ &= N\delta I\phi'(P)(\gamma P + \nu\alpha_2) - N\delta I(\gamma N + \tau)(1 - \alpha_1\alpha_2) \\ &\quad + (N + \delta I + \gamma N + \tau)(N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2) + (\gamma N + \tau)(N + \delta I)) \\ &\quad - (N + \delta I + \gamma N + \tau)\phi'(P)\gamma PN \\ &= N\delta I\phi'(P)\nu\alpha_2 \\ &\quad + (N + \delta I)(N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2) + (\gamma N + \tau)(N + \delta I)) + (\gamma N + \tau)^2(N + \delta I) \\ &\quad - \phi'(P)\gamma PN(N + \gamma N + \tau). \end{aligned}$$

Como $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$ e $\alpha_1\alpha_2 < 1$, de (4.15) e da última igualdade, temos

$$\det(J(P_5)) - \text{tr}(J(P_5))B(J(P_5))$$

$$\begin{aligned}
&> N\delta I\phi'(P)\nu\alpha_2 + (N + \delta I)(N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2) + (\gamma N + \tau)(N + \delta I)) + (\gamma N + \tau)^2(N + \delta I) \\
&\quad - (\gamma N + \tau)(1 - \alpha_1\alpha_2)N(N + \gamma N + \tau) + \phi'(P)\nu\alpha_2N(N + \gamma N + \tau) \\
&= N\delta I\phi'(P)\nu\alpha_2 + (N + \delta I)(N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2) + (\gamma N + \tau)(N + \delta I)) + (\gamma N + \tau)^2\delta I \\
&\quad + \alpha_1\alpha_2(\gamma N + \tau)N(N + \gamma N + \tau) - (\gamma N + \tau)N^2 + \phi'(P)\nu\alpha_2N(N + \gamma N + \tau) \\
&= \phi'(P)\nu\alpha_2N(\delta I + N + \gamma N + \tau) + \delta I(N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2) + (\gamma N + \tau)(N + \delta I)) \\
&\quad + N(N\delta I(1 - \alpha_1\alpha_2) + (\gamma N + \tau)\delta I) + (\gamma N + \tau)^2\delta I + \alpha_1\alpha_2(\gamma N + \tau)N(N + \gamma N + \tau) > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a terceira condição está satisfeita, e assim, P_5 é estável. \square

A seguir, baseado nas equações que a coordenada P de P_5 deve satisfazer, iremos obter alguns critérios para saber quando P_5 estará em \mathbb{R}_+^3 ou não.

Proposição 4.16 (i) Se $\alpha_1\alpha_2 > 1$ então $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$ se, e só se, existe uma raiz P da equação (4.8) satisfazendo $1 \leq P \leq \frac{\nu}{\tau}$, $\alpha_1 + \phi(P) > 1$ e $\alpha_2 > 1 + \alpha_2\phi(P)$.

(ii) Se $\alpha_1\alpha_2 < 1$, então $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$ se, e só se, existe uma raiz P da equação (4.8) satisfazendo $1 \leq P \leq \frac{\nu}{\tau}$, $\alpha_1 + \phi(P) < 1$ e $\alpha_2 < 1 + \alpha_2\phi(P)$.

Demonstração: Basta observar que, para que

$$P_5 = \left(\frac{\nu - \tau P}{\gamma P + \nu\alpha_2}, \frac{P(\gamma + \alpha_2\tau)}{\gamma P + \nu\alpha_2}, P \right) = \left(\frac{1 - \alpha_1 - \phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P))}{\gamma(1 - \alpha_1 - \phi(P)) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)} \right)$$

esteja em \mathbb{R}_+^3 , o numerador e o denominador de cada uma de suas coordenadas devem ter o mesmo sinal e que a terceira coordenada de P_5 deve ser maior ou igual que 1. \square

Proposição 4.17 O número de pontos

$$P_5 = \left(\frac{1 - \alpha_1 - \phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P))}{\gamma(1 - \alpha_1 - \phi(P)) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)} \right)$$

pertencentes ao espaço de fases \mathbb{R}_+^3 é igual ao número de raízes da equação

$$(\xi + (P - 1)^2)(K_3P - K_4) + \xi\beta(\gamma P + \nu\alpha_2) = 0 \quad (4.16)$$

no intervalo $[1, \nu/\tau]$.

Demonstração: O número de pontos

$$P_5 = \left(\frac{1 - \alpha_1 - \phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P)}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P))}{\gamma(1 - \alpha_1 - \phi(P)) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)} \right)$$

pertencentes ao espaço de fases \mathbb{R}_+^3 é o número de raízes da equação

$$P = \frac{\nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P))}{\gamma(1 - \alpha_1 - \phi(P)) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)} \quad (4.17)$$

no intervalo $[1, \nu/\tau]$, já que $P \geq 1$ em P_5 e $N = \frac{\nu - \tau P}{\gamma P + \nu\alpha_2} \geq 0$ implica $P \leq \nu/\tau$. Na demonstração da Proposição 4.2, vimos que (4.17) é equivalente a (4.16). \square

Lema 4.18 *O número de raízes $P \geq 1$ da equação (4.16) é exatamente o número de raízes $u \geq 0$ do polinômio*

$$g(u) = K_3 u^3 + (K_3 - K_4)u^2 + (K_3 + \beta\gamma)\xi u + \xi(K_3 - K_4 + \beta(\gamma + \nu\alpha_2)) \quad (4.18)$$

Demonstração: Defina $\bar{g}(P) = (\xi + (P - 1)^2)(K_3 P - K_4) + \beta(\gamma P + \nu\alpha_2)$. Se $P \geq 1$ é uma raiz de $\bar{g}(P) = 0$, então $u = P - 1 \geq 0$ é uma raiz de $\bar{g}(u + 1) = 0$. Mas $\bar{g}(u + 1) = (\xi + u^2)(K_3(u + 1) - K_4) + \beta(\gamma(u + 1) + \nu\alpha_2) = K_3 u^3 + (K_3 - K_4)u^2 + (K_3 + \beta\gamma)\xi u + \xi(K_3 - K_4 + \beta(\gamma + \nu\alpha_2)) = g(u)$, logo u é raiz não negativa de (4.18). Reciprocamente, se $u \geq 0$ é uma raiz de (4.18), então é uma raiz de $\bar{g}(u + 1) = 0$. Logo, $P = u + 1 \geq 1$ é uma raiz de (4.16). \square

Observação: Lembrando que $K_3 = \gamma(1 - \alpha_1 - \beta) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)$ e $K_4 = \nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\beta)$, o termo independente no polinômio $g(u)$ em 4.18 é

$$\xi(K_3 - K_4 + \beta(\gamma + \nu\alpha_2)) = \xi(\gamma(1 - \alpha_1) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2) + \nu(\alpha_2 - 1)) = \xi a_0$$

onde a_0 é a constante relacionada a existência de P_4 em \mathbb{R}_+^3 (ver Proposição 4.7). Desta maneira, o polinômio $g(u)$ se reescreve como

$$g(u) = K_3 u^3 + (K_3 - K_4)u^2 + (K_3 + \beta\gamma)\xi u + \xi a_0$$

Lema 4.19 *O número de pontos $P_5 = (\frac{1-\alpha_1-\phi(P)}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{1-\alpha_2+\alpha_2\phi(P)}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1-\alpha_2+\alpha_2\phi(P))}{\gamma(1-\alpha_1-\phi(P))+\tau(1-\alpha_1\alpha_2)})$ pertencentes ao espaço de fases \mathbb{R}_+^3 é igual ao número de raízes no intervalo $[1, \nu/\tau]$ da função*

$$h(x) = \phi(x) - \left(\frac{x(\gamma(1 - \alpha_1) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)) + \nu(\alpha_2 - 1)}{\gamma x + \nu\alpha_2} \right) \quad (4.19)$$

definida em $[1, +\infty)$. Ainda, $h(x)$ assim definida é de classe C^1 e satisfaz:

- (i) $h(1) = \frac{-a_0}{\gamma + \nu\alpha_2}$;
- (ii) $h(\frac{\nu}{\tau}) = (\gamma + \alpha_2\tau)(\phi(\frac{\nu}{\tau}) + \alpha_1 - 1)$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{\gamma(\alpha_1 + \beta - 1) + \tau(\alpha_1\alpha_2 - 1)}{\gamma} = \frac{-K_3}{\gamma}$;
- (iv) $h'(x) = \phi'(x) + \frac{\nu(\gamma + \alpha_2\tau)}{(\gamma x + \nu\alpha_2)}(\alpha_1\alpha_2 - 1)$.

Demonstração: Já sabemos que o número de pontos $P_5 = (\frac{1-\alpha_1-\phi(P)}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{1-\alpha_2+\alpha_2\phi(P)}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1-\alpha_2+\alpha_2\phi(P))}{\gamma(1-\alpha_1-\phi(P))+\tau(1-\alpha_1\alpha_2)})$ pertencentes ao espaço de fases \mathbb{R}_+^3 é o número de raízes da equação

$$P = \frac{\nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P))}{\gamma(1 - \alpha_1 - \phi(P)) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)} \quad (4.20)$$

no intervalo $[1, \nu/\tau]$. Mas (4.20) é equivalente a

$$\begin{aligned} P\gamma(1 - \alpha_1 - \phi(P)) + P\tau(1 - \alpha_1\alpha_2) &= \nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\phi(P)) \Leftrightarrow \\ P\gamma(1 - \alpha_1) + P\tau(1 - \alpha_1\alpha_2) + \nu(\alpha_2 - 1) &= \nu\alpha_2\phi(P) + \gamma P\phi(P) \Leftrightarrow \\ \phi(P) &= \left(\frac{P(\gamma(1 - \alpha_1) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)) + \nu(\alpha_2 - 1)}{\gamma P + \nu\alpha_2} \right) \end{aligned}$$

Definindo $h(x)$ como acima, vemos que (4.20) é equivalente a $h(P) = 0$. As propriedades de h são imediatas. \square

Analisando a Tabela 4.1, vemos que o espaço de parâmetros está dividido em pelo menos 6 regiões hiperbólicas, cada uma com um comportamento qualitativo diferente. Com as ferramentas acima, no próximo teorema iremos provar a não existência de P_5 em \mathbb{R}_+^3 , ou sua instabilidade, em algumas dessas regiões.

Teorema 4.20 (i) Se $\alpha_1 > 1 > \alpha_2$ então $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$.

(ii) Se $\alpha_2 > 1 > \alpha_1 + \phi(\nu/\tau)$ e $\alpha_2\alpha_1 > 1$, então $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$.

(iii) Se $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 > 1$ e $a_0 < 0$, então $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$.

(iv) Se $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 > 1$ e $a_0 > 0$, então exatamente um ponto P_5 está em \mathbb{R}_+^3 e é do tipo 1.

(v) Se $\alpha_2 > 1 > \alpha_1$ e $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$, então há somente um ponto $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$, que é do tipo 1.

Demonstração:

- (i) Suponha $\alpha_1 > 1 > \alpha_2$. Temos dois casos. Se $\alpha_1\alpha_2 > 1$, pela Proposição 4.16, temos que P_5 está em \mathbb{R}_+^3 se, e só se, $\alpha_1 + \phi(P) > 1$ e $\alpha_2 > 1 + \alpha_2\phi(P)$. A primeira destas condições é satisfeita pois $\alpha_1 > 1$ e $\phi(P) > 0$. Porém a segunda condição não é satisfeita, uma vez que $\alpha_2 < 1$ implica $\alpha_2 < 1 + \alpha_2\phi(P)$. Logo, se $\alpha_1\alpha_2 > 1$, então $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$. Agora, suponha que $\alpha_1\alpha_2 < 1$. Pela Proposição 4.16, P_5 pertence a \mathbb{R}_+^3 se, e só se, $\alpha_1 + \phi(P) < 1$ e $\alpha_2 < 1 + \alpha_2\phi(P)$. A primeira destas condições não é satisfeita, pois $\alpha_1 > 1$. Logo $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$.
- (ii) Suponha $\alpha_2 > 1 > \alpha_1 + \phi(\nu/\tau)$ e $\alpha_2\alpha_1 > 1$. Então, pela Proposição 4.16, P_5 pertence a \mathbb{R}_+^3 se, e só se, $\alpha_1 + \phi(P) > 1$ e $\alpha_2 > 1 + \alpha_2\phi(P)$, mas é imediato verificar que a primeira destas condições não ocorre, uma vez que $P \leq \nu/\tau$ implica $\phi(P) \leq \phi(\nu/\tau)$ e daí $\alpha_1 + \phi(P) < \alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$.
- (iii) Suponha $\alpha_1 > 1$ e $\alpha_2 > 1$ e $a_0 < 0$. Vamos analisar a existência de raízes de h . Pelo Lema 4.19, temos $h'(x) = \phi'(x) + \frac{\nu(\gamma + \alpha_2\tau)}{(\gamma x + \nu\alpha_2)}(\alpha_1\alpha_2 - 1) > 0$, logo h é crescente. Como $h(1) = \frac{-a_0}{\gamma + \nu\alpha_2} > 0$, segue que h não tem raízes maiores que 1. Pelo Lema 4.19, $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$.

(iv) Suponha $\alpha_1 > 1$ e $\alpha_2 > 1$ e $a_0 > 0$. Temos que $h'(x) = \phi'(x) + \frac{\nu(\gamma + \alpha_2\tau)}{(\gamma x + \nu\alpha_2)}(\alpha_1\alpha_2 - 1) > 0$, portanto h será crescente e terá, no máximo uma raiz real. Como $h(1) = \frac{-a_0}{\gamma + \nu\alpha_2} < 0$ e $h(\frac{\nu}{\tau}) = (\gamma + \alpha_2\tau)(\phi(\frac{\nu}{\tau}) + \alpha_1 - 1) > 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário, h tem de fato uma raiz, e ela pertence ao intervalo $[1, \nu/\tau]$. Pelo Lema 4.19, existe um único $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$ e, pelo Corolário 4.14, P_5 é do tipo 1.

(v) Suponha que $\alpha_2 > 1 > \alpha_1$ e $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$. Como $\nu > \tau$ por definição, temos $a_0 = \gamma(1 - \alpha_1) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2) + \nu(\alpha_2 - 1) > \gamma(1 - \alpha_1) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2) + \tau(\alpha_2 - 1) = (\gamma + \tau\alpha_2)(1 - \alpha_1) > 0$. Logo $h(1) = \frac{-a_0}{\gamma + \nu\alpha_2} < 0$ e $h(\frac{\nu}{\tau}) = (\gamma + \alpha_2\tau)(\phi(\frac{\nu}{\tau}) + \alpha_1 - 1) > 0$, de modo que h tem uma raiz no intervalo $[1, \nu/\tau]$. Resta mostrar que esta raiz é única. Dividiremos a prova em dois casos.

Suponha que $\alpha_1\alpha_2 > 1$. Então $h'(x) = \phi'(x) + \frac{\nu(\gamma + \alpha_2\tau)}{(\gamma x + \nu\alpha_2)}(\alpha_1\alpha_2 - 1)$ é positiva, portanto h é crescente e tem uma única raiz maior que 1. Pelo Lema 4.19, existe um único $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$ e, pelo Corolário 4.14, P_5 é do tipo 1.

Suponha agora que $\alpha_1\alpha_2 < 1$. Vamos analisar quantas raízes u positivas tem a equação (4.18). Temos $(K_3 - K_4 + \beta(\gamma + \nu\alpha_2))\xi = a_0\xi > 0$. Ainda, $K_3 + \beta\gamma = \gamma(1 - \alpha_1) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2) > 0$. Logo, os dois últimos coeficientes de $g(u)$ são positivos. Para analisar os dois primeiros coeficientes, novamente consideramos dois casos. Suponha $K_3 > 0$. Então, os sinais dos coeficientes de $g(u)$ são $+\pm++$, logo $\delta_{g(u)} = 0$ ou 2, de modo que ou $g(u)$ não possui nenhuma raiz positiva ou possui duas raízes positivas. Porém, se g não possuísse nenhuma raiz, pelo Lema 4.18, a equação (4.16) não possuiria nenhuma raiz e, daí, pelo Lema 4.19, $h(x)$ não teria nenhuma raiz, o que é um absurdo, pois provamos anteriormente que h tem pelo menos uma raiz. Assim, g possui duas raízes positivas, o que, pelos lemas anteriores, implica em $h(x)$ possuir exatamente duas raízes maiores que 1. Já vimos que uma delas está no intervalo $[1, \nu/\tau]$. Como $h(\frac{\nu}{\tau}) > 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{-K_3}{\gamma} < 0$, a outra raiz de h é maior que ν/τ e daí existe apenas um ponto $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$. Finalmente, suponha $K_3 < 0$. Até o momento, sabemos que os sinais dos coeficientes de $g(u)$ são $-\pm++$. Mas note que como $\beta > \phi(\nu/\tau)$, (pois β é o valor assintótico de $\phi(P)$ com $P \rightarrow \infty$), temos que $\alpha_1 + \beta > 1$. Daí, $\beta > 1 - \alpha_1 > 0$. Assim, temos $K_4 = \nu(1 - \alpha_2 + \beta\alpha_2) > \nu(1 - \alpha_2 + (1 - \alpha_1)\alpha_2) = \nu(1 - \alpha_1\alpha_2) > 0$. Portanto, $K_3 - K_4 < 0$. Assim, os sinais dos coeficientes de $g(u)$ são $--++$, de modo que g tem uma única raiz e, daí, h também tem uma única raiz, que é aquela no intervalo $[1, \nu/\tau]$. Sendo $\alpha_1\alpha_2 < 1$, não podemos usar o Corolário 4.14 para provar que P_5 é do tipo 1. Mas, observe que neste cenário onde $\alpha_2 > 1 > \alpha_1$ e $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$, temos P_2 e P_3 estáveis, $P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ e P_1 do tipo 2. Pelo Teorema 2.27, a fronteira de $A(P_2)$ e de $A(P_3)$ deve conter pelo menos um ponto do tipo 1. O único que pode satisfazer isto é P_5 . Isto termina a demonstração. \square

Adicionando-se as informações fornecidas pelo último teorema a Tabela 4.1, temos a Tabela 4.2, que está quase completa, isto é, o espaço de parâmetros está decomposto em regiões hiperbólicas (regiões no espaço de parâmetros nas quais

todos os pontos de equilíbrios são hiperbólicos), cuja união é densa no espaço de parâmetros, e em quase todas estas regiões, temos uma descrição da estabilidade de cada ponto de equilíbrio.

Tabela 4.2: Estabilidade dos pontos fixos

	$\alpha_2 < 1 - P_2$ tipo 1		$\alpha_2 > 1 - P_2$ estável	
	$a_0 < 0$	$a_0 > 0$	$\alpha_1\alpha_2 < 1$	$\alpha_1\alpha_2 > 1$
$\alpha_1 < 1$ $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$ P_3 tipo 1	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$	P_4 estável	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$
	P_2 tipo 1	P_2 tipo 1	P_2 estável	P_2 estável
	P_3 tipo 1	P_3 tipo 1	P_3 tipo 1	P_3 tipo 1
	$P_5 ?$	$P_5 ?$	$P_5 ?$	$P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$
$\alpha_1 < 1$ $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$ P_3 estável	$a_0 < 0$	$a_0 > 0$	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$	
	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$	P_4 estável	P_2 estável	
	P_2 tipo 1	P_2 tipo 1	P_3 estável	
	P_3 estável	P_3 estável	P_5 tipo 1	
$\alpha_1 > 1$ P_3 estável	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ P_2 tipo 1 P_3 estável $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$		$a_0 < 0$	$a_0 > 0$
			P_4 tipo 1	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$
			P_2 estável	P_2 estável
			P_3 estável	P_3 estável
			$P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$	P_5 tipo 1

Antes de prosseguir com análise da estabilidade nas regiões ainda estudadas, no Teorema (4.21), estabelecemos condições suficientes para que P_5 seja estável.

Teorema 4.21 *Suponha que o ponto P_5 está no espaço de fase \mathbb{R}_+^3 .*

- Se $K_3 > 0$ (o que equivale a $\alpha_1 + \beta < 1 + \frac{\tau}{\gamma}(1 - \alpha_1\alpha_2)$), então uma condição suficiente para P_5 seja estável é

$$(K_3 - K_4)^2 < \frac{9K_3\nu\beta\xi(\gamma + \tau\alpha_2)(1 - \alpha_1\alpha_2)}{4}. \quad (4.21)$$

- Se $K_3 < 0$ (o que equivale a $\alpha_1 + \beta > 1 + \frac{\tau}{\gamma}(1 - \alpha_1\alpha_2)$), então uma condição suficiente para P_5 seja estável é

$$\alpha_1 + \beta < 1 + \tau\sqrt{\frac{\tau\beta\xi(1 - \alpha_1\alpha_2)}{2\nu(\nu - \tau)(\gamma + \tau\alpha_2)}}. \quad (4.22)$$

Demonstração: Queremos obter condições sobre os parâmetros que garantam que

$$\det(J(P_5)) = N\delta I [\phi'(P)(\gamma P + \nu\alpha_2) + (\gamma N + \tau)(\alpha_1\alpha_2 - 1)] < 0 \quad (4.23)$$

Escrevendo $P_5 = (N, I, P)$ sabemos que N é dado por $N = \frac{\nu - \tau P}{\gamma P + \nu\alpha_2}$. Daí,

$$\gamma N + \tau = \frac{\gamma(\nu - \tau P) + \tau(\gamma P + \nu\alpha_2)}{\gamma P + \nu\alpha_2} = \frac{\nu(\gamma + \tau\alpha_2)}{\gamma P + \nu\alpha_2}. \quad (4.24)$$

Ainda, para $P \geq 1$, temos $\phi(P) = \frac{\beta(P-1)^2}{(\xi+(P-1)^2)}$. Logo, como em P_5 , $P \geq 1$, temos

$$\phi'(P) = \frac{2\beta(P-1)(\xi + (P-1)^2) - \beta(P-1)^2 2(P-1)}{(\xi + (P-1)^2)^2} = \frac{2\beta(P-1)\xi}{(\xi + (P-1)^2)^2}. \quad (4.25)$$

Sabemos também que a terceira coordenada P de P_5 é raiz da equação

$$(\xi + (P-1)^2)(K_3P - K_4) + \xi\beta(\gamma P + \nu\alpha_2) = 0. \quad (4.26)$$

Daí, obtemos

$$(\xi + (P-1)^2) = -\frac{\xi\beta(\gamma P + \nu\alpha_2)}{(K_3P - K_4)}. \quad (4.27)$$

Logo, de (4.27) e (4.25), temos

$$\begin{aligned} \phi'(P)(\gamma P + \nu\alpha_2) &= \frac{2\beta\xi(P-1)(\gamma P + \nu\alpha_2)}{(\xi + (P-1)^2)^2} = \frac{2\beta\xi(P-1)(\gamma P + \nu\alpha_2)}{\frac{\xi^2\beta^2(\gamma P + \nu\alpha_2)^2}{(K_3P - K_4)^2}} \\ &= \frac{2(P-1)(K_3P - K_4)^2}{\beta\xi(\gamma P + \nu\alpha_2)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Assim, substituindo (4.24) e (4.28) em (4.23), temos

$$\begin{aligned} \det(J(P_5)) &= N\delta I \left[\frac{2(P-1)(K_3P - K_4)^2}{\xi\beta(\gamma P + \nu\alpha_2)} + \frac{\nu(\gamma + \tau\alpha_2)}{\gamma P + \nu\alpha_2}(\alpha_1\alpha_2 - 1) \right] \\ &= \frac{N\delta I}{\xi\beta(\gamma P + \nu\alpha_2)} [2(P-1)(K_3P - K_4)^2 + \xi\beta\nu(\gamma + \tau\alpha_2)(\alpha_1\alpha_2 - 1)]. \end{aligned}$$

Assim, como $P_5 = (N, I, P) \in \mathbb{R}_+^3$, $\det(J(P_5))$ será negativo se, e somente se,

$$(P-1)(K_3P - K_4)^2 < \frac{\nu\beta\xi(\gamma + \tau\alpha_2)(1 - \alpha_1\alpha_2)}{2} := K_0 \quad (4.29)$$

onde $P \in [1, \nu/\tau]$ é uma raiz da equação (4.26). Pelo Teorema 4.15, a condição (4.29) é necessária e suficiente para que P_5 seja estável. Podemos impor aos parâmetros condições suficientes para que (4.29) ocorra. Considere a função

$$r(x) = (x-1)(K_3x - K_4)^2 \quad (4.30)$$

definida para $x \geq 1$. Então, uma condição suficiente para que (4.29) ocorra é que o máximo de $r(x)$ num intervalo compacto contendo P seja menor que K_0 . Temos dois casos a considerar: $K_3 > 0$ e $K_3 < 0$. Como $K_3 = \gamma(1 - \alpha_1 - \beta) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)$, estes casos equivalem, respectivamente, a $\alpha_1 + \beta < 1 + \frac{\tau}{\gamma}(1 - \alpha_1\alpha_2)$ e $\alpha_1 + \beta > 1 + \frac{\tau}{\gamma}(1 - \alpha_1\alpha_2)$. Note que $\alpha_1\alpha_2 < 1$ pois, do contrário, pelo Corolário (4.14), P_5 seria do tipo 1.

Suponha que $K_3 > 0$, ou equivalentemente, $\alpha_1 + \beta < 1 + \frac{\tau}{\gamma}(1 - \alpha_1\alpha_2)$. Sabemos que $1 \leq P \leq \nu/\tau$ e daí $K_3 \leq K_3P$. Da equação (4.26), como todos os seus termos exceto possivelmente $K_3P - K_4$ são positivos, temos $K_3P - K_4 < 0$. Logo

$K_3P < K_4$. Daí temos $P < K_4/K_3$ e, por transitividade, $K_4 > K_3 > 0$. Assim, as duas únicas raízes de $r(x)$, 1 e K_4/K_3 (raiz dupla), são positivas e P pertence ao intervalo $[1, K_4/K_3]$. Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) = \pm\infty$ e como 1 é raiz simples de $r(x)$, segue que $r(x)$ possui um máximo local positivo em algum ponto $x_0 \in (1, K_4/K_3)$ e que, neste ponto, $r'(x_0) = 0$. Como $r'(x) = (K_3x - K_4)(3K_3x - (2K_3 + K_4))$, segue que $x_0 = \frac{2K_3 + K_4}{3K_3}$. Assim, basta exigir $h(\frac{2K_3 + K_4}{3K_3}) < K_0$ para que se tenha (4.29). Isto é o mesmo que

$$\frac{2}{9K_3}(K_3 - K_4)^2 < K_0$$

o que equivale a

$$(K_3 - K_4)^2 < \frac{9K_3\nu\beta\xi(\gamma + \tau\alpha_2)(1 - \alpha_1\alpha_2)}{4}. \quad (4.31)$$

Suponha agora que $K_3 < 0$, ou seja, $\alpha_1 + \beta > 1 + \frac{\tau}{\gamma}(1 - \alpha_1\alpha_2)$. Afirmamos que $K_4 > 0$. De fato, como $\alpha_1\alpha_2 < 1$, temos $\alpha_1 + \beta > 1 + \frac{\tau}{\gamma}(1 - \alpha_1\alpha_2) > 1$. Logo, $\beta > 1 - \alpha_1$ e daí

$$K_4 = \nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\beta) > \nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2(1 - \alpha_1)) = \nu(1 - \alpha_1\alpha_2) > 0. \quad (4.32)$$

Portanto, a raiz dupla K_3/K_4 de $r(x)$ é negativa e a outra raiz é 1. Pelos mesmos argumentos do caso anterior, teremos, r crescente a partir de $x = 1$, e daí, $r(x) \geq r(1) = 0$ para todo $x \geq 1$. Como $P \in [1, \nu/\tau]$, e r é crescente, para se ter $r(P) < K_0$ é suficiente ter $r(\nu/\tau) < K_0$. Mas,

$$\begin{aligned} r\left(\frac{\nu}{\tau}\right) &= \left(\frac{\nu}{\tau} - 1\right)\left(K_3\frac{\nu}{\tau} - K_4\right)^2 \\ &= \frac{1}{\tau^3}(\nu - \tau)(\nu(\gamma(1 - \alpha_1 - \beta) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)) - \tau(\nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\beta)))^2 \\ &= \frac{\nu^2}{\tau^3}(\nu - \tau)((\gamma + \tau\alpha_2)(1 - \alpha_1 - \beta))^2. \end{aligned}$$

Logo, $r(\nu/\tau) < K_0$ é equivalente a

$$\frac{\nu^2}{\tau^3}(\nu - \tau)((\gamma + \tau\alpha_2)(1 - \alpha_1 - \beta))^2 < \frac{\nu\beta\xi(\gamma + \tau\alpha_2)(1 - \alpha_1\alpha_2)}{2}$$

$$(1 - \alpha_1 - \beta)^2 < \frac{\tau^3\beta\xi(1 - \alpha_1\alpha_2)}{2\nu(\nu - \tau)(\gamma + \tau\alpha_2)}$$

$$|1 - \alpha_1 - \beta| < \tau\sqrt{\frac{\tau\beta\xi(1 - \alpha_1\alpha_2)}{2\nu(\nu - \tau)(\gamma + \tau\alpha_2)}}.$$

Como estamos supondo $K_3 < 0$, que equivale a $\alpha_1 + \beta > 1 + \frac{\tau}{\gamma}(1 - \alpha_1\alpha_2) > 1$, temos que $r(\nu/\tau) < K_0$ se, e só se,

$$\alpha_1 + \beta < 1 + \tau \sqrt{\frac{\tau\beta\xi(1 - \alpha_1\alpha_2)}{2\nu(\nu - \tau)(\gamma + \tau\alpha_2)}}. \quad (4.33)$$

Isto termina a demonstração. \square

Da mesma forma que o discriminante de um polinômio de grau dois fornece um critério para contar as raízes reais e complexas daquele polinômio, temos um resultado análogo para polinômios de grau três. Este é o conteúdo da Proposição (4.22), cuja demonstração pode ser encontrada em [19].

Proposição 4.22 *Considere o polinômio cúbico de coeficientes reais*

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (4.34)$$

Seja

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 \quad (4.35)$$

Temos os seguintes casos:

- Se $\Delta > 0$, então $p(x)$ tem três raízes reais distintas.
- Se $\Delta = 0$, então $p(x)$ tem uma raiz múltipla e todas as suas raízes são reais.
- Se $\Delta < 0$, então $p(x)$ tem uma raiz real e duas raízes complexas (não reais) conjugadas.

Definição 4.23 *A constante Δ_u é definida como sendo o discriminante (4.35) do polinômio*

$$g(u) = K_3u^3 + (K_3 - K_4)u^2 + (K_3 + \beta\gamma)\xi u + \xi(K_3 - K_4 + \beta(\gamma + \nu\alpha_2)) \quad (4.36)$$

Iremos agora estudar a existência e estabilidade de P_5 naqueles subconjuntos do espaço de parâmetros que ainda não haviam sido analisados, que correspondem àquelas células da Tabela 4.2 onde não consta conclusão alguma sobre P_5 . Utilizaremos fortemente as implicações topológicas dadas pelos Teoremas 2.26 e 2.27 do Capítulo 2. Consideramos apenas as regiões hiperbólicas do espaço de parâmetros, isto é, as regiões onde todos os pontos de equilíbrio são hiperbólicos. Tal restrição não traz perda de generalidade ao estudo, pois a união destas regiões é um subconjunto denso no espaço de parâmetros, já que as regiões são definidas por desigualdades estritas e suas fronteiras são hipersuperfícies de codimensão um no espaço de parâmetros. Considerando estas regiões, a hipótese (A1) do Capítulo 2 está satisfeita. Como a hipótese (A2) também é genérica, podemos supor que ela é válida. Veremos que os resultados não irão contradizer esta hipótese. A partir dos resultados a seguir, concluiremos todas as soluções do sistema em \mathbb{R}_+^3 convergem para um ponto fixo, o que garante que o sistema satisfaz a hipótese (A3), de modo que podemos usar todos os teoremas do Capítulo 2, observando também que o campo associado ao sistema (4.7) é de classe C^1 .

Lema 4.24 Para todo $\epsilon > 0$, o paralelepípedo $C_\epsilon = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, \frac{\nu}{\tau} + \epsilon]$ é positivamente invariante pelo fluxo de (4.7) e, para todo $p \in \mathbb{R}_+^3$, $\omega(p)$ é não-vazio, compacto, conexo, invariante e está contido em C_ϵ .

Demonstração:

Inicialmente, observamos que os planos NP e IP são invariantes e estão contidos, respectivamente, em $A(P_2)$ e $A(P_3)$. Logo, precisamos nos preocupar apenas com o subconjunto R de \mathbb{R}_+^3 dado por $R = \{(N, I, P) \in \mathbb{R}_+^3 : N > 0, I > 0, P \geq 0\}$.

Para mostrar que C_ϵ é positivamente invariante, mostremos que o campo, em cada ponto da fronteira de C_ϵ , aponta para o interior de C_ϵ . A fronteira de C_ϵ que nos interessa é dividida em quatro faces: $C_1 = \{1\} \times (0, 1] \times [0, \frac{\nu}{\tau} + \epsilon]$, $C_2 = (0, 1] \times \{1\} \times [0, \frac{\nu}{\tau} + \epsilon]$, $C_3 = (0, 1] \times (0, 1] \times \{\frac{\nu}{\tau} + \epsilon\}$ e $C_4 = (0, 1] \times (0, 1] \times \{0\}$. Os vetores normais a C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , apontando para fora de C_ϵ , são, respectivamente, $n_1 = (1, 0, 0)$, $n_2 = (0, 1, 0)$, $n_3 = (0, 0, 1)$ e $n_4 = (0, 0, -1)$.

Se $(N, I, P) \in C_1$, então $N = 1$ e $0 < I \leq 1$. Daí

$$\langle f(N, I, P), n_1 \rangle = N(1 - N - \alpha_1 I - \phi(P)) = N(-\alpha_1 I - \phi(P)) < 0.$$

Da mesma forma, se $(N, I, P) \in C_2$, temos

$$\langle f(N, I, P), n_2 \rangle = \delta(1 - I - \alpha_2 N) = \delta(-\alpha_2 N) < 0$$

Se $(N, I, P) \in C_3$, então $P = \frac{\nu}{\tau} + \epsilon > 0$ e $0 < N, I \leq 1$. Assim

$$\langle f(N, I, P), n_3 \rangle = \nu I - \gamma NP - \tau P = \nu I - \gamma NP - \tau \frac{\nu}{\tau} = \nu(I - 1) - \gamma NP < 0$$

Finalmente, se $(N, I, P) \in C_4$, então $P = 0$ e daí

$$\langle f(N, I, P), n_4 \rangle = -\nu I + \gamma NP + \tau P = -\nu I < 0$$

Assim, em todos os casos, o campo calculado em um ponto da fronteira de C_ϵ aponta para dentro de C_ϵ , o que mostra que uma solução não pode sair de C_ϵ , já que o campo é tangente a cada curva integral. Assim, C_ϵ é positivamente invariante pelo fluxo.

Para mostrar que, para todo $p \in \mathbb{R}_+^3$, $\omega(p)$ é não-vazio, compacto, conexo e invariante, basta observar que em todo ponto $(N, I, P) \in \mathbb{R}_+^3 - C_\epsilon$, o vetor $f(N, I, P)$ aponta para C_ϵ . A demonstração deste fato é análoga à demonstração acima de que C_ϵ é invariante. Com isto, a semi-órbita positiva Γ_p^+ de todo ponto $p \in \mathbb{R}_+^3 - C_\epsilon$ está contida em algum compacto de \mathbb{R}_+^3 . Como C_ϵ é invariante e compacto, o mesmo acontece para os pontos $p \in C_\epsilon$. Pelo Teorema 1.15, segue o resultado.

Finalmente, mostremos que $\omega(p) \subset C_\epsilon$ para todo $p \in \mathbb{R}_+^3$.

Considere a função $V_1(N, I, P) = N$ e o aberto $H_1 = (1, +\infty) \times (0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Para todo $(N, I, P) \in H_1$, temos

$$\langle \nabla V_1(N, I, P), f(N, I, P) \rangle = N(1 - N - \alpha_1 I - \phi(P)) < -\alpha_1 I - \phi(P) < 0 \quad (4.37)$$

Pelo Corolário 1.19, segue que $\omega(q) \cap H_1 = \emptyset$.

Analogamente, considerando $V_2(N, I, P) = I$ e $H_2 = (0, +\infty) \times (1, +\infty) \times (0, +\infty)$, obtemos do Corolário 1.19, que $\omega(q) \cap H_2 = \emptyset$.

Como C_ϵ é invariante, resta mostrar que $\omega(q) \cap H_3 = \emptyset$ para os pontos q do aberto $H_3 = (0, 1+r) \times (0, 1+r) \times (\frac{\nu}{\tau} + \epsilon, +\infty)$, onde $r > 0$ é qualquer (temos que considerar os intervalos abertos $(0, 1+r)$ para cobrir as regiões onde $N = 1$ ou $I = 1$, que não foram cobertas). Considere a função $V_3(N, I, P) = P$. Para todo $(N, I, P) \in H_3$, temos

$$\frac{\nu I}{\gamma N + \tau} < \frac{\nu(1+r)}{\gamma N + \tau} < \frac{\nu(1+r)}{\tau} = \frac{\nu}{\tau} + \frac{\nu r}{\tau} < \frac{\nu}{\tau} + \epsilon < P \quad (4.38)$$

desde que $r < \frac{\tau\epsilon}{\nu}$. Assim, tomando $r < \frac{\tau\epsilon}{\nu}$, (4.38) se verifica, e daí

$$\nu I < P(\gamma N + \tau) \Rightarrow \langle V_3(N, I, P), f(N, I, P) \rangle = \nu I - \gamma NP - \tau P < 0$$

para todos pontos em H_3 . Logo, pelo Corolário 1.19, segue que $\omega(q) \cap H_3 = \emptyset$ para todo $q \in H_3$.

Como provamos que $\omega(q) \neq \emptyset$ para todo $q \in \mathbb{R}_+^3$, concluímos que se $q \in H_1 \cup H_2 \cup H_3$, então $\omega(q) \subset C_\epsilon$, pois, se $\omega(q) \cap H_i \neq \emptyset$ para algum $i = 1, 2, 3$, então, como H_i é aberto, existe $q' = \phi(t', q) \in H_i$, com $t' \geq 0$. Daí, pelo que provamos, $\omega(q') \cap H_i = \emptyset$, o que contradiz o fato $\omega(q) \cap H_i \neq \emptyset$ que havíamos suposto, pois $\omega(q') = \omega(q)$. Como C_ϵ é invariante, concluímos que também $\omega(q) \subset C_\epsilon$ para todo $q \in C_\epsilon$. Isto termina a demonstração. \square

Com o Lema (4.24), temos que todas as trajetórias em \mathbb{R}_+^3 tem seu conjunto ω -limite em C_ϵ . Isto não é suficiente para provar que todas elas convergem para algum ponto de equilíbrio, pois seu conjunto ω -limite pode ser uma órbita periódica ou um atrator estranho, ambos contidos em C_ϵ . Como estamos trabalhando somente na região hiperbólica do espaço de parâmetros, não podem ocorrer atratores estranhos. Numericamente, verificamos que não há nenhuma órbita periódica (este fato não foi verificado analiticamente). Assim, podemos enunciar o próximo resultado.

Teorema 4.25 *Todas as soluções de (4.7) iniciando em \mathbb{R}_+^3 convergem para um dos pontos fixos P_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$.*

Satisfeita a hipótese (A3), podemos aplicar os resultados do Capítulo 2 sobre bacias de atração e chegar a uma análise qualitativa completa do sistema (4.7).

Teorema 4.26 *Sobre a existência de P_5 em \mathbb{R}_+^3 e sobre a análise de sua estabilidade, temos os seguintes casos:*

- (i) *Suponha que $\alpha_2 < 1$, $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$ e $a_0 < 0$. Então há duas possibilidades: ou existem exatamente três pontos P_5 em \mathbb{R}_+^3 , dois estáveis e o outro do tipo 1, sendo sua variedade estável a fronteira entre as bacias de atração dos dois primeiros; ou então, existe apenas um ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 , o qual é estável.*
- (ii) *Suponha que $\alpha_2 < 1$, $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$ e $a_0 > 0$. Então há duas possibilidades: ou existem exatamente dois pontos P_5 em \mathbb{R}_+^3 , um estável e outro do tipo 1, sendo a variedade estável do segundo a fronteira entre as bacias de atração do primeiro e do ponto P_4 ; ou não existe nenhum ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 .*
- (iii) *Suponha que $\alpha_2 > 1$, $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$ e $\alpha_1\alpha_2 < 1$. Então há duas possibilidades: ou existem exatamente dois pontos P_5 em \mathbb{R}_+^3 , um estável e outro do tipo 1, sendo a variedade estável do segundo a fronteira entre as bacias de atração do primeiro e do ponto P_2 ; ou não existe nenhum ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 .*
- (iv) *Suponha que $\alpha_2 < 1$, $\alpha_1 < 1$, $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$ e $a_0 < 0$. Então há duas possibilidades: ou existem dois pontos $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$, um estável e outro do tipo 1, e neste caso a variedade estável do segundo é a fronteira entre as bacias de atração do primeiro e do ponto P_2 ; ou não existe nenhum ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 .*
- (v) *Suponha que $\alpha_2 < 1$, $\alpha_1 < 1$, $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$ e $a_0 > 0$. Então existe somente um ponto $P_5 \in \mathbb{R}_+^3$, que é do tipo 1, e sua variedade estável é a fronteira entre as bacias de atração do primeiro dos pontos P_2 e P_4 .*

Demonstração:

- (i) Considere as hipóteses $\alpha_2 < 1$, $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$ e $a_0 < 0$. Observamos que neste arranjo de parâmetros nenhum dos pontos fixos do sistema que estão em \mathbb{R}_+^3 é estável, exceto possivelmente P_5 . Portanto, como todas as soluções em \mathbb{R}_+^3 convergem para um ponto de equilíbrio, deverá existir pelo menos um ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 e este deverá ser estável. Suponha inicialmente que $K_3 > 0$. Lembrando que $K_3 - K_4 + \beta(\gamma + \nu\alpha_2) = a_0$, vamos mostrar que o número de mudanças no sinal dos coeficientes do polinômio $g(u) = K_3u^3 + (K_3 - K_4)u^2 + (K_3 + \beta\gamma)\xi u + \xi a_0$ é $\delta_{g(u)} = 3$. Inicialmente, note pelo Lema 4.19, que $h(1) = \frac{a_0}{\gamma + \nu\alpha_2} > 0$ e que $h(\nu/\tau) = (\gamma + \alpha_2\tau)(\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) - 1) < 0$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $P^* \in (1, \nu/\tau)$ tal que $h(P^*) = 0$. Pela Proposição 4.17, P^* é raiz da equação (4.16). Dali segue que $K_3P^* - K_4 < 0$. Como $K_3 > 0$ e $P^* > 1$, segue que $K_3 - K_4 < 0$. O terceiro coeficiente de $g(u)$, $K_3 + \beta\gamma$, é positivo, pois $K_3 + \beta\gamma = \gamma(1 - \alpha_1) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2)$. Portanto, os sinais dos coeficientes de $g(u)$ são $+-+-$ e daí $\delta_{g(u)} = 3$. Neste caso, se $\Delta_u \geq 0$, então $g(u)$ não tem

raízes complexas e necessariamente tem três raízes reais positivas. Estas três raízes dão origem a três pontos P_5 . Ou estes três estão em \mathbb{R}_+^3 ou apenas um deles. De fato, se dois deles estiverem, como comentado acima, um deve ser estável. O segundo deles não pode ser estável pois isto requeriria a existência de um terceiro, do tipo 1, que estaria na fronteira entre as bacias dos dois primeiros. O segundo também não pode ser instável, pois, neste caso, seria do tipo 1, e daí sua variedade estável seria parte da fronteira da bacia de atração do primeiro, logo existiria um subconjunto aberto de \mathbb{R}_+^3 que não estaria na bacia de atração de nenhum ponto estável. Se $\Delta_u < 0$, $g(u)$ tem duas raízes complexas e uma raiz real u positiva, a qual corresponde a raiz P^* de h , que dá origem ao único ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 , o qual deve ser estável. Suponha agora que $K_3 < 0$. Note então que $h(1) = \frac{a_0}{\gamma + \nu\alpha_2} > 0$, $h(\nu/\tau) = (\gamma + \alpha_2\tau)(\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) - 1) < 0$ e que $h(+\infty) = -K_3\gamma > 0$. Logo existem $P^* \in (1, \nu/\tau)$ e $P^{**} > \nu/\tau$ tais que $h(P^*) = h(P^{**}) = 0$. Logo $g(u)$ possui pelo menos duas raízes reais positivas. Mas como $K_3 < 0$, temos $K_3 - K_4 < 0$, e daí os sinais dos coeficientes de $g(u)$ são $--+-$, portanto $\delta_{g(u)} = 2$. Assim, $g(u)$ possui exatamente duas raízes reais positivas. Uma delas, correspondente a raiz $P^* \in (1, \nu/\tau)$ de $h(x)$, dá origem ao único ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 . A segunda delas, corresponde a raiz $P^{**} > \nu/\tau$ de $h(x)$ e, portanto, não dá origem a um ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 .

- (ii) A demonstração segue as mesmas idéias do item anterior. Note inicialmente que, por enquanto, P_4 é o único equilíbrio estável em \mathbb{R}_+^3 . Se algum outro P_5 estiver em \mathbb{R}_+^3 e for estável, teremos duas bacias de atração, daí deverá existir outro, do tipo 1, cuja variedade estável será a fronteira entre as bacias. Por outro lado, se algum outro P_5 estiver em \mathbb{R}_+^3 e for instável, sabemos que deverá ser do tipo 1, e daí sua variedade estável será parte da fronteira da bacia de atração de P_4 , logo deverá existir um outro ponto estável em \mathbb{R}_+^3 . O estudo das raízes de $g(u)$ e $h(x)$ confirma esta previsão. De fato, suponha inicialmente $K_3 > 0$. O sinal de $K_3 - K_4$ pode ser \pm . Já $K_3 + \beta\gamma$ e a_0 são positivos. Daí os sinais dos coeficientes de $g(u)$ são $\pm \pm ++$. Logo, $\delta_{g(u)} = 0$ ou 2 . Daí, ou $g(u)$ não tem raízes reais positivas ou tem exatamente duas. Se ocorre a primeira possibilidade, então nenhum P_5 está em \mathbb{R}_+^3 . Se ocorre a segunda, então, pelos argumentos topológicos acima, ou cada uma delas dá origem a um ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 ou nenhuma delas o faz. Suponha agora que $K_3 < 0$. Então os sinais dos coeficientes de $g(u)$ são $-\pm ++$. Daí $\delta_{g(u)} = 1$ e, portanto, $g(u)$ tem exatamente uma raiz real positiva. Assim, $h(x)$ tem uma única raiz maior que 1. Mas, como $h(\nu/\tau) = (\gamma + \alpha_2\tau)(\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) - 1) < 0$ e $h(\infty) = \frac{-K_3}{\gamma} > 0$, esta raiz é maior que ν/τ , de modo que nenhum P_5 está em \mathbb{R}_+^3 .
- (iii) Suponha que valham as hipóteses e $K_3 > 0$. Então $K_3 + \beta\gamma > 0$ e $a_0 = K_3 - K_4 + \beta(\gamma + \nu\alpha_2) = \gamma(1 - \alpha_1) + \nu(\alpha_2 - 1) > 0$. Daí os sinais dos coeficientes de $g(u)$ são $\pm \pm ++$. Logo $\delta_{g(u)} = 0$ ou 2 . Portanto, $g(u)$ tem zero ou duas raízes reais positivas. No primeiro caso, $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$. No segundo caso, suponha que uma das raízes dê origem a um ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 . Se este ponto P_5 for estável então temos duas bacias de atração, pois P_2 é estável,

daí deve existir outro ponto P_5 do tipo 1 em \mathbb{R}_+^3 , cuja variedade estável é a fronteira das bacias. Por outro lado, se o ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 originado da raiz positiva de $g(u)$ for do tipo 1, sua variedade estável passa a ser fronteira da bacia de atração de P_2 , logo deve existir outro ponto P_5 estável, para que as soluções que não comecem na bacia de P_2 convirjam para um equilíbrio. Suponha agora que as hipóteses são satisfeitas e que $K_3 < 0$. Então os coeficientes de $g(u)$ tem sinais $-\pm++$, logo $\delta_{g(u)} = 1$. Assim, $g(u)$ possui exatamente uma raiz real positiva e daí, $h(x)$ possui exatamente uma raiz real maior que um. Mas $h(\nu/\tau) = (\gamma + \alpha_2\tau)(\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) - 1) < 0$ e $h(\infty) = \frac{-K_3}{\gamma} > 0$. Logo $h(x)$ não possui raízes no intervalo $[1, \nu/\tau]$, de modo que $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$.

Obs: Demonstraremos os itens (iv) e (v) baseando-nos na análise das combinações resultantes dos casos $K_3 < 0$ ou $K_3 > 0$ e $a_0 < 0$ ou $a_0 > 0$, com as hipóteses comuns $\alpha_2 < 1$, $\alpha_1 < 1$ e $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$. Temos que $K_3 + \beta\gamma = \gamma(1 - \alpha_1) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2) > 0$. Ainda, como $K_4 = \nu(1 - \alpha_2 + \alpha_2\beta) > 0$, temos que $K_3 - K_4 < 0$ quando $K_3 < 0$. Notamos também que, como consequência da hipótese, temos $h(\frac{\nu}{\tau}) = (\gamma + \alpha_2\tau)(\alpha_1 + \phi(\frac{\nu}{\tau}) - 1) > 0$. Diante disto, escrevendo $+$ para valores positivos e $-$ para valores negativos, temos a Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Escrevendo $+$ para valores positivos e $-$ para os valores negativos, para contar as raízes de $g(u)$ e $h(x)$, iremos aplicar a Regra dos Sinais de Descartes e o Teorema Valor Intermediário.

	K_3	$K_3 - K_4$	$K_3 + \beta\gamma$	a_0	$\delta_{g(u)}$	$h(1) = \frac{-a_0}{\gamma + \nu\alpha_2}$	$h(\frac{\nu}{\tau})$	$h(\infty) = \frac{-K_3}{\gamma}$
$a_0 < 0$ e $K_3 > 0$	$+$	\pm	$+$	$-$	3 ou 1	$+$	$+$	$-$
$a_0 < 0$ e $K_3 < 0$	$-$	$-$	$+$	$-$	2	$+$	$+$	$+$
$a_0 > 0$ e $K_3 > 0$	$+$	\pm	$+$	$+$	2 ou 0	$-$	$+$	$-$
$a_0 > 0$ e $K_3 < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	1	$-$	$+$	$+$

Com base nos resultados da Tabela 4.3, analisemos a existência de raízes de $g(u)$ e de $h(x)$ em cada caso.

- (iv) Suponha que $\alpha_2 > 1$, $\alpha_1 < 1$, $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$ e $a_0 < 0$. Mostraremos primeiro o resultado para $K_3 > 0$, quando, $g(u)$ tem 3 ou 1 raízes reais positivas, e $h(x)$ tem uma raiz maior que $\frac{\nu}{\tau}$. Se $g(u)$ tiver apenas uma raiz positiva, ela corresponde a raiz de h maior que $\frac{\nu}{\tau}$. Neste caso, $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$. Se $g(u)$ tem três raízes positivas, uma delas corresponde a raiz de h já citada, e as outras duas, ou correspondem a duas raízes de h no intervalo $(1, \frac{\nu}{\tau})$, ou correspondem a duas raízes de h maiores que $\frac{\nu}{\tau}$, pois os valores de h nos extremos 1 e $\frac{\nu}{\tau}$ impedem que apenas uma raiz esteja entre os mesmos. Neste caso, ou as duas raízes originam dois pontos P_5 em \mathbb{R}_+^3 , ou não originam nenhum ponto P_5 . Caso existam dois pontos P_5 em \mathbb{R}_+^3 , se um deles for estável, o outro deverá ser do tipo 1 e vice-versa, o que prova nossa afirmação. Façamos agora o caso $K_3 < 0$, quando $g(u)$ pode ter zero ou duas raízes positivas. Se $g(u)$ não possui raízes positivas, então $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$. Se $g(u)$ possui duas raízes positivas, da mesma forma que no

caso anterior, ou as duas dão origem a duas raízes de h no intervalo $(1, \frac{\nu}{\tau})$, ou correspondem a duas raízes de h maiores que $\frac{\nu}{\tau}$. De maneira análoga, chegamos ao resultado.

- (v) Se $\alpha_2 > 1$, $\alpha_1 < 1$, $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$ e $a_0 > 0$, então P_4 está em \mathbb{R}_+^3 e é estável, juntamente com P_2 . Portanto, deve existir pelo menos um ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 , do tipo 1, de modo que sua variedade estável seja a fronteira entre as bacias de atração de P_2 e P_4 . Segue daí que h tem um raiz no intervalo $[1, \frac{\nu}{\tau}]$. Se $K_3 > 0$, da tabela, vemos que h tem outra raiz, maior que $\frac{\nu}{\tau}$. Deste modo, g deve ter exatamente 2 raízes. Como uma raiz de h é maior que $\frac{\nu}{\tau}$, segue que apenas uma raiz de g dá origem a um ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 , o qual é do tipo 1, como já havíamos mencionado. Finalmente, suponha que $K_3 < 0$. Então, pela tabela, $g(u)$ possui exatamente uma raiz, a qual corresponde a raiz de h no intervalo $(1, \frac{\nu}{\tau})$, de modo que existe apenas um ponto P_5 em \mathbb{R}_+^3 . \square

Com este último Teorema, preenchemos as lacunas deixadas na Tabela 4.2, e temos agora uma descrição completa do espaço de parâmetros (em sua região hiperbólica, que é densa no mesmo espaço de parâmetros): dados valores positivos para os parâmetros α_1 , α_2 , δ , ν , γ , τ , β e ξ , existe exatamente uma célula da Tabela 4.4 que corresponde a estes valores em conjunto, de modo que é possível determinar quais pontos fixos estarão em \mathbb{R}_+^3 bem como a estabilidade de cada um deles.

Tabela 4.4: Estabilidade dos pontos fixos - Cada célula da tabela corresponde a uma região do espaço de parâmetros, e o mesmo é coberto por todas as células. A letra F para indica aqueles pontos cuja variedade estável é a fronteira entre as bacias de atração dos pontos estáveis na mesma célula.

	$\alpha_2 < 1 - P_2$ tipo 1		$\alpha_2 > 1 - P_2$ estável	
	$a_0 < 0$	$a_0 > 0$	$\alpha_1 \alpha_2 < 1$	$\alpha_1 \alpha_2 > 1$
$\alpha_1 < 1$ $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$ P_3 tipo 1	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ P_2 tipo 1 P_3 tipo 1 $1 P_5$ estável $1 P_5$ tipo 1 F	P_4 estável P_2 tipo 1 P_3 tipo 1 $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ P_2 estável P_3 tipo 1 $1 P_5$ estável $1 P_5$ tipo 1 F	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ P_2 estável P_3 tipo 1 $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$
$\alpha_1 < 1$ $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$ P_3 estável	$a_0 < 0$ $P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ P_2 tipo 1 P_3 estável $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$	$a_0 > 0$ P_4 estável P_2 tipo 1 P_3 estável $1 P_5$ tipo 1 F	$P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ P_2 estáveis P_3 estável P_5 tipo 1 F	
$\alpha_1 > 1$ P_3 estável	$a_0 < 0$ $P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ P_2 tipo 1 P_3 estável $1 P_5$ estável $1 P_5$ tipo 1 F	$a_0 > 0$ $P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ P_2 tipo 1 P_3 estável $1 P_5$ tipo 1 F	$a_0 < 0$ P_4 tipo 1 F P_2 estável P_3 estável $P_5 \notin \mathbb{R}_+^3$	$a_0 > 0$ $P_4 \notin \mathbb{R}_+^3$ P_2 estável P_3 estável P_5 tipo 1 F

Observando a Tabela 4.4, vemos que em algumas células, consta apenas um ponto de equilíbrio estável. Portanto, quando os parâmetros corresponderem aquela célula, todas as soluções irão convergir para o equilíbrio estável correspondente.

Em outras células, pelo contrário, vemos que ocorre o fenômeno da biestabilidade, isto é, existem dois pontos fixos estáveis, como na terceira célula da segunda linha, quando P_4 e P_3 são estáveis. Neste caso, existirão soluções convergindo para P_4 e outras convergindo para P_3 .

Do ponto de vista biológico, é interessante observar que em cada um destes cenários que apresenta biestabilidade, um dos atratores é mais favorável a espécie N e o outro atrator é mais favorável a I . Na quarta célula da primeira linha, por exemplo, P_4 é um atrator mais favorável a N , já que corresponde a coexistência sob baixa concentração da fitotoxina, e P_5 é o atrator favorável a I , pois corresponde a coexistência sob alta concentração da fitotoxina. Ainda neste cenário, se analisarmos as coordenadas de $P_4 = (\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1-\alpha_2)}{\gamma(1-\alpha_1)+\tau(1-\alpha_1\alpha_2)})$ e $P_5 = (\frac{1-\alpha_1-\phi(P)}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{1-\alpha_2+\alpha_2\phi(P)}{1-\alpha_1\alpha_2}, \frac{\nu(1-\alpha_2+\alpha_2\phi(P))}{\gamma(1-\alpha_1-\phi(P))+\tau(1-\alpha_1\alpha_2)})$, vemos que P_4 é o atrator mais próximo do ponto $P_2 = (1, 0, 0)$ (que corresponde a existência apenas de N), pois $\phi(P) > 0$. Da mesma maneira concluímos que P_5 é o equilíbrio estável mais próximo de $P_3 = (0, 1, \nu/\tau)$.

Desta forma, podemos dizer que em todos os cenários nos quais o sistema apresentar biestabilidade, uma das bacias de atração será favorável a N e a outra será favorável a I . Observando mais uma vez a Tabela 4.4, vemos que em todos os cenários, exceto dois apenas, o equilíbrio estável favorável a N hora será P_2 , hora será P_4 . A exceção ocorre na segunda coluna das linhas 1 e 2, quando um dos pontos P_5 é favorável a N . Já os pontos favoráveis a I serão sempre ou P_3 ou P_5 .

Diante destas considerações, e com a Tabela 4.4 em mãos, podemos ter um pouco de intuição sobre o coeficiente $a_0 = \gamma(1 - \alpha_1) + \tau(1 - \alpha_1\alpha_2) + \nu(\alpha_2 - 1)$. Observe que, mantendo os demais parâmetros constantes, todas as transições de $a_0 > 0$ para a_0 negativo prejudicam a espécie N . De fato, na transição da primeira linha, P_4 , que era estável, deixa de estar em \mathbb{R}_+^3 e dá lugar a P_5 , estável, o qual vimos que é menos favorável a N do que P_4 . Na segunda linha ocorre a mesma coisa. Na terceira linha, o que muda é o ponto na fronteira das bacias de atração de P_2 e P_3 . Quando $a_0 > 0$, este ponto de fronteira é P_5 , o qual está próximo de P_3 . Quando a_0 se torna negativo, o ponto de fronteira passa a ser P_4 , que como, vimos, está mais próximo de P_2 do que o ponto P_5 anterior. De certo modo, se supormos que a curvatura da fronteira não se altera, esta transição na terceira linha desloca a fronteira entre as bacias em direção a P_2 , ou seja, diminui o tamanho da bacia de atração de P_2 . Agora, notamos que $\frac{\partial a_0}{\partial \alpha_1} = -\gamma - \tau\alpha_2 < 0$. Assim, se I aumenta sua competição, a_0 diminui, o que confirma a intuição de que um decréscimo em a_0 é prejudicial a N . Ainda, $\partial_{\alpha_2} a_0 = \nu - \tau\alpha_1 > 0$ pois τ é muito menor que ν e α_1 ou está entre 0 e 1 ou é pouco maior que 1 apenas. Assim, um acréscimo em α_2 acarreta um acréscimo em a_0 , ou seja, a_0 aumenta

se N passa a competir mais.

Podemos concluir que o elo entre a estabilidade dos pontos favoráveis a N , P_2 ou P_4 ou P_5 , está relacionado com a pressão competitiva que a espécie nativa exerce (α_2). Se ela for boa competidora ($\alpha_2 > 1$), P_2 é estável e não P_4 , de modo que há a possibilidade dela eliminar a invasão. Se a mesma espécie competir fracamente, porém alguma outra condição nos parâmetros lhe for favorável ($\alpha_2 < 1$ e $a_0 > 0$), ocorre o contrário, de modo que P_4 é estável. Por fim, se até esta condição favorável for retirada, ou P_5 será estável ou não haverá ponto estável favorável a N .

A ligação entre a estabilidade dos equilíbrios P_3 e P_5 , favoráveis a I , é feita pelos parâmetros relacionados à sua pressão competitiva e eficiência da toxina: Em cada uma das transições de $\alpha_1 + \phi(\frac{\nu}{\tau}) > 1$ para $\alpha_1 + \phi(\frac{\nu}{\tau}) < 1$, P_3 , que era estável, perde sua estabilidade e, ou um dos P_5 se torna estável, o que ainda é favorável a I , ou não ocorre biestabilidade, e a bacia desaparecerá. Isto é ruim para a invasora, porque as soluções necessariamente irão para pontos P_2 ou P_4 , o que é um insucesso maior para esta espécie. Portanto, relacionamos, desta vez, a segunda região referida acima com a espécie invasora.

Vemos então que toda transição dos parâmetros do sistema entre dois cenários que apresentam biestabilidade, irá apenas “deslocar” o ponto terminal das trajetórias, não alterando a região onde esta trajetória estará contida.

Iremos dizer que estas duas regiões serão, a primeira, a bacia de atração favorável à nativa e a segunda, a bacia de atração favorável à invasora.

O próximo passo, então, é determinar a influência dos parâmetros sob o tamanho das bacias de atração nos cenários em que ocorre biestabilidade.

4.5 A influência dos parâmetros sobre as bacias de atração

Nesta seção faremos um estudo da influência de cada parâmetro do modelo sobre o tamanho e forma das bacias de atração nos cenários de biestabilidade. Tal estudo é importante pois pode fornecer estratégias de controle que aumentem ou diminuam as bacias de atração de um determinado ponto de equilíbrio. Por exemplo, se pudermos influir sobre uma característica da espécie nativa que é descrita por um dos parâmetros, podemos estudar se o aumento no valor deste parâmetro irá aumentar ou diminuir a bacia de atração do ponto favorável a ela, e então com base na resposta, tomar as medidas convenientes.

Para realizar este estudo, procedemos da seguinte maneira:

- (i) Fixamos valores para os parâmetros que correspondam a um cenário que apresente biestabilidade e seja interessante do ponto de vista biológico;

- (ii) Escolhemos o parâmetro a ser estudado;
- (iii) Determinamos outros dois valores para o parâmetro escolhido, um menor que o fixado no item (i) e outro maior, tomando o cuidado para que a mudança de um valor para outro não acarrete em uma bifurcação no sistema;
- (iv) Para cada um dos três valores do parâmetro escolhido, determinamos graficamente as bacias de atração dos dois equilíbrios;
- (v) Observando os gráficos, analisamos a influência do parâmetro sobre o tamanho e forma das bacias, isto é, qual bacia aumenta com o aumento no valor do parâmetro e etc.

Apresentaremos inicialmente o método que utilizamos para realizar as simulações numéricas do item (iv). Em seguida, apresentaremos os cenários do espaço de parâmetros escolhidos e os resultados que obtivemos e sua discussão.

4.5.1 O método numérico

Para o sistema estudado, devido aos seus autovalores, não foi possível determinar as bacias de atração usando o método do Capítulo 3, onde determinamos a variedade estável que era a fronteira entre as bacias. A dificuldade foi consequência do sistema deste capítulo possuir três dimensões. A variedade estável que forma a fronteira entre as bacias é uma superfície de dimensão dois. Imaginávamos que, ao integrar, para tempo negativo, várias soluções na variedade estável em torno do ponto da fronteira, teríamos um bom esboço da variedade estável. Contudo, devido a um dos autovalores estáveis do ponto da fronteira apresentar módulo muito maior que o outro autovalor estável, todas as trajetórias reversas seguiam na direção do autovetor associado autovalor de maior módulo, mesmo aquelas que iniciavam muito próximas da direção do outro autovetor. Deste modo, o esboço ficou muito prejudicado e não nos forneceu uma boa visualização da fronteira das bacias. Na Figura 4.1, vemos um exemplo disto. Este problema relacionado ao módulo dos autovalores já é conhecido há algum tempo [14]. Como comentado também em [6], para sistemas não-lineares de dimensão maior que dois, a determinação das bacias de atração, por meio das variedades estáveis que formam a fronteira, requer métodos eficientes para obter as variedades estáveis. Muito se tem feito nesta direção. Citamos, como referência, os trabalhos de Osinga e Guckenheimer, que usam técnicas distintas [21, 14].

Para contornar o problema e estudar as bacias de atração, implementamos em `C++` um programa que efetua alguns cortes das bacias de atração e os fornece graficamente (veja o código no Apêndice 2). O procedimento adotado está descrito a seguir.

O conjunto no espaço de fase \mathbb{R}_+^3 que contém todos os pontos fixos é o paralelepípedo $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, \frac{2}{7}]$. Em cada simulação, a fim de uma boa visualização, efetuamos quatro cortes em C , paralelos ao plano NI . Os cortes tem a mesma distância vertical um do outro. São eles

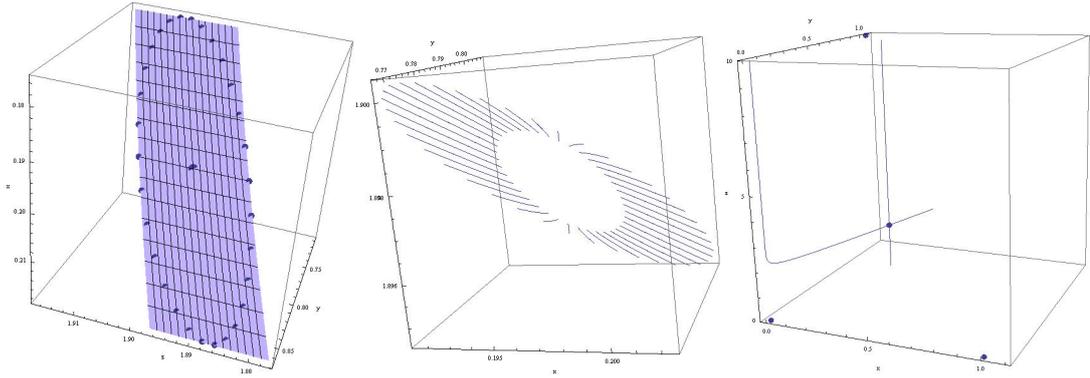


Figura 4.1: Ilustração do método do Capítulo 2 aplicado ao modelo deste Capítulo. Inicialmente (à esquerda), pelo método das aproximações sucessivas, determinamos uma superfície que é localmente, uma aproximação da variedade estável e tomamos alguns pontos nesta superfície, em torno do ponto de equilíbrio, como condições iniciais. Em seguida (ao meio), utilizando o método da trajetória reversa, integramos o sistema, para tempo negativo, com condição inicial em cada um dos pontos tomados. Ao final (à direita), todas as soluções seguiram a mesma trajetória da solução iniciando na direção do autovetor associado ao autovalor negativo de maior módulo, exceto, apenas, aquelas que iniciaram exatamente na direção do autovetor associado ao outro autovalor negativo. Assim, obtivemos apenas duas trajetórias na variedade estável, o que não nos fornece um esboço representativo para o estudo das bacias de atração.

- $C_0 = [0, 1] \times [0, 1] \times \{0\}$;
- $C_1 = [0, 1] \times [0, 1] \times \left\{\frac{\nu}{3\tau}\right\}$;
- $C_2 = [0, 1] \times [0, 1] \times \left\{\frac{2\nu}{3\tau}\right\}$;
- $C_3 = [0, 1] \times [0, 1] \times \left\{\frac{\nu}{\tau}\right\}$.

Cada corte C_j determina um quadrado no plano $z = j\frac{\nu}{3\tau} := z_j$, $j = 0, 1, 2, 3$. Para cada valor de $z = z_j$ fixado, divide-se a região $0 < N < 1, 0 < I < 1$ e $z = z_j$ em uma rede quadrada 100x100 e integra-se o sistema dez mil vezes, cada vez com condição inicial em um dos quadrados da malha. Ao final de cada integração associa-se um número i à posição final daquela solução, correspondente ao ponto fixo P_i para o qual aquela solução convergiu. Ao plotar, associa-se uma cor a cada ponto. Colocamos preto para a região das condições iniciais que convergem para o ponto favorável a I e branco para as que convergem para o ponto favorável a N . Assim, cada um dos quatro cortes estava dividido em duas regiões. Uma de cor preta, correspondente a seção transversal da bacia de atração favorável a I , e outra de cor branca, correspondendo à seção transversal da bacia de atração favorável a N . Na Figura 4.2, podemos ver uma ilustração do resultado final deste método.

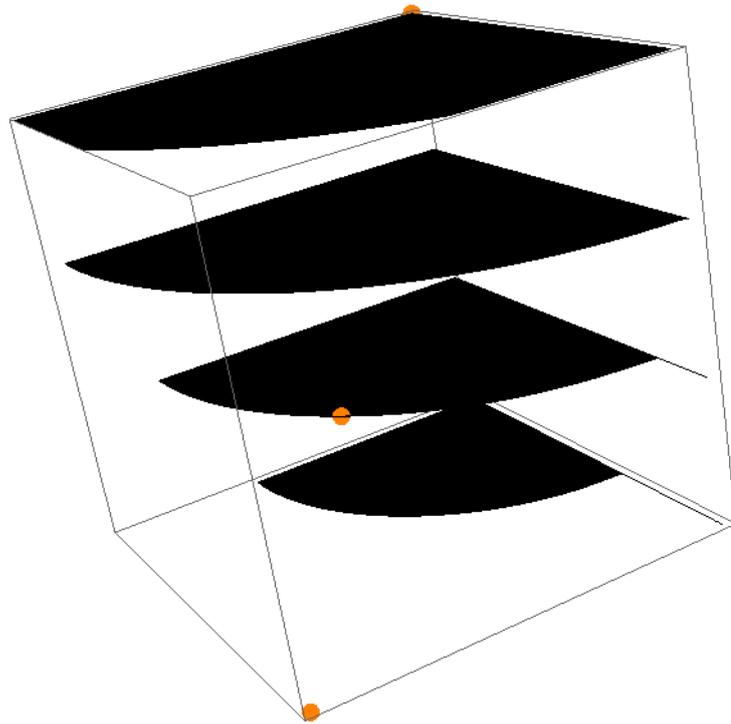


Figura 4.2: Ilustração do resultado final do método, com os quatro cortes transversais ao paralelepípedo $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, \frac{\nu}{\tau}]$, paralelos ao plano NI . Em cada corte, a região em preto representa as condições iniciais que estão na bacia de atração favorável a I , que neste exemplo, é a bacia de atração do ponto $P_3 = (0, 1, \frac{\nu}{\tau})$. A área em branco representa as condições iniciais que convergiram para $P_2 = (1, 0, 0)$, favorável a N . Podemos ver, na fronteira de um dos cortes, o ponto P_4 , cuja variedade estável é a separatriz entre as bacias de P_2 e P_3 .

Para efetuar a integração numérica das equações do sistema, utilizamos o método Runge-Kutta de 4a ordem, que, para um sistema da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

é dado por

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n); \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}); \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}); \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3); \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5). \end{aligned}$$

4.5.2 Os cenários no espaço de parâmetros

Para realizar as simulações numéricas e estudar a influência dos parâmetros do sistema, consideramos os mesmos em regiões do espaço de parâmetros (que chamamos de cenários) onde o sistema apresenta biestabilidade. Realizamos as

simulações em três cenários de biestabilidade distintos. Em cada um deles, estudamos a influência de alguns parâmetros do sistema sob as bacias. Poucos parâmetros do sistema têm seu valor estimado na literatura. Em [34], afirma-se que, para as espécies *Festuca idahoensis* (nativa) e *Centaurea maculosa* (invasora), os valores de ν estão entre 0,3 e 0,5, os de τ entre 0,05 e 0,09 e os de δ entre 0,6 e 1,2. Os valores assumidos pelos parâmetros, quando não dentro destas faixas, foram postos muito próximo das mesmas. Os cenários escolhidos, os parâmetros estudados em cada cenário e os valores que os parâmetros tomaram em cada simulação estão relacionados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Cenários da Tabela 4.4 nos quais a influência dos parâmetros sob o tamanho das bacias de atração foi estudada e valores dos parâmetros em cada simulação.

Equilíbrios Estáveis (cenário na Tabela 4.4)	Valores dos parâmetros fixos	Parâmetro estudado	Valores do parâmetro estudado
P_2 e P_3 Linha 3, Coluna 2	$\alpha_1 = 1,2, \alpha_2 = 1,2, \delta = 1, \nu = 0,5$ $\gamma = 0,8, \beta = 0,19, \xi = 0,02$	τ	$\tau = 0,01, \tau = 0,05$ e $\tau = 0,3$
P_2 e P_3 Linha 3, Coluna 2	$\alpha_1 = 1,2, \alpha_2 = 1,2, \delta = 1$ $\gamma = 0,8, \tau = 0,05, \beta = 0,19, \xi = 0,02$	ν	$\nu = 0,1, \nu = 0,5$ e $\nu = 0,9$
P_4 e P_3 Linha 2, Coluna 3	$\alpha_1 = 0,9, \delta = 1, \nu = 0,5$ $\gamma = 0,8, \tau = 0,05, \beta = 0,39, \xi = 1$	α_2	$\alpha_2 = 0,82, \alpha_2 = 0,9$ e $\alpha_2 = 0,99$
P_4 e P_3 Linha 2, Coluna 3	$\alpha_1 = 0,9, \alpha_2 = 0,9, \nu = 0,5$ $\gamma = 0,8, \tau = 0,05, \beta = 0,39, \xi = 1$	δ	$\delta = 0,5, \delta = 1$ e $\delta = 2$
P_4 e P_3 Linha 2, Coluna 3	$\alpha_1 = 0,9, \alpha_2 = 0,9, \delta = 1, \nu = 0,5$ $\tau = 0,05, \beta = 0,39, \xi = 1$	γ	$\gamma = 0,4, \gamma = 0,8$ e $\gamma = 1,3$
P_2 e P_5 Linha 1, Coluna 6	$\alpha_1 = 0,7, \alpha_2 = 1,2, \delta = 1, \nu = 0,5$ $\gamma = 0,8, \tau = 0,05, \beta = 0,3$	ξ	$\xi = 0,1, \xi = 0,3$ e $\xi = 0,5$
P_2 e P_5 Linha 1, Coluna 6	$\alpha_1 = 0,7, \alpha_2 = 1,2, \delta = 1, \nu = 0,8$ $\gamma = 0,3, \tau = 0,05, \xi = 0,3$	β	$\beta = 0,262, \beta = 0,275$ e $\beta = 0,3$

A seguir, apresentamos e analisamos os resultados de cada simulação. As figuras correspondentes às simulações estão na subseção seguinte às discussões.

O cenário I - P_2 e P_3 estáveis

O primeiro dos cenários que surge naturalmente é aquele correspondente a competição forte, descrito na segunda coluna da terceira linha da Tabela 4.4. Este cenário é caracterizado no espaço de parâmetros pelas desigualdades $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 > 1$, e $a_0 < 0$. Os equilíbrios estáveis são P_2 , favorável a N , e P_3 , favorável a I . A fronteira entre as duas bacias é a variedade estável do ponto P_4 . Do ponto de vista biológico, é natural considerar este cenário pois ele corresponde ao único cenário de biestabilidade no modelo sem fitotoxina, estudado no Capítulo 3. Naquele estudo, vimos que quanto maior for a taxa de competição de uma espécie maior será a bacia de atração do ponto favorável a ela. Vimos também que o parâmetro δ influencia na curvatura da fronteira entre as bacias. Agora, além de competir fortemente, a espécie I dispõe de uma vantagem a mais, a produção de uma fitotoxina inibidora do crescimento da espécie N , o que deve diminuir as chances da sobrevivência da mesma, que também compete fortemente pelos recursos.

Neste cenário, iremos analisar a influência dos parâmetros τ , que é a taxa de decaimento da fitotoxina, e ν , que é a taxa de produção da fitotoxina. Biologicamente, as questões podem ser postas como: o que acontece com a chance de sobrevivência de cada espécie quando se aumenta a taxa de decaimento da fitotoxina? E o que acontece quando se aumenta a taxa de produção da fitotoxina?

Influência do parâmetro τ

Para análise da influência do parâmetro τ fixamos os valores dos parâmetros conforme a primeira linha da Tabela 4.5. Para τ , tomamos como base o valor $\tau = 0,05$. Nestas condições, temos $a_0 = -0,082$. Após determinarmos as bacias de P_2 e P_3 usando o método descrito acima, efetuamos novas simulações, mudando os valores de τ para $\tau = 0,01$ e $\tau = 0,3$, conforme a primeira linha da Tabela 4.5.

Observando a Figura 4.3, vemos que um aumento no valor de τ acarreta num aumento da área branca, que corresponde a bacia de atração de P_2 , favorável a N . Portanto, os resultados confirmam o que já era esperado do ponto de vista biológico: se a fitotoxina decai rapidamente no ambiente, a chance de sobrevivência de N é maior.

Influência do parâmetro ν

A fim de investigar a influência do parâmetro ν , fixamos os valores dos parâmetros conforme a segunda linha da Tabela 4.5 e fizemos três simulações com diferentes valores para ν , que assumiu os valores $\nu = 0,1$, $\nu = 0,5$ e $\nu = 0,9$. Os resultados podem ser vistos na Figura 4.4. Vemos que um aumento em ν , a taxa de produção da fitotoxina, acarreta num aumento da bacia de atração de P_3 . Vemos ainda, que o aumento é bem considerável nos níveis de toxina não nulos.

O cenário II - P_4 e P_3 estáveis

O segundo cenário considerado é aquele correspondente a terceira coluna da segunda linha da Tabela 4.4. Neste cenário temos $\alpha_2 < 1$, $\alpha_1 < 1$ e $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) > 1$, de modo que P_4 , favorável a N , e P_3 , favorável a I , são estáveis.

Neste cenário, a competição interespecífica entre as espécies é baixa, de modo que se não houvesse a produção de fitotoxina, este cenário teria apenas um equilíbrio estável, o ponto P_4 . Contudo, quando analisamos a estabilidade de P_3 , vimos que a produção da toxina é um recurso valioso para a espécie I , pois, mesmo competindo fracamente, ela pode eliminar a espécie N , com auxílio do efeito nocivo da toxina. Assim, este é um importante cenário do modelo, já que o mesmo apresenta biestabilidade exclusivamente devido a característica que o difere do modelo do Capítulo 3, a inserção da equação e dos termos correspondentes a fitotoxina.

Sendo assim, analisamos, neste cenário, o efeito de três parâmetros sobre o tamanho e forma das bacias de atração de P_4 e P_3 . Inicialmente, analisamos a

influência de α_2 e de δ . No Capítulo 3, isto foi feito no cenário de competição forte. Agora, num modelo com uma equação a mais e neste novo cenário de biestabilidade, podemos nos perguntar se a influência destes parâmetros é a mesma que vimos ser no Capítulo 3.

Em seguida, por se tratar de um cenário onde a presença da fitotoxina torna possível a extinção da espécie N , analisamos a influência da taxa de absorção da fitotoxina pela espécie N , descrita pelo parâmetro γ .

Influência do parâmetro α_2

Para analisar a influência do parâmetro α_2 , realizamos três simulações, com os valores dos parâmetros conforme a terceira linha da Tabela 4.5.

Na Figura 4.5, temos os resultados destas simulações. Podemos concluir que um aumento na pressão competitiva de N , α_2 , acarreta num aumento da bacia de atração do ponto de coexistência P_4 , que neste cenário é favorável a N . Comportamento idêntico ao modelo sem a fitotoxina.

Vemos, contudo, que a mudança é pouca quando o nível inicial da fitotoxina aumenta.

Influência do parâmetro δ

As simulações para estudo da influência do parâmetro δ foram feitas com os valores dos parâmetros descritos na quarta linha da Tabela 4.5.

A Figura 4.6 exibe os resultados destas simulações. Podemos ver que o parâmetro δ influencia na curvatura da fronteira entre as bacias de atração. Quando $\delta > 1$, a projeção da fronteira nos planos horizontais $z = z_j$ tem curvatura positiva, e quando $\delta < 1$ ocorre o contrário. Este comportamento é semelhante ao visto no modelo sem a fitotoxina. Naquele modelo, vimos que δ influenciava apenas na curvatura da fronteira, e um aumento em δ , por exemplo, podia ser favorável ou prejudicial a uma mesma espécie, dependendo das condições iniciais. Porém, agora, temos uma dimensão a mais, e pelos resultados na Figura 4.6, podemos ver que um aumento em δ , apesar de apenas mudar a curvatura da projeção da fronteira sobre o plano $P = 0$ (primeira linha de gráficos na Figura 4.6), acarreta num aumento considerável da bacia de atração de P_3 nos níveis de $P \neq 0$. Deste modo, a mudança na curvatura não tem importância comparada com a mudança no tamanho da bacia, para níveis altos de P . Portanto, para condições iniciais com presença de fitotoxina, um aumento em δ é favorável a I .

Influência do parâmetro γ

As simulações para examinar a influência de γ , foram feitas com os valores relacionados na quinta linha da Tabela 4.5.

Na Figura 4.7, vemos que o aumento em γ implica no aumento da bacia de atração de P_4 , ou ainda, numa diminuição da bacia de atração de P_3 . Ou seja, ao aumentar a taxa de absorção da fitotoxina pela espécie N , favorecemos a

espécie N e diminuimos as chances dela ser extinta pela espécie I . A princípio, esta conclusão parece ser contrária a intuição. Porém, observando os termos das equações do sistema, vemos que γ não tem nenhuma relação com o efeito da toxina sobre a espécie N . Ou seja, está implícito no modelo que o efeito causado pela toxina não depende da taxa de absorção da mesma, mas sim da quantidade de toxina presente no meio. Por isso, aumentando γ , aumentamos a taxa de retirada de toxina daquele meio, e acabamos por diminuir o efeito nocivo da mesma sobre a espécie N , este é causado pela toxina quando esta está ‘fora’ de N . Assim, se uma espécie é prejudicada pela presença de uma toxina, mas não há interrelação entre este prejuízo e a taxa de absorção da toxina, uma estratégia é aumentar a taxa de absorção, de modo que haja menos toxina no meio e esta espécie seja menos prejudicada.

O cenário III - P_2 e P_5 estáveis

O último cenário considerado corresponde a sexta coluna da primeira linha da Tabela 4.4, onde temos $\alpha_2 > 1$, $\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$ $\alpha_1\alpha_2 < 1$. Os atratores são P_2 e um ponto P_5 .

Este é um cenário onde N compete fortemente ($\alpha_2 > 1$), I compete fracamente ($\alpha_1 < 1$) e produz uma fitotoxina cuja eficácia, somada a força competitiva da espécie, não torna possível a extinção de N ($\alpha_1 + \phi(\nu/\tau) < 1$). Se I não produzisse a fitotoxina, apenas P_2 seria estável e I seria extinta. Porém, com a produção da fitotoxina, o ponto P_5 , que representa a coexistência das duas espécies sob alta concentração da fitotoxina, é um atrator. Assim, mesmo competindo fracamente e produzindo uma fitotoxina não muito eficaz, é possível que I não seja extinta e sobreviva numa capacidade muito próxima de sua capacidade de suporte (P_5 é próximo de P_3). Isto torna este cenário interessante do ponto de vista biológico e mostra como a produção da fitotoxina, mesmo esta não sendo muito eficaz, é um recurso poderoso do qual a espécie I dispõe.

Neste cenário, analisamos a influência dos parâmetros β e ξ , que descrevem o efeito nocivo que a fitotoxina causa em N .

Influência do parâmetro ξ

Nas simulações para analisar a influência de ξ , fixamos os parâmetros com os valores descritos na sexta linha da Tabela 4.5.

Os resultados podem ser vistos na Figura 4.8. Concluimos que um aumento em ξ implica num aumento da bacia de atração de P_2 , favorável a N , o que já era esperado, uma vez que ξ descreve o tempo de resposta, quando P aumenta, para o efeito $\phi(P)$ alcançar valores próximos do máximo β , isto é, quanto maior ξ , maiores valores de P são necessários para que $\phi(P)$ esteja próximo de β .

Influência do parâmetro β

Para analisar a influência de β , foram realizadas as simulações usando os

valores descritos na última linha da Tabela 4.5.

Na Figura 4.9, vemos os resultados, e podemos concluir que um aumento em β implica num aumento da bacia de atração de P_5 . De fato, isto também já era esperado, já que β é o valor máximo que $\phi(P)$ alcança.

Figuras com os resultados das simulações

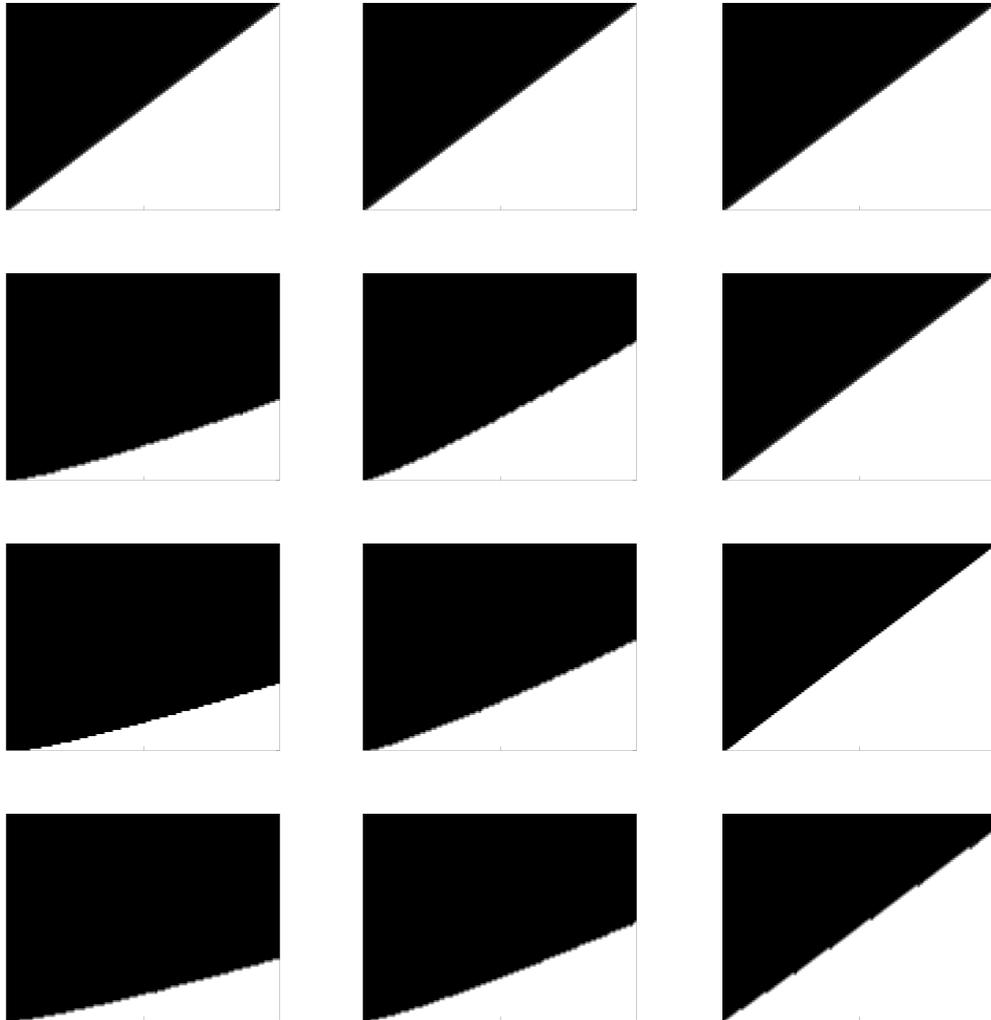


Figura 4.3: Resultados das simulações com o parâmetro τ variando, e os demais fixados conforme a primeira linha da Tabela 4.5. Em cada coluna de gráficos, de cima para baixo, temos os cortes nos planos $z_j = [0, 1] \times [0, 1] \times j \frac{\nu}{3\tau}$, $j = 0, 1, 2, 3$. A área em preto corresponde a condições iniciais que convergiram para P_3 e a área branca corresponde as que convergiram para P_2 . Na primeira coluna, $\tau = 0.01$. Na segunda, $\tau = 0.05$. Na terceira, $\tau = 0.3$.

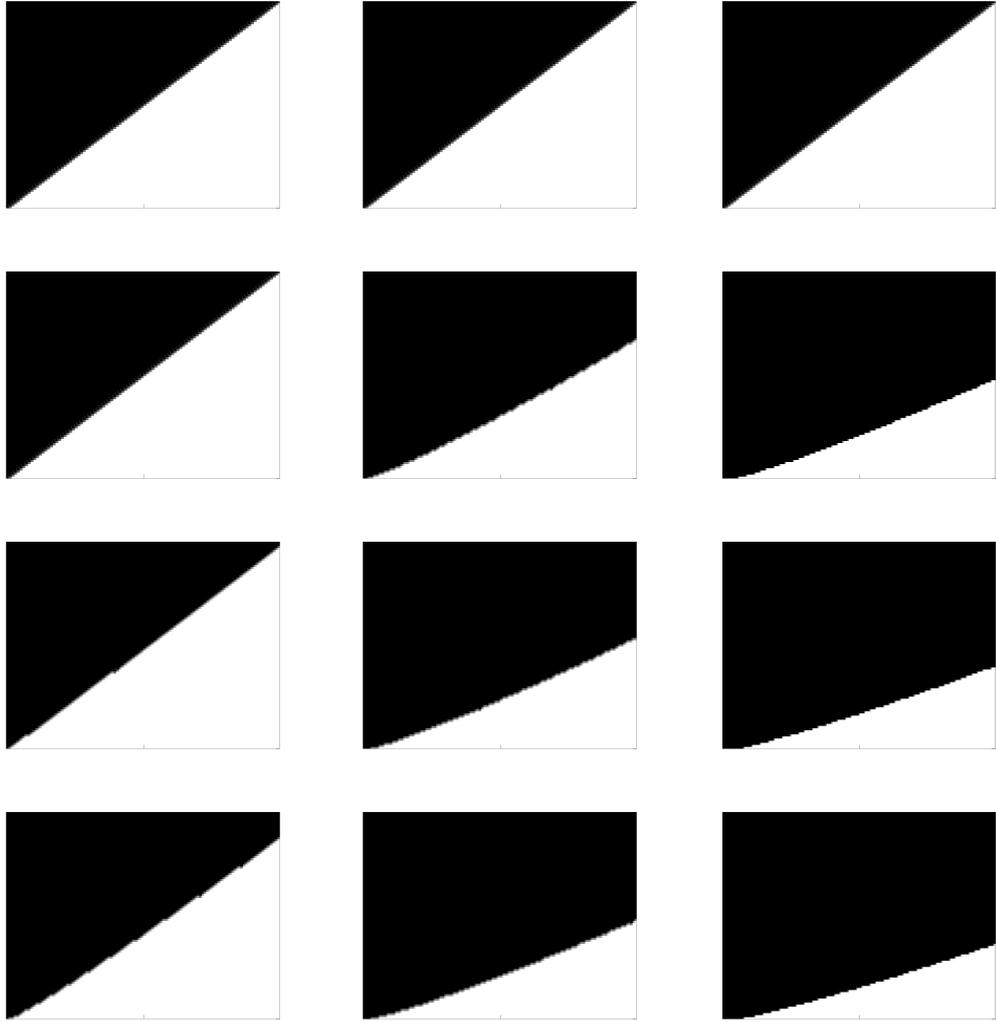


Figura 4.4: Resultados das simulações com o parâmetro ν variando e os demais fixados conforme a segunda linha da Tabela 4.5. Em cada coluna de gráficos, de cima para baixo, temos os cortes nos planos $z_j = [0, 1] \times [0, 1] \times j \frac{\nu}{3\tau}$, $j = 0, 1, 2, 3$. A área em preto corresponde a condições iniciais que convergiram para P_3 e a área branca corresponde as que convergiram para P_2 . Na primeira coluna, $\nu = 0, 1$. Na segunda, $\nu = 0, 5$. Na terceira, $\nu = 0, 9$.

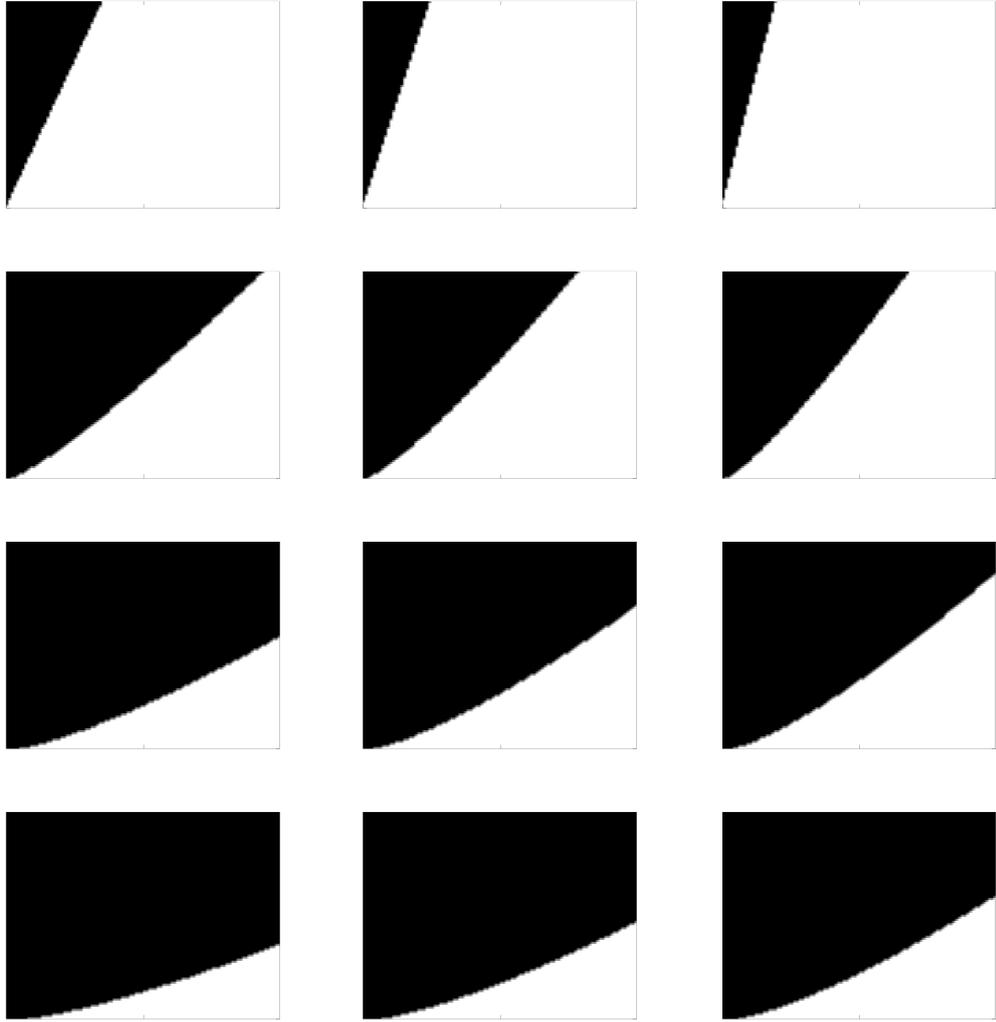


Figura 4.5: Resultados das simulações com o parâmetro α_2 variando e os demais fixados conforme a terceira linha da Tabela 4.5. Em cada coluna de gráficos, de cima para baixo, temos os cortes nos planos $z_j = [0, 1] \times [0, 1] \times j \frac{\nu}{3\tau}$, $j = 0, 1, 2, 3$. A área em preto corresponde a condições iniciais que convergiram para P_3 e a área branca corresponde as que convergiram para P_2 . Na primeira coluna, $\alpha_2 = 0,82$, na segunda, $\alpha_2 = 0,9$ e na terceira, $\alpha_2 = 0,9$.

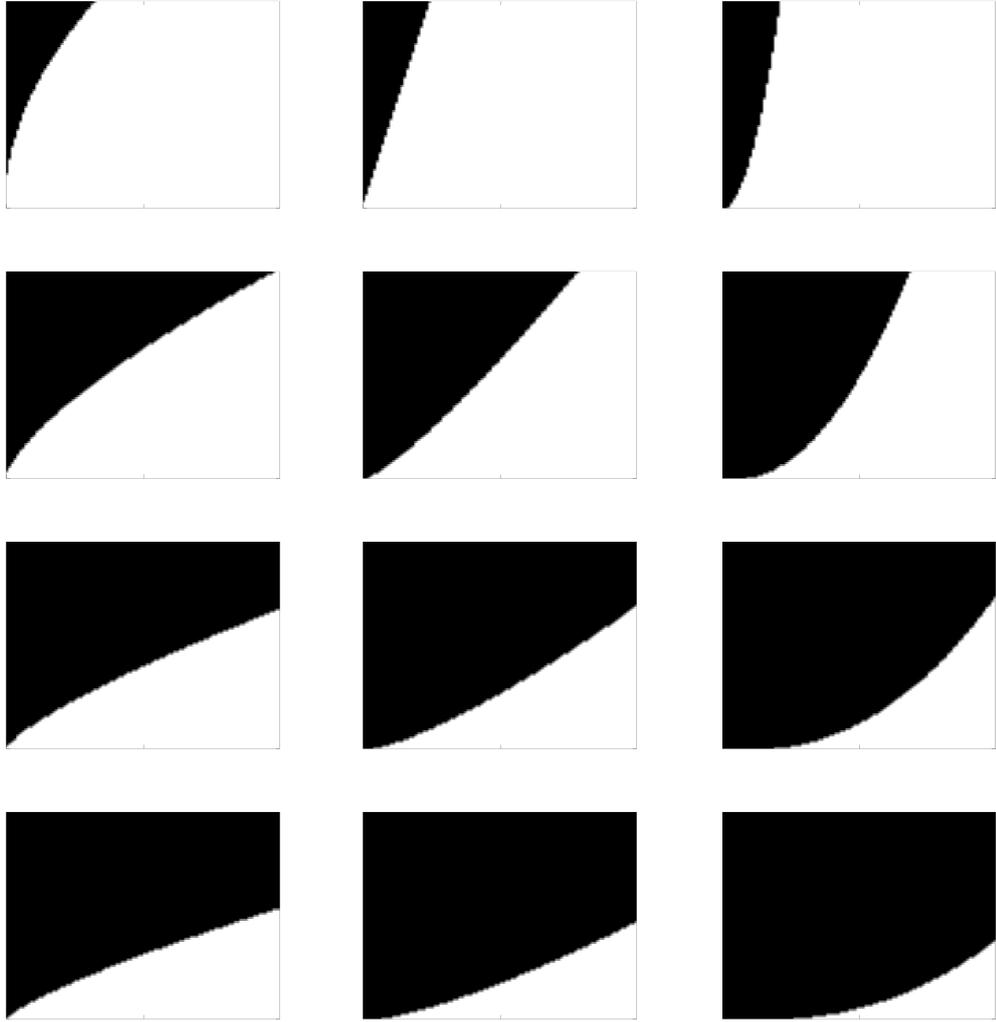


Figura 4.6: Resultados das simulações com o parâmetro δ variando e os demais fixados conforme a quarta linha da Tabela 4.5. Em cada coluna de gráficos, de cima para baixo, temos os cortes nos planos $z_j = [0, 1] \times [0, 1] \times j\frac{\nu}{3\tau}$, $j = 0, 1, 2, 3$. A área em preto corresponde a condições iniciais que convergiram para P_3 e a área branca corresponde as que convergiram para P_2 . Na primeira coluna, $\delta = 0,5$, na segunda, $\delta = 1$ e na terceira, $\delta = 2$.

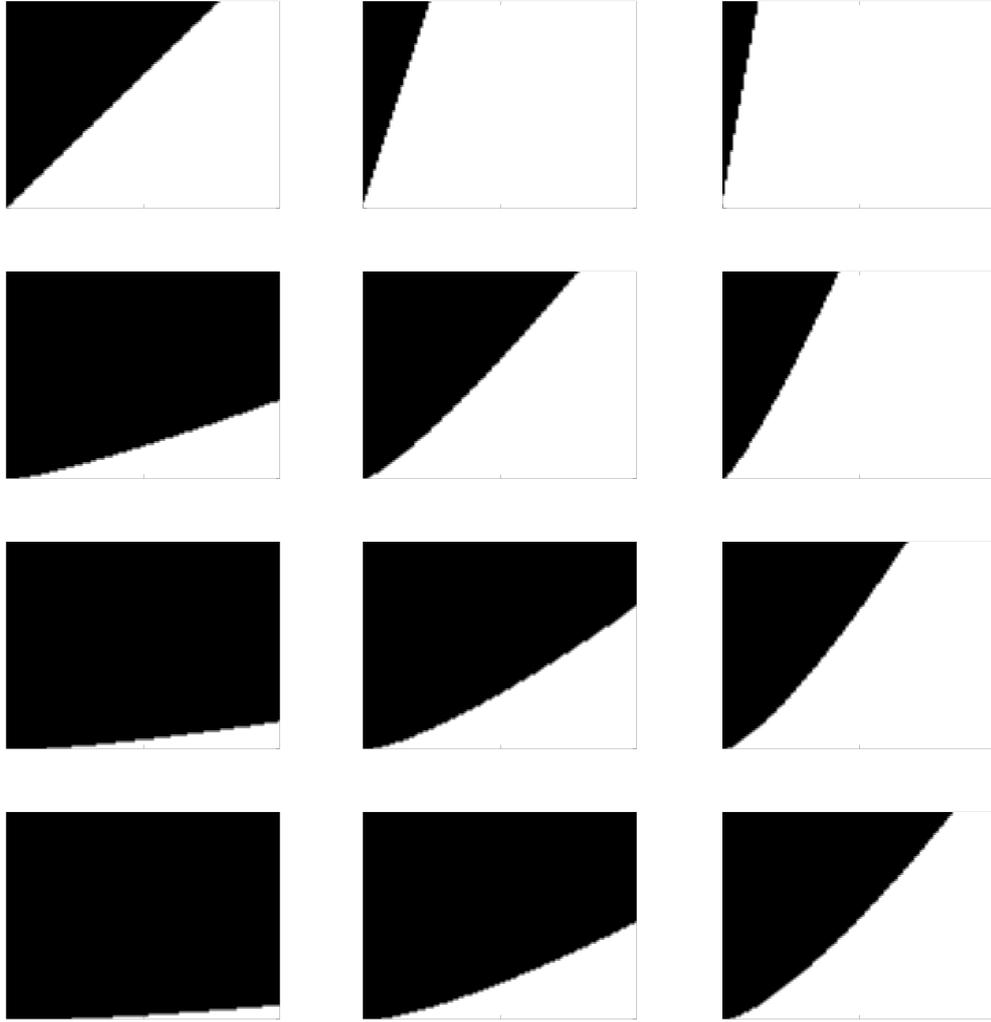


Figura 4.7: Resultados das simulações com o parâmetro γ variando e os demais fixados conforme a quinta linha da Tabela 4.5. Em cada coluna de gráficos, de cima para baixo, temos os cortes nos planos $z_j = [0, 1] \times [0, 1] \times j \frac{\gamma}{3\tau}$, $j = 0, 1, 2, 3$. A área em preto corresponde a condições iniciais que convergiram para P_3 e a área branca corresponde as que convergiram para P_2 . Na primeira coluna, $\gamma = 0,4$, na segunda, $\gamma = 0,8$ e na terceira, $\gamma = 1,3$.

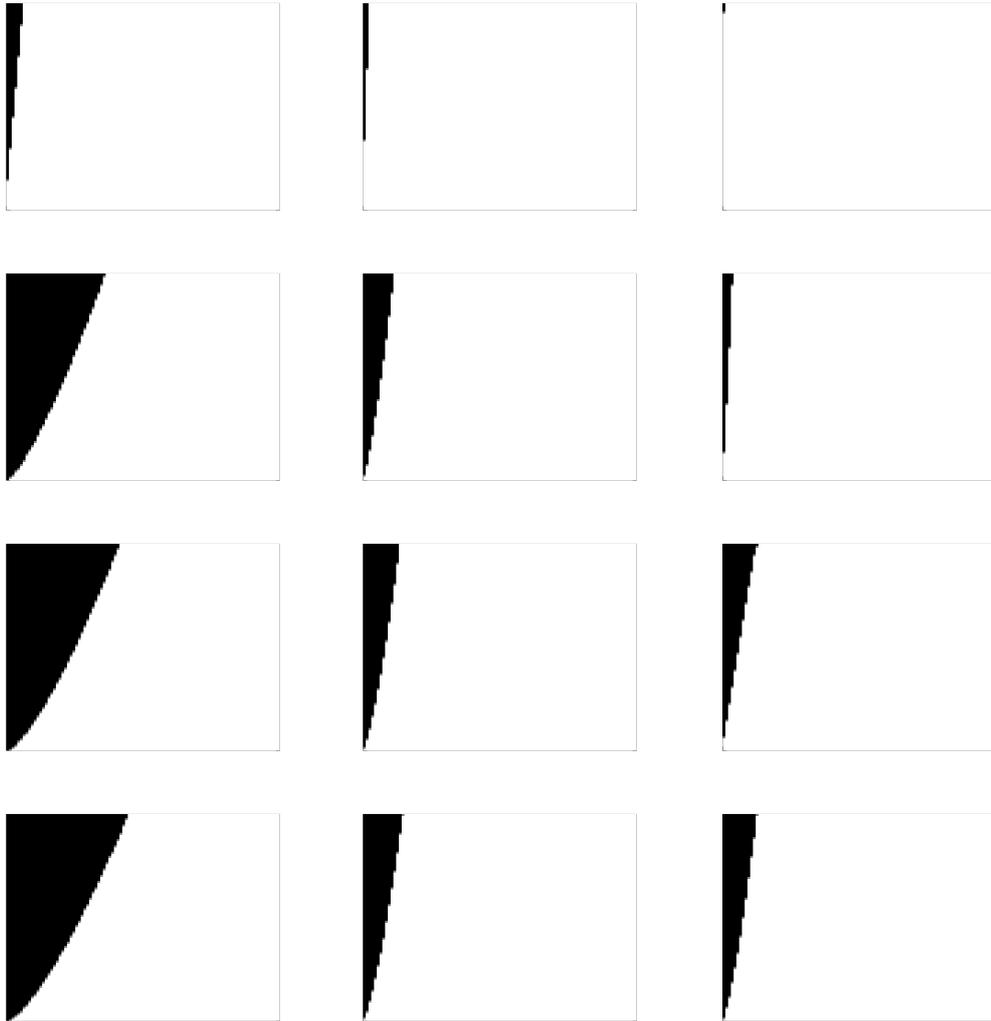


Figura 4.8: Resultados das simulações com o parâmetro ξ variando e os demais fixados conforme a sexta linha da Tabela 4.5. Em cada coluna de gráficos, de cima para baixo, temos os cortes nos planos $z_j = [0, 1] \times [0, 1] \times j \frac{\nu}{37}$, $j = 0, 1, 2, 3$. A área em preto corresponde a condições iniciais que convergiram para P_3 e a área branca corresponde as que convergiram para P_2 . Na primeira coluna, $\xi = 0, 1$, na segunda, $\xi = 0, 3$ e na terceira, $\xi = 0, 5$.

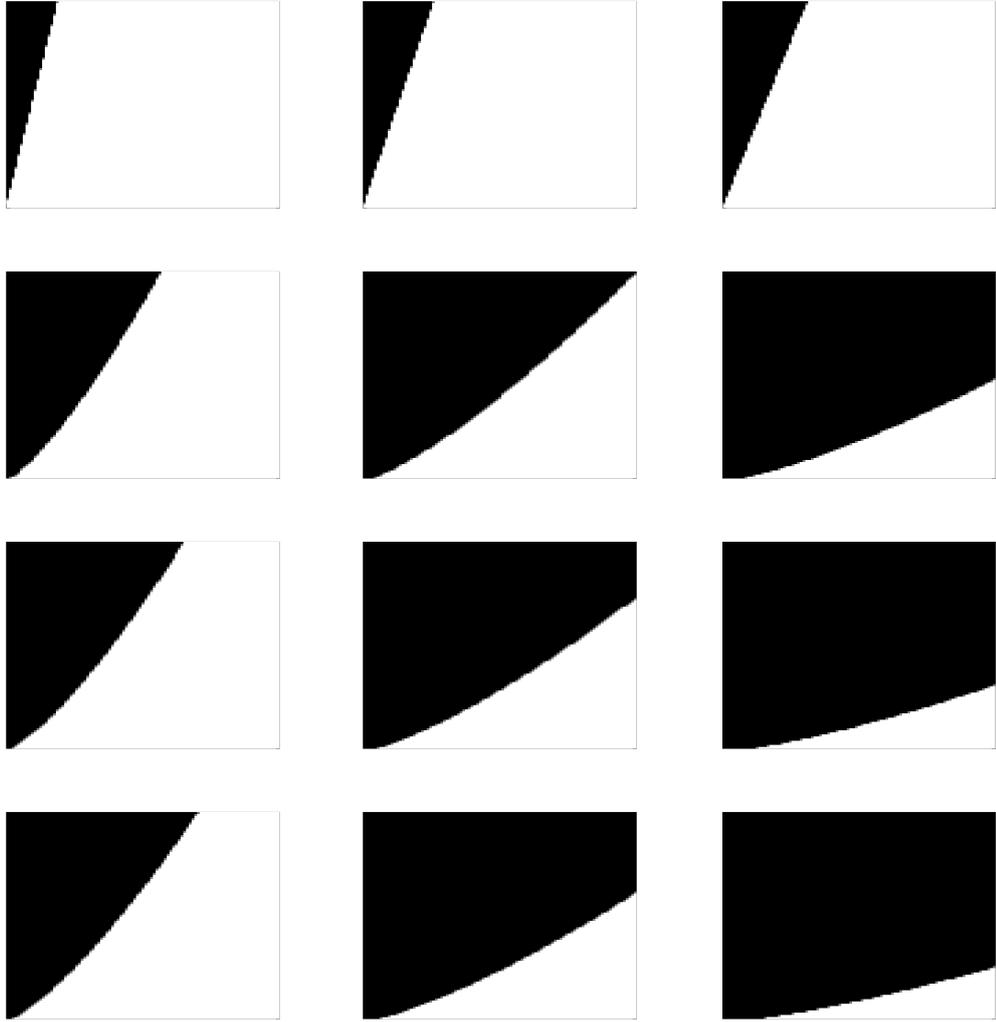


Figura 4.9: Resultados das simulações com o parâmetro β variando e os demais fixados conforme a sétima linha da Tabela 4.5. Em cada coluna de gráficos, de cima para baixo, temos os cortes nos planos $z_j = [0, 1] \times [0, 1] \times j \frac{\nu}{3\tau}$, $j = 0, 1, 2, 3$. A área em preto corresponde a condições iniciais que convergiram para P_3 e a área branca corresponde as que convergiram para P_2 . Na primeira coluna, $\beta = 0,262$, na segunda, $\beta = 0,275$ e na terceira, $\beta = 0,3$.

4.5.3 A respeito de bifurcações no sistema

Nas discussões acima, a respeito da influência dos parâmetros sobre as bacias de atração, observamos, pelas figuras, que o aumento no valor de certos parâmetros acarreta num aumento em uma das bacias de atração. Uma questão interessante é a seguinte: *o que acontece com as bacias após sucessivos aumentos no valor de um dos parâmetros?*

Uma das respostas é que, em alguns cenários, para mudanças significativas nos parâmetros, acontece uma bifurcação no sistema, e um dos pontos estáveis deixa de ser estável e sua bacia de atração desaparece, de modo que a outra bacia de atração passa a ser todo o espaço de fase, pois o sistema passa a possuir apenas um equilíbrio assintoticamente estável.

Estas bifurcações correspondem a transições entre as células da Tabela 4.4. Um exemplo onde isto acontece é no estudo da influência do parâmetro β . Nas simulações, tomamos os valores dos parâmetros correspondentes ao Cenário III, descrito pela sexta coluna da primeira linha da Tabela 4.4. Neste cenário, P_2 e P_5 são estáveis e a fronteira entre as bacias de atração deles é a variedade estável de outro ponto P_5 , que é do tipo 1. Neste cenário, ao diminuirmos o valor de $\beta = 0,275$ para $\beta = 0,262$, observamos um aumento na bacia de atração de P_2 (veja Figura 4.9 na página anterior). Ao diminuirmos β um pouco mais, para $\beta = 0,2615$, ocorre uma bifurcação. O ponto P_5 deixa de ser estável e ocorre uma transição na Tabela 4.4 para a quinta coluna da primeira linha, onde apenas P_2 é estável. O que ocorre nesta bifurcação é que ao diminuir β , o ponto P_5 estável se aproxima do ponto P_5 de fronteira, até que os dois colapsam, isto é, o polinômio do qual P é raiz, que neste caso, tem duas raízes que definem pontos P_5 em \mathbb{R}_+^3 , passa a ter uma raiz dupla. Ainda, esta mudança em suas coordenadas acontece de tal forma que quando a raiz do polinômio passa a ser dupla, ela é menor que 1, e daí o ponto definido por ela deixa de existir no espaço de fase do modelo, pois P_5 é caracterizado por sua terceira coordenada ser maior que 1. Deste modo, a fronteira que restringia a bacia de atração de P_2 deixa de existir em \mathbb{R}_+^3 , o que torna P_2 globalmente estável. Na Figura 4.10 podemos ver o que acontece.

Outro comportamento observado é que nem todas as bifurcações ocorrem de maneira que uma das bacias de atração desapareça, ou seja, pode ocorrer uma transição que não seja de um cenário de biestabilidade para outro no qual só há um equilíbrio estável. Vejamos o caso do mesmo cenário citado acima, no estudo do parâmetro β , só que agora aumentando o valor do mesmo.

Na Figura 4.9 (na página anterior), vemos que um aumento no valor de β , de $\beta = 0,275$ para $\beta = 0,3$ implica no aumento da bacia de atração de P_5 . Ao aumentarmos β um pouco mais, para $\beta = 0,31$, ocorre uma outra bifurcação. Nesta, o ponto P_5 colapsa com o ponto P_3 , no sentido de que, para algum valor de β entre 0,3 e 0,31, as coordenadas de P_5 e P_3 são as mesmas. Esta bifurcação corresponde a uma transição na Tabela 4.4 da sexta coluna da primeira linha para a quarta coluna da segunda linha, onde P_2 e P_3 são estáveis. Neste caso, a bacia de atração favorável a I deixa de ser a bacia de P_5 e passa a ser a

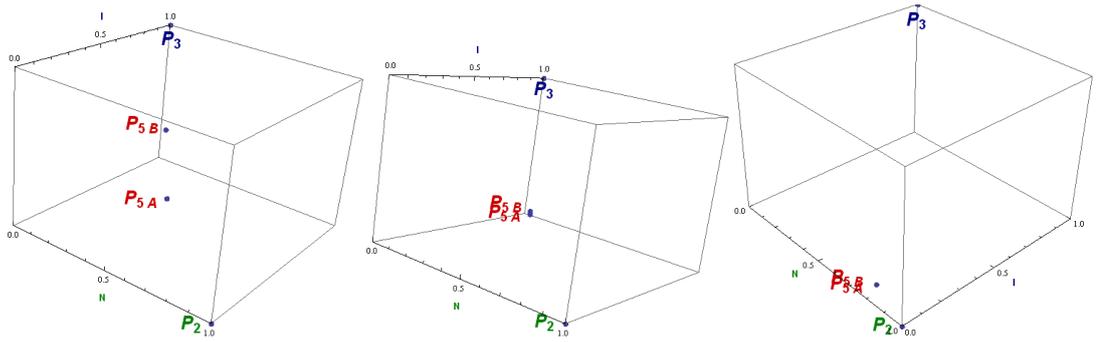


Figura 4.10: Posições dos pontos de equilíbrio no espaço de fase para diferentes valores de β . À esquerda, $\beta = 0,275$. Ao centro, quando $\beta = 0,262$, o ponto estável P_{5B} se aproxima do ponto de fronteira P_{5A} . À direita, quando $\beta = 0,2615$, os dois pontos se encontram, e saem da região $P \geq 1$, e P_2 se torna globalmente estável.

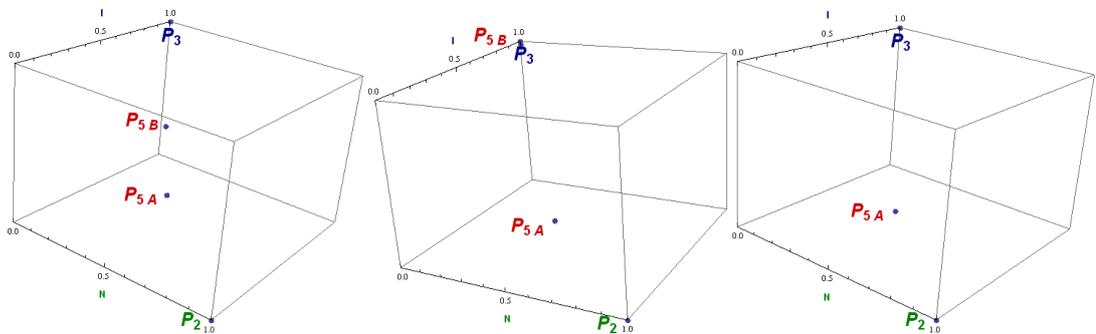


Figura 4.11: Posições dos pontos de equilíbrio no espaço de fase para diferentes valores de β . À esquerda, $\beta = 0,275$. Ao centro, quando $\beta = 0,3$, o ponto estável P_{5B} se aproxima de P_3 . À direita, quando $\beta = 0,31$, após os dois pontos se encontrarem, P_3 passa a ser o equilíbrio estável favorável a I .

bacia de P_3 . Um aumento na eficiência da fitotoxina, β , além de aumentar a bacia de atração de P_5 , que corresponde a coexistência sob alta concentração de fitotoxina, faz com que as coordenadas P_5 se tornem cada vez mais próximas das coordenadas de P_3 , de modo que aumenta a concentração de fitotoxina na qual as duas espécies coexistem (matematicamente, $P \rightarrow \frac{\rho}{\tau}$) e diminui o nível ao qual a espécie N coexiste com I , até este nível chegar a zero (matematicamente, a primeira coordenada de P_5 tende a zero). Estes fatos podem ser vistos na Figura 4.11.

4.6 Conclusões

Ao fazer a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo proposto para descrever a dinâmica de invasão de plantas mediada por alelopátia, deparamo-nos com a dificuldade em estimar o sinal da parte real dos autovalores da derivada no ponto P_5 . Porém, com o auxílio das ferramentas fornecidas pela teoria de bacias de atração, pudemos efetuar a análise de estabilidade do mesmo

e ir além, obtendo a descrição da estabilidade dos pontos fixos em todo o espaço de parâmetros, graças às implicações topológicas dos teoremas sobre bacias de atração. Com isto, pudemos compreender profundamente a dinâmica descrita pelo modelo e o papel de cada parâmetro, compreendendo a influência de cada na configuração e tamanho das bacias de atração. Ainda, ao verificar o efeito causado por perturbações suficientemente grandes nos parâmetros, compreendemos um pouco sobre as possíveis bifurcações do sistema e as suas diferenças. Ressaltamos mais uma vez que as ferramentas relacionadas as bacias de atração foram imprescindíveis e os resultados obtidos a partir do uso das mesmas foram muito mais completos do que seria sem elas. Assim, cremos que as mesmas podem ser usadas por outros pesquisadores que se deparem com modelos de qualquer área, descritos por sistemas autônomos não-lineares de difícil análise.

Capítulo 5

Considerações Finais

Após rever a teoria de Bacias de Atração em Sistemas Dinâmicos Contínuos, aplicamos suas consequências a dois modelos de dinâmica de populações. Cremos que não só os resultados de bacias de atração são úteis para uma melhor compreensão do fenômeno da biestabilidade em modelos de dinâmica populacional, como também as consequências dos mesmos, de maneira indireta, possibilitam a realização de uma análise qualitativa muito mais completa do que se faz usualmente, devido a dificuldade de trabalhar com polinômios de grau maior que dois. Assim sendo, esperamos que o presente trabalho possa ser útil àqueles que se depararem com sistemas autônomos não-lineares que apresentem biestabilidade.

Apêndice A

Significado dos parâmetros dos Capítulos 3 e 4

Capítulo 3	
Parâmetro	Significado
α	pressão competitiva exercida pela espécie I sobre a espécie N
β	pressão competitiva exercida pela espécie N sobre a espécie I
δ	razão entre as taxas de reprodução das espécies I e N

Capítulo 4	
Parâmetro	Significado
α_1	pressão competitiva exercida pela espécie I sobre a espécie N
α_2	pressão competitiva exercida pela espécie N sobre a espécie I
δ	razão entre as taxas de reprodução das espécies I e N
ν	taxa de produção da fitotoxina P
γ	taxa de absorção da fitotoxina P pela espécie N
τ	taxa de decaimento natural da fitotoxina P
β	nível de saturação do efeito nocivo $\phi(P)$
ξ	“velocidade” com a qual $\phi(P)$ atinge seu nível de saturação

Apêndice A

Código do programa para determinar a Variedade Estável

A seguir, o código, na linguagem do software *Mathematica*, do programa que determina a variedade estável combinando o método das aproximações sucessivas e o método da trajetória reversa.

■ **Campo SIMPLES $f = (f_1, f_2, f_3)$ e Pontos Fixos**

$\alpha_1 = 1.2; \alpha_2 = 1.2; \delta = 1; \nu = 0.5; \gamma = 0.8; \tau = 0.05; \beta = 0.19; \xi = 0.02;$

```
phi[z_] := beta (z - 1)^2 / ((z - 1)^2 + xi);
(*Show[Plot[phi1[x], {x, 0, 2}], Plot[phi2[x], {x, 0, 2}]]*)
f1[x_, y_, z_] := x (1 - x - alpha1 y - phi[Max[1, z]])
f2[x_, y_, z_] := delta y (1 - y - alpha2 x)
f3[x_, y_, z_] := nu y - gamma x z - tau z
f[{x_, y_, z_}] := {f1[x, y, z], f2[x, y, z], f3[x, y, z]}; f[{x, y, z}]
{x (1 - x - 1.2 y - 0.19 (-1 + Max[1, z])^2) / (0.02 + (-1 + Max[1, z])^2), (1 - 1.2 x - y) y, 0.5 y - 0.05 z - 0.8 x z}
pfs = Solve[{f[{x, y, z}] == {0, 0, 0}}, {x, y, z}];
p[i_] := {x, y, z} /. pfs[[i]]; Print[Table[p[i], {i, Length[pfs]}]]
{{0, 0, 0}, {0., 1., 10.}, {0.454545, 0.454545, 0.549451}, {1., 0, 0}}
```

■ **Derivada de f e linearização em p , Polinômios, AutoValores, AutoVetores, Jacobianas e Restos de TODOS OS PONTOS**

$f(x) = f(p) + jf(p)(x - p) + R(p, x)$

```
jf[x_, y_, z_] := D[{f1[x, y, z], f2[x, y, z], f3[x, y, z]}, {x, y, z}];
Simplify[jf[x, y, z]] // MatrixForm
JF[ponto_] := jf[x, y, z] /. x -> ponto[[1]] /. y -> ponto[[2]] /. z -> ponto[[3]];
Simplify[JF[p[3]]] // MatrixForm
{ -0.454545 -0.545455 0.
  -0.545455 -0.454545 0
  -0.43956 0.5 -0.413636 }
R[ponto_, {h1_, h2_, h3_}] :=
  f[ponto + {h1, h2, h3}] - f[ponto] - JF[ponto].{h1, h2, h3};
Simplify[R[p[3], {x, y, z}]]
{0. + 0.454545 x + 0.545455 y +
  (0.454545 + x) (0. - x - 1.2 y - 0.19 (-1 + Max[1, 0.549451 + z])^2) / (0.02 + (-1 + Max[1, 0.549451 + z])^2),
  0. + (-5.55112 x 10^-17 - 1.2 x) y - 1. y^2, 0. - 0.8 x z}
JD[matriz_] := JordanDecomposition[matriz];
AutoVetores[ponto_] := Transpose[Simplify[JD[JF[ponto]]][[1]], prop1 && prop2];
AutoValores[ponto_] :=
  Table[Simplify[JD[JF[ponto]]][[2]], prop1 && prop2][[i, i], {i, 1, 3}];
Print["AutoVetores=", AutoVetores[p[3]], ", AutoValores=", AutoValores[p[3]]]
AutoVetores=
{{0.705236, 0.705236, -0.0726924}, {0., 0., 1.}, {-0.427657, 0.427657, 0.796379}}
, AutoValores={-1., -0.413636, 0.0909091}
```

■ **Mudança de BASE $\rightarrow f'(p) = C_1 B C_1^{-1}$, $B = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, Patrator,**

Q repulsor e Decomposição Estável x Instável NOVA

```
PontoTemAutovaloresComplexos[ponto_] :=
  Simplify[If[Element[Eigenvalues[JF[ponto]], Reals], 0, 1], prop1 && prop2];
PontoTemAutovaloresComplexos[p[3]]
```

0

```

ClassificaAutoValores[ponto_] :=
  If[PontoTemAutovaloresComplexos[ponto] == 0, {0, 0, 0}, Simplify[Table[Which[And[i < 3,
    AutoValores[ponto][[i]] == Conjugate[AutoValores[ponto][[i + 1]]], 1,
    And[i > 1, AutoValores[ponto][[i]] == Conjugate[AutoValores[ponto][[i - 1]]],
    2, True, 0], {i, 1, 3}], prop1 && prop2]]; ClassificaAutoValores[p[3]]
{0, 0, 0}

matrizC1[ponto_] := If[PontoTemAutovaloresComplexos[ponto] == 0,
  Simplify[JordanDecomposition[JF[ponto]][[1]], Transpose[
    Table[Which[ClassificaAutoValores[ponto][[i]] == 1, Im[AutoVetores[ponto][[i]]],
    True, Re[AutoVetores[ponto][[i]]], {i, 1, 3}]]]; matrizC1[p[3]] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 0.705236 & 0. & -0.427657 \\ 0.705236 & 0. & 0.427657 \\ -0.0726924 & 1. & 0.796379 \end{pmatrix}$$

matrizB1[ponto_] := If[PontoTemAutovaloresComplexos[ponto] == 0,
  Simplify[JordanDecomposition[JF[ponto]][[2]],
  Table[Which[ClassificaAutoValores[ponto][[i]] == 1, Re[AutoValores[ponto][[i]] +
    Im[AutoValores[ponto][[i + 1]], ClassificaAutoValores[ponto][[i]] == 2,
    Re[AutoValores[ponto][[i]]] + Im[AutoValores[ponto][[i - 1]], True,
    Re[AutoValores[ponto][[i]]], {i, 1, 3}]]; matrizB1[p[3]] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -1. & 0 & 0 \\ 0 & -0.413636 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0909091 \end{pmatrix}$$

ListaAutoValoresEstaveis[ponto_] :=
  Simplify[Table[Simplify[Re[AutoValores[ponto][[i]]] < 0], {i, 1, 3}],
  prop1 && prop2]; ListaAutoValoresEstaveis[p[3]]
ListaAutovaloresEstaveis[{0.454545, 0.454545, 0.549451}]

indicesAutoValoresEstaveis[ponto_] :=
  Flatten[Position[ListaAutoValoresEstaveis[ponto], True]];
indicesAutoValoresInstaveis[ponto_] :=
  Flatten[Position[ListaAutoValoresEstaveis[ponto], False]];
Print["indicesAutoValoresEstaveis[p", 3, "]:", indicesAutoValoresEstaveis[p[3]],
  ", indicesAutoValoresInstaveis[p", 3, "]:", indicesAutoValoresInstaveis[p[3]]]
indicesAutoValoresEstaveis[p3]:{1, 2}, indicesAutoValoresInstaveis[p3]:{3}

matrizC[ponto_] := Transpose[Table[If[ii <= Length[indicesAutoValoresEstaveis[ponto]],
  Transpose[matrizC1[ponto]][[indicesAutoValoresEstaveis[ponto][[ii]]],
  Transpose[matrizC1[ponto]][[indicesAutoValoresInstaveis[ponto][[
    ii - Length[indicesAutoValoresEstaveis[ponto]]]]]], {ii, 1, 3}]];
matrizC[p[3]] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 0.705236 & 0. & -0.427657 \\ 0.705236 & 0. & 0.427657 \\ -0.0726924 & 1. & 0.796379 \end{pmatrix}$$


```

```

U[ponto_, t_] := Table[If[ii <= Length[indicesAutoValoresEstaveis[ponto]] &&
  jj <= Length[indicesAutoValoresEstaveis[ponto]],
  MatrixExp[matrizB1[ponto] t][[indicesAutoValoresEstaveis[ponto][[ii]],
  indicesAutoValoresEstaveis[ponto][[jj]]]], 0], {ii, 1, 3}, {jj, 1, 3}];
V[ponto_, t_] := Table[If[ii > Length[indicesAutoValoresEstaveis[ponto]] &&
  jj > Length[indicesAutoValoresEstaveis[ponto]],
  MatrixExp[matrizB1[ponto] t][[indicesAutoValoresInstaveis[ponto][[
  ii - Length[indicesAutoValoresEstaveis[ponto]]]],
  indicesAutoValoresInstaveis[ponto][[
  jj - Length[indicesAutoValoresEstaveis[ponto]]]]]], 0], {ii, 1, 3}, {jj, 1, 3}];
Print["U(t)=", U[p[3], t] // MatrixForm, ", V(t)=", V[p[3], t] // MatrixForm]

```

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-1 \cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.413636 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{0.0909091 t} \end{pmatrix}$$

```

G[ponto_, {x_, y_, z_}] := Simplify[
  Inverse[matrizC1[ponto]].R[ponto, matrizC1[ponto].{x, y, z}]; G[p[3], {x, y, z}]
{0. - 0.77576 x^2 + x (-7.87129 x 10^-17 - 0.427657 z) - 1.47587 x 10^-17 z + 0.0259332 z^2 + 0.708982
(0. + 0.705236 x + 0.0388779 z + (0.454545 + 0.705236 x - 0.427657 z) (0. - 1.55152 x -
0.0855314 z - (0.19 (-1 + Max[1, 0.549451 - 0.0726924 x + 1. y + 0.796379 z])^2) /
(0.02 + (-1 + Max[1, 0.549451 - 0.0726924 x + 1. y + 0.796379 z])^2))},
0. + 1.00341 x^2 + x (5.55112 x 10^-17 - 0.564189 y - 0.474178 z) +
x (9.76506 x 10^-17 + 0.530548 z) +
1.83095 x 10^-17 z +
(2.77556 x 10^-17 + 0.342125 y) z +
0.240289 z^2 + 0.982634
(0. + 0.705236 x + 0.0388779 z + (0.454545 + 0.705236 x - 0.427657 z) (0. - 1.55152 x -
0.0855314 z - (0.19 (-1 + Max[1, 0.549451 - 0.0726924 x + 1. y + 0.796379 z])^2) /
(0.02 + (-1 + Max[1, 0.549451 - 0.0726924 x + 1. y + 0.796379 z])^2))},
0. - 1.27928 x^2 + x (-1.29803 x 10^-16 - 0.705236 z) - 2.43381 x 10^-17 z +
0.0427657 z^2 -
1.16916 (0. + 0.705236 x + 0.0388779 z + (0.454545 + 0.705236 x - 0.427657 z) (0. - 1.55152 x -
0.0855314 z - (0.19 (-1 + Max[1, 0.549451 - 0.0726924 x + 1. y + 0.796379 z])^2) /
(0.02 + (-1 + Max[1, 0.549451 - 0.0726924 x + 1. y + 0.796379 z])^2))}]

```

■ Iterações Sucessivas $U(t, a) =$

$$U(t, a) + \int_0^t U(t-s) \cdot g(u(s, a)) ds - \int_t^\infty V(t-s) \cdot g(u(s, a)) ds \text{ e Coordenadas Originais}$$

```

S2[ponto_, j_, t_, {x_, y_, z_}, u_] := U[ponto, t].{x, y, z} + Expand[
  Integrate[U[ponto, t-ss].Evaluate[G[ponto, S2[ponto, j-1, s, {x, y, z}, u] /. s -> ss]] dss] -
  Integrate[V[ponto, t-ss].Evaluate[G[ponto, S2[ponto, j-1, s, {x, y, z}, u] /. s -> ss],
  {ss, t, \infty}, Assumptions -> {prop1 && prop2}];
S2[ponto_, 0, t_, {x_, y_, z_}, u_] = {0, 0, 0};
S2CoordOriginais[ponto_, j_, t_, {x_, y_, z_}, u_] :=
  ponto + matrizC[ponto].S2[ponto, j, t, (*Inverse[ C1[ip]].*){x, y, z}, u];
(*com Inverse é certo*)
VEst[ponto_, j_, x_, y_, z_] :=
  Simplify[S2CoordOriginais[ponto, j, t, {x, y, z}, u] /. t -> 0, prop1 && prop2];

```

```

SNum[ponto_, j_, t_, {x_, y_, z_}, u_] := N[U[ponto, t].{x, y, z} + Expand[
  ∫0t U[ponto, t - ss].Evaluate[G[ponto, S2[ponto, j - 1, s, {x, y, z}, u] /. s -> ss]] dss] -
  Integrate[V[ponto, t - ss].Evaluate[G[ponto, S2[ip, j - 1, s, {x, y, z}, u] /. s -> ss],
    {ss, t, ∞}, Assumptions -> {prop1 && prop2}], 64];
SNum[ponto_, 0, t_, {x_, y_, z_}, u_] = {0, 0, 0};
SNumCoordOriginais[ponto_, j_, t_, {x_, y_, z_}, u_] :=
  N[ponto + matrizC[ponto].SNum[ponto, j, t, (*Inverse[ C1[ip]].*){x, y, z}, u], 64];
VEstNum[ponto_, j_, x_, y_, z_] :=
  Simplify[SNumCoordOriginais[ponto, j, t, {x, y, z}, u] /. t -> 0];
(*APROXIMAÇÕES VARIEDADE ESTÁVEL*)
VEstNum[p[3], 1, x, y, z]
{0.454545 + 0.705236 x, 0.454545 + 0.705236 x, 0.549451 - 0.0726924 x + 1. y}
VEstNum[p[3], 2, x, y, z]

```

■ EDO's

```

k = 3;
(*1 PlotStyle -> {Dashing[{0.06}], Thickness[.02]} 2 PlotStyle ->
  {Dashing[{0.028}], Thickness[.02]} 3 PlotStyle ->
  {Dashing[{0.007}], Thickness[.02]} 4 PlotStyle -> {Dashing[{}], Thickness[.02]}*)
SolSist[{x0_, y0_, z0_}, tempo_] :=
  NDSolve[{x'[t] == f1[x[t], y[t], z[t]], y'[t] == f2[x[t], y[t], z[t]],
    z'[t] == f3[x[t], y[t], z[t]], x[0] == x0, y[0] == y0, z[0] == z0}, {x, y, z},
  {t, 0, tempo}, Method -> {"ExplicitRungeKutta", "DifferenceOrder" -> 8} (*,
  WorkingPrecision -> 128, PrecisionGoal -> 128, InterpolationOrder -> All*);
SolSistVolta[{x0_, y0_, z0_}, tempo_] :=
  NDSolve[{x'[t] == -f1[x[t], y[t], z[t]], y'[t] == -f2[x[t], y[t], z[t]],
    z'[t] == -f3[x[t], y[t], z[t]], x[0] == x0, y[0] == y0, z[0] == z0}, {x, y, z},
  {t, 0, tempo}, Method -> {"ExplicitRungeKutta", "DifferenceOrder" -> 8}
  (*, WorkingPrecision -> 64, PrecisionGoal -> 32, Method -> StiffnessSwitching*);
PlotaSolSist[{x0_, y0_, z0_}, tempo_] :=
  Show[ListPointPlot3D[{p[k]}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}],
  ListPointPlot3D[{x0, y0, z0}], PlotStyle -> {PointSize[0.015], RGBColor[1, 0, 0]}],
  ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. SolSist[{x0, y0, z0}, tempo]],
  {t, 0, tempo}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.003]}],
  PlotRange -> All, BoxRatios -> {1, 1, 1}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}];
PlotaSolSistVolta[{x0_, y0_, z0_}, tempo_] :=
  Show[ListPointPlot3D[{p[k]}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}],
  ListPointPlot3D[{x0, y0, z0}], PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 0.5]}],
  ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. SolSistVolta[{x0, y0, z0}, tempo]],
  {t, 0, tempo}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 0.5], Thickness[0.003]}],
  PlotRange -> All, BoxRatios -> {1, 1, 1}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}];
PlotaFluxo[tempo_, h1_] := ParametricPlot3D[v[{x, y, tempo}], {x, -h1, h1}, {y, -h1, h1},
  PlotRange -> All, BoxRatios -> {1, 1, 1}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}];
(*delta=1/1; {p[k][[1]]-delta, p[k][[1]]+delta},
  {p[k][[2]]-delta, p[k][[2]]+delta}, {p[k][[3]]-delta, p[k][[3]]+delta}*)
(* Variedade *) v2[{x_, y_}] := {0.4545454545454546` + 0.7052360670238417` x,
  0.45454545454545453` + 0.7052360670238416` x,
  0.5494505494505494` - 0.07269236230503862` x + 1. y}; v2[{x, y}]
{0.454545 + 0.705236 x, 0.454545 + 0.705236 x, 0.549451 - 0.0726924 x + 1. y}

```

```
(*PlotaSol[{x0_,y0_,z0_},tempo_]*)PlotaSolSist[v2[{1/100,1/100}],100]
Show[PlotaSolSist[v2[{1/100,1/100}]+{0,1/100,1/100}],100],
  PlotaSolSist[v2[{1/100,1/100}]-{0,1/100,1/100}],100]]
```

■ Orbitas Positivas e Negativas

```
Circ[h1_, o_] := {h1 Cos[o], h1 Sin[o]};
Condi[i_, npontoscirc_, h1_] := v2[Circ[h1, i 2 Pi / npontoscirc]];
OrbitaPosit[i_, npontoscirc_, h1_, tempo_] := SolSist[Condi[i, npontoscirc, h1], tempo];
OrbitaNegat[i_, npontoscirc_, h1_, tempo_] :=
  SolSistVolta[Condi[i, npontoscirc, h1], tempo];

(* ver Diferença entre COORD das condicoes iniciais na Variedade e p[k] *)
VerDifInic[npontoscirc_, h1_] :=
  For[i = -1, i ≤ npontoscirc - 2, Print[N[p[k] - Condi[i, npontoscirc, h1], 15]], i++];
(* GRAFICO condicoes iniciais na Variedade *) PlotaCondiInic[npontoscirc_, h1_] :=
  Show[ListPointPlot3D[{p[k]}, PlotStyle → {PointSize[0.03]}],
    ListPointPlot3D[Table[Condi[i, npontoscirc, h1], {i, 1, npontoscirc}],
      PlotStyle → {PointSize[0.02], RGBColor[1, 1, 1]}], PlotaFluxo[0, h1],
    ParametricPlot3D[v2[{x, y}], {x, -h1, h1}, {y, -h1, h1}], PlotRange → All,
    BoxRatios → {1, 1, 1}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}];
(* ver se condicoes iniciais convergem para ponto de equilibrio *)
Final[i_, npontoscirc_, h1_, tempo_] :=
  Flatten[{x[tempo], y[tempo], z[tempo]} /. OrbitaPosit[i, npontoscirc, h1, tempo]];
Converge[erro_, npontoscirc_, h1_, tempo_] :=
  Select[Flatten[Table[Final[i, npontoscirc, h1, tempo] - p[k], {i, 0, npontoscirc}]],
    Abs[#] > erro &]; (*GRAFICO final das CONDICINICIAIS NA VARIEDADE*)
range := 2 × 10-7; PlotaFinal[npontoscirc_, h1_, tempo_] :=
  Show[ListPointPlot3D[{p[k]}, PlotStyle → {PointSize[0.02]}],
    ListPointPlot3D[Table[Final[i, npontoscirc, h1, tempo], {i, 1, npontoscirc}],
      PlotStyle → {PointSize[0.03]}], PlotRange → All
    (*{{p[k][[1]]-range,p[k][[1]]+range},{p[k][[2]]-range,p[k][[2]]+range},
      {p[k][[3]]-range,p[k][[3]]+range}}*),
    BoxRatios → {1, 1, 1}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}];
(* VerDifInic[npontoscirc_,h1_] *) VerDifInic[20, 10-3];
(* PlotaCondiInic[npontoscirc_,h1_] *) PlotaCondiInic[30, 10-2];
(* Converge[erro_,npontoscirc_,h1_,tempo_] *) Converge[10-12, 20, 10-7, 25];
(* Final[i_,npontoscirc_,h1_,tempo_] *) Final[10, 20, 10-7, 5/100] - p[k]
(* PlotaSol[{x0_,y0_,z0_},tempo_] Condi[i_,npontoscirc_,h1_] *)
PlotaSol[Condi[10, 20, 10-7], 5/100]
(* PlotaFinal[npontoscirc_,h1_,tempo_] *) PlotaFinal[20, 10-7, 10]
```

■ METODO (depois que verificou - se a convergencia)

```
retalho[npontoscirc_, h1_, tempo_] := Show[Table[ParametricPlot3D[
  Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. OrbitaNegat[i, npontoscirc, h1, tempo]],
  {t, 0, tempo}, PlotPoints → 10000], {i, 0, npontoscirc - 1}],
  PlotRange → All (*All*), BoxRatios → {1, 1, 1}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}];
EspacoFase[npontoscirc_, h1_, tempo_] := Show[ListPointPlot3D[
  Flatten[Table[{p[j]}, {j, 1, Length[pfs]}], 1], PlotStyle → {PointSize[0.016]}],
  retalho[npontoscirc, h1, tempo], PlotRange → {{0, 1}, {0, 1}, {0, v / τ}}
  (*All*), BoxRatios → {1, 1, 1}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}];
(* retalho[npontoscirc_,h1_,tempo_] *) retalho[40, 10-3, 1]
EspacoFase[4, 10-3, 100]
```

```
Nivel[tempo_, npontoscirc_, h1_] := ListPointPlot3D[Table[
  Flatten[{x[tempo], y[tempo], z[tempo]} /. OrbitaNegat[i, npontoscirc, h1, tempo]],
  {i, 1, npontoscirc}], PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 0]},
  PlotRange -> All(*{{0,1},{0,1},{0,1}}*), BoxRatios -> {1, 1, 1}]
Show[Nivel[4, 10, 10^(-7)], Nivel[5, 20, 10^(-7)], Nivel[6, 30, 10^(-7)]]
```

Apêndice A

Código do programa para determinar as Bacias

A seguir, o código, na linguagem C++, do programa que determina os cortes nas bacias de atração.

```

using namespace std;
#include <stdio.h>
#include <iostream>
#include <math.h>

#define dim 3

/*constantes*/
#define alpha1 1.2
#define alpha2 1.20
#define delta 1.00
#define v 0.5
#define gama 0.80
#define r 0.05
#define beta 0.19
#define xi 0.05

/*sistema*/
void sistema(double *x,double *dxdt,double phi_p)
{
    if (x[2]>=1) phi_p=(beta*(x[2]-1)*(x[2]-1))/(xi+(x[2]-1)*(x[2]-1));
    else phi_p=0;
    dxdt[0]= x[0]*(1-x[0]-alpha1*x[1]-phi_p);
    dxdt[1]= delta*x[1]*(1-x[1]-alpha2*x[0]);
    dxdt[2]= v*x[1]-gama*x[0]*x[2]-r*x[2];
    return;
}

int main(void)
{ /* define as funcoes do programa */
    void rungekutta4(double *xvelho, double *xnovo, double *xponto, double t, double
deltat, int dimensao,double phi);
    void sistema(double *v1, double *v2, double fi);
    /* define as variáveis do programa */
    double
xvelho[dim],xnovo[dim],aux[dim],xponto[dim],k1[dim],k2[dim],k3[dim],k4[dim],xzero[dim]
,pf2[dim],pf3[dim],pf4[dim],pf5a[dim],pf5b[dim],pN[dim],pF[dim],pI[dim],dPN[dim],dPF[d
im],dPI[dim],dP2[dim],dP3[dim],dP4[dim],dP5a[dim],dP5b[dim];
    int i,j,npassos,npassosx,npassosy,npassosz,kx,ky,kz,k,cont,tent; double
tempo,deltat,ttotal,phi_p,dx,dy,prec;
    FILE *ef, *arquivo; bool pontos,p[7],bA,bB,nconv; char* nome[10];

    /*Escreve os Pontos Fixos*/
    pf2[0]=1.0; pf2[1]=0.0; pf2[2]=0.0;
    pf3[0]=0.0; pf3[1]=1.0; pf3[2]=v/r;
    pf4[0]=(1-alpha1)/(1-alpha1*alpha2);
    pf4[1]=(1-alpha2*pf4[0]);
    pf4[2]=(v*pf4[1])/(gama*pf4[0]+r);
    pf5a[0]=-0.2791; pf5a[1]=-0.74881; pf5a[2]=-1.37004;
    pf5b[0]=-10.0; pf5b[1]=-10.0; pf5b[2]=-10.0;

    cout<<"p4=("<<pf4[0]<<","<<pf4[1]<<","<<pf4[2]<<") \n ";
    /*Descreve os atratores de N, de I e a Sela da Fronteira
pN=
pI=
pF=*/

    /* começo da integracao, definicoes dx e dy, etc*/
    deltat=0.0001; ttotal=500; npassos=(int)(ttotal/deltat)+1 /*numero de passos no
tempo*/; prec=0.001;

    npassosx=100;

```

```

npassosy=100;
dx=(double)1/npassosx;
dy=(double)1/npassosy;
//npassosx=int(1/dx);
//npassosy=int(1/dy);
cout<<"numero de passos em cada integracao: "<<npassos<<"\n";
cout<<"numero de passos em x e em y: "<<npassosx<<" dx,dy="<<dx<<"\n";
npassosz=4; // máximo é 10 (número de planos no eixo z, que está dividido
igualmente de 0 a v/r)

//arquivo = fopen("dados.txt","w"); //? antigo

for (kz=1; kz<=npassosz; kz++){

xzero[0]=0.0;xzero[1]=0.0;xzero[2]=0.0;

nome[1]="z1.txt";nome[2]="z2.txt";nome[3]="z3.txt";nome[4]="z4.txt";nome[5]="z5.txt";n
ome[6]="z6.txt";nome[7]="z7.txt";nome[8]="z8.txt";nome[9]="z9.txt";nome[10]="z10.txt";

xzero[2]= ((v/r)*(kz-1))/(npassosz-1); cout<<" \n";cout<<"\n"<<"z="<<xzero[2]<<"\n";
ef = fopen(nome[kz],"w");
fprintf(ef,"# z = %.2lf",xzero[2]);fprintf(ef,"\n");

for (ky=1; ky<=npassosy; ky++){ xzero[1]=ky*dy;
for (kx=1; kx<=npassosx; kx++){ xzero[0]=kx*dx;

xvelho[0]=xzero[0];
xvelho[1]=xzero[1];
xvelho[2]=xzero[2];

//comeca o metodo - tent mede a tentativa de convergencia
cont=1; //cont conta as tentativas
for (tent=1; tent<=1; tent++) {
tempo=0.;

//integracao
for(j=0;j<npassos+1;j++){
rungekutta4(xvelho,xvelho,xponto,tempo,deltat,dim,phi_p);
tempo=tempo+deltat;
/* tentativa dinamica de convergencia - a cada tempo de 50000*/
if ((j+1)%1000==0){ //frequencia 1000 foi a melhor comparada com 5000, 100,
10000, 25000, 50000 - 1000 corresponde a 0.1 no ttotal
//cout<<"x0,y0 = "<<xzero[0]<<" ,"<<xzero[1]<<" , t="<<(j+1)*deltat<<": ";
for(i=0; i<dim; i++) dP2[i]=fabs(pf2[i]-xvelho[i]);
for(i=0; i<dim; i++) dP3[i]=fabs(pf3[i]-xvelho[i]);
for(i=0; i<dim; i++) dP4[i]=fabs(pf4[i]-xvelho[i]);
for(i=0; i<dim; i++) dP5a[i]=fabs(pf5a[i]-xvelho[i]);
for(i=0; i<dim; i++) dP5b[i]=fabs(pf5b[i]-xvelho[i]);
// convergiu para p2 ?
if ((dP2[0]*dP2[0]+dP2[1]*dP2[1]+dP2[2]*dP2[2])<prec*prec) {fprintf(ef," 2.0 ");
//cout<<"perto de p2; \n";
cout<<"x0,y0 = "<<xzero[0]<<" ,"<<xzero[1]<<" , t="<<(j+1)*deltat<<": ";
break; break;}
// convergiu para p3 ?
else {
if ((dP3[0]*dP3[0]+dP3[1]*dP3[1]+dP3[2]*dP3[2])<prec*prec) {fprintf(ef," 3.0
"); //cout<<"perto de p3; \n";
cout<<"x0,y0 = "<<xzero[0]<<" ,"<<xzero[1]<<" , t="<<(j+1)*deltat<<": ";
break; break;break;}
// convergiu para p4 ?
else {

```


Referências Bibliográficas

- [1] L. F. C. Alberto. *Caracterização e Estimativas da Área de Atração de Sistemas Dinâmicos Não Lineares*, Tese de Livre Docência, USP, São Carlos, 2006.
- [2] F. M. Amaral. *Caracterização, Estimativas e Bifurcações da Região de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Não Lineares*, Tese de Doutorado, USP, São Carlos, 2010.
- [3] V.I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*, MIR, Moscou, 1974.
- [4] H. P. Bais, R. Vepachedu, S. Gilroy, R. M. Callaway and J. M. Vivanco. *Allelopathy and exotic plant invasion: From molecules and genes to species interactions*. Science, 301: 1377-1380, 2003.
- [5] S. A. Cannas, D. E. Marco and S. A. Páez. *Modelling biological invasions: Species traits, species interactions, and habitat heterogeneity*. Math. Biosciences, 183: 93-110, 2003.
- [6] H.D. Chiang, M. W. Hirsch and F. F. Wu. *Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, 33(1):16-27, 1988.
- [7] C. Chow. *Roles of allelopathy in plant biodiversity and sustainable agriculture*. Critical Review in Plant Science, 18(5): 609-636, 1999.
- [8] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, Nova York, 1972.
- [9] P. J. Dale, B. Clark and E. M. G. Fontes. *Potential for the environmental impact of transgenic crops*. Nature Biotechnol., 20: 567-574, 2002.
- [10] W. R. J. Dean. *Space invaders: modeling the distribution, impacts and control of alien organisms*. Trends Ecol. Evol., 13: 256-258, 1998.
- [11] C. I. Doering e A. O. Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [12] A. C. Fassoni e M. L. Martins. *Um modelo para invasão de plantas por alelopatia*, Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Belém, 2009.

- [13] R. Genesio, M. Tartaglia and A. Vicino. *On the estimation of asymptotic stability regions: State of the art and new proposals*, IEEE Trans. Automatic Control, 30:747-755, 1985.
- [14] J. Guckenheimer and A. Vladimírsky. *A fast method for approximating invariant manifolds*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 3/3: 232-260, 2004.
- [15] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, Nova York, 1972.
- [16] M. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, San Diego, 1974.
- [17] K. Hoffman and R. Kunze. *Linear Algebra, 2nd Edition*, Prentice Hall, Nova Jersey, 1971.
- [18] W. Hurewicz and H. Wallman. *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1948.
- [19] R. S. Irving. *Integers, polynomials and rings*, Springer-Verlag, Nova York, 2004.
- [20] J. Kennedy. *Some Polynomial Theorems*, Mathematics Department of Santa Monica College, Santa Monica, 2006.
- [21] B. Krauskopf and H.M. Osinga. *Two-dimensional global manifolds of vector fields*, CHAOS, 9(3), 1999.
- [22] R. M. May. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [23] J. D. Murray. *Mathematical Biology, I. An Introduction*, Springer, Nova York, 2000.
- [24] J. D. Murray. *Mathematical Biology, II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, Nova York, 2003.
- [25] J. Palis e W. Melo. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Impa, Rio de Janeiro, 1978.
- [26] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems, 3rd ed.*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [27] S. Petrovskii and N. Shigesada. *Some exact solutions of a generalized Fisher equation related to the problem of biological invasion*. Math. Biosciences, 172: 73-94, 2001.
- [28] M. Rejmánek. *Invasibility for plant communities*. In: J. A. Drake, H. A. Mooney, F. di Castri, R. H. Groves, F. J. Kruger, M. Rejmanek and M. Williamson (Editors), *Biological Invasions: A Global Perspective*. John Wiley and Sons, Chichester, 1989.

- [29] J. A. Sherratt, M. A. Lewis and A. C. Fowler. *Ecological chaos in the wake of invasion*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 92: 2524-2528, 1995.
- [30] N. Shigesada and K. Kawasaki. *Biological Invasions: Theory and Practice*. Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [31] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto. *Traveling periodic waves in heterogeneous environments*. Theor. Popul. Biol., 30: 143-160, 1986.
- [32] S. Smale. *Differentiable dynamical systems*, Bulletin of American Mathematical Society, vol. 73, 1967.
- [33] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Impa, Rio de Janeiro, 1970.
- [34] D. R. Souza, M. L. Martins and F. M. S. Carmo. *A multiscale model for plant invasions through allelopathic suppression*, Biological Invasions, v. 12, p. 1543-1555, 2010.
- [35] J. L. Willems. *Stability Theory of Dynamical Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1970.