

ANNA PAULA MACHADO DE OLIVEIRA

UMA ABORDAGEM DA TEORIA DE SISTEMAS DINÂMICOS PARA  
SUSTENTABILIDADE

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2013

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e  
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

O48a  
2013

Oliveira, Anna Paula Machado de, 1988-

Uma abordagem da Teoria de Sistemas Dinâmicos para sustentabilidade / Anna Paula Machado de Oliveira. – Viçosa, MG, 2013.

x, 79f. : il. (algumas color.) ; 29cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Kennedy Martins Pedroso

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 76-77

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Sustentabilidade.  
3. Persistência. 4. Equações diferenciais. I. Universidade  
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática.  
Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.39

ANNA PAULA MACHADO DE OLIVEIRA

**UMA ABORDAGEM DA TEORIA DE SISTEMAS DINÂMICOS PARA  
SUSTENTABILIDADE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 22 de fevereiro de 2013.

---

Hyun Mo Yang

---

Wilson da Cruz Vieira

---

Alexandre Miranda Alves  
(Coorientador)

---

Mehran Sabeti  
(Coorientador)

---

Kennedy Martins Pedroso  
(Orientador)

*“Believe that dreams come true every day.  
Because they do.”* (Mark Schwahn)

## Agradecimentos

Meu sincero agradecimento:

A Deus por minha vida, pela oportunidade de estudar, por estar comigo em todos os momentos, principalmente nas dificuldades, por cuidar de mim e me iluminar sempre.

Aos meus pais Antônio e Rosângela pelo incentivo, apoio, torcida, amor incondicional, orações, preocupações e ligações fora de hora. Sem vocês para partilhar esse momento, nada disso valeria a pena. Essa vitória também é de vocês. Agradeço também, a todos os meus familiares, sei que a torcida foi tão grande quanto a saudade.

Ao Eduardo por ser mais que um companheiro e amigo. Por me suportar nos momentos de nervosismo e por me abraçar nos momentos de tristeza. Sua presença fez Viçosa se tornar minha casa e eu não conseguiria imaginar esses anos de minha vida sem seu apoio!

Ao professor Kennedy pela orientação, pelo tempo dedicado ao trabalho, pelos ensinamentos matemáticos, pelos conselhos sempre muito oportunos, pela amizade, pela paciência, pela compreensão e pela força, principalmente, nos momentos em que tive problemas de saúde. Guardo com carinho os momentos que compartilhamos e espero que possamos nos reencontrar no futuro.

As irmãs da República Caipirada, pelas risadas e brincadeiras, tornando essa jornada muito mais leve e divertida. Em especial à Maria Lúcia, por todo apoio que nos deu nesses dois anos.

A todos os professores e funcionários do DMA pelo convívio, colaboração, ensinamentos e suporte dado durante todos esses anos. Destaco os professores Merhan e Alexandre que coorientaram este trabalho, o professor Maurício que me orientou no Reuni, o professor Anderson grande conselheiro e incentivador e todos os professores envolvidos no Curso de Licenciatura em Matemática à distância com os quais tive o prazer de trabalhar.

Aos professores que aceitaram fazer parte da Banca Examinadora, professor Hyun Mo Yang da UNICAMP e professor Wilson da Cruz Vieira da UFV, muito obrigada pela disponibilidade e pelo tempo dedicado à melhoria desse trabalho.

Aos queridos amigos e colegas do mestrado da Matemática (MatCaverna), obrigada pelas risadas, pelos momentos de estudo e discussão, pelas festas e churrascos e pelos fim

de semana inesquecíveis. Vocês tornaram esses dois anos de mestrado mais suaves e divertidos. Muito obrigada Artur, Isaque, Fred, Vinícius, Fernando, Victor, Michele, Maisa, Guemael, Samara, Débora, Thiago, Priscila, Carlos, Renno, Rondinei, Luiz, Serginei, Filipe e Lívia. Destaque especial para os amigos que iniciaram essa jornada comigo, Alana Nunes, Alana Cavalcante, Fernanda, Michely, Gustavo e a minha alma gêmea matemática Robledo Mak's. Sofremos juntos no início, mas agora podemos olhar para trás e dizer que tudo valeu a pena.

Às amigas que iniciaram a jornada na UFV comigo e que assim permaneceram. Aline, Sabrina e Renata, eu não tenho palavras pra descrever o quanto vocês significam pra mim e o quanto vocês foram e são importantes em minha vida. Sou a pessoa mais sortuda do mundo por ter amigas-irmãs como vocês. Obrigada por me darem a honra de poder chamá-las assim. Daquele Jeito! FMI, amém!

A todos os amigos, colegas e conhecidos que torceram e rezaram por mim durante esse período.

A Capes pelo apoio financeiro concedido, sem o qual não seria possível a realização desta dissertação.

À Viçosa. Não há como dimensionar o quanto cresci profissionalmente e pessoalmente nessa cidade. Não poderia ter conhecido e convivido com pessoas melhores. As lágrimas dessa despedida são a maior prova de que Viçosa valeu a pena.

## Sumário

<b>Lista de Símbolos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Persistência em Sistemas Dinâmicos</b>	<b>4</b>
1.1 Conceitos Iniciais . . . . .	4
1.2 Definições de Persistência e suas Relações . . . . .	7
1.3 Condições Suficientes para Persistência Uniforme . . . . .	11
1.4 Persistência em Modelos Kolmogorov com Três Equações . . . . .	12
1.5 Persistência em Modelos Kolmogorov com $n$ Equações . . . . .	14
1.6 Algumas Considerações . . . . .	18
<b>2 Modelo com Interações entre Agricultura e Indústria</b>	<b>20</b>
2.1 O Modelo . . . . .	21
2.2 Positividade e Dissipatividade . . . . .	22
2.3 Pontos de Equilíbrio na Fronteira de $\mathbb{R}_+^2$ . . . . .	24
2.4 Análise Local dos Pontos de Equilíbrio da Fronteira de $\mathbb{R}_+^2$ . . . . .	25
2.5 A Busca por Pontos de Equilíbrio no Interior de $\mathbb{R}_+^2$ . . . . .	26

2.6	Sustentabilidade do Modelo Agricultura-Indústria . . . . .	29
2.7	Retratos de Fase para alguns valores de parâmetros . . . . .	30
2.8	Considerações Finais para o Modelo Agricultura - Indústria . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Modelo com Interações entre Ecosfera, Agricultura e Indústria</b>	<b>35</b>
3.1	O Modelo . . . . .	36
3.2	Positividade e Dissipatividade . . . . .	37
3.3	Pontos de Equilíbrio na Fronteira de $\mathbb{R}_+^3$ . . . . .	38
3.4	Análise Local dos Pontos de Equilíbrio da Fronteira de $\mathbb{R}_+^3$ . . . . .	41
3.5	Sustentabilidade do Modelo Ecosfera-Agricultura-Indústria . . . . .	44
3.6	Considerações Finais para o Sustentabilidade do Modelo Ecosfera-Agricultura-Indústria . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Modelo com Interações entre Ecosfera, Agricultura Tradicional, Agricultura Auxiliar e Indústria</b>	<b>46</b>
4.1	O Modelo . . . . .	46
4.2	Positividade e Dissipatividade . . . . .	49
4.3	Pontos de Equilíbrio na Fronteira de $\mathbb{R}_+^4$ . . . . .	49
4.3.1	A Existência de Equilíbrio Positivo no Octante $xy_1y_2$ . . . . .	54
4.3.2	A Existência de Equilíbrio Positivo no Octante $xy_1z$ via Persistência	56
4.4	Análise Local dos Equilíbrio na Fronteira de $\mathbb{R}_+^4$ . . . . .	65
4.5	Sustentabilidade do Modelo Ecosfera - Agricultura Tradicional - Agricultura Auxiliar - Indústria . . . . .	73
4.6	Considerações Finais sobre o Modelo Ecosfera - Agricultura Tradicional - Agricultura Auxiliar - Indústria . . . . .	74
<b>A</b>	<b>Critério de Routh-Hurwitz</b>	<b>76</b>

## Lista de Símbolos

- $\mu$  parâmetro que reescala a taxa de mudança na riqueza agrícola quando comparada à taxa de mudança na riqueza industrial.
- $\alpha_0$  taxa de crescimento na riqueza agrícola, sendo dependente da qualidade ambiental.
- $\beta$  coeficiente de rendimentos decrescentes na agricultura.
- $\delta$  índice de preços industriais (2 dimensões ou 3 dimensões) ou taxa de crescimento para a indústria ao relacionar-se com a agricultura tradicional (4 dimensões).
- $\gamma$  índice de preços agrícolas.
- $\xi$  taxa de depreciação linear do capital industrial (2 dimensões e 3 dimensões) ou taxa constante de depreciação da indústria (4 dimensões).
- $\eta$  taxa de depreciação quadrática do capital industrial (2 dimensões e 3 dimensões) ou taxa de depreciação linear da indústria (4 dimensões).
- $a$  taxa de recuperação econômica da agricultura.
- $b$  taxa de recuperação econômica da indústria.
- $\alpha$  capacidade de uso base da ecosfera pela agricultura.
- $e$  coeficiente de recuperação da ecosfera.
- $u$  taxa de restauração ou reabilitação da ecosfera.
- $v$  taxa de degradação da ecosfera.
- $\omega$  posição da ecosfera em relação à condição de máximo da ecosfera “natural”.
- $\alpha_1$  taxa de crescimento da agricultura normal devido à atividade agrícola tradicional para  $x$  fixo.
- $\alpha_2$  taxa de crescimento da agricultura auxiliar devido à atividade agrícola auxiliar para  $x$  fixo.
- $\beta_1$  taxa de retornos decrescentes para a agricultura normal na ausência de indústria e agricultura auxiliar.

- $\beta_2$  taxa de retornos decrescentes para a agricultura auxiliar na ausência de indústria e agricultura tradicional.
- $\gamma_1$  coeficiente de termos de troca entre agricultura tradicional e indústria.
- $\gamma_2$  coeficiente de termos de troca entre agricultura auxiliar e indústria.
- $\rho_1$  taxa da competitividade da agricultura auxiliar atuando na agricultura tradicional.
- $\rho_2$  taxa da competitividade da agricultura tradicional atuando na agricultura auxiliar.
- $\kappa$  taxa de degradação da ecosfera devido às atividades agrícolas normais.
- $\vartheta$  taxa natural de restauração para a ecosfera.
- $\theta$  taxa de custo líquido para a agricultura normal restaurar a ecosfera.
- $\phi$  taxa de esforço para restaurar a ecosfera pela agricultura normal.

## Resumo

OLIVEIRA, Anna Paula Machado de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2013. **Uma Abordagem da Teoria de Sistemas Dinâmicos para Sustentabilidade.** Orientador: Kennedy Martins Pedroso. Coorientadores: Alexandre Miranda Alves e Mehran Sabeti.

Nesta dissertação estudamos sistemas de equações diferenciais ordinárias que descrevem a interação entre ecossfera, indústria e agricultura. O objetivo é mostrar que esses modelos são sustentáveis, ou seja, que eles apresentam Dissipatividade e Persistência Uniforme. Os sistemas trabalhados foram propostos por Agyemang e outros [1], Apedaille e outros [3] e Solomonovich e outros [16] e [18].

## Abstract

OLIVEIRA, Anna Paula Machado de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, february, 2013. **An Approach to Theory of Dynamical Systems for Sustainability.** Adviser: Kennedy Martins Pedroso. Co-advisers: Alexandre Miranda Alves and Mehran Sabeti.

In this dissertation we study systems of Ordinary Differential Equations that describe the interaction between Ecosphere, Industry and Agriculture. The purpose of this work is to show that these models are sustainable, ie, they present Dissipativity and Uniform Persistence. The systems were proposed by Agyemang and others [1], and Apedaille [3] and Solomonovich and others [16] and [18].

## Introdução

O conceito de sustentabilidade vem sendo amplamente discutido e a preocupação com um desenvolvimento econômico, industrial ou agrícola que não agrida o meio ambiente é cada vez maior. Nesse contexto, foi realizado em junho de 2012 a Conferência das Nações Unidas sobre Desenvolvimento Sustentável no Rio de Janeiro, conhecida como Rio + 20, cujo principal objetivo foi o de renovar o compromisso político dos países participantes com o desenvolvimento sustentável.

O objetivo desse trabalho é estudar modelos descritos por equações diferenciais ordinárias, cujas variáveis são: a ecosfera que representa, em geral, a qualidade do ambiente; a agricultura representando atividades agrícolas e extrativistas que geralmente estão localizados nas economias rurais; e a indústria que refere-se à produção de manufaturados, podendo incluir serviços que estão geralmente associados com economias urbanas. No espaço de fase desses sistemas, procuramos atratores globais que tenham todas as coordenadas positivas, porque essa é a principal característica dinâmica que atribuiremos ao conceito de sustentabilidade. Para garantir a existência desses atratores, usamos a Teoria da Persistência que lida principalmente com a topologia de semifluxos em espaços métricos localmente compactos. Essa sofisticada teoria vem sendo desenvolvida há menos de trinta anos, ou seja, trata-se de uma teoria recente e um campo fértil de pesquisa tanto para Matemática Pura quanto para Matemática Aplicada. Nesse trabalho, também evidenciamos algumas limitações das teorias clássicas (análise local seguida de construção de funções de Lyapunov) para responder aos questionamentos naturais sobre os modelos.

O presente trabalho contribui, utilizando-se do vocabulário de sistemas dinâmicos, para uma descrição mais precisa do conceito de sustentabilidade. Os modelos estudados retratam situações concretas, onde a sustentabilidade é traduzida como um princípio segundo o qual o uso dos recursos naturais e econômicos por atividades agrícolas e industriais, para a satisfação de necessidades presentes, não pode comprometer a satisfação das necessidades das gerações futuras.

No capítulo 1 apresentaremos os principais tópicos de Teoria da Persistência que serão utilizados nos capítulos posteriores. Iniciamos com definições básicas de EDO, tais como fluxo e conjunto ômega-limite, para mais tarde definirmos dissipatividade e os vários tipos de Persistência. Esses conceitos serão de extrema importância para os modelos trabalhados nos capítulos seguintes. A partir daí, nosso objetivo se torna encontrar condições para

que se tenha uma equivalência entre estas definições de Persistência apresentadas. Finalizamos com duas seções nas quais mostraremos como garantir Persistência em modelos Kolmogorov de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i > 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ , que chamaremos de *cone positivo de dimensão  $n$* . A importância dessas duas últimas seções está no fato de que são elas que tornam a teoria mais aplicável, algo que pode-se observar, por exemplo, nos capítulos 2 e 3. A base da parte inicial desse capítulo foi principalmente os artigos [5], [6] e [8]. Para as duas últimas seções utilizamos [10] e [11].

No capítulo 2 analisaremos o modelo de duas equações envolvendo somente agricultura e indústria, onde a ecossfera é considerada em equilíbrio. Começamos apresentando algumas propriedades desse sistema (positividade e dissipatividade), depois procuramos pontos de equilíbrio na fronteira de  $\mathbb{R}_+^2$ , formada pelos semieixos positivos, e classificamos localmente os equilíbrios encontrados via Teorema de Hartman-Grobman. Ao tentarmos encontrar os equilíbrios no interior de  $\mathbb{R}_+^2$  da forma usual nos deparamos com o seguinte polinômio de grau 5

$$\begin{aligned} & \delta\beta^2y^5 + (2\delta\beta^2a - 2\delta\beta\alpha_0)y^4 \\ & + (-b\eta\gamma - 4\delta\beta\alpha_0a + \beta b\eta\delta + 2\delta^2\beta \\ & + \delta\alpha_0^2 - \beta\xi\delta + \delta\beta^2a^2 - 2\delta\beta\gamma + \beta\xi\gamma)y^3 \\ & + (2\delta\alpha_0^2a - 2\beta\xi a\delta + 2\delta\alpha_0\gamma + 2\delta^2\beta a - \alpha_0b\eta\delta + \alpha_0b\eta\gamma \\ & + 2\beta\xi a\gamma - 2\delta\beta a\gamma + \alpha_0\xi\delta + 2\beta b\eta a\delta \\ & - 2\beta b\eta a\gamma - 2\delta\beta a^2\alpha_0 - \alpha_0\xi\gamma - 2\delta^2\alpha_0)y^2 \\ & + (-2\delta^2\alpha_0a + \delta\gamma^2 + 2\alpha_0b\eta a\gamma + \beta a^2\xi\gamma - 2\delta^2\gamma - \xi\delta^2 + 2\alpha_0\xi a\delta + 2\xi\delta\gamma \\ & - \xi\gamma^2 + \delta\alpha_0^2a^2 - 2\alpha_0b\eta a\delta + \delta^3 - 2\alpha_0\xi \\ & a\gamma + \beta a^2b\eta\delta + 2\delta\alpha_0a\gamma - \beta a^2\xi\delta - \beta a^2b\eta\gamma)y \\ & - \alpha_0a^2\xi\gamma - \xi\delta^2a + 2\xi\delta a\gamma + \alpha_0a^2b\eta\gamma + \alpha_0a^2\xi\delta - \alpha_0a^2b\eta\delta - \xi\gamma^2a = 0. \end{aligned}$$

que contém 9 parâmetros, fazendo com que encontrar uma raiz satisfatória a situação apresentada, seja bem difícil. O objetivo então, passa a ser mostrar que o fluxo solução do nosso sistema é sustentável, ou seja, que esse fluxo é persistente uniforme e dissipativo, pois isso garante a existência de um atrator global no interior de  $\mathbb{R}_+^2$ . Utilizamos o artigo [3] como embasamento para esse capítulo.

No capítulo 3 apresentamos o modelo de 3 equações envolvendo ecossfera, indústria e agricultura. Novamente começaremos com algumas propriedades inerentes a esse sistema, como dissipatividade, e procuraremos equilíbrios na fronteira de  $\mathbb{R}_+^3$  classificando-os localmente posteriormente utilizando o Teorema de Hartman-Grobman. Utilizando um teorema específico para o caso de 3 dimensões apresentado no capítulo 1, concluiremos que o sistema é persistente uniforme e conseqüentemente, sustentável. Para esse capítulo utilizamos os artigos [16], [17] e [18].

No capítulo 4 temos o modelo de 4 equações, que envolve ecossfera, indústria e dois tipos de agricultura. Nesse modelo, a agricultura é separada em agricultura tradicional ou normal que representa as mesmas atividades agrícolas dos capítulos anteriores e agricultura auxiliar, que retrata principalmente os recursos que podem ser retirados de florestas e da vida selvagem. Mais uma vez iniciamos com algumas propriedades e se-

guimos encontrando e classificando localmente os equilíbrios da fronteira de  $\mathbb{R}_+^4$ , com os quais nos deparamos diretamente. Nesse capítulo porém, a persistência já é utilizada para garantir que temos um único equilíbrio em um dos semiespaços positivos que compõe a fronteira. Após isso, concluiremos que o sistema é persistente uniforme garantindo assim a sustentabilidade. Esse capítulo foi baseado em [1].

No geral, o objetivo dos capítulos 2, 3 e 4 é o mesmo: exibir a Persistência Uniforme dos respectivos sistema que, juntamente com a propriedade de dissipatividade, garantirão a sustentabilidade dos modelos apresentados.

# Capítulo 1

## Persistência em Sistemas Dinâmicos

O objetivo desse capítulo é apresentar a Teoria da Persistência, a qual lida principalmente com a topologia de repulsores e atratores para fluxos definidos em espaços métricos localmente compactos. Uma aplicação dessa teoria ocorre em sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO's) não lineares. Para iniciar o estudo do retrato de fase dessas EDO's, um dos caminhos mais comuns da teoria clássica nos diz que devemos encontrar os pontos de equilíbrio do sistema, classificá-los localmente e construir uma função de Lyapunov que globalize essa classificação. No entanto, para a maioria dos sistemas, existem dificuldades óbvias até mesmo para encontrar os pontos de equilíbrio. Se o interesse é estudar subconjuntos fechados do espaço de fase que tenham fronteira invariante repulsora e atratores interiores globais, aqui é que inserimos a Teoria da Persistência. A seguir damos algumas definições e resultados.

### 1.1 Conceitos Iniciais

Seja  $L$  um espaço métrico localmente compacto com métrica  $d$ . Para qualquer subconjunto  $S$  de  $L$ , usaremos os símbolos  $\text{int}(S)$ ,  $\partial S$  e  $\bar{S}$ , para denotar respectivamente, o interior, a fronteira e o fecho de  $S$ .

**Definição 1.1.** *Um fluxo contínuo (autônomo) em  $E$  é um terno  $\mathfrak{F} = (E, \mathbb{R}, \pi)$ , onde  $E$  é um subconjunto fechado de  $L$ ,  $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais e  $\pi$  é uma aplicação contínua de  $E \times \mathbb{R}$  para  $E$  tal que*

1.  $\pi(x, 0) = x$  para todo  $x \in E$ ;
2.  $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$ , para todo  $x \in E$  e para todo  $s, t \in \mathbb{R}$ .

Vejamos exemplos de fluxo.

**Exemplo 1.1.** *Considerando  $E = \mathbb{R}$  e  $\pi(x, t) = e^t x$ , temos que  $\mathfrak{F} = (E, \mathbb{R}, \pi)$  é um fluxo contínuo pois,*

1.  $\forall x \in \mathbb{R}$  temos,  $\pi(x, 0) = e^0 x = 1x = x$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{R}$  temos,  $\pi(\pi(x, t), s) = e^s \pi(x, t) = e^s(e^t x) = e^{t+s} x = \pi(x, t + s)$ .

**Exemplo 1.2.** *Sob as hipóteses do Teorema de Picard (para mais informações veja Sotomayor [19]), temos que a solução de uma EDO autônoma está definida em um intervalo maximal  $I_{max}$ . Utilizando o Lema 2.1, que veremos mais a frente, concluiremos que sempre podemos considerar  $I_{max} = \mathbb{R}$ , fazendo com que a solução da EDO autônoma defina um fluxo.*

**Definição 1.2.** *Para qualquer  $x \in E$ , definimos a órbita de  $x$  como*

$$\gamma(x) = \{\pi(x, t); t \in \mathbb{R}\}.$$

**Observação 1.1.** *Considere a seguinte relação:*

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}; y = \pi(x, t_0)$$

*Afirmamos que essa relação é de equivalência.*

De fato,

- $x \sim x$  pois  $x = \pi(x, 0)$ .
- Se  $x \sim y$ , então  $\exists t_0 \in \mathbb{R}; y = \pi(x, t_0)$ .  
Daí  $x = \pi(x, 0) = \pi(\pi(x, t_0), -t_0) = \pi(y, -t_0)$ . Portanto,  $y \sim x$ .
- Se  $x \sim y$  e  $y \sim z$  então  $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}; y = \pi(x, t_1)$  e  $z = \pi(y, t_2)$ .  
Assim,  $z = \pi(y, t_2) = \pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2)$ .  
Logo,  $x \sim z$ .

Observe que a classe de equivalência de  $x$  coincide com a órbita de  $x$ , ou seja,  $\bar{x} = \gamma(x)$ .

De fato,

$$y \in \bar{x} \Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}; y = \pi(x, t_0) \Leftrightarrow y \in \{\pi(x, t); t \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow y \in \gamma(x)$$

Sendo assim, **como as órbitas são classes de equivalência, ou elas são disjuntas, ou elas coincidem.**

**Lema 1.1.** *Para todo  $x \in E$ ,  $\gamma(x)$  é um conjunto conexo.*

**Demonstração:** Isso é consequência da conexidade de  $\mathbb{R}$  e da continuidade da  $\pi$ . ■

**Exemplo 1.3.** *Voltando ao exemplo 1.1, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  a órbita de  $\mathfrak{F}$  para  $x_0$  é  $\gamma(x_0) = \{\pi(x_0, t); t \in \mathbb{R}\} = \{e^t x_0; t \in \mathbb{R}\}$ .*

**Definição 1.3.** *Seja  $M$  um subconjunto não vazio de  $E$ . Dizemos que:*

1.  $M$  é invariante pelo fluxo  $\mathfrak{F}$ , se para todo  $x \in M$  a órbita que passa por  $x$  está contida em  $M$ .
2.  $M$  é invariante isolado quando  $M$  é invariante pelo fluxo  $\mathfrak{F}$  e existe  $A \supset M$  aberto tal que nenhum outro conjunto invariante  $N \subset A$  satisfaça  $N \supset M$ .

Note que um conjunto invariante isolado é necessariamente fechado. De fato, seja  $M$  um conjunto invariante isolado. Como  $M$  é invariante segue que  $\text{int}(M)$  e  $\partial M$  também são invariantes (veja Bhatia [4], página 22). Se  $M$  não fosse fechado teríamos  $\overline{M} \supset M$ ,  $\overline{M} \neq M$  e  $\overline{M} \subset A$ , uma contradição com a definição de invariante isolado.

**Teorema 1.1. (Teorema da Alfândega)** *Sejam  $X, Y$  subconjuntos de um espaço métrico  $L$ . Se  $Y$  é conexo e tem pontos em comum com  $X$  e  $E - X$ , então algum ponto de  $Y$  pertence à fronteira de  $X$ .*

**Demostração:** Veja [13] página 99. ■

**Lema 1.2.** *Seja  $M \subset E$ . Se existem  $x \in \text{int}(M)$  e  $r \in \mathbb{R}$  tais que  $\pi(x, r) \notin \text{int}(M)$ , então existe  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(x, s) \in \partial M$ .*

**Demostração:** Seja  $x \in \text{int}(M)$  tal que existe  $r \in \mathbb{R}$  que satisfaz  $\pi(x, r) \notin \text{int}(M)$ . Temos que  $x \in \gamma(x)$  e  $\pi(x, r) \in \gamma(x)$ , dessa forma, temos pontos de  $\gamma(x)$  em  $\text{int}(M)$  e em  $E - \text{int}(M)$ . Como  $\gamma(x)$  é um conjunto conexo, segue que existe um ponto de  $\gamma(x)$  na fronteira de  $M$ . Logo, existe  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(x, s) \in \partial M$ . ■

**Lema 1.3.** *Seja  $M \subset L$ . Se  $\partial M$  é invariante por  $\mathfrak{F}$  então  $\text{int}(M)$  também é invariante por  $\mathfrak{F}$ .*

**Demostração:** Suponhamos que  $\text{int}(M)$  não seja invariante, ou seja, existe  $x \in \text{int}(M)$  tal que  $\gamma(x) \not\subset \text{int}(M)$ . Como  $\gamma(x) \not\subset \text{int}(M)$  temos que existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(x, r) \notin \text{int}(M)$ . Pelo Lema 1.2, existe  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(x, s) \in \partial M$ . Como, por hipótese,  $\partial M$  é invariante por  $\mathfrak{F}$ , temos que  $\gamma(x) \subset \partial M$  resultando em  $x \in \partial M$ , o que é um absurdo. Logo,  $\text{int}(M)$  é invariante. ■

A partir daqui iremos supor que  $\partial E$  é invariante por  $\mathfrak{F}$  e vamos denotar a restrição de  $\mathfrak{F}$  a  $\partial E$  por  $\partial\mathfrak{F}$ .

## 1.2 Definições de Persistência e suas Relações

**Definição 1.4.** O fluxo  $\mathfrak{F}$  é dito **persistente fraco** se para todo  $x \in \text{int}(E)$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} d(\pi(x, t), \partial E) > 0$$

**Definição 1.5.** O fluxo  $\mathfrak{F}$  é dito **persistente** se para todo  $x \in \text{int}(E)$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} d(\pi(x, t), \partial E) > 0$$

**Definição 1.6.** O fluxo  $\mathfrak{F}$  é dito **persistente uniforme fraco** se existe  $\varepsilon_0 > 0$  para todo  $x \in \text{int}(E)$  tal que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} d(\pi(x, t), \partial E) > \varepsilon_0$$

**Definição 1.7.** O fluxo  $\mathfrak{F}$  é dito **persistente uniforme** se existe  $\varepsilon_0 > 0$  para todo  $x \in \text{int}(E)$  tal que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} d(\pi(x, t), \partial E) > \varepsilon_0$$

Segue diretamente das definições acima que



**Definição 1.8.** Seja  $x \in E$ , definimos o conjunto  $\omega(x) = \{y \in E; \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \pi(x, t_n) \rightarrow y, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$ . O conjunto  $\omega(x)$  é chamado de conjunto  $\omega$ -limite de  $x$ .

**Definição 1.9.** Seja  $x \in E$ , definimos o conjunto  $\alpha(x) = \{z \in E; \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \pi(x, t_n) \rightarrow z, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$ . O conjunto  $\alpha(x)$  é chamado de conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$ .

**Definição 1.10.** O conjunto estável  $W^+(M)$  de um conjunto  $M$  invariante isolado é definido por

$$W^+(M) = \{x \in E : \omega(x) \neq \emptyset, \omega(x) \subset M\}.$$

**Definição 1.11.** O conjunto instável  $W^-(M)$  de um conjunto  $M$  isolado invariante é definido por

$$W^-(M) = \{x \in E : \alpha(x) \neq \emptyset, \alpha(x) \subset M\}.$$

**Observação 1.2.** Não estamos assumindo nenhuma estrutura especial para  $M$ ,  $W^+(M)$  ou  $W^-(M)$ , mas quando  $E$  é uma variedade diferenciável e  $M$  é, por exemplo, um ponto crítico, órbita periódica ou superfície periódica com estrutura hiperbólica, temos que  $W^+(M)$  e  $W^-(M)$  têm (localmente) estrutura de variedade. Para mais informações veja Butler, Freedman e Waltman [5].

**Definição 1.12.** O conjunto estável fraco  $W_w^+(M)$  de um conjunto  $M$  invariante isolado é definido por

$$W_w^+(M) = \{x \in E : \omega(x) \cap M \neq \emptyset\}.$$

**Definição 1.13.** O conjunto instável fraco  $W_w^-(M)$  de um conjunto  $M$  isolado invariante é definido por

$$W_w^-(M) = \{x \in E : \alpha(x) \cap M \neq \emptyset\}.$$

**Exemplo 1.4.** Considere o fluxo cujo retrato de fase é representado na Figura 1.1. Tome o conjunto  $M$  como a órbita periódica juntamente com o interior da região por ela limitada. Temos que  $M$  é invariante isolado e que  $W^+(M) = M$  e  $W^-(M) = E$ .

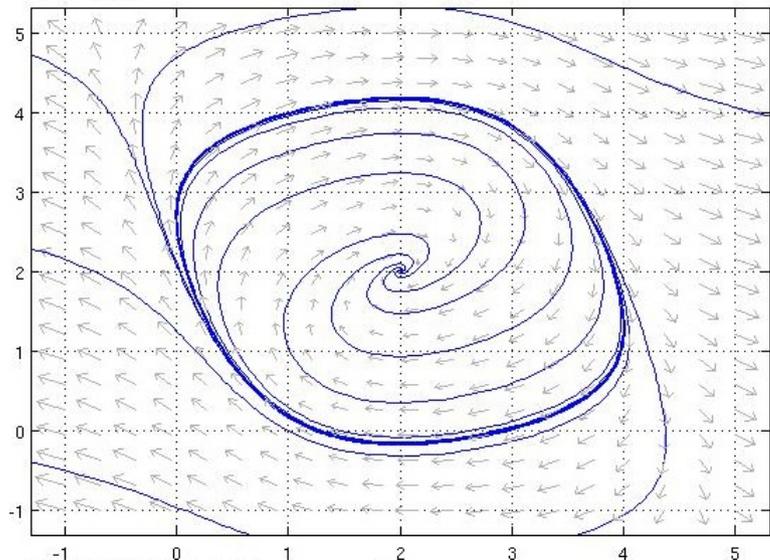


Figura 1.1: Exemplo de um conjunto Invariante Isolado

**Lema 1.4.** Temos que

$$W^+(M) \subset W_w^+(M)$$

e

$$W^-(M) \subset W_w^-(M)$$

**Demonstração:** Observe que

$$\begin{aligned}
x \in W^+(M) &\Rightarrow x \in E, \omega(x) \neq \emptyset \text{ e } \omega(x) \subset M \\
&\Rightarrow x \in E \text{ e } \omega(x) \cap M = \omega(x) \neq \emptyset \\
&\Rightarrow x \in W_w^+(M).
\end{aligned}$$

A demonstração referente a parte instável é análoga. ■

A seguir temos o Lema de Butler-McGehee, ferramenta muito importante na demonstração do principal resultado que garante as equivalências, sobre certas condições, entre as definições de persistência.

**Lema 1.5** (Lema de Butler-McGehee). *Seja  $M$  um conjunto compacto e invariante isolado. Suponha que  $W_w^+(M) \setminus M \neq \emptyset$ . Então*

$$W^+(M) \setminus M \neq \emptyset.$$

**Demonstração:** Veja [6]. ■

**Observação 1.3.** *Um resultado análogo ao Lema de Butler-McGehee pode ser enunciado para os conjuntos instável fraco e instável.*

**Observação 1.4.** *No caso de fluxos gerados por EDO's, onde  $E$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , primeiramente obtemos todos os conjuntos invariantes nos eixos, planos e hiperplanos coordenados. Em seguida, obtemos critérios para que cada um desses conjuntos invariantes seja localmente instável apontando para o interior de  $E$ . Então, usamos o Lema de Butler-McGehee para mostrar que qualquer solução com condições iniciais no interior de  $E$  tem seu conjunto  $\omega$ -limite disjunto da fronteira de  $E$ , sendo assim equivalente à definição de Persistência.*

**Definição 1.14.** *O fluxo  $\mathfrak{F}$  será chamado dissipativo se para cada  $x \in E$ ,  $\omega(x) \neq \emptyset$  e o conjunto invariante  $\Omega(\mathfrak{F}) = \bigcup_{x \in E} \omega(x)$  tem fecho compacto.*

Intuitivamente, a definição de dissipativo nos pede que cada órbita do fluxo, a partir de um certo  $t_0$  (que depende da órbita), comece a fazer parte do interior de um compacto fixado, do qual essa órbita não sai mais.

**Exemplo 1.5.** *Tomando  $E = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ , considere o fluxo cujo retrato de fase é dado na Figura 1.2, onde existe somente um equilíbrio que é um atrator global. Temos que esse fluxo é dissipativo, pois o  $\omega$ -limite de qualquer ponto de  $\mathbb{R}_+^2$  é o próprio equilíbrio atrator do exemplo.*

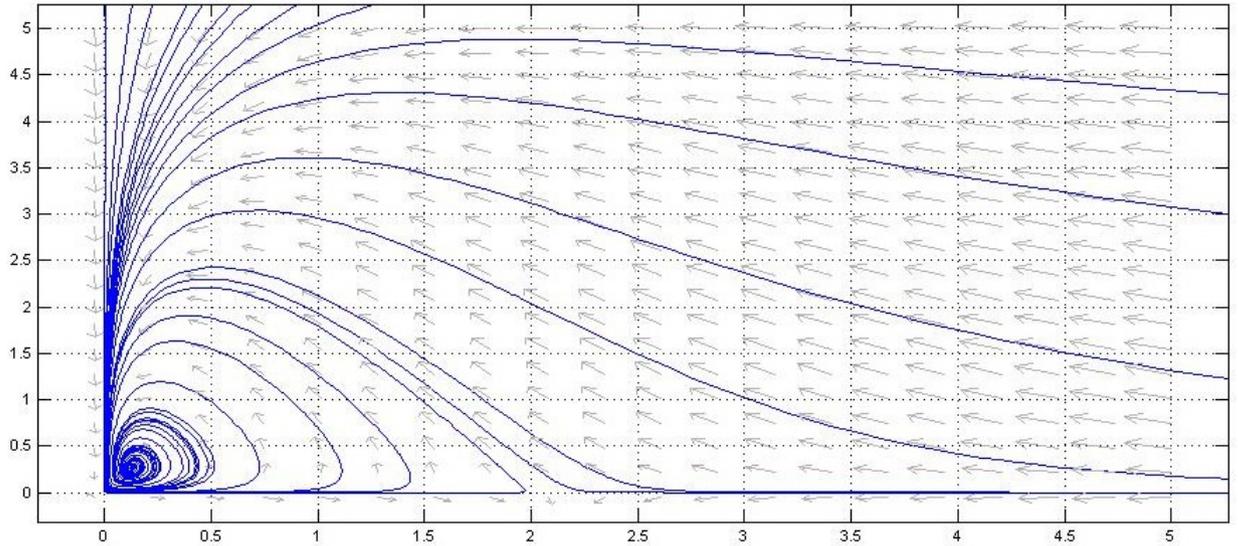


Figura 1.2: Retrato de Fase de um Fluxo que é Dissipativo

Chegamos então finalmente a nossa definição de sustentabilidade.

**Definição 1.15** (Sustentabilidade). *Diremos que o fluxo  $\mathfrak{F}$  é sustentável quando for persistente uniforme e dissipativo.*

**Definição 1.16.** *Sejam  $M$  e  $N$  conjuntos invariantes (não necessariamente distintos). Diremos que  $M$  é encadeado com  $N$ , e escreveremos  $M \rightarrow N$ , se existe  $x \notin M \cup N$  tal que  $x \in W^-(M) \cap W^+(N)$ .*

**Definição 1.17.** *Um sequência finita  $M_1, M_2, \dots, M_k$  de conjuntos invariantes isolados será chamada um cadeia se  $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_k$  ( $M_1 \rightarrow M_1$  se  $k = 1$ ). A cadeia será chamada um ciclo se  $M_k = M_1$ .*

Como estamos supondo o fluxo invariante pela fronteira de  $E$ , chamaremos de  $\partial\mathfrak{F}$  a restrição de  $\mathfrak{F}$  a  $\partial E$ .

A seguir, vamos definir órbita heteroclínica, tipo de órbita que será utilizada no próximo exemplo.

**Definição 1.18.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  dois conjuntos invariantes em  $E$ . Uma órbita heteroclínica de  $M_1$  e  $M_2$  é uma órbita que se aproxima assintoticamente de  $M_1$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e de  $M_2$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Exemplo 1.6.** *Considere  $M$  como o equilíbrio da esquerda da Figura 1.3,  $N$  o equilíbrio da direita e  $L$  a órbita heteroclínica que sai de  $M$  e chega em  $N$ . Temos que  $W^-(M) = L = W^+(N)$ . Considerando então, qualquer ponto pertencente a  $L$ , podemos concluir que  $M$  é encadeado com  $N$ .*

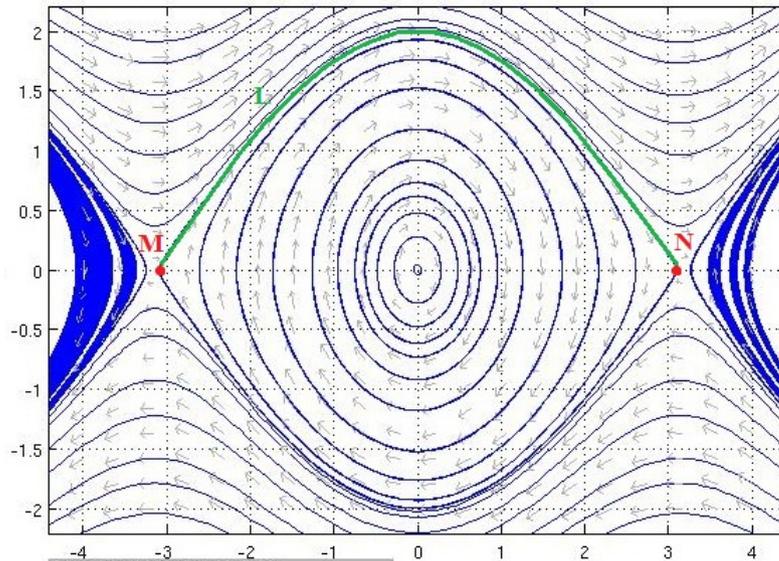


Figura 1.3: Exemplo de conjuntos Encadeados

**Definição 1.19.** Dizemos que  $\partial\mathfrak{F}$  é isolado se ele admite uma cobertura  $\mathcal{M}$  de  $\Omega(\partial\mathfrak{F})$  de conjuntos invariantes isolados compactos  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , dois a dois disjuntos tais que, cada  $M_i$  é também isolado por  $\mathfrak{F}$ . Chamamos  $\mathcal{M}$  de cobertura isolada.

**Definição 1.20.** Dizemos que  $\partial\mathfrak{F}$  é acíclico se existe alguma cobertura isolada  $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^k M_i$  de  $\Omega(\partial\mathfrak{F})$  tal que nenhuma subfamília de  $\{M_i\}$  forma um ciclo.

### 1.3 Condições Suficientes para Persistência Uniforme

Temos a seguir o teorema que apresenta, sobre hipóteses adicionais, a equivalência entre as definições de Persistência.

**Teorema 1.2.** Seja  $\mathfrak{F}$  um fluxo contínuo em  $E$ . Suponha que

1.  $\mathfrak{F}$  é dissipativo;
2.  $\partial\mathfrak{F}$  é isolado;
3.  $\partial\mathfrak{F}$  é acíclico;
4.  $\mathfrak{F}$  é persistente fraco;

então  $\mathfrak{F}$  é persistente uniforme.

**Demostração:** Veja [5].

■

Sendo assim, após esse teorema temos:



A seguir temos duas seções que mostram como podemos utilizar a teoria da Persistência se estivermos trabalhando em  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$  e considerando que o fluxo é solução de um sistema Kolmogorov  $n$ -dimensional de EDO's, que modela a interação entre populações.

## 1.4 Persistência em Modelos Kolmogorov com Três Equações

Nesta seção mostraremos um resultado que nos diz como podemos garantir Persistência em modelos Kolmogorov com 3 equações que seguem o paradigma presa-predador. Utilizamos como principal referência [10].

Iniciemos definindo o que é um sistema Kolmogorov  $n$ -dimensional.

**Definição 1.21.** Dizemos que um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é Kolmogorov se ele for da forma

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i g_i(x), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.1)$$

onde  $g_i$  é uma função de classe  $C^1$  em  $U$ .

Para o caso específico de dimensão 3, consideremos então, a interação entre 3 populações que pode ser modelada pelo seguinte sistema Kolmogorov.

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= uf(u, v, w) \\
\frac{dv}{dt} &= vg(u, v, w) \\
\frac{dw}{dt} &= wh(u, v, w)
\end{aligned}
\tag{1.2}$$

Com  $u(0) = u_0 \geq 0$ ,  $v(0) = v_0 \geq 0$  e  $w(0) = w_0 \geq 0$ . Onde  $u$  é uma população de presas,  $w$  é uma população de predadores e  $v$  pode ser tanto uma população de presas quanto uma população de predadores.

Procuramos condições sobre as quais essas três populações persistam, ou seja, condições sobre as quais o fluxo que é solução do sistema 1.2 seja persistente.

Uma solução com condições iniciais no cone positivo persistirá, se não existem pontos  $\omega$ -limite na fronteira do cone positivo (ou seja, nos eixos ou planos coordenados). Observe que como o sistema 1.2 é Kolmogorov, os eixos e planos coordenados são invariantes.

Vamos então, enunciar um teorema dando condições para a persistência do sistema 1.2.

**Teorema 1.3.** *Suponha que*

1.  $f, g, h$  são  $C^1$  em  $(u, v, w)$ .
2. o ponto de equilíbrio  $E_0 = (0, 0, 0)$  é instável na direção  $u$  e assintoticamente estável na direção  $w$ .
3. existe um único equilíbrio da forma  $E_1 = (k_1, 0, 0)$  que é assintoticamente estável na direção  $u$ .
4. não existe equilíbrio na parte positiva do eixo  $w$ .
5. Pode ou não existir um equilíbrio do tipo  $E_2 = (0, k_2, 0)$ . Se ele existe é único, assintoticamente estável na direção  $v$  e nesse caso  $E_0$  é instável nessa direção. Se  $E_2$  não existe então  $E_0$  é assintoticamente estável na direção  $v$ .
6. Todas as soluções do sistema 1.2 com condição inicial não negativa são limitadas com o tempo.
7.  $E_1$  e  $E_2$  (se ele existir) são pontos de sela.
8. No interior de cada plano coordenado, há no máximo um equilíbrio, o qual se existir é instável na direção positiva ortogonal a este plano e em torno do qual não existem órbitas periódicas.

Então o sistema 1.2 é persistente.

**Demonstração:** Veja [10].

■

## 1.5 Persistência em Modelos Kolmogorov com $n$ Equações

Apresentaremos nesta seção uma forma de garantir a Persistência Uniforme de um sistema Kolmogorov  $n$ -dimensional que modela a interação entre populações. A relação entre essas populações pode ser de competição, presa-predador ou mutualismo. Utilizamos como referência o trabalho de Gard [11].

Considere então, o modelo Kolmogorov de  $n$  espécies dado por

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i f_i(x), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.3)$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $f_i \in C^1$  em  $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ , o fecho do cone positivo

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, 1 \leq i \leq n\},$$

que é a região onde consideraremos o modelo 1.3.

Observe que a região  $\mathbb{R}_+^n$  é invariante pelo fluxo que é solução do sistema 1.3 já que esse sistema é Kolmogorov.

Considere agora, o seguinte subconjunto de  $\overline{\mathbb{R}_+^n}$  dado por

$$H_i = \{x \in \overline{\mathbb{R}_+^n} : x_i = 0\},$$

que também é invariante pelo fluxo.

Podemos definir a fronteira de  $\mathbb{R}_+^n$  como:

$$\partial\mathbb{R}_+^n = \bigcup_{i=1}^n H_i.$$

Vamos agora apresentar um lema que nos apresenta uma forma mais prática de descobrir se um fluxo, no fecho de  $\mathbb{R}_+^n$ , é dissipativo.

**Lema 1.6.** *Considere o seguinte sistema de equações diferenciais no fecho de  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0, 0 \leq i \leq n\}$*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.4)$$

*Suponha que existe um conjunto compacto  $B \subseteq \overline{\mathbb{R}_+^n}$  tal que, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  existe um tempo  $t_0$ , que depende de  $x_0$  e  $B$ , de forma que a solução  $\pi(x_0, t)$  do sistema 1.4, com condição inicial  $x(0) = x_0$ , satisfaz*

$$\pi(x_0, t) \in B$$

*para todo  $t \geq t_0$ . Então o fluxo dado por  $\mathfrak{F} = (\overline{\mathbb{R}_+^n}, \mathbb{R}, \pi)$  é dissipativo.*

### Demonstração:

Seja  $B \subseteq \overline{\mathbb{R}_+^n}$  o conjunto compacto dado na hipótese tal que, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  existe um tempo  $t_0$ , que depende de  $x_0$  e  $B$ , de forma que a solução  $\pi(x_0, t)$  do sistema 1.4, com condição inicial  $x(0) = x_0$ , satisfaz

$$\pi(x_0, t) \in B$$

para todo  $t \geq t_0$ .

Lembrando que  $\omega(x) = \{z \in \mathbb{R}^n, \exists (t_n) \mid t_n \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e } \pi(x, t_n) \rightarrow z\}$ . Tome  $t_n = t_0 + n$  e assim,  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $\pi(x, t_n) \in B, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Isso significa que a sequência  $\{x_n = \pi(x, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada, pois  $B$  é um conjunto limitado. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  possui subsequência convergente, logo,  $\exists z \in \mathbb{R}_+^n$  tal que  $x_n \rightarrow z, n \in \mathbb{N}'$ . Daí,  $\pi(x, t_n) \rightarrow z$  quando  $n \in \mathbb{N}'$ . Assim,  $z \in \omega(x)$  o que garante que  $\omega(x) \neq \emptyset$ .

Vamos mostrar agora que  $\bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^n} \omega(x)$  é limitado. Como  $B$  é limitado, segue que  $\overline{B}$  também é limitado. Mostremos então que  $\bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^n} \omega(x) \subset \overline{B}$ .

Seja  $y \in \omega(x)$  assim  $\exists (t_n)$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $\pi(x, t_n) \rightarrow y$ . Como  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  temos que  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ n > n_0 \Rightarrow t_n > t_0$ .

Assim,  $n > n_0 \Rightarrow \pi(x, t_n) \in B$ , logo  $y \in \overline{B}$ . Portanto  $\bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^n} \omega(x) \subset \overline{B}$ . Como  $\overline{B}$  é limitado, segue que,  $\bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^n} \omega(x)$  é limitado e portanto  $\pi(x, t)$  é dissipativo.

■

Assumiremos que o sistema 1.3 é dissipativo, e para isso iremos supor que existe uma vizinhança compacta  $B \subseteq \overline{\mathbb{R}_+^n}$  tal que para algum  $t_0 \in \mathbb{N}$ ,

$$x(t) \in B$$

para todo  $t \geq t_0$ , onde  $x(t)$  é a solução de 1.3 com condição inicial dada por  $x(0) = x_0$ .

Considere agora as seguintes constantes

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in B} x_i, \\ m_{ij} &= \inf_{x \in B} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \\ M_{ij} &= \sup_{x \in B} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \end{aligned}$$

e

$$a_i = f_i(0)$$

e escolha  $Q$  dado por

$$Q \subseteq \left\{ i : \text{existe } j \text{ tal que } \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) > 0, x \in B \right\}.$$

Suponha que existe uma escolha de números positivos  $r_j, j = 1, \dots, n$  tais que

$$\sum_{j=1}^n r_j m_{ji} \geq 0, \quad i \in Q, \quad (1.5)$$

Finalmente, considere a seguinte igualdade que depende da escolha de  $r_j, j = 1, \dots, n$

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^n r_i a_i - \sum_{i \in Q^c} M_i \sum_{j=1}^n r_j \quad (1.6)$$

**Lema 1.7.** *Considere o seguinte sistema de equações diferenciais em  $\mathbb{R}_+^n$*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.7)$$

*cujos fluxos são dados por  $\pi(x, t) = (\pi_1(x, t), \dots, \pi_n(x, t))$  considerando a condição inicial dada por  $x(0) = x$ . Se, para todo  $1 \leq j \leq n$ , existe  $m > 0$  tal que*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (\pi_j(x, t)) \geq m,$$

*então o fluxo (e também o sistema) é persistente uniforme.*

**Demonstração:** Temos que

$$d(z, \partial\mathbb{R}_+^n) = \min_{1 \leq i \leq n} \{d(z, H_i)\}.$$

De fato, para todo  $1 \leq i \leq n$  temos que

$$d(z, \partial\mathbb{R}_+^n) \leq d(z, y) \quad \forall y \in H_i$$

pois,  $H_i \subset \partial\mathbb{R}_+^n$ , dessa forma

$$d(z, \partial\mathbb{R}_+^n) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \{d(z, H_i)\}.$$

Por outro lado, temos que existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\min_{1 \leq i \leq n} \{d(z, H_i)\} = d(z, H_k)$ .

Suponhamos por absurdo que

$$d(z, \partial\mathbb{R}_+^n) < \min_{1 \leq i \leq n} \{d(z, H_i)\}.$$

Assim, existe  $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$  tal que

$$d(z, y) < d(z, H_k) = \min_{1 \leq i \leq n} \{d(z, H_i)\}.$$

Como  $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$ , segue que existe  $l \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $y \in H_l$ .

Sendo assim,

$$d(z, H_l) \leq d(z, y) \quad \text{pois } y \in H_l$$

e isso nos dá que

$$d(z, H_l) < d(z, H_k) = \min_{1 \leq i \leq n} \{d(z, H_i)\},$$

o que é um absurdo.

Sendo assim,

$$d(z, \partial\mathbb{R}_+^n) = \min_{1 \leq i \leq n} \{d(z, H_i)\}.$$

Considere  $\mathbb{R}_i^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$ . Temos que  $\mathbb{R}_i^n$  é subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Assim, para todo  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(z, \mathbb{R}_i^n) = d(z, p_z)$$

onde  $p_z$  é a projeção ortogonal de  $z$  em  $\mathbb{R}_i^n$  e mais,  $p_z = (z_1, \dots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \dots, z_n)$ . Usando a métrica do máximo temos

$$d(z, \mathbb{R}_i^n) = d(z, p_z) = |z_i|.$$

Observe que se  $z \in \mathbb{R}_+^n$  então  $p_z \in H_i$  daí

$$d(z, H_i) \leq d(z, p_z) = d(z, \mathbb{R}_i^n).$$

Por outro lado  $H_i \subset \mathbb{R}_i^n$  que implica que

$$d(z, H_i) \geq d(z, \mathbb{R}_i^n).$$

Temos então que

$$d(z, H_i) = d(z, \mathbb{R}_i^n) = |z_i| = z_i.$$

Como  $\pi(x, t) = (\pi_1(x, t), \dots, \pi_n(x, t))$  temos

$$d(\pi(x, t), \partial\mathbb{R}_+^n) = \min_{1 \leq i \leq n} \{d(\pi(x, t), H_i)\} = \pi_k(x, t)$$

para algum  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Daí,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial\mathbb{R}_+^n) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \pi_k(x, t) \geq m$$

por hipótese, o que nos dá que o fluxo é Persistente Uniforme. ■

Segue então o Teorema de Persistência.

**Teorema 1.4.** *Suponha que o sistema 1.3 é dissipativo com  $B$  sendo um subconjunto compacto correspondente e as constantes  $a_i$ ,  $m_{ij}$  e  $M_i$  definidas anteriormente. Se para alguma escolha de  $Q$  e  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  satisfazendo 1.5,  $\bar{\mu}$  definido por 1.6 é positivo, então o sistema 1.3 é persistente uniforme.*

**Demonstração:** Veja [11] ■

## 1.6 Algumas Considerações

Nesse capítulo, apresentamos aos conceitos básicos referentes a Teoria da Persistência, definindo os quatro tipos e persistência e trabalhando para chegar à equivalência entre essas definições.

Exibimos um teorema que nos diz que sobre certas hipóteses sobre  $\partial\mathfrak{F}$ , juntamente com dissipatividade, persistência fraca implica persistência uniforme (Teorema 1.2). Se qualquer uma das hipóteses não é satisfeita, a conclusão do teorema não é verdadeira, ou

seja, o sistema pode persistir fracamente (ou simplesmente persistir) sem ser uniformemente persistente. Exemplos de que essas hipóteses são realmente necessárias podem em encontradas em [8] e [10]. Os Teoremas 1.3 e 1.4 se mostram como mais um opção para garantir a persistência uniforme para alguns casos particulares.

As ferramentas aqui apresentadas serão muito úteis nos modelos de equações diferenciais ordinárias com os quais trabalharemos posteriormente. Utilizando a teoria da Persistência garantiremos a sustentabilidade de cada sistema e conseqüentemente, a existência de um atrator global.

## Capítulo 2

# Modelo com Interações entre Agricultura e Indústria

A transferência de riqueza entre a Agricultura e a Indústria é tópico central no desenvolvimento econômico. Essa transferência ocorre através da variação dos valores adicionados a trabalho, propriedade intelectual, terra e capital.

Neste caso, entende-se a riqueza como o poder de compra para necessidades, conveniência e lazer. Essa riqueza provém dos ativos da Indústria e da Agricultura, que são definidos como tudo aquilo que pertence a esses sistemas e possui valor financeiro atribuído.

O paradigma presa-predador é usado na modelagem da relação entre a Agricultura e a Indústria conforme proposta de Apedaille e outros [3]. O sistema industrial é modelado como o predador relativo ao sistema agrícola, de onde extrai os ativos necessários para a fabricação de seus produtos, já a Agricultura usa a Ecosfera como fonte de energia para manter sua produção.

Neste capítulo, assumimos que a Ecosfera está em estado de equilíbrio, dessa forma a captação de recursos da ecosfera pela agricultura é balanceada pela entrada de outros componentes [3].

## 2.1 O Modelo

Considere o seguinte sistema, proposto por Apedaille e outros em [3]:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \mu \left( \alpha_0 y - \beta y^2 + (\gamma - \delta) \frac{y}{(a+y)} \frac{z}{(b+z)} \right) \\ \frac{dz}{dt} &= -\xi z - \eta z^2 + \delta \frac{y}{(a+y)} \frac{z}{(b+z)}\end{aligned}\tag{2.1}$$

com  $y(0) = y_0 > 0$  e  $z(0) = z_0 > 0$ , ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \mu y \left( \alpha_0 - \beta y + \frac{(\gamma - \delta)z}{(a+y)(b+z)} \right) \\ \frac{dz}{dt} &= z \left( -\xi - \eta z + \frac{\delta y}{(a+y)(b+z)} \right)\end{aligned}$$

com  $y(0) = y_0 > 0$  e  $z(0) = z_0 > 0$ , onde

- $y$  representa a riqueza agrícola;
- $z$  representa a riqueza industrial.

A seguir temos o significado de cada um dos parâmetros.

$\mu$  - parâmetro que reescala a taxa de mudança na riqueza agrícola quando comparada à taxa de mudança na riqueza industrial.

$\alpha_0$  - taxa de crescimento na riqueza agrícola, sendo dependente da qualidade ambiental.

$\beta$  - coeficiente de rendimentos decrescentes na agricultura.

$\delta$  - índice de preços industriais.

$\gamma$  - índice de preços agrícolas.

$\xi$  - taxa de depreciação linear do capital industrial.

$\eta$  - taxa de depreciação quadrática do capital industrial.

$a$  - taxa de recuperação econômica da agricultura.

$b$  - taxa de recuperação econômica da indústria.

Essas definições para os parâmetros foram obtidas em [17] e estamos supondo que todos os parâmetros são positivos.

Observe que se não tivermos agricultura ( $y = 0$ ) teremos  $\frac{dz}{dt} = z(-\xi - \eta z)$ , dessa forma a variação da indústria é negativa e portanto a mesma também tenderá a extinção. Caso não tenhamos indústria ( $z = 0$ ) então  $\frac{dy}{dt} = \mu y(\alpha_0 - \beta y)$  e portanto a variação da agricultura depende dos valores dos parâmetros  $\mu$ ,  $\alpha_0$  e  $\beta$ , que representam respectivamente, a reescalonagem da taxa de mudança na riqueza agrícola quando comparada à taxa de mudança na riqueza industrial, a taxa de crescimento na riqueza agrícola, sendo dependente da qualidade ambiental e o coeficiente de rendimentos decrescentes na agricultura.

O Teorema da Existência e Unicidade garante que o sistema 2.1, com a condição inicial, possui solução única em um intervalo maximal  $I_{max}$ . Além disso, utilizando o próximo lema, podemos supor que  $I_{max} = \mathbb{R}$ , fazendo com que a Teoria desenvolvida no Capítulo 1 possa ser utilizada.

**Lema 2.1.** *Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias.*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x) \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

*Se  $F$  é  $C^1$  em um aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , então existe um campo contínuo em  $A$  com as mesmas trajetórias de  $F$ , cujas soluções são definidas em toda a reta.*

**Demonstração:** Veja [7]. ■

## 2.2 Positividade e Dissipatividade

Nessa seção, veremos duas importantes propriedades do sistema 2.1 que são de fundamental importância para garantir a sustentabilidade do mesmo.

**Lema 2.2.** *Soluções do sistema 2.1 com condição inicial positiva mantêm-se positivas.*

**Demonstração:** Como o sistema 2.1 é Kolmogorov, a fronteira de  $\mathbb{R}_+^2$  é invariante pelo fluxo. Pelo Lema 1.3 temos que  $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$  também é invariante pelo fluxo e daí segue o resultado. ■

**Teorema 2.1.** *O sistema 2.1 é dissipativo com região de atração contida em*

$$B = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha_0}{\beta} + \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{\beta^2} + \frac{4}{\beta} \max\{\gamma - \delta, 0\}} \right], 0 \leq z \leq \frac{\delta}{\xi} \right\}$$

**Demonstração:** Sabemos que  $\frac{dy}{dt} = \mu y \left( \alpha_0 - \beta y + \frac{(\gamma - \delta)z}{(a + y)(b + z)} \right)$ . Assim  $\frac{dy}{dt} \leq \mu \alpha_0 y - \mu \beta y^2 + \mu k$  onde  $k = \max\{\gamma - \delta, 0\}$ . Vamos então comparar  $\frac{dy}{dt}$  com

$$\frac{dB}{dt} = \mu \alpha_0 B - \mu \beta B^2 + \mu k = \mu(\Omega_1 + B)(\Omega_2 - \beta B),$$

onde  $\Omega_1 > 0$ ,  $\Omega_2 > 0$ ,  $\Omega_1 \Omega_2 = k$  e  $\Omega_2 - \Omega_1 \beta = \alpha_0$ , (se  $k = 0$  então  $\Omega_1 = 0$  e  $\Omega_2 = \alpha_0$ ). Então, se  $y(0) = B(0)$  temos que  $y(t) \leq B(t)$ , para todo  $t \geq 0$ . Resolvendo a EDO  $\frac{dB}{dt} = \mu(\Omega_1 + B)(\Omega_2 - \beta B)$  temos

$$B(t) = \frac{\Omega_2 - \Omega_1 C_0 e^{-\mu(\Omega_1 \beta + \Omega_2)t}}{\beta + C_0 e^{-\mu(\Omega_1 \beta + \Omega_2)t}},$$

onde  $C_0 = \frac{\Omega_2 - \beta y_0}{\Omega_1 + y_0}$ .

Resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} \Omega_1 \Omega_2 &= k \\ \Omega_2 - \Omega_1 \beta &= \alpha_0 \end{aligned}$$

encontramos valores positivos para  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  dados por  $\Omega_1 = \frac{2k}{\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + 4\beta k}}$  e  $\Omega_2 = \frac{\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + 4\beta k}}{2}$ .

Logo, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = \frac{\Omega_2}{\beta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha_0}{\beta} + \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{\beta^2} + \frac{4}{\beta} \max\{\gamma - \delta, 0\}} \right].$$

Assim,

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \frac{\Omega_2}{\beta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha_0}{\beta} + \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{\beta^2} + \frac{4}{\beta} \max\{\gamma - \delta, 0\}} \right].$$

E portanto,

$$0 \leq y(t) \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha_0}{\beta} + \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{\beta^2} + \frac{4}{\beta} \max\{\gamma - \delta, 0\}} \right].$$

Temos ainda que  $\frac{dz}{dt} = z \left( -\xi - \eta z + \frac{\delta y}{(a + y)(b + z)} \right)$  assim,  $\frac{dz}{dt} \leq -\xi z + \delta$ . Usando a mesma argumentação do caso anterior, concluimos que

$$0 \leq z(t) \leq \frac{\delta}{\xi}. \quad \blacksquare$$

## 2.3 Pontos de Equilíbrio na Fronteira de $\mathbb{R}_+^2$

O objetivo nessa seção é encontrar os pontos de equilíbrio referentes ao modelo bi-dimensional e classificá-los. Mostraremos que dois equilíbrios sempre existem, e que, um terceiro equilíbrio pode existir dependendo dos valores de parâmetro. Esse terceiro equilíbrio representaria a coexistência entre agricultura e indústria. Observe que procuramos soluções apenas no primeiro quadrante, já que soluções com coordenadas negativas não fazem sentido ao nosso modelo.

Para encontrarmos os pontos de equilíbrio, lembrando que  $\mu \neq 0$ , devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} y \left( \alpha_0 - \beta y + \frac{(\gamma - \delta)z}{(a + y)(b + z)} \right) &= 0 \\ z \left( -\xi - \eta z + \frac{\delta y}{(a + y)(b + z)} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

### Equilíbrio trivial

Claramente, o ponto  $F_0(0, 0)$  é um ponto de equilíbrio do sistema acima pois esse sistema é Komogorov. Esse equilíbrio representa a não existência, tanto da agricultura, quanto da indústria.

### Equilíbrio na parte positiva do eixo $y$

Nesse caso, temos  $y \neq 0$  e  $z = 0$  o que torna claramente a 2ª equação válida. Com essas condições a 1ª equação se torna

$$y(\alpha_0 - \beta y) = 0$$

Como  $y \neq 0$  temos que  $y = \frac{\alpha_0}{\beta}$ .

Portanto temos o seguinte equilíbrio

$$F_y \left( \frac{\alpha_0}{\beta}, 0 \right).$$

Esse equilíbrio representa que temos a existência de agricultura mesmo se não tivermos

a existência da indústria.

### Equilíbrio na parte positiva do eixo $z$

Nesse caso temos  $y = 0$  e  $z \neq 0$  o que torna a 1ª equação válida. Com essas condições a 2ª equação se torna

$$z(-\xi - \eta z) = 0$$

Como  $z \neq 0$  temos que  $z = \frac{-\xi}{\eta}$ .

Portanto não temos equilíbrio positivo nesse eixo, ou seja, caso não exista agricultura, também não existirá indústria.

## 2.4 Análise Local dos Pontos de Equilíbrio da Fronteira de $\mathbb{R}_+^2$

Aplicando o Teorema de Hartman-Grobman (veja [19], página 226), vamos agora classificar localmente os pontos de equilíbrio já encontrados através da matriz Jacobiana  $J_2(y, z)$  do sistema 2.1 que é dada por:

$$J_2(y, z) = \begin{pmatrix} \mu \left( \alpha_0 - 2\beta y + \frac{(\gamma - \delta)az}{(a + y)^2(b + z)} \right) & \frac{\mu(\gamma - \delta)by}{(a + y)(b + z)^2} \\ \frac{\delta az}{(a + y)^2(b + z)} & -\xi - 2\eta z + \frac{\delta by}{(a + y)(b + z)^2} \end{pmatrix}$$

**Lema 2.3.** *O equilíbrio  $F_0$  é uma sela hiperbólica localmente instável na direção  $y$  e localmente assintoticamente estável na direção  $z$ .*

**Demonstração:** Substituindo  $F_0$  em  $J_2$  temos

$$J_2(F_0) = \begin{pmatrix} \mu\alpha_0 & 0 \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}$$

Assim, os autovalores dessa matriz são  $\lambda_1 = \mu\alpha_0$  e  $\lambda_2 = -\xi$ . Como todos os parâmetros são positivos temos que essa matriz assume autovalores positivos e negativos, portanto classificamos esse ponto como um sela.



Para o equilíbrio  $F_y$  podemos concluir o seguinte lema

**Lema 2.4.** *Temos que:*

(a) Se  $\xi > \frac{a\delta}{(\alpha_0+a\beta)b}$  então o equilíbrio  $F_y$  é localmente assintoticamente estável.

(b) Se  $\xi < \frac{a\delta}{(\alpha_0+a\beta)b}$  então o equilíbrio  $F_y$  é uma sela hiperbólica localmente assintoticamente estável na direção  $y$  e localmente instável na direção  $z$ .

**Demonstração:** Substituindo  $F_y$  em  $J_2$  temos

$$J_2\left(\frac{\alpha_0}{\beta}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\mu\alpha_0 & \frac{\mu\alpha_0(\gamma-\delta)}{(\alpha_0+a\beta)b} \\ 0 & -\xi + \frac{a\delta}{(\alpha_0+a\beta)b} \end{pmatrix}$$

Os autovalores dessa matriz são dados por  $\lambda_1 = -\mu\alpha_0$  e  $\lambda_2 = -\xi + \frac{a\delta}{(\alpha_0+a\beta)b}$ . Segue assim o resultado. ■

Para os equilíbrios de fronteira, temos então a seguinte tabela:

-	Equilíbrio	Classificação Local
Trivial	$F_0(0, 0)$	Sela Hiperbólica
No semieixo positivo $y$	$F_y\left(\frac{\alpha_0}{\beta}, 0\right)$	Assintoticamente Estável se $\xi > \frac{a\delta}{(\alpha_0 + a\beta)b}$ e Sela Hiperbólica se $\xi < \frac{a\delta}{(\alpha_0 + a\beta)b}$
No semieixo positivo $z$	-	-

Vamos estudar agora a existência de um ponto de equilíbrio não trivial, ou seja, um ponto de equilíbrio que ocorre quando  $y \neq 0$  e  $z \neq 0$ .

## 2.5 A Busca por Pontos de Equilíbrio no Interior de $\mathbb{R}_+^2$

Utilizando a teoria clássica, para encontrarmos os pontos de equilíbrio no interior de  $\mathbb{R}_+^2$  devemos encontrar um equilíbrio na parte positiva do plano  $yz$ . Neste caso,  $y \neq 0$  e  $z \neq 0$ , assim o sistema 2.2 se reduz a

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \beta y + \frac{(\gamma - \delta)z}{(a + y)(b + z)} &= 0 \\ -\xi - \eta z + \frac{\delta y}{(a + y)(b + z)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}\beta y(a+y)(b+z) + (\delta - \gamma)z &= \alpha_0(a+y)(b+z) \\ \delta y - \eta z(a+y)(b+z) &= \xi(a+y)(b+z)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Reorganizando as equações:

$$\begin{aligned}(\beta y - \alpha_0)(a+y)(b+z) + (\delta - \gamma)z &= 0 \\ \delta y - (\eta z + \xi)(a+y)(b+z) &= 0\end{aligned}\tag{2.5}$$

Da primeira equação concluímos que  $z = \frac{-b(\beta y - \alpha_0)(y + a)}{(\beta y - \alpha_0)(y + a) + \delta - \gamma}$ .

Antes de substituirmos, vejamos quais valores de  $y > 0$  nos dão também  $z > 0$ .

- i. Se  $0 < y < \frac{\alpha_0}{\beta}$  temos  $(\beta y - \alpha_0) < 0$  o que implica que  $-b(\beta y - \alpha_0)(y + a) > 0$ . Assim, para que  $z > 0$  devemos ter  $(\beta y - \alpha_0)(y + a) + (\delta - \gamma) > 0$  que é equivalente a  $\beta y^2 + (\beta a - \alpha_0)y + (\delta - \gamma - \alpha_0 a) > 0$ , cuja solução é

$$y > y_1$$

ou

$$y < y_2$$

onde

$$y_1 = -\frac{\beta a - \alpha_0}{2\beta} + \sqrt{\left(\frac{\beta a - \alpha_0}{2\beta}\right)^2 + \frac{\gamma - \delta + \alpha a}{\beta}}$$

e

$$y_2 = -\frac{\beta a - \alpha_0}{2\beta} - \sqrt{\left(\frac{\beta a - \alpha_0}{2\beta}\right)^2 + \frac{\gamma - \delta + \alpha a}{\beta}}.$$

Temos que  $y_2$  é sempre negativo e que se  $\gamma \geq \delta$  então  $y_1 \geq 0$ .

Nesse caso então para termos  $z > 0$  devemos considerar  $y_1 < \frac{\alpha_0}{\beta}$  e assim tomarmos  $y$  tal que

$$y_1 < y < \frac{\alpha_0}{\beta}$$

- ii. Se  $y > \frac{\alpha_0}{\beta}$  temos  $(\beta y - \alpha_0) > 0$  o que implica que  $-b(\beta y - \alpha_0)(y + a) < 0$ . Assim, para que  $z > 0$  devemos ter  $(\beta y - \alpha_0)(y + a) + (\delta - \gamma) < 0$  que é equivalente a  $\beta y^2 + (\beta a - \alpha_0)y + (\delta - \gamma - \alpha_0 a) < 0$ , cuja solução é

$$y_2 < y < y_1$$

onde  $y_1$  e  $y_2$  são as mesmas constantes do caso anterior.

Novamente, temos que  $y_2$  é sempre negativo e que se  $\gamma \geq \delta$  então  $y_1 \geq 0$ .

Nesse caso então para termos  $z > 0$  devemos considerar  $\frac{\alpha_0}{\beta} < y_1$  e assim tomarmos  $y$  tal que

$$\frac{\alpha_0}{\beta} < y < y_1$$

Observe que  $y = \frac{\alpha_0}{\beta}$  não nos interessa pois temos  $z = 0$  nesse caso.

Podemos concluir assim o seguinte lema:

**Lema 2.5.** *Suponha que  $\gamma \geq \delta$  e que  $\min\{\frac{\alpha_0}{\beta}, y_1\} < y < \max\{\frac{\alpha_0}{\beta}, y_1\}$  então temos que  $z > 0$ .*

Substituindo o valor  $z = \frac{-b(\beta y - \alpha_0)(y + a)}{(\beta y - \alpha_0)(y + a) + \delta - \gamma}$  na equação

$$\delta y - (\eta z + \xi)(a + y)(b + z) = 0,$$

e usando o Maple 16, encontramos a seguinte equação polinomial de grau 5:

$$\begin{aligned} & \delta \beta^2 y^5 + (2\delta \beta^2 a - 2\delta \beta \alpha_0) y^4 \\ & + (-\beta b \eta \gamma - 4\delta \beta \alpha_0 a + \beta b \eta \delta + 2\delta^2 \beta \\ & + \delta \alpha_0^2 - \beta \xi \delta + \delta \beta^2 a^2 - 2\delta \beta \gamma + \beta \xi \gamma) y^3 \\ & + (2\delta \alpha_0^2 a - 2\beta \xi a \delta + 2\delta \alpha_0 \gamma + 2\delta^2 \beta a - \alpha_0 b \eta \delta + \alpha_0 b \eta \gamma \\ & + 2\beta \xi a \gamma - 2\delta \beta a \gamma + \alpha_0 \xi \delta + 2\beta b \eta a \delta \\ & - 2\beta b \eta a \gamma - 2\delta \beta a^2 \alpha_0 - \alpha_0 \xi \gamma - 2\delta^2 \alpha_0) y^2 \\ & + (-2\delta^2 \alpha_0 a + \delta \gamma^2 + 2\alpha_0 b \eta a \gamma + \beta a^2 \xi \gamma - 2\delta^2 \gamma - \xi \delta^2 + 2\alpha_0 \xi a \delta + 2\xi \delta \gamma \\ & - \xi \gamma^2 + \delta \alpha_0^2 a^2 - 2\alpha_0 b \eta a \delta + \delta^3 - 2\alpha_0 \xi \\ & a \gamma + \beta a^2 b \eta \delta + 2\delta \alpha_0 a \gamma - \beta a^2 \xi \delta - \beta a^2 b \eta \gamma) y \\ & - \alpha_0 a^2 \xi \gamma - \xi \delta^2 a + 2\xi \delta a \gamma + \alpha_0 a^2 b \eta \gamma + \alpha_0 a^2 \xi \delta - \alpha_0 a^2 b \eta \delta - \xi \gamma^2 a = 0. \end{aligned}$$

Devido ao grande número de parâmetros envolvidos na equação acima, garantiremos a existência dos pontos de equilíbrio através da Teoria da Persistência.

## 2.6 Sustentabilidade do Modelo Agricultura-Indústria

A Definição 1.15 de Sustentabilidade dada no capítulo 1 nos diz que, um fluxo é sustentável quando for persistente uniforme e dissipativo.

A dissipatividade do sistema 2.1 foi dada no Teorema 2.1 e para garantirmos a persistência uniforme desse sistema, iremos utilizar a seção 1.5 dada no capítulo 1. Considerando  $B$  o conjunto dado no Teorema 2.1, observe que

$$M_1 = \sup_{(y,z) \in B} y \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha_0}{\beta} + \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{\beta^2} + \frac{4}{\beta} \max\{\gamma - \delta, 0\}} \right]$$

e

$$M_2 = \sup_{(y,z) \in B} z \leq \frac{\delta}{\xi}.$$

Temos ainda que, se considerarmos o sistema 2.1 de forma que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \mu y \left( \alpha_0 - \beta y + \frac{(\gamma - \delta)z}{(a + y)(b + z)} \right) = y f_1(y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= z \left( -\xi - \eta z + \frac{\delta y}{(a + y)(b + z)} \right) = z f_2(y, z) \end{aligned} \tag{2.6}$$

temos que  $f_1(y, z) = \mu \left( \alpha_0 - \beta y + \frac{(\gamma - \delta)z}{(a + y)(b + z)} \right)$  e  $f_2(y, z) = -\xi - \eta z + \frac{\delta y}{(a + y)(b + z)}$  assim se considerarmos  $\gamma > \delta$ , ou seja, que o índice de preços agrícolas é maior que o índice de preços industriais, temos:

$$\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} = -\mu\beta - \frac{\mu(\gamma - \delta)z}{(a + y)^2(b + z)} < 0$$

$$\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial z} = \frac{\mu(\gamma - \delta)b}{(a + y)(b + z)^2} > 0$$

$$\frac{\partial f_2(y, z)}{\partial y} = \frac{\delta a}{(a + y)^2(b + z)} > 0$$

$$\frac{\partial f_2(y, z)}{\partial z} = -\eta - \frac{\delta y}{(a + y)(b + z)^2} < 0$$

Observe que todas essas funções são contínuas em  $B$ , e assim, todas possuem máximo e mínimo em  $B$ . Dessa forma, considere

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \inf_{(y,z) \in B} \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = \min_{(y,z) \in B} \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = \min_{(y,z) \in B} \left\{ -\mu\beta - \frac{\mu(\gamma - \delta)z}{(a+y)^2(b+z)} \right\}, \\
m_{12} &= \inf_{(y,z) \in B} \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial z} = \min_{(y,z) \in B} \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial z} = \min_{(y,z) \in B} \left\{ \frac{\mu(\gamma - \delta)b}{(a+y)(b+z)^2} \right\}, \\
m_{21} &= \inf_{(y,z) \in B} \frac{\partial f_2(y,z)}{\partial y} = \min_{(y,z) \in B} \frac{\partial f_2(y,z)}{\partial y} = \min_{(y,z) \in B} \left\{ \frac{\delta a}{(a+y)^2(b+z)} \right\}, \\
m_{22} &= \inf_{(y,z) \in B} \frac{\partial f_2(y,z)}{\partial z} = \min_{(y,z) \in B} \frac{\partial f_2(y,z)}{\partial z} = \min_{(y,z) \in B} \left\{ -\eta - \frac{\delta y}{(a+y)(b+z)^2} \right\}.
\end{aligned}$$

**Teorema 2.2.** *Suponha que  $\gamma > \delta$ ,  $m_{11} + m_{21} \geq 0$  e que  $\mu\alpha_0 - \xi - 2\frac{\delta}{\xi} > 0$ . Então o sistema 2.1 é persistente uniforme.*

**Demonstração:** Observe que  $a_1 = f_1(0) = \mu\alpha_0$  e  $a_2 = f_2(0) = -\xi$ . Considere o conjunto  $Q$  definido na seção 1.5 como  $Q = \{1\}$  e tome  $r_1 = 1 = r_2$ . Para garantirmos persistência uniforme segundo o teorema 1.4 devemos garantir que

$$r_1 m_{11} + r_2 m_{21} = m_{11} + m_{21} \geq 0$$

e que

$$\bar{\mu} = \mu\alpha_0 - \xi - 2M_2 \geq \mu\alpha_0 - \xi - 2\frac{\delta}{\xi} > 0$$

■

Podemos então, concluir finalmente o seguinte resultado:

**Teorema 2.3** (2.3). *O sistema 2.1, sobre as hipóteses do Teorema 2.2, é dissipativo e persistente uniforme, e portanto, sustentável.*

## 2.7 Retratos de Fase para alguns valores de parâmetros

Mostraremos nessa seção alguns retratos de fase do sistema 2.1, para alguns valores de parâmetro. Na Figura 2.1, apresentamos um caso em que  $\gamma > \delta$ , que é uma das condições do Teorema de Persistência desse capítulo. Nessa figura, podemos observar a existência de um atrator no interior de  $\mathbb{R}_+^2$ .

Na Figura 2.2, também temos um atrator no interior de  $\mathbb{R}_+^2$  entretanto, a condição  $\gamma > \delta$  não é satisfeita. Podemos concluir então que para termos um atrator no interior de  $\mathbb{R}_+^2$  não é necessário que a condição  $\gamma > \delta$  ocorra.

As demais figuras representam o que ocorre para outros valores de parâmetros valores de parâmetros. Em todos os casos temos a existência de uma atrator.

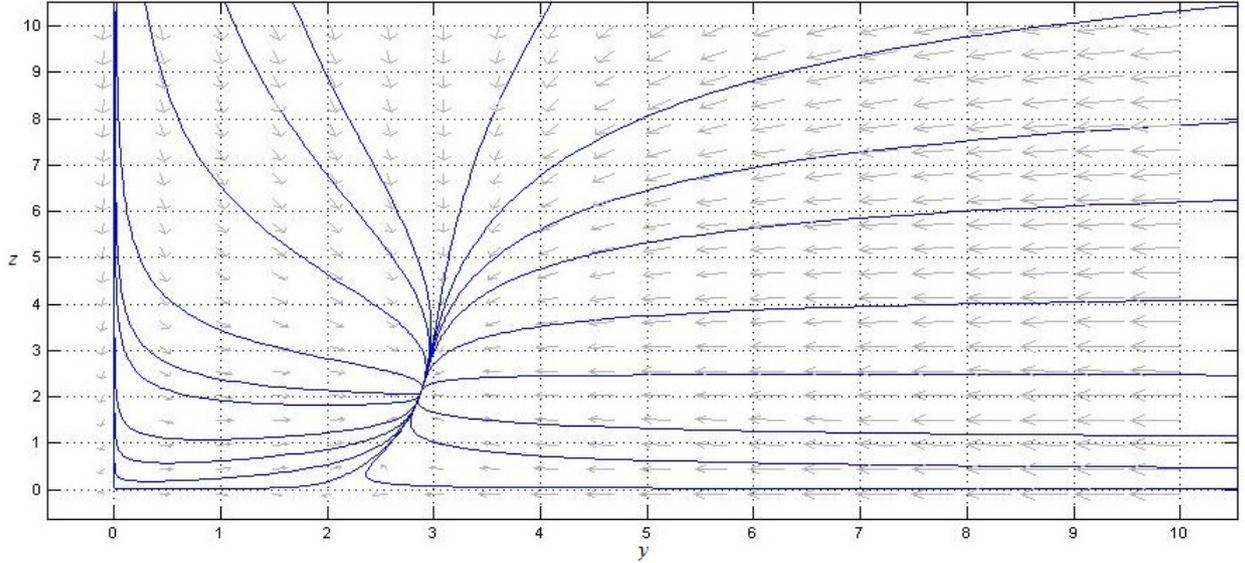


Figura 2.1: Retrato de Fase para os valores  $\mu = 1, \alpha_0 = 2, \beta = 1, \gamma = 10, \delta = 5, \xi = 1, a = 1, b = 1$  e  $\eta = 0.1$ .

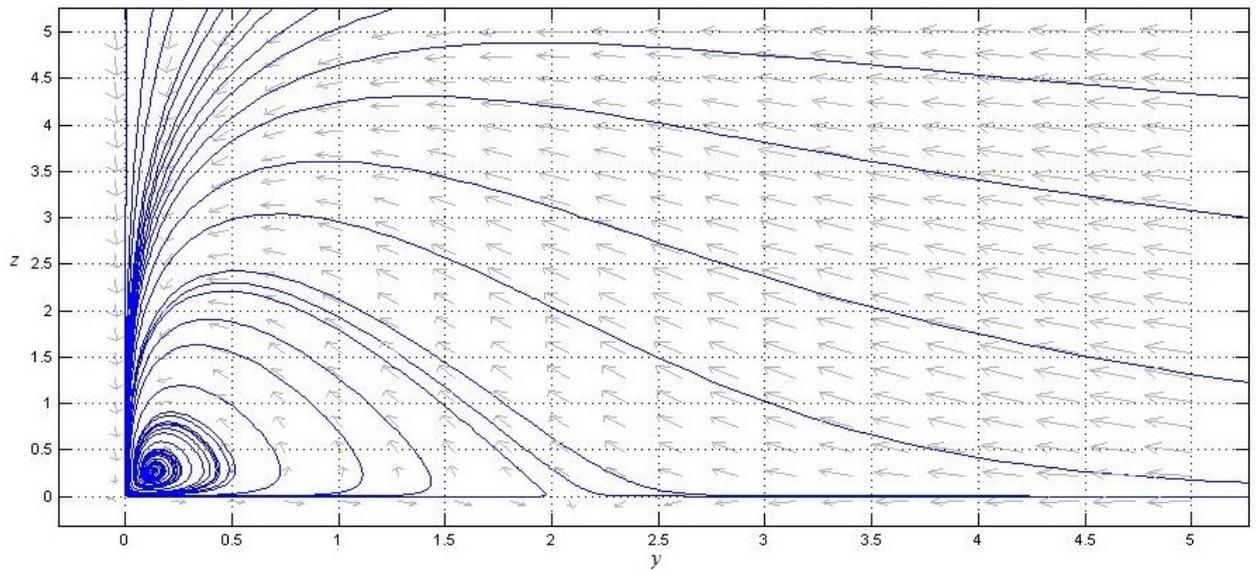


Figura 2.2: Retrato de Fase para os valores  $\mu = 1, \alpha_0 = 2, \beta = 1, \gamma = 10, \delta = 20, \xi = 1, 75, a = 1, b = 1$  e  $\eta = 0, 1$ .

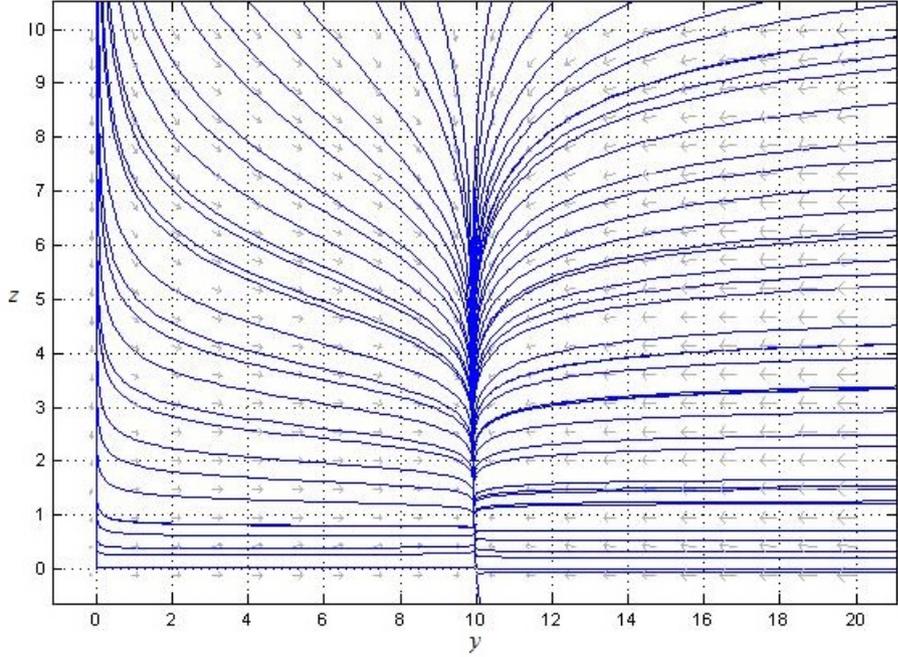


Figura 2.3: Retrato de Fase para os valores  $\mu = 1, \alpha_0 = 2, \beta = 1, \gamma = 10, \delta = 20, \xi = 8, a = 1, b = 1$  e  $\eta = 0$ .

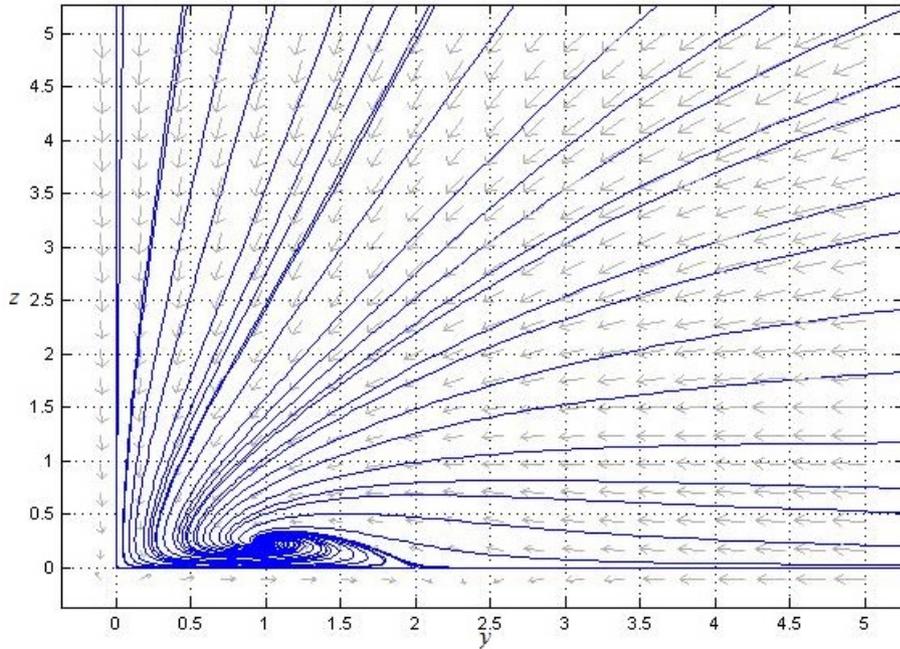


Figura 2.4: Retrato de Fase para os valores  $\mu = 2, \alpha_0 = 2, \beta = 1, \gamma = 10, \delta = 20, \xi = 8, a = 1, b = 1$  e  $\eta = 0$ .

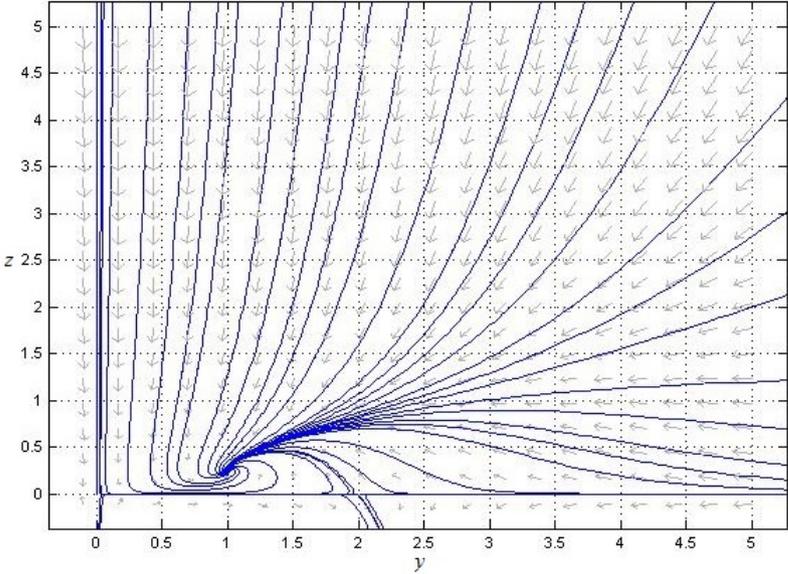


Figura 2.5: Retrato de Fase para os valores  $\mu = 0,5, \alpha_0 = 2, \beta = 1, \gamma = 10, \delta = 20, \xi = 8, a = 1, b = 1$  e  $\eta = 0$ .

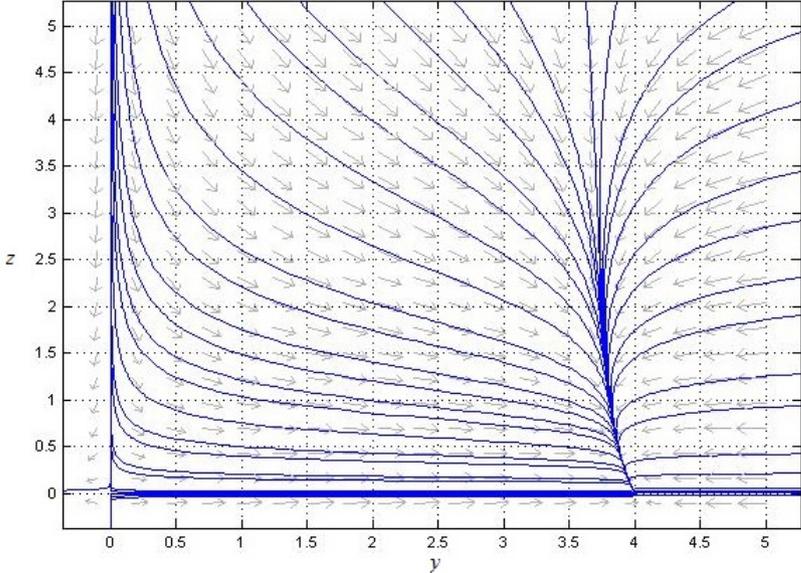


Figura 2.6: Retrato de Fase para os valores  $\mu = 2, \alpha_0 = 4, \beta = 1, \gamma = 0,33, \delta = 2, \xi = 1,8, a = 1, b = 1$  e  $\eta = 0$ .

## 2.8 Considerações Finais para o Modelo Agricultura - Indústria

Neste capítulo estudamos a dinâmica do modelo de duas variáveis que descreve a relação entre agricultura e indústria. Encontramos os equilíbrios que estavam na fronteira

de  $\mathbb{R}_+^2$ , e ao procurarmos equilíbrios no interior desse conjunto, nos deparamos com uma equação de grau 5 que depende de muitos parâmetros, tornando o simples fato de encontrar raízes complicado. Para contornar esse problema, utilizamos a teoria apresentada no Capítulo 1, mais precisamente o Teorema 1.4, e garantimos que o fluxo gerado pelo sistema é sustentável desde que algumas condições sobre os parâmetros sejam satisfeitas.

O modelo apresentado é o mais simples possível, pois estamos considerando a ecossfera em equilíbrio. Uma versão melhorada desse modelo procuraria relacionar mais esta variável, o que pode mudar os resultados até então encontrados para a dinâmica.

No próximo capítulo apresentaremos um modelo incluindo a variável ecossfera, onde esta poderá ser vista como uma presa para a agricultura e indústria.

## Capítulo 3

# Modelo com Interações entre Ecosfera, Agricultura e Indústria

A relação entre Ecosfera e Agricultura é muito frágil, principalmente quando consideramos os países menos desenvolvidos, pois a falta de subsídios para as atividades agrícolas faz com que a degradação do meio ambiente seja intensificada nesses países.

O modelo que estudaremos neste capítulo tem como base os modelos propostos por Solomonovich e outros [16], [17] e [18] e envolve a interação entre Ecosfera, Agricultura e Indústria. Nosso objetivo é entender o comportamento da Ecosfera em relação à Agricultura ao longo do tempo, ou seja, de que forma a agricultura impacta o meio ambiente à medida que o tempo passa.

Os valores dos parâmetros do modelo determinam o comportamento do sistema. Existem valores de parâmetros para os quais esse comportamento se torna menos previsível que o esperado, sendo assim, é sobre esses parâmetros que colocaremos condições para que tenhamos os resultados desejados.

É importante ressaltar que nesses modelos, segundo Solomonovich e outros [17], a ecosfera é considerada um sistema interativo de vida, capaz de se reproduzir, regenerar e entrar em extinção. Dessa forma podemos considerar na ecosfera as seguintes características: uma condição máxima de existência, uma taxa de degradação e uma taxa de restauração.

A relação entre a Agricultura e a Indústria é basicamente a mesma apresentada no capítulo anterior, mas o diferencial é que neste modelo a Agricultura é vista como um predador da Ecosfera.

### 3.1 O Modelo

Solomonovich e outros [16] e [18] propuseram modelos que demonstram a interação entre ecossfera, indústria e agricultura. Baseando-se nesses modelos temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= x(u - vy - \omega x) \\
 \frac{dy}{dt} &= \mu y \left[ \frac{\alpha x}{(e + x)} - \beta y + \left( \gamma \frac{x}{(e + x)} - \delta \right) \frac{z}{(a + y)(b + z)} \right] \\
 \frac{dz}{dt} &= z \left( -\xi - \eta z + \frac{\delta y}{(a + y)(b + z)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

com condição inicial  $x(0) = x_0 > 0$ ,  $y(0) = y_0 > 0$  e  $z(0) = z_0 > 0$ .

onde

- $x$  representa riqueza ecosférica, referindo-se à qualidade da terra e do ambiente de forma geral.
- $y$  representa riqueza agrícola.
- $z$  representa riqueza industrial.

A seguir temos o significado de cada um dos parâmetros.

$\mu$  - parâmetro que reescala a taxa de mudança na riqueza agrícola quando comparada à taxa de mudança na riqueza industrial.

$\alpha$  - capacidade de uso base da ecossfera pela agricultura.

$\beta$  - coeficiente de rendimentos decrescentes na agricultura.

$\delta$  - índice de preços industriais.

$\gamma$  - índice de preços agrícolas.

$\xi$  - taxa de depreciação linear do capital industrial.

$\eta$  - taxa de depreciação quadrática do capital industrial.

$a$  - taxa de recuperação econômica da agricultura.

$b$  - taxa de recuperação econômica da indústria.

$e$  - coeficiente de recuperação da ecosfera.

$u$  - taxa de restauração ou reabilitação da ecosfera.

$v$  - taxa de degradação da ecosfera.

$\omega$  - posição da ecosfera em relação à condição de máximo da ecosfera “natural”.

Consideraremos todos os parâmetros positivos.

Observe que se não tivermos riqueza ecosférica ( $x = 0$ ) teremos  $\frac{dy}{dt} = \mu y[-\beta y - \frac{\delta z}{(a+y)(b+z)}]$  e  $\frac{dz}{dt} = z(-\xi - \eta z + \frac{\delta y}{(a+y)(b+z)})$ . Dessa forma a variação da agricultura é negativa e portanto a mesma tenderá a extinção a medida que o tempo passa o que levará a indústria a extinção também. Observe que, segundo nosso modelo, a indústria não sofre influência direta da ecosfera, entretando depende implicitamente, pois a agricultura depende diretamente da ecosfera.

Caso não tenhamos agricultura ( $y = 0$ ) então  $\frac{dx}{dt} = x(u - \omega x)$  e  $\frac{dz}{dt} = z(-\xi - \eta z)$ . Daí temos que a indústria tende a extinção pois a variação da indústria é negativa e o comportamento da ecosfera fica dependendo da taxa de restauração ou reabilitação da ecosfera e da posição da Ecosfera em relação à condição de máximo da Ecosfera “natural”.

Por último se tivermos  $z = 0$ , ou seja, caso não haja riqueza industrial, concluímos que  $\frac{dx}{dt} = x(u - vy - \omega x)$  e  $\frac{dy}{dt} = \mu y[\frac{\alpha x}{(e+x)} - \beta y]$ . Nesse caso a variação da ecosfera não se altera, mas a variação da agricultura passa a depender apenas da capacidade de uso base e do coeficiente de recuperação da ecosfera e do coeficiente de rendimentos decrescentes na agricultura.

## 3.2 Positividade e Dissipatividade

Veremos nesta seção, duas propriedades do sistema 3.1 que são muito importantes para garantir a sustentabilidade do mesmo.

**Lema 3.1.** *Soluções do sistema 3.1 com condição inicial positiva mantêm-se positivas.*

**Demonstração:** Como o sistema 3.1 é Kolmogorov, a fronteira de  $\mathbb{R}_+^3$  é invariante pelo fluxo. Pelo Lema 1.3 temos que  $\text{int}(\mathbb{R}_+^3)$  também é invariante pelo fluxo e daí segue o resultado. ■

**Teorema 3.1.** *O sistema 3.1 é dissipativo com região de atração contida em*

$$A = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq \frac{u}{w}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha}{\beta} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{4}{\beta} \max\{\gamma - \delta, 0\}} \right], 0 \leq z \leq \frac{\delta}{\xi} \right\}.$$

**Demonstração:** A demonstração para as coordenadas  $y$  e  $z$  é a mesma feita no Teorema 2.1. Para a coordenada  $x$ , temos que  $\frac{dx}{dt} \leq ux - \omega x^2$  e seguimos o mesmo raciocínio feito no mesmo Teorema 2.1. ■

### 3.3 Pontos de Equilíbrio na Fronteira de $\mathbb{R}_+^3$

Para iniciarmos a análise da dinâmica desse sistema, vamos encontrar os pontos de equilíbrio que pertencem a fronteira de  $\mathbb{R}_+^3$ . Lembrando que  $\mu \neq 0$ , devemos então resolver o seguinte sistema para encontramos tais equilíbrios.

$$\begin{aligned} x(u - vy - \omega x) &= 0 \\ y \left[ \frac{\alpha x}{(e+x)} - \beta y + \left( \gamma \frac{x}{(e+x)} - \delta \right) \frac{z}{(a+y)(b+z)} \right] &= 0 \\ z \left( -\xi - \eta z + \frac{\delta y}{(a+y)(b+z)} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

#### Equilíbrio trivial

Claramente, o ponto  $F_0(0,0,0)$  é um ponto de equilíbrio do sistema acima. Esse equilíbrio representa a não existência de nenhuma das nossas “espécies”.

#### Equilíbrio na parte positiva do eixo $x$

Nesse caso, temos  $x \neq 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$  o que torna claramente a 2ª e 3ª equações válidas. Com essas condições a 1ª equação se torna

$$u - \omega x = 0$$

Portanto, temos o seguinte equilíbrio

$$F_x \left( \frac{u}{\omega}, 0, 0 \right),$$

que nos mostra que temos a existência da ecosfera independente da existência da agricultura e da indústria.

### **Equilíbrio na parte positiva do eixo $y$**

Nesse caso, temos  $x = 0$ ,  $y \neq 0$  e  $z = 0$  o que torna claramente a 1ª e 3ª equações válidas. Com essas condições a 2ª equação se torna

$$-\beta y = 0,$$

o que é um absurdo, já que  $\beta > 0$  e queremos  $y > 0$ .

Portanto, não temos equilíbrio positivo nesse eixo, ou seja, se não tivermos ecosfera e indústria, não teremos agricultura.

### **Equilíbrio na parte positiva do eixo $z$**

Nesse caso, temos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z \neq 0$ , o que torna a 1ª e 2ª equações válidas. Com essas condições a 3ª equação se torna

$$z(-\xi - \eta z) = 0$$

Como  $z \neq 0$  temos que  $z = \frac{-\xi}{\eta}$

Portanto, não temos equilíbrio positivo nesse eixo, ou seja, se não houver existência da ecosfera e da agricultura, não haverá existência da indústria.

### **Equilíbrio na parte positiva do plano $xz$**

Temos que  $x \neq 0$ ,  $y = 0$  e  $z \neq 0$ ; assim, o sistema 3.2 se reduz a

$$ux - \omega x^2 = 0$$

$$-\xi z - \eta z^2 = 0$$

Da segunda equação concluímos, como  $z \neq 0$ , que  $z = -\frac{\xi}{\eta}$  e assim não existe ponto de equilíbrio nesse plano com todas as coordenadas positivas. Ou seja, podemos concluir

que há existência de ecosfera e indústria se não houver agricultura.

### Equilíbrio na parte positiva do plano $xy$

Temos que  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  e  $z = 0$ ; assim, o sistema 3.2 se reduz a

$$\begin{aligned} u - vy - \omega x &= 0 \\ \frac{\alpha x}{e + x} - \beta y &= 0 \end{aligned}$$

Como  $y \neq 0$ , temos  $y = \frac{\alpha x}{\beta(e + x)}$ . Substituindo esse valor na 1ª equação temos:

$$x \left( u - v \left( \frac{\alpha x}{\beta(e + x)} \right) - \omega x \right) = 0,$$

que é equivalente a

$$x^2 + x \left( \frac{v\alpha}{\omega\beta} - \frac{u}{\omega} + e \right) - \frac{ue}{\omega} = 0.$$

Resolvendo essa equação, encontramos a seguinte raiz positiva:

$$\hat{x} = -\frac{1}{2\omega} v \left( \frac{v\alpha}{\beta} - u + e\omega \right) + \sqrt{\left[ \frac{1}{2\omega} \left( \frac{v\alpha}{\beta} - u + e\omega \right) \right]^2 + \frac{ue}{\omega}}.$$

E assim, encontramos o seguinte ponto de equilíbrio com coordenadas positivas:

$$F_{xy} \left( \hat{x}, \frac{\alpha \hat{x}}{\beta(e + \hat{x})}, 0 \right) = (\hat{x}, \hat{y}, 0).$$

A existência desse equilíbrio nos mostra que é possível termos ecosfera e agricultura mesmo sem a existência de indústria.

### Equilíbrio na parte positiva do plano $yz$

Temos que  $x = 0$ ,  $y \neq 0$  e  $z \neq 0$ ; assim, o sistema 3.2 se reduz a,

$$\begin{aligned} -\beta y - \frac{\delta z}{(a+y)(b+z)} &= 0 \\ -\xi - \eta z + \frac{\delta y}{(a+y)(b+z)} &= 0 \end{aligned}$$

Observe que, como  $y > 0$  e  $z > 0$  e os parâmetros são positivos, segue que a 1ª equação nunca será satisfeita.

Portanto, não existe equilíbrio positivo nesse plano, ou seja, não há existência de agricultura e indústria se não houver ecossfera.

### 3.4 Análise Local dos Pontos de Equilíbrio da Fronteira de $\mathbb{R}_+^3$

Definimos a estabilidade do ponto de equilíbrio através do sinal das partes reais do autovalores associados ao sistema linearizado aplicado nos pontos críticos. Valor positivo para alguma parte real de algum autovalor significa instabilidade. Valores negativos para todas as partes reais de todos os autovalores significa estabilidade assintótica. Vamos agora estudar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio já encontrados.

A matriz Jacobiana é dada por

$$J_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_{11} & -vx & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & \frac{\delta az}{(a+y)^2(b+z)} & a_{33} \end{pmatrix},$$

onde

$$a_{11} = u - vy - 2\omega x$$

$$a_{21} = \mu \left[ \frac{\alpha ey}{(e+x)^2} + \frac{\gamma e y z}{(e+x)^2(a+y)(b+z)} \right],$$

$$a_{22} = \mu \left[ \frac{\alpha x}{(e+x)} - 2\beta y + \left( \frac{\gamma x}{e+x} - \delta \right) \frac{az}{(a+y)^2(b+z)} \right],$$

$$a_{23} = \mu \left( \frac{\gamma x}{e+x} - \delta \right) \frac{by}{(a+y)(b+z)^2}$$

e

$$a_{33} = -\xi - 2\eta z + \frac{\delta by}{(a+y)(b+z)^2}$$

Para o equilíbrio  $F_0$ , temos o seguinte lema:

**Lema 3.2.** *O equilíbrio  $F_0$  é não hiperbólico e localmente instável. Na realidade  $F_0$  é um ponto de sela assintoticamente estável na direção  $z$  e instável na direção  $x$ .*

**Demonstração:** Aplicando  $J_3$  em  $F_0$  temos

$$J_3(F_0) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi \end{pmatrix}$$

Assim, os autovalores dessa matriz são  $\lambda_1 = u$ ,  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = -\xi$ . Como todos os parâmetros são positivos, temos que essa matriz assume um autovalor nulo que nos diz que esse ponto é não hiperbólico e também possui autovalores positivos e negativos, portanto classificamos esse ponto como um sela. ■

Analisando agora  $F_x$ , temos

**Lema 3.3.** *O equilíbrio  $F_x$  é um ponto de sela hiperbólica localmente instável na direção  $y$  e localmente assintoticamente estável nas direções  $x$  e  $z$ .*

**Demonstração:** Aplicando  $J_3$  em  $F_x$  temos

$$J_3(F_x) = \begin{pmatrix} -u & \frac{-vu}{w} & 0 \\ 0 & \frac{\mu\alpha u}{e\omega+u} & \\ 0 & 0 & -\xi \end{pmatrix}$$

Os autovalores dessa matriz são dados por  $\lambda_1 = -u$ ,  $\lambda_2 = \frac{\mu\alpha u}{e\omega+u}$  e  $\lambda_3 = -\xi$ . Como todos os parâmetros são positivos, temos que essa matriz assume autovalores positivos e negativos, portanto classificamos esse ponto como uma sela. ■

**Lema 3.4.** *Temos que:*

- (a) *Se  $\xi > \frac{\delta\hat{y}}{b(a+\hat{y})}$  então  $F_{xy}$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável;*
- (b) *Se  $\xi < \frac{\delta\hat{y}}{b(a+\hat{y})}$  então  $F_{xy}$  é um ponto de sela hiperbólico.*

**Demonstração:** Aplicando  $J_3$  em  $F_{xy}$  temos

$$J_3(F_{xy}) = \begin{pmatrix} u - v\hat{y} - 2\omega\hat{x} & -v\hat{x} & 0 \\ \frac{\mu\alpha e\hat{y}}{(e+\hat{x})^2} & \mu\left[\frac{\alpha\hat{x}}{e+\hat{x}} - 2\beta\hat{y}\right] & \mu\left(\gamma\frac{x}{(e+x)} - \delta\right)\frac{\hat{y}}{b(a+\hat{y})} \\ 0 & 0 & -\xi + \frac{\delta\hat{y}}{b(a+\hat{y})} \end{pmatrix}$$

Usando o fato de que  $u - vy - \omega x = 0$  e  $\frac{\alpha x}{e+x} - \beta y = 0$  temos

$$J_3(F_{xy}) = \begin{pmatrix} -\omega \hat{x} & -v \hat{x} & 0 \\ \frac{\mu \alpha e \hat{y}}{(e+\hat{x})^2} & -\mu \beta \hat{y} & \mu \left( \gamma \frac{x}{(e+x)} - \delta \right) \frac{\hat{y}}{b(a+\hat{y})} \\ 0 & 0 & -\xi + \frac{\delta \hat{y}}{b(a+\hat{y})^2} \end{pmatrix}$$

Considerando  $J(F_{xy}) = (m_{ij})_{3 \times 3}$ , os autovalores associados ao equilíbrio  $F_{xy}$  são

$$\lambda_1 = \frac{m_{11} + m_{22}}{2} + \sqrt{\left( \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \right)^2 + m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}},$$

$$\lambda_2 = \frac{m_{11} + m_{22}}{2} - \sqrt{\left( \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \right)^2 + m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}}$$

e

$$\lambda_3 = -\xi + \frac{\delta \hat{y}}{b(a + \hat{y})}.$$

Se

$$\left( \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \right)^2 < m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

Observe que

$$\frac{m_{11} + m_{22}}{2} = \frac{-\omega \hat{x} - \beta \hat{y}}{2} < 0.$$

Então os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são complexos com parte real negativa.

Caso contrário, se

$$\left( \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \right)^2 \geq m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21},$$

utilizando que

$$m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = \omega \beta \hat{x} \hat{y} + \frac{\mu \alpha e v \hat{x} \hat{y}}{e + \hat{x}} > 0$$

podemos concluir

$$\left| \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \right| > \pm \sqrt{\left( \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \right)^2 - (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_{11} + m_{22}}{2}\right)^2 - (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})} \\ < \frac{m_{11} + m_{22}}{2} + \left|\frac{m_{11} + m_{22}}{2}\right| = 0 \end{aligned}$$

pois  $\frac{m_{11} + m_{22}}{2} < 0$ .

Sendo assim, os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais negativos e, portanto, o equilíbrio é assintoticamente estável na direção dos autovetores associados a esses autovalores. ■

Temos então, para os equilíbrios de fronteira, a seguinte tabela:

-	Equilíbrio	Classificação Local
Trivial	$F_0(0, 0, 0)$	Sela não hiperbólica
No semieixo positivo x	$F_x\left(\frac{u}{\omega}, 0, 0\right)$	Sela hiperbólica
No semieixo positivo y	-	-
No semieixo positivo z	-	-
No semiplano positivo x-y	$F_{xy}(\hat{x}, \hat{y}, 0)$	Assintoticamente estável se $\xi > \frac{\delta\hat{y}}{b(a+\hat{y})}$ e Sela hiperbólica se $\xi < \frac{\delta\hat{y}}{b(a+\hat{y})}$
No semiplano positivo x-z	-	-
No semiplano positivo y-z	-	-

### 3.5 Sustentabilidade do Modelo Ecosfera-Agricultura-Indústria

Para garantirmos a sustentabilidade do sistema 3.1, devemos garantir a persistência uniforme do modelo, pois a dissipatividade já foi garantida pelo Teorema 3.1.

Chegamos assim ao seguinte teorema de Persistência desse capítulo

**Teorema 3.2.** *Suponha que  $\gamma \geq \delta$ . Então o sistema 3.1 é persistente uniforme desde que a seguinte inequação seja satisfeita*

$$\xi < \frac{\delta\hat{y}}{(a + \hat{y})b}$$

onde  $F_{xy}(\hat{x}, \hat{y}, 0)$  é o equilíbrio positivo no interior do plano  $x - y$ .

**Demonstração:** Nesta demonstração é utilizado o Teorema 1.3 apresentado no Capítulo 1. Para utilizar esse teorema devemos verificar 8 hipóteses. A hipótese 1 é facilmente verificada. As hipóteses 2 e 3 sobre os equilíbrios  $F_0$  e  $F_x$  foram verificadas nos Lemas 3.2 e 3.3, respectivamente. A hipótese 4 foi verificada no início do capítulo, quando concluímos que não há equilíbrios positivos no eixo  $z$ . A hipótese 6 é consequência dissipatividade. Concluímos também que, não há equilíbrio positivo no eixo  $y$ , portanto o item 7 segue também como consequência do Lema 3.3. Da hipótese 5, resta verificar que  $F_0$  é assintoticamente estável na direção  $y$ . Da hipótese 8, utilizando a hipótese  $\xi < \frac{\delta \hat{y}}{(a + \hat{y})b}$ , o Lema 3.4 e o fato de que nos planos  $xz$  e  $yz$  não há equilíbrios positivos, falta verificar que não há órbitas periódicas em torno de  $F_{xy}$ . Para maiores detalhes veja [18].

■

**Corolário 3.1.** *Sob as hipóteses do teorema 3.2, existe um equilíbrio positivo para o sistema 3.1.*

**Demonstração:** Veja [18].

■

Podemos então, concluir finalmente o seguinte resultado:

**Teorema 3.3.** *O sistema 3.1, sobre as hipóteses do Teorema 3.2, é dissipativo e persistente uniforme, e portanto, sustentável.*

## 3.6 Considerações Finais para o Sustentabilidade do Modelo Ecosfera-Agricultura-Indústria

Neste capítulo apresentamos um modelo que descreve a relação da Ecosfera, Agricultura e Indústria. Buscamos como objetivo que nenhuma dessas variáveis tendesse a extinção, ou seja, que as variáveis coexistissem. Uma condição para isso foi encontrada no Teorema 3.2 que nos dá como consequência a sustentabilidade do modelo.

É claro que o sistema aqui estudado, apresenta várias restrições, sendo assim, no próximo capítulo estudaremos um outro modelo, mais complexo, no qual a agricultura é dividida em dois tipos (tradicional e auxiliar), fazendo com que a modelagem fique mais próxima da realidade.

## Capítulo 4

# Modelo com Interações entre Ecosfera, Agricultura Tradicional, Agricultura Auxiliar e Indústria

Em países como Namíbia, África do Sul e Zimbábue, existe uma lei que determina que, se há vida selvagem em sua propriedade, então ela lhe pertence. Como resultado dessa lei, fazendeiros não se importam em perder algumas plantas e animais domésticos para os animais selvagens, porque se eles estiverem aptos a capturá-los e vendê-los a um grupo de conservação, eles poderão ganhar mais dinheiro do que ganhariam com as plantas ou animais domésticos. Antes dessa lei, normalmente esses fazendeiros envenenariam ou matariam esses animais selvagens por colocarem em risco os produtos de sua propriedade.

Essa utilização de recursos selvagens explicada acima é um exemplo do que consideraremos Agricultura Auxiliar nesse capítulo, que também inclui, caça de animais selvagens para consumo próprio (em alguns países da África essa prática supre cerca 70% da dieta de proteínas de algumas comunidades rurais) ou a transformação de fazendas em reservas ecológicas ou campos de caça.

O modelo apresentado neste capítulo e proposto por Agyemang e outros [1], representa a interação entre Ecosfera, Agricultura Tradicional, Agricultura Auxiliar e Indústria, fazendo com que a Agricultura Auxiliar tenha uma relação de competição com a Agricultura Tradicional.

### 4.1 O Modelo

Agyemang e outros [1] propuseram o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\kappa xy_1 + v(1-x)x + \phi(1-x)y_1 \\
\frac{dy_1}{dt} &= (\alpha_1 x - \beta_1 y_1 + \gamma_1 z - \rho_1 y_2 - \theta(1-x))y_1 \\
\frac{dy_2}{dt} &= (\alpha_2 x - \beta_2 y_2 - \gamma_2 z - \rho_2 y_1)y_2 \\
\frac{dz}{dt} &= (-\xi - \eta z + \delta y_1)z
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Com condição inicial  $x_0 = x(0)$ ,  $0 \leq x_0 \leq 1$ ,  $y_{10} = y_1(0)$ ,  $y_{20} = y_2(0)$  e  $z_0 = z(0)$ ,

onde

- $x$  representa riqueza ecosférica, referindo-se à qualidade da terra e do ambiente de forma geral.
- $y_1$  representa riqueza da agricultura tradicional (normal).
- $y_2$  representa riqueza da agricultura auxiliar.
- $z$  representa riqueza da industrial.

Assumiremos que todos os parâmetros são positivos, exceto  $\gamma_1$ , que pode ser qualquer número real.

A seguir temos o significado de cada um dos parâmetros.

$\alpha_1$  - taxa de crescimento da agricultura normal devido à atividade agrícola normal para  $x$  fixo;

$\alpha_2$  - taxa de crescimento da agricultura auxiliar devido à atividade agrícola auxiliar para  $x$  fixo;

$\beta_1$  - taxa de retornos decrescentes para a agricultura normal na ausência de indústria e agricultura auxiliar;

$\beta_2$  - taxa de retornos decrescentes para a agricultura auxiliar na ausência de indústria e agricultura normal;

$\gamma_1$  - coeficiente de termos de troca entre agricultura tradicional e indústria;

$\gamma_2$  - coeficiente de termos de troca entre agricultura auxiliar e indústria;

$\xi$  - taxa constante de depreciação da indústria;

$\eta$  - taxa de depreciação linear da indústria;

$\delta$  - taxa de crescimento para a indústria ao relacionar-se com a agricultura tradicional;

$\rho_1$  - taxa da competitividade da agricultura auxiliar atuando na agricultura tradicional;

$\rho_2$  - taxa da competitividade da agricultura tradicional atuando na agricultura auxiliar;

$\kappa$  - taxa de degradação da ecosfera devido às atividades agrícolas normais;

$\vartheta$  - taxa natural de restauração para a ecosfera;

$\theta$  - taxa de custo líquido para a agricultura normal restaurar a ecosfera, que está representada no termo  $\theta(1 - z)x$ ;

$\phi$  - taxa de esforço para restaurar a ecosfera pela agricultura normal, que está representada no termo  $\phi(1 - z)x$ .

Algumas hipóteses serão assumidas sobre esse modelo:

1. A Indústria gera seus ativos ao vender para a agricultura tradicional (normal);
2. A geração de ativos industriais enfrenta tanto as despesas fixas quanto variáveis, independentes da agricultura e da ecosfera;
3. Tanto a criação de ativos para a agricultura auxiliar quanto para a agricultura normal depende da ecosfera e, portanto, existe a possibilidade de retornos decrescentes para ambos os ativos;
4. A geração de ativos da agricultura tradicional tem um impacto negativo sobre a ecosfera e, portanto, essa agricultura incorre em custos para restabelecer a ecosfera;
5. Na ausência da atividade agrícola tradicional, a ecosfera pode se restabelecer por si mesma;
6. Existe competição por ativos entre agricultura tradicional e a agricultura auxiliar;
7. A criação de ativos agrícolas pode ser incrementada pela indústria, mas às expensas de algum custo;
8. A indústria afeta negativamente a agricultura auxiliar.

Assumiremos, assim, que temos apenas um provedor de manufaturados, que é a indústria, e apenas um comprador, que é a agricultura normal. Se  $\gamma_1 > 0$ , então a influência industrial provoca um ganho líquido em ativos agrícolas. Isto é, o custo para a agricultura normal em lidar com a indústria é menor do que os benefícios obtidos pela agricultura normal no processo. Se o custo para a agricultura normal em lidar com a indústria é igual a todos os benefícios obtidos pela agricultura no processo, então  $\gamma_1 = 0$ . Além disso, se a influência industrial provoca uma perda líquida em ativos agrícolas, então  $\gamma_1 < 0$ .

## 4.2 Positividade e Dissipatividade

Nessa seção, veremos duas importantes propriedades do sistema 4.1 que são de fundamental importância para garantir a persistência do mesmo.

**Lema 4.1.** *Todas as soluções de 4.1 com condição inicial positiva matêm-se positivas.*

**Demonstração:** Veja [1].

**Observação 4.1.** *Nesse caso, o sistema não é Kolmogorov, portanto não podemos utilizar os argumentos dados nos capítulos anteriores.*

Vamos ao teorema de dissipatividade.

**Teorema 4.1.** *Se  $\beta_1\eta - \gamma_1\delta > 0$ ,  $\alpha_1\eta - \gamma_1\xi > 0$  e  $\alpha_1\delta - \beta_1\xi > 0$  então o sistema 4.1 é dissipativo com região de atração contida em*

$$A = \{(x, y_1, y_2, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y_1 \leq M, 0 \leq y_2 \leq \frac{\alpha_2}{\beta_2}, 0 \leq z \leq N\}$$

$$\text{onde } M = \max\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_1\eta - \gamma_1\xi}{\beta_1\eta - \gamma_1\delta}\right) \text{ e } N = \max\left(\frac{\alpha_1\delta - \beta_1\xi}{\beta_1\eta}, \frac{\alpha_1\delta - \beta_1\xi}{\beta_1\eta - \gamma_1\delta}\right).$$

**Demonstração:** A ideia da demonstração é a mesma feita nos capítulos anteriores. Veja [1].

■

## 4.3 Pontos de Equilíbrio na Fronteira de $\mathbb{R}_+^4$

Para encontrarmos os pontos de equilíbrio do sistema 4.1 devemos resolver o seguinte sistema.

$$\begin{aligned} -\kappa xy_1 + v(1-x)x + \phi(1-x)y_1 &= 0 \\ (\alpha_1 x - \beta_1 y_1 + \gamma_1 z - \rho_1 y_2 - \theta(1-x))y_1 &= 0 \\ (\alpha_2 x - \beta_2 y_2 - \gamma_2 z - \rho_2 y_1)y_2 &= 0 \\ (-\xi - \eta z + \delta y_1)z &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

### Equilíbrio Trivial

Claramente, o ponto  $\mathbf{F}_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  é um ponto de equilíbrio do sistema 4.2. Esse equilíbrio representa a inexistência das 4 variáveis com as quais estamos trabalhando.

### Equilíbrio na parte positiva do eixo x

Nesse caso, temos  $x \neq 0$  e  $y_1 = y_2 = z = 0$ . Assim o sistema 4.2 se torna

$$v(1-x)x = 0.$$

Como  $x \neq 0$  temos o equilíbrio  $\mathbf{F}_x(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ . Esse equilíbrio nos mostra que a existência da ecossfera é independente das demais variáveis, ou seja, a ecossfera existe mesmo que não haja nenhuma das outras variáveis.

### Equilíbrio na parte positiva do eixo $y_1$

Nesse caso, temos  $y_1 \neq 0$  e  $x = y_2 = z = 0$ . Assim o sistema 4.2 se torna

$$\begin{aligned} \phi y_1 &= 0 \\ -\beta_1 y_1 - \theta &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos assim, que não há equilíbrio positivo nesse eixo, ou seja, que se não existirem as "espécies" ecossfera, agricultura auxiliar e indústria, não existirá agricultura tradicional.

### Equilíbrio na parte positiva do eixo $y_2$

Nesse caso, temos  $y_2 \neq 0$  e  $x = y_1 = z = 0$ . Assim o sistema 4.2 se torna

$$-\beta_2 y_2 = 0.$$

Portanto, não há equilíbrio positivo nesse eixo, ou seja, não existirá agricultura auxiliar, se não tivermos a existência das demais variáveis.

### Equilíbrio na parte positiva do eixo $z$

Nesse caso, temos  $z \neq 0$  e  $x = y_1 = y_2 = 0$ . Assim o sistema 4.2 se torna

$$-\xi - \eta z = 0$$

Temos assim, que também não há equilíbrio positivo nesse eixo, portanto, não existe um equilíbrio onde a somente riqueza industrial é positiva.

### Equilíbrios na parte positiva do plano $xy_1$

Nesse caso, temos  $x \neq 0$ ,  $y_1 \neq 0$  e  $y_2 = z = 0$ , o que torna o sistema 4.2

$$\begin{aligned} -\kappa xy_1 + v(1-x)x + \phi(1-x)y_1 &= 0 \\ \alpha_1 x - \beta_1 y_1 - \theta(1-x) &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema encontramos o equilíbrio  $\mathbf{F}_{xy_1}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  onde

$$\tilde{x} = \frac{\kappa\theta + v\beta_1 - \phi\beta_1 + \sqrt{(\kappa\theta + v\beta_1 + \phi\beta_1)^2 + 4\beta_1\phi\kappa\alpha_1}}{2(\kappa\alpha_1 + \kappa\theta + v\beta_1)} \quad (4.3)$$

e

$$\tilde{y}_1 = \frac{(\alpha_1 + \theta)\tilde{x} - \theta}{\beta_1}. \quad (4.4)$$

Encontramos então um equilíbrio que representa a coexistência das variáveis ecosfera e agricultura tradicional. **Equilíbrios na parte positiva do plano  $xy_2$**

Nesse caso, temos  $x \neq 0$ ,  $y_2 \neq 0$  e  $y_1 = z = 0$ . Assim o sistema 4.2 se torna

$$\begin{aligned} v(1-x)x &= 0 \\ \alpha_2 x - \beta_2 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema encontramos o equilíbrio  $\mathbf{F}_{xy_2}\left(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \mathbf{0}\right)$ . Concluimos, assim que é possível a existência somente da ecosfera com a agricultura auxiliar.

### Equilíbrios na parte positiva do plano $xz$

Nesse caso, temos  $x \neq 0$ ,  $z \neq 0$  e  $y_1 = y_2 = 0$  portanto, o sistema 4.2 se torna

$$\begin{aligned}v(1-x)x &= 0 \\ -\xi - \eta z &= 0.\end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema não encontramos equilíbrios positivos no plano  $xz$ . Dessa forma, não existe equilíbrio que tenha coordenadas positivas somente nas variáveis ecossfera e indústria.

### **Equilíbrios na parte positiva do plano $y_1y_2$**

Temos aqui,  $y_1 \neq 0$ ,  $y_2 \neq 0$  e  $x = z = 0$  o que torna o sistema 4.2

$$\begin{aligned}\phi y_1 &= 0 \\ -\beta_1 y_1 - \rho_1 y_2 - \theta &= 0 \\ -\beta_2 y_2 - \rho_2 y_1 &= 0.\end{aligned}$$

Ao resolvermos esse sistema não encontramos equilíbrios positivos no plano  $y_1y_2$ , ou seja, não há ponto de equilíbrio onde, somente as coordenadas que representam as agriculturas, são positivas.

### **Equilíbrios na parte positiva do plano $y_1z$**

Nesse caso, temos  $y_1 \neq 0$ ,  $z \neq 0$  e  $x = y_2 = 0$ . Assim o sistema 4.2 se torna

$$\begin{aligned}\phi y_1 &= 0 \\ -\beta_1 y_1 + \gamma_1 z - \theta &= 0 \\ -\xi - \eta z + \delta y_1 &= 0\end{aligned}$$

e esse sistema não possui solução positiva, portanto não encontramos equilíbrios positivos no plano  $y_1z$ . Portanto, não temos coexistência somente de agricultura tradicional e indústria.

### **Equilíbrios na parte positiva do plano $y_2z$**

Para esse plano temos  $y_2 \neq 0$ ,  $z \neq 0$  e  $x = y_1 = 0$  portanto, o sistema 4.2 se torna

$$\begin{aligned} -\beta_2 y_2 - \gamma_2 z &= 0 \\ -\xi - \eta z &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema não encontramos equilíbrios positivos no plano  $y_2 z$  e assim concluímos que não há um equilíbrio no qual exista somente agricultura auxiliar e indústria.

### **Equilíbrios na parte positiva do octante $xy_2z$**

Nesse caso, temos que somente  $y_1 = 0$  o que torna o sistema 4.2

$$\begin{aligned} v(1-x)x &= 0 \\ \alpha_2 x - \beta_2 y_2 - \gamma_2 z &= 0 \\ -\xi - \eta z &= 0. \end{aligned}$$

Ao resolvermos esse sistema não encontramos equilíbrios positivos no octante  $xy_2z$ . Assim, não existe equilíbrio no qual somente a agricultura normal é inexistente.

### **Equilíbrios na parte positiva do octante $y_1y_2z$**

Para esse octante, temos que somente  $x = 0$ , assim o sistema 4.2 se torna

$$\begin{aligned} \phi y_1 &= 0 \\ -\beta_1 y_1 + \gamma_1 z - \rho_1 y_2 - \theta &= 0 \\ -\beta_2 y_2 - \gamma_2 z - \rho_2 y_1 &= 0 \\ -\xi - \eta z + \delta y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema não encontramos equilíbrios positivos no octante  $y_1y_2z$  e concluímos que, não existe equilíbrio no qual somente a ecosfera é inexistente.

Resolver os sistemas referentes aos octantes  $xy_1y_2$  e  $xy_1z$  não é tão simples como nos casos anteriores, por isso separamos esses octantes em seções próprias que estão a seguir.

### 4.3.1 A Existência de Equilíbrio Positivo no Octante $xy_1y_2$

Para encontramos um equilíbrio positivo no octante  $xy_1y_2$ , devemos encontrar uma solução positiva para o seguinte sistema, encontrado fazendo-se  $z = 0$  em 4.2:

$$-\kappa xy_1 + v(1-x)x + \phi(1-x)y_1 = 0 \quad (4.5)$$

$$\alpha_1 x - \beta_1 y_1 - \rho_1 y_2 - \theta(1-x) = 0 \quad (4.6)$$

$$\alpha_2 x - \beta_2 y_2 - \rho_2 y_1 = 0. \quad (4.7)$$

Suponhamos que o sistema anterior possui solução positiva dada por  $(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ . Observe que essa solução significa a coexistência entre a ecossfera e os dois tipo de agricultura trabalhados.

Assim, isolando  $y_1$  em 4.5 temos

$$\tilde{y}_1 = \frac{v(1-\tilde{x})\tilde{x}}{(\kappa + \phi)\tilde{x} - \phi}. \quad (4.8)$$

Sendo assim, considere a seguinte função:

$$f_1(x) = \frac{v(1-x)x}{(\kappa + \phi)x - \phi}. \quad (4.9)$$

Observe que o ponto  $(\tilde{x}, \tilde{y}_1)$  pertence ao gráfico de  $f_1$ .

Prosseguindo, isolando  $y_2$  em 4.7, temos

$$\tilde{y}_2 = \frac{\alpha_2 \tilde{x} - \rho_2 \tilde{y}_1}{\beta_2}. \quad (4.10)$$

Vamos agora substituir 4.10 em 4.6, daí

$$\begin{aligned} \alpha_1 \tilde{x} - \beta_1 \tilde{y}_1 - \rho_1 \left( \frac{\alpha_2 \tilde{x} - \rho_2 \tilde{y}_1}{\beta_2} \right) - \theta(1-\tilde{x}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tilde{x}[\beta_2 \alpha_1 - \rho_1 \alpha_2 + \theta \beta_2] + \tilde{y}_1[\rho_1 \rho_2 - \beta_1 \beta_2] - \theta \beta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se  $\rho_1 \rho_2 - \beta_1 \beta_2 = 0$  então

$$\tilde{x} = \frac{\theta \beta_2}{(\alpha_1 \beta_2 - \rho_1 \alpha_2 + \theta \beta_2)}$$

Nesse caso, existe no máximo um valor positivo para  $\tilde{x}$ . Daí por 4.8 temos no máximo um valor positivo para  $\tilde{y}_1$  e por 4.10 no máximo um valor positivo para  $\tilde{y}_2$ .

Por outro lado, se  $\rho_1\rho_2 - \beta_1\beta_2 \neq 0$  então 4.11 pode ser escrito como

$$\tilde{y}_1 = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2 + \theta\beta_2)\tilde{x}}{\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2} - \frac{\theta\beta_2}{\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2} \quad (4.12)$$

Considere assim a função

$$f_2(x) = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2 + \theta\beta_2)x}{\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2} - \frac{\theta\beta_2}{\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2} \quad (4.13)$$

e observe que o ponto  $(\tilde{x}, \tilde{y}_1)$  pertence ao gráfico de  $f_2$ .

A existência de um equilíbrio da forma como queremos, depende da interseção dos gráficos de  $f_1$  e  $f_2$  na parte positiva do plano  $x - y_1$ .

Vamos então analisar o comportamento de  $f_1$  e  $f_2$ .

A função  $f_2$  é uma reta que passa pelos pontos

$$\left(0, -\frac{\theta\beta_2}{\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2}\right) \text{ e } \left(1, \frac{\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2}\right).$$

A função  $f_1$  passa pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  e tem assíntota vertical em  $x = \frac{\phi}{\kappa + \phi}$ .

Essa função é decrescente e côncava para baixo no intervalo  $0 \leq x < \frac{\phi}{\kappa + \phi}$ , também é decrescente, porém côncava para cima, no intervalo  $\frac{\phi}{\kappa + \phi} < x \leq 1$ . Temos que  $f_1$  e  $f_2$  podem ter, no máximo, uma interseção na parte positiva do plano  $x - y_1$ .

**Teorema 4.2.** *O sistema 4.1 possui exatamente um equilíbrio positivo  $F_{x_1y_1y_2}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0)$  no octante  $x - y_1 - y_2$  se alguma das condições abaixo é satisfeita*

*Condição 1: (a)  $\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2 = 0$ , (b)  $\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2 \geq 0$  e (c)  $\max\left(\frac{\phi}{\kappa + \phi}, \frac{\rho_2\tilde{y}_1}{\alpha_2}\right) < \tilde{x} \leq 1$ ,*

*Condição 2: (a)  $\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2 \neq 0$ , (b)  $\frac{\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2} > 0$  e (c)  $\frac{\rho_2\tilde{y}_1}{\alpha_2} < \tilde{x} \leq 1$ .*

**Demonstração:** Se  $\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2 = 0$  e  $\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2 \geq 0$  utilizando 4.11 temos  $0 < \tilde{x} \leq 1$ . Se  $\max\left(\frac{\phi}{\kappa + \phi}, \frac{\rho_2\tilde{y}_1}{\alpha_2}\right) < \tilde{x} \leq 1$  então de 4.8 e 4.10 teremos um solução positiva para  $\tilde{y}_1$  e  $\tilde{y}_2$  respectivamente.

Por outro lado se  $\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2 \neq 0$  e  $\frac{\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2} > 0$  então de 4.8 e 4.13 nós temos que existe uma única solução positiva para  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}_1$  pela interseção dos gráficos, pois neste caso o ponto  $\left(1, \frac{\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2}\right)$  se encontra no primeiro quadrante, o que obriga a reta que é o gráfico de  $f_1$  cruzar a parte o gráfico de  $f_2$  que está compreendida entre  $\frac{\phi}{\kappa + \phi} < x \leq 1$ . Como  $\frac{\rho_2\tilde{y}_1}{\alpha_2} < \tilde{x} \leq 1$  por 4.10,  $\tilde{y}_2$  é uma solução positiva e temos o resultado. ■

### 4.3.2 A Existência de Equilíbrio Positivo no Octante $xy_1z$ via Persistência

Para encontrarmos um equilíbrio positivo no octante  $xy_1y_2$  devemos encontrar uma solução positiva para o seguinte sistema, encontrado fazendo-se  $y_2 = 0$  em 4.2:

$$-\kappa y_1 x + v(1-x)x + \phi(1-x)y_1 = 0 \quad (4.14)$$

$$\alpha_1 x - \beta_1 y_1 + \gamma_1 z - \theta(1-x) = 0 \quad (4.15)$$

$$-\xi - \eta z + \delta y_1 = 0. \quad (4.16)$$

Suponhamos que o sistema anterior possui solução positiva dada por  $(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{z})$ . Esse equilíbrio representa a coexistência entre ecossistema, agricultura tradicional e indústria.

Separaremos nossa demonstração em três casos.

**1º Caso:**  $\gamma_1 \leq 0$

De 4.16 temos que

$$\bar{z} = \frac{-\xi + \delta\bar{y}_1}{\eta}. \quad (4.17)$$

Como queremos  $\bar{z} > 0$ , para que exista o equilíbrio positivo nesse octante é necessário que

$$\bar{y}_1 > \frac{\xi}{\delta}. \quad (4.18)$$

Temos então o seguinte lema:

**Lema 4.2.** *Uma condição necessária para a existência do equilíbrio  $F_{xy_1z}(\bar{x}, \bar{y}_1, 0, \bar{z})$  na parte positiva do octante  $xy_1z$  é que  $\bar{y}_1 > \frac{\xi}{\delta}$ .*

Prosseguimos, substituindo 4.17 em 4.15 e isolando  $\bar{y}_1$  temos

$$\alpha_1 \bar{x} - \beta_1 \bar{y}_1 + \gamma_1 \left( \frac{-\xi + \delta \bar{y}_1}{\eta} \right) - \theta(1 - \bar{x}) = 0$$

Algumas contas depois, temos

$$\bar{y}_1 = \frac{\eta(\theta + \alpha_1)\bar{x} - \theta\eta - \gamma_1\xi}{(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta)} \quad (4.19)$$

Como queremos  $\bar{x} > 0$ , para que exista o equilíbrio positivo no octante  $xy_1z$  é necessário que

$$\bar{x} > \frac{\theta\eta + \gamma_1\xi}{\eta(\theta + \alpha_1)}.$$

**Observação 4.2.** *Se  $\gamma_1 \leq \frac{-\theta\eta}{\xi}$  então  $\frac{\theta\eta + \gamma_1\xi}{\eta(\theta + \alpha_1)} < 0$  e a condição  $\bar{x} > \frac{\theta\eta + \gamma_1\xi}{\eta(\theta + \alpha_1)}$  é sempre satisfeita, pois  $\bar{x} > 0$ .*

Podemos então concluir o seguinte lema:

**Lema 4.3.** *Se  $\frac{-\theta\eta}{\xi} < \gamma_1 \leq 0$  então  $\bar{x} > \frac{\theta\eta + \gamma_1\xi}{\eta(\theta + \alpha_1)}$  é uma condição necessária para a existência do equilíbrio  $F_{xy_1z}(\bar{x}, \bar{y}_1, 0, \bar{z})$  na parte positiva do octante  $xy_1z$ .*

Vamos agora, utilizar a desigualdade encontrada em 4.18 na desigualdade que encontramos em 4.19. Assim,

$$\frac{\eta(\theta + \alpha_1)\bar{x} - \theta\eta - \gamma_1\xi}{(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta)} > \frac{\xi}{\delta},$$

logo,

$$\delta\eta(\theta + \alpha_1)\bar{x} - \theta\delta\eta - \delta\gamma_1\xi > \xi\eta\beta_1 - \delta\gamma_1\xi$$

e assim,

$$\bar{x} > \frac{\theta\delta + \xi\beta_1}{\theta\delta + \alpha_1\delta}. \quad (4.20)$$

Da propriedade de dissipatividade dada no teorema 4.1 temos que  $\bar{x} \leq 1$ . Daí

$$\frac{\theta\delta + \xi\beta_1}{\theta\delta + \alpha_1\delta} < 1, \text{ o que nos dá}$$

$$\beta_1\xi < \delta\alpha_1. \quad (4.21)$$

Concluimos assim mais um lema.

**Lema 4.4.** *Uma condição necessária para a existência do equilíbrio  $F_{xy_1z}(\bar{x}, \bar{y}_1, 0, \bar{z})$  na parte positiva do octante  $xy_1z$  é que*

$$\beta_1\xi < \delta\alpha_1.$$

Continuamos, substituindo o valor de  $\bar{y}_1$  encontrado em 4.19 em 4.14. Assim,

$$-\kappa\bar{x} \left[ \frac{\eta(\theta + \alpha_1)\bar{x} - \theta\eta - \gamma_1\xi}{(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta)} \right] + v(1 - \bar{x})\bar{x} + \phi(1 - \bar{x}) \left[ \frac{\eta(\theta + \alpha_1)\bar{x} - \theta\eta - \gamma_1\xi}{(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta)} \right] = 0.$$

Fazendo as contas, chegamos à seguinte equação do segundo grau:

$$a\bar{x}^2 - b\bar{x} + c = 0, \quad (4.22)$$

onde

$$a = \eta(\phi + \kappa)(\theta + \alpha_1) + v(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta) > 0,$$

$$b = v(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta) + (\phi + \kappa)(\theta\eta + \gamma_1\xi) + \phi\eta(\theta + \alpha_1) \text{ e}$$

$$c = \phi(\theta\eta + \gamma_1\xi)$$

Temos então o seguinte resultado:

**Teorema 4.3.** *Existe no máximo um equilíbrio na parte positiva do octante  $xy_1z$ .*

**Demonstração:** Temos dois possíveis equilíbrios na parte positiva do octante  $xy_1z$  partindo dos valores de  $\bar{x}$  dados pelas raízes de 4.22.

Se  $c \leq 0$  então  $b^2 - 4ac \geq b^2$  então  $\sqrt{b^2 - 4ac} \geq |b| \geq b$ . Daí,  $b - \sqrt{b^2 - 4ac} \leq 0$  e assim,

$$\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq 0.$$

Sendo assim, temos no máximo, a possível raiz positiva dada por  $\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Se  $c > 0$  então  $\theta\eta + \gamma_1\xi > 0$  e  $b^2 - 4ac < b^2$ , observe que fazendo algumas contas, temos:

$$b^2 - 4ac = [v(\beta_1\eta - \gamma_1\delta) - \kappa(\theta\eta + \gamma_1\xi) + \phi(\alpha_1\eta - \gamma_1\xi)]^2 + 4\kappa v(\beta_1\eta - \gamma_1\delta)(\theta\eta + \gamma_1\xi) > 0. \quad (4.23)$$

Além disso, temos  $b^2 - 4ac < b^2$ . Daí, temos que  $\bar{x}$  assume então os dois valores positivos. Considerando a raiz menor  $\bar{x}_- = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , suponhamos que  $\bar{x}_-$  gera uma solução positiva para o sistema dado pelas equações 4.14, 4.15 e 4.16 (lembre que  $\bar{y}_1$  depende de  $\bar{x}$  e que  $\bar{z}$  depende de  $\bar{y}_1$ ).

Temos usando 4.23 que

$$\begin{aligned} \bar{x}_- &= \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{v(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta) + (\phi + \kappa)(\theta\eta + \gamma_1\xi) + \phi\eta(\theta + \alpha_1)}{2a} \\ &\quad - \frac{\sqrt{[v(\beta_1\eta - \gamma_1\delta) - \kappa(\theta\eta + \gamma_1\xi) + \phi(\alpha_1\eta - \gamma_1\xi)]^2 + 4\kappa v(\beta_1\eta - \gamma_1\delta)(\theta\eta + \gamma_1\xi)}}{2a} \\ &< \frac{v(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta) + (\phi + \kappa)(\theta\eta + \gamma_1\xi) + \phi\eta(\theta + \alpha_1)}{2a} \\ &\quad - \frac{\sqrt{[v(\beta_1\eta - \gamma_1\delta) - \kappa(\theta\eta + \gamma_1\xi) + \phi(\alpha_1\eta - \gamma_1\xi)]^2}}{2a} \\ &< \frac{(\kappa + \phi)(\theta\eta + \gamma_1\xi)}{a} \\ &< \frac{(\kappa + \phi)\theta\eta}{a}. \end{aligned}$$

A condição encontrada em 4.20 implica que  $\bar{x}_- > \frac{\theta\delta + \xi\beta_1}{\theta\delta + \alpha_1\delta}$  para que  $\bar{y}_1$  seja positivo. Juntando com a desigualdade encontrada agora, temos

$$\frac{\theta\delta + \xi\beta_1}{\theta\delta + \alpha_1\delta} < \frac{(\kappa + \phi)\theta\eta}{\eta(\phi + \kappa)(\theta + \alpha_1) + v(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta)}$$

$$\Rightarrow (\theta\delta + \xi\beta_1)(\eta(\phi + \kappa)(\theta + \alpha_1) + v(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta)) < (\theta\delta + \alpha_1\delta)((\kappa + \phi)\theta\eta)$$

$$\Rightarrow (\theta\delta + \xi\beta_1)(\eta(\phi + \kappa)(\theta + \alpha_1) + v(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta)) < (\theta\delta + \alpha_1\delta)(\kappa + \phi)\theta\eta$$

$$\Rightarrow \eta(\kappa + \phi)(\alpha_1 + \theta)(\xi\beta_1 + \theta\delta - \theta\delta) + v(\beta_1\xi + \theta\delta)(\beta_1\eta - \gamma_1\delta) < 0$$

$$\Rightarrow \eta(\kappa + \phi)(\alpha_1 + \theta)\xi\beta_1 + v(\beta_1\xi + \theta\delta)(\beta_1\eta - \gamma_1\delta) < 0,$$

o que é absurdo, pois todas as parcelas dessa soma são positivas. Logo temos no máximo a solução positiva dada por  $\bar{x}_+$

■

Nosso objetivo agora é encontrar condições necessárias e suficientes para a existência de um equilíbrio positivo no octante  $x - y_1 - z$ . Sendo assim, consideraremos o sistema 4.1 restrito ao conjunto  $\mathbb{R}_{xyz}^+ = \{(x, y_1, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y_1 \leq \infty, 0 \leq z \leq \infty\}$  que se torna

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\kappa y_1 x + v(1-x)x + \phi(1-x)y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= (\alpha_1 x - \beta_1 y_1 + \gamma_1 z - \theta(1-x))y_1 \\ \frac{dz}{dt} &= (-\xi - \eta z + \delta y_1)z \end{aligned} \tag{4.24}$$

com condição inicial  $x_0 = x(0)$ ,  $0 \leq x_0 \leq 1$ ,  $y_{10} = y_1(0) \geq 0$  e  $z_0 = z(0) \geq 0$ .

Os equilíbrios de fronteira desse sistema já foram calculados e serão denominados aqui por  $E_0(0, 0, 0)$ ,  $E_x(1, 0, 0)$  e  $E_{xy_1}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, 0)$ , onde os valores de  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}_1$  foram encontrados respectivamente em 4.3 e 4.4 e são dados por

$$\tilde{x} = \frac{\kappa\theta + v\beta_1 - \phi\beta_1 + \sqrt{(\kappa\theta + v\beta_1 + \phi\beta_1)^2 + 4\beta_1\phi\kappa\alpha_1}}{2(\kappa\alpha_1 + \kappa\theta + v\beta_1)}$$

e

$$\tilde{y}_1 = \frac{(\alpha_1 + \theta)\tilde{x} - \theta}{\beta_1}.$$

Temos ainda o possível equilíbrio  $E_{xy_1z}(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{z})$ . Observe que a existência de  $E_{xy_1z}$  em  $\mathbb{R}_{xy_1z}^+$  implica na existência de um equilíbrio na parte positiva do octante  $xy_1z$  do sistema original.

Vamos então fazer a análise local dos equilíbrios que já temos através da matriz Jacobiana associada ao sistema 4.24 que é dada por

$$J_0(x, y_1, z) = \begin{pmatrix} \dot{j}_{11} & -(\kappa + \phi)x + \phi & 0 \\ (\alpha_1 + \theta)y_1 & \dot{j}_{22} & \gamma_1 y_1 \\ 0 & \delta z & \dot{j}_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

onde,

$$a_{11} = -\kappa y_1 + v(1 - x) - vx - \phi y_1,$$

$$a_{22} = \alpha_1 x - 2\beta_1 y_1 + \gamma_1 z - \theta(1 - x) \text{ e}$$

$$a_{33} = -\xi - 2\eta z + \delta y_1.$$

Aplicando  $J_0$  em  $E_0$ , temos

$$J_0(E_0) = \begin{pmatrix} v & \phi & 0 \\ 0 & -\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\xi \end{pmatrix}$$

Os autovalores de  $J(E_0)$  são dados por  $v$ ,  $-\theta$  e  $-\xi$ . Podemos então concluir o seguinte lema.

**Lema 4.5.** *O equilíbrio  $E_0$  em  $\mathbb{R}_{xy_1z}^+$  é um ponto de sela hiperbólico, localmente instável na direção  $x$  e localmente estável nas outras direções.*

Vamos agora analisar o equilíbrio  $E_x$  aplicando esse ponto a matriz Jacobiana 4.25

$$J_0(E_x) = \begin{pmatrix} -v & -\kappa & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $J_0(E_x)$  são dados por  $-v$ ,  $\alpha_1$  e  $-\xi$ . Podemos então concluir o seguinte lema.

**Lema 4.6.** *O equilíbrio  $E_x$  em  $\mathbb{R}_{xy_1z}^+$  é um ponto de sela hiperbólico, localmente instável na direção  $y_1$  e localmente estável nas outras direções.*

Analisando o último equilíbrio que falta,  $E_{xy_1}$ , temos

$$J_0(E_{xy_1}) = \begin{pmatrix} -\kappa\check{y}_1 + v(1 - \check{x}) - v\check{x} - \phi\check{y}_1 & -(\kappa + \phi)\check{x} + \phi & 0 \\ (\alpha_1 + \theta)\check{y}_1 & \alpha_1\check{x} - 2\beta_1\check{y}_1 - \theta(1 - \check{x}) & \gamma_1\check{y}_1 \\ 0 & 0 & -\xi + \delta\check{y}_1 \end{pmatrix}$$

Como  $\check{x}$  e  $\check{y}_1$  satisfazem

$$\begin{aligned} -\kappa\check{x}\check{y}_1 + v(1 - \check{x})\check{x} + \phi(1 - \check{x})\check{y}_1 &= 0 \\ \alpha_1\check{x} - \beta_1\check{y}_1 - \theta(1 - \check{x}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.26}$$

a Jacobiana em  $E_{xy_1}$  se torna

$$J_0(E_{xy_1}) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{v\check{x}^2 + \phi\check{y}_1}{\check{x}}\right) & -(\kappa + \phi)\check{x} + \phi & 0 \\ (\alpha_1 + \theta)\check{y}_1 & -\beta_1\check{y}_1 & \gamma_1\check{y}_1 \\ 0 & 0 & -\xi + \delta\check{y}_1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores dessa matriz são  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $-\xi + \delta\check{y}_1$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  que são os autovalores da matriz  $M_{22}$  dada por

$$M_{22} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{v\check{x}^2 + \phi\check{y}_1}{\check{x}}\right) & -(\kappa + \phi)\check{x} + \phi \\ (\alpha_1 + \theta)\check{y}_1 & -\beta_1\check{y}_1 \end{pmatrix}$$

Temos que

$$Tr(M_{22}) = -\left(\frac{v\check{x}^2 + \phi\check{y}_1}{\check{x}} + \beta_1\check{y}_1\right) < 0$$

e

$$\det(M_{22}) = \left(\frac{v\check{x}^2 + \phi\check{y}_1}{\check{x}}\right)(\beta_1\check{y}_1) + (\alpha_1 + \theta)\check{y}_1((\kappa + \phi)\check{x} - \phi)$$

Utilizando 4.26, concluímos que

$$((\kappa + \phi)\check{x} + \phi)\check{y}_1 = v\check{x}(1 - \check{x}) > 0$$

Assim, temos

$$\det(M_{22}) > 0.$$

Portanto, os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm parte real negativa. Concluímos assim o seguinte lema.

**Lema 4.7.** *Temos que*

(a) *Se  $-\xi + \delta\check{y}_1 < 0$ , então o equilíbrio  $E_{xy_1}$  em  $\mathbb{R}^+_{xy_1z}$  é localmente assintoticamente estável;*

(b) *Se  $-\xi + \delta\check{y}_1 > 0$ , então o equilíbrio  $E_{xy_1}$  em  $\mathbb{R}^+_{xy_1z}$  é um ponto de sela hiperbólico localmente instável na direção  $z$  e localmente estável nas demais direções.*

**Teorema 4.4.** *O subsistema dado por 4.24 em  $\mathbb{R}^+_{xy_1z}$  é dissipativo com região de atração contida em*

$$M = \left\{ (x, y_1, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y_1 \leq \frac{\alpha_1}{\beta_1}, 0 \leq z \leq \frac{\alpha_1\delta - \beta_1\xi}{\eta\beta_1} \right\}.$$

**Demonstração:** A demonstração é análoga a do Teorema 4.1. ■

**Lema 4.8.** *Não existem curvas, órbitas ou caminhos fechados no plano  $xy_1$  (na verdade em todos os planos) de  $\mathbb{R}^+_{xy_1z}$ .*

**Demonstração:** Veja [1]. ■

**Teorema 4.5.** *Se  $-\xi + \delta\check{y}_1 > 0$  então o subsistema 4.24 em  $\mathbb{R}^+_{xy_1z}$  é persistente uniforme e assim existe o equilíbrio  $E_{xy_1z} = (\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{z})$  no interior de  $\mathbb{R}^+_{xy_1z}$ .*

**Demonstração:** Veja [1]. ■

Como conclusão, temos o seguinte teorema:

**Teorema 4.6.** *Existe um único equilíbrio  $F_{xy_1z}(\bar{x}, \bar{y}_1, 0, \bar{z})$  na parte positiva do octante  $xy_1z$  se  $-\xi + \delta\check{y}_1 > 0$  e  $\beta_1\xi < \delta\alpha_1$  onde  $\bar{x} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $\bar{y}_1 = \frac{\eta(\theta + \alpha_1)\bar{x} - \theta\eta - \gamma_1\xi}{(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta)}$  e  $\bar{z} = \frac{-\xi + \delta\check{y}_1}{\eta}$  lembrando que*

$$a = \eta(\phi + \kappa)(\theta + \alpha_1) + v(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta) > 0,$$

$$b = v(\eta\beta_1 - \gamma_1\delta) + (\phi + \kappa)(\theta\eta + \gamma_1\xi) + \phi\eta(\theta + \alpha_1) \text{ e}$$

$$c = \phi(\theta\eta + \gamma_1\xi).$$

**2º Caso:**  $\gamma_1 > 0$  e  $\beta_1\eta - \gamma_1\delta > 0$

Para esse caso, segue o seguinte teorema.

**Teorema 4.7.** *Existe um único equilíbrio  $F_{xy_1z}(\bar{x}, \bar{y}_1, 0, \bar{z})$  na parte positiva do octante  $xy_1z$  se:*

1.  $\beta_1\eta - \gamma_1\delta > 0$ ;
2.  $\beta_1\xi < \delta\alpha_1$ ;
3.  $(\delta\alpha_1 - \beta_1\xi)[v(\beta_1\eta - \gamma_1\delta) + \phi(\alpha_1\eta + \theta\eta)] \geq \kappa\eta(\theta + \alpha_1)(\beta_1\xi + \theta\delta)$ .

**Demonstração:** Veja [1]. ■

**3º Caso:**  $\gamma_1 > 0$  e  $\beta_1\eta - \gamma_1\delta = 0$

Nesse caso, resolvendo o sistema dado pelas equações 4.14, 4.15 e 4.16, temos

$$\bar{z} = \frac{-\xi + \delta\bar{y}_1}{\eta},$$

mesmo valor encontrado em 4.17. Assim devemos ter também a condição

$$\bar{y}_1 > \frac{\xi}{\delta},$$

também já encontrada em 4.18.

Substituindo 4.17 em 4.15, usando que  $\beta_1\eta - \gamma_1\delta = 0$  e isolando  $x$  temos que

$$\bar{x} = \frac{\gamma_1\xi + \theta\eta}{\alpha_1\eta + \theta\eta}.$$

Como devemos ter  $\bar{x} \leq 1$ , temos a seguinte condição necessária para a existência do equilíbrio:

$$\gamma_1\xi < \alpha_1\eta.$$

Para finalizar, de 4.14 temos que

$$\bar{y}_1 = \frac{v(1 - \bar{x})\bar{x}}{\kappa\bar{x} - \phi(1 - \bar{x})}.$$

Temos assim, o seguinte teorema:

**Teorema 4.8.** *Existe um único equilíbrio  $F_{xy_1z}(\bar{x}, \bar{y}_1, 0, \bar{z})$  na parte positiva do octante  $xy_1z$  se:*

1.  $\beta_1\eta - \gamma_1\delta = 0$ ;
2.  $\gamma_1\xi < \eta\alpha_1$ ;
3.  $\frac{v(1 - \bar{x})\bar{x}}{\kappa\bar{x} - \phi(1 - \bar{x})} > \frac{\xi}{\delta}$ , onde  $\bar{x} = \frac{\gamma_1\xi + \theta\eta}{\alpha_1\eta + \theta\eta}$ .

## 4.4 Análise Local dos Equilíbrio na Fronteira de $\mathbb{R}_+^4$

O objetivo dessa seção é fazer a análise local dos equilíbrios de fronteira que temos. Para isso utilizaremos os autovalores da matriz Jacobiana associada ao sistema 4.1 aplicada no equilíbrio desejado. Sendo assim, a matriz jacobiana associada ao sistema 4.1 é dada por

$$J_4(x, y_1, y_2, z) = \begin{pmatrix} v_{11} & -(\kappa + \phi)x + \phi & 0 & 0 \\ y_1(\alpha_1 + \theta) & v_{22} & -\rho_1y_1 & \gamma_1y_1 \\ \alpha_2y_2 & -\rho_2y_2 & v_{33} & -\gamma_2y_2 \\ 0 & \delta z & 0 & v_{44} \end{pmatrix}$$

onde  $v_{11} = -\kappa y_1 + v(1 - 2x) - \phi y_1$ ,  $v_{22} = \alpha_1 x - 2\beta_1 y_1 + \gamma_1 z - \rho_1 y_2 - \theta(1 - x)$ ,  $v_{33} = \alpha_2 x - 2\beta_2 y_2 - \gamma_2 z - \rho_2 y_1$  e  $v_{44} = -\xi - 2\eta z + \delta y_1$

Para o equilíbrio  $F_0$  temos o seguinte lema.

**Lema 4.9.** *O equilíbrio  $F_0$  é não hiperbólico e localmente instável. Na realidade  $F_0$  é um ponto de sela.*

**Demonstração:** Substituindo  $F_0$  na matriz Jacobiana, temos

$$J_4(F_0) = \begin{pmatrix} v & \phi & 0 & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $J_4(F_0)$  são  $v, -\theta, 0$  e  $-\xi$ . Sendo assim temos autovalores negativos, um autovalor nulo e um positivo. O autovalor nulo nos diz que  $F_0$  é não hiperbólico e devido aos autovalores com sinais opostos temos que  $F_0$  é uma sela. ■

Partindo agora para o equilíbrio  $F_x$ , temos:

**Lema 4.10.** *O equilíbrio  $F_x(1, 0, 0, 0)$  é um ponto de sela hiperbólico instável nas direções de  $y_1$  e  $y_2$  e localmente estável nas direções  $x$  e  $z$ .*

**Demonstração:** Substituindo  $F_x$  na matriz Jacobiana, temos

$$J_4(F_x) = \begin{pmatrix} -v & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi \end{pmatrix}$$

Os autovalores de  $J_4(F_x)$  são  $-v, \alpha_1, \alpha_2$  e  $-\xi$  e daí segue o resultado. ■

**Lema 4.11.** *Temos que:*

(a) *Se  $\alpha_2\tilde{x} - \rho_2\tilde{y}_1 < 0$  e  $-\xi + \delta\tilde{y}_1 < 0$ , então o equilíbrio  $F_{xy_1}$  é localmente assintoticamente estável.;*

(b) *Se  $\alpha_2\tilde{x} - \rho_2\tilde{y}_1 > 0$  ou  $-\xi + \delta\tilde{y}_1 > 0$ , então o equilíbrio  $F_{xy_1}$  é um ponto de sela hiperbólico. Esse ponto sempre será localmente estável na  $x$ -direção e na  $y_1$ -direção.*

**Demonstração:** Substituindo  $F_{xy_1}$  na matriz Jacobiana, temos

$$J_4(F_{xy_1}) = \begin{pmatrix} -\kappa\tilde{y}_1 + v(1 - 2\tilde{x}) - \phi\tilde{y}_1 & -(\kappa + \phi)\tilde{x} + \phi & 0 & 0 \\ \tilde{y}_1(\alpha_1 + \theta) & \alpha\tilde{x} - 2\beta_1\tilde{y}_1 - \theta(1 - \tilde{x}) & -\rho_1\tilde{y}_1 & \gamma_1\tilde{y}_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2\tilde{x} - \rho_2\tilde{y}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi + \delta\tilde{y}_1 \end{pmatrix}$$

Usando que

$$\begin{aligned} -\kappa\tilde{y}_1\tilde{x} + v(1 - \tilde{x})x + \phi(1 - \tilde{x})\tilde{y}_1 &= 0 \\ \alpha_1\tilde{x} - \beta_1\tilde{y}_1 - \theta(1 - \tilde{x}) &= 0, \end{aligned}$$

concluimos que

$$J_4(F_{xy_1}) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{v\tilde{x}^2 + \phi\tilde{y}_1}{\tilde{x}}\right) & -(\kappa + \phi)\tilde{x} + \phi & 0 & 0 \\ \tilde{y}_1(\alpha_1 + \theta) & -\beta_1\tilde{y}_1 & -\rho_1\tilde{y}_1 & \gamma_1\tilde{y}_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2\tilde{x} - \rho_2\tilde{y}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi + \delta\tilde{y}_1 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de  $J(F_{xy_1})$  são  $\lambda_3 = \alpha_2\check{x} - \rho_2\check{y}_1$ ,  $\lambda_4 = -\xi + \delta\check{y}_1$  juntamente com os autovalores da matriz

$$J_{22} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{v\check{x}^2 + \phi\check{y}_1}{\check{x}}\right) & -(\kappa + \phi)\check{x} + \phi \\ \check{y}_1(\alpha_1 + \theta) & -\beta_1\check{y}_1 \end{pmatrix}$$

Observe que

$$Tr(J_{22}) = -\left(\frac{v\check{x}^2 + \phi\check{y}_1}{\check{x}}\right) - \beta_1\check{y}_1 < 0$$

e

$$\begin{aligned} det(J_{22}) &= \left(\frac{v\check{x}^2 + \phi\check{y}_1}{\check{x}}\right)(\beta_1\check{y}_1) + (\alpha_1 + \theta)((\kappa + \phi)\check{x} - \phi)\check{y}_1 \\ &= \left(\frac{v\check{x}^2 + \phi\check{y}_1}{\check{x}}\right)(\beta_1\check{y}_1) + (\alpha_1 + \theta)v(1 - \check{x})\check{x} > 0. \end{aligned}$$

Disso, concluímos que a parte real do autovalores da matriz  $J_{22}$  é negativa, portanto a estabilidade/instabilidade de  $F_{xy_1}$  depende dos sinais de  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$ . ■

Para o equilíbrio  $F_{xy_2}$  temos:

**Lema 4.12.** *Temos que:*

- (a) O equilíbrio  $F_{xy_2}$  é localmente assintoticamente estável se  $\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2 < 0$ .
- (b) O equilíbrio  $F_{xy_2}$  é um ponto de sela hiperbólico se  $\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2 > 0$  repulsor na  $y_1$ -direção.

**Demonstração:** Aplicando a Jacobiana  $J_4$  em  $F_{xy_2}$  temos

$$J_4(F_{xy_2}) = \begin{pmatrix} -v & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2}{\beta_2} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_2^2}{\beta_2} & -\frac{\rho_2\alpha_2}{\beta_2} & -\alpha_2 & -\frac{\gamma_2\alpha_2}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 0 & -\xi \end{pmatrix}$$

Os autovalores associados a matriz  $J_4(F_{xy_2})$  são dados por  $-v$ ,  $\frac{\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2}{\beta_2}$ ,  $-\alpha_2$  e  $-\xi$ . Daí segue o resultado. ■

Para sabermos o comportamento em uma vizinhança de  $F_{xy_1y_2}$  temos o seguinte teorema.

**Teorema 4.9.** *Suponha que  $\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2 \geq 0$ . Então*

(a) *Se  $\xi < \delta\tilde{y}_1$ , então  $F_{xy_1y_2}$  é um ponto de sela hiperbólico, instável na  $z$ -direção e estável nas outras direções. Em particular, o espaço  $xy_1y_2$  forma a variedade estável e a variedade instável é o eixo  $z$ .*

(b) *Se  $\xi > \delta\tilde{y}_1$ , então  $F_{xy_1y_2}$  é localmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Substituindo  $F_{xy_1y_2}$  na matriz Jacobiana  $J_4$  temos

$$J_4(F_{xy_1y_2}) = \begin{pmatrix} b_{11} & -(\kappa + \phi)\tilde{x} + \phi & 0 & 0 \\ \tilde{y}_1(\alpha_1 + \theta) & b_{22} & -\rho_1\tilde{y}_1 & \gamma_1\tilde{y}_1 \\ \alpha_2\tilde{y}_2 & -\rho_2\tilde{y}_2 & b_{33} & -\gamma_2\tilde{y}_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi + \delta\tilde{y}_1 \end{pmatrix}$$

onde

$$b_{11} = -\kappa\tilde{y}_1 + v(1 - 2\tilde{x}) - \phi\tilde{y}_1,$$

$$b_{22} = \alpha_1\tilde{x} - 2\beta_1\tilde{y}_1 - \rho_1\tilde{y}_2 - \theta(1 - \tilde{x}),$$

$$b_{33} = \alpha_2\tilde{x} - 2\beta_2\tilde{y}_2 - \rho_2\tilde{y}_1$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} -\kappa\tilde{x}\tilde{y}_1 + v(1 - \tilde{x})\tilde{x} + \phi(1 - \tilde{x})\tilde{y}_1 &= 0 \\ \alpha_1\tilde{x} - \beta_1\tilde{y}_1 - \rho_1\tilde{y}_2 - \theta(1 - \tilde{x}) &= 0 \\ \alpha_2\tilde{x} - \beta_2\tilde{y}_2 - \rho_2\tilde{y}_1 &= 0, \end{aligned} \tag{4.27}$$

portanto, podemos concluir que

$$J_4(F_{xy_1y_2}) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{v\tilde{x}^2 + \phi\tilde{y}_1}{\tilde{x}}\right) & -(\kappa + \phi)\tilde{x} + \phi & 0 & 0 \\ \tilde{y}_1(\alpha_1 + \theta) & -\beta_1\tilde{y}_1 & -\rho_1\tilde{y}_1 & \gamma_1\tilde{y}_1 \\ \alpha_2\tilde{y}_2 & -\rho_2\tilde{y}_2 & -\beta_2\tilde{y}_2 & -\gamma_2\tilde{y}_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi + \delta\tilde{y}_1 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de  $J_4(F_{xy_1y_2})$  são  $\lambda_4 = -\xi + \delta\tilde{y}_1$  e os autovalores da matriz

$$J_{33} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{v\tilde{x}^2 + \phi\tilde{y}_1}{\tilde{x}}\right) & -(\kappa + \phi)\tilde{x} + \phi & 0 \\ \tilde{y}_1(\alpha_1 + \theta) & -\beta_1\tilde{y}_1 & -\rho_1\tilde{y}_1 \\ \alpha_2\tilde{y}_2 & -\rho_2\tilde{y}_2 & -\beta_2\tilde{y}_2 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico associado a  $J_{33}$  é dado por

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0,$$

onde

$$b_1 = \beta_1\tilde{y}_1 + \beta_2\tilde{y}_2 + \left(\frac{v\tilde{x}^2 + \phi\tilde{y}_1}{\tilde{x}}\right) > 0,$$

$$b_2 = \left(\frac{v\tilde{x}^2 + \phi\tilde{y}_1}{\tilde{x}}\right)(\beta_1\tilde{y}_1 + \beta_2\tilde{y}_2) + v(\alpha_1 + \theta)(1 - \tilde{x})\tilde{x} + (\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2)\tilde{y}_1\tilde{y}_2 \text{ e}$$

$$b_3 = \left(\frac{v\tilde{x}^2 + \phi\tilde{y}_1}{\tilde{x}}\right)(\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2)\tilde{y}_1\tilde{y}_2 + v(\alpha_1\beta_2 + \theta\beta_2 - \alpha_2\rho_1)(1 - \tilde{x})\tilde{x}\tilde{y}_2.$$

Para chegarmos a esses valores, usamos a primeira igualdade de 4.27 que implica em  $((\kappa + \phi)\tilde{x} - \phi)\tilde{y}_1 = v(1 - \tilde{x})\tilde{x} \geq 0$  pois  $0 < \tilde{x} \leq 1$ .

Temos ainda que

$$\begin{aligned} b_1b_2 - b_3 &= \beta_1b_2\tilde{y}_1 + v\alpha_2\rho_1(1 - \tilde{x})\tilde{x}\tilde{y}_2 + \left(\frac{v\tilde{x}^2 + \phi\tilde{y}_1}{\tilde{x}}\right)^2(\beta_1\tilde{y}_1 + \beta_2\tilde{y}_2) \\ &\quad + \beta_2(\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2)\tilde{y}_1\tilde{y}_2^2 + \left(\frac{v\tilde{x}^2 + \phi\tilde{y}_1}{\tilde{x}}\right)[v(\alpha_1 + \theta)(1 - \tilde{x})\tilde{x} + (\beta_1\beta_2\tilde{y}_1 + \beta_2^2\tilde{y}_2)\tilde{y}_2] \end{aligned}$$

Observe então que, se o equilíbrio  $F_{xy_1y_2}$  existe (condição dada no Teorema 4.2), como temos por hipótese que  $\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2 \geq 0$ , podemos concluir que  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ ,  $b_3 > 0$  e  $b_1b_2 - b_3 > 0$ .

Utilizando então o Critério de Routh-Hurwitz (Teorema A.1 do Apêndice A) concluímos que as raízes do polinômio

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

têm parte real negativa e assim a estabilidade/instabilidade de  $F_{xy_1y_2}$  depende apenas do sinal de  $\lambda_4 = -\xi + \delta\tilde{y}_1$ . Segue o resultado. ■

Para classificarmos o equilíbrio  $F_{xy_1z}$  temos o seguinte Teorema.

**Teorema 4.10.** *Suponha que  $\beta_1\eta - \gamma_1\delta \geq 0$ . Então*

(a) *Se  $\alpha_2\bar{x} - \gamma_2\bar{z} - \rho_2\bar{y}_1 > 0$ , então  $F_{xy_1z}$  é um ponto de sela hiperbólico, instável na  $y_2$ -direção e estável nas outras direções. Em particular, o espaço  $x - y_1 - z$  forma a variedade estável e a variedade instável é o  $y_2$ -eixo.*

(b) *Se  $\alpha_2\bar{x} - \gamma_2\bar{z} - \rho_2\bar{y}_1 < 0$ , então  $F_{xy_1z}$  é localmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Substituindo  $F_{xy_1z}$  na matriz Jacobiana  $J_4$  temos

$$J_4(F_{xy_1z}) = \begin{pmatrix} c_{11} & -(\kappa + \phi)\bar{x} + \phi & 0 & 0 \\ \bar{y}_1(\alpha_1 + \theta) & c_{22} & -\rho_1\bar{y}_1 & \gamma_1\bar{y}_1 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 \\ 0 & \delta\bar{z} & 0 & c_{44} \end{pmatrix}$$

onde

$$c_{11} = -\kappa\bar{y}_1 + v(1 - 2\bar{x}) - \phi\bar{y}_1,$$

$$c_{22} = \alpha_1\bar{x} - 2\beta_1\bar{y}_1 + \gamma_1\bar{z} - \theta(1 - \bar{x}),$$

$$c_{33} = \alpha_2\bar{x} - \gamma_2\bar{z} - \rho_2\bar{y}_1 \text{ e}$$

$$c_{44} = -\xi - 2\eta\bar{z} + \delta\bar{y}_1$$

Como  $F_{xy_1z}$  satisfaz

$$\begin{aligned} -\kappa\bar{x}\bar{y}_1 + v(1 - \bar{x})\bar{x} + \phi(1 - \bar{x})\bar{y}_1 &= 0 \\ \alpha_1\bar{x} - \beta_1\bar{y}_1 + \gamma_1\bar{z} - \theta(1 - \bar{x}) &= 0 \\ -\xi - \eta\bar{z} + \delta\bar{y}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

temos que  $J_4(F_{xy_1z})$  se torna

$$J_4(F_{xy_1z}) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{v\bar{x}^2 + \phi\bar{y}_1}{\bar{x}}\right) & -(\kappa + \phi)\bar{x} + \phi & 0 & 0 \\ \bar{y}_1(\alpha_1 + \theta) & \beta_1\bar{y}_1 & -\rho_1\bar{y}_1 & \gamma_1\bar{y}_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2\bar{x} - \gamma_2\bar{z} - \rho_2\bar{y}_1 & 0 \\ 0 & \delta\bar{z} & 0 & -\eta\bar{z} \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $J_4(F_{xy_1z})$  são  $\lambda_3 = \alpha_2\bar{x} - \gamma_2\bar{z} - \rho_2\bar{y}_1$  e os autovalores da matriz

$$J_{33} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{v\bar{x}^2 + \phi\bar{y}_1}{\bar{x}}\right) & -(\kappa + \phi)\bar{x} + \phi & 0 \\ \bar{y}_1(\alpha_1 + \theta) & -\beta_1\bar{y}_1 & \gamma_1\bar{y}_1 \\ 0 & \delta\bar{z} & -\eta\bar{z} \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico associado a  $J_{33}$  é dado por

$$\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0$$

onde

$$\begin{aligned}
c_1 &= \beta_1 \bar{y}_1 + \eta \bar{z} + \left( \frac{v \bar{x}^2 + \phi \bar{y}_1}{\bar{x}} \right) > 0, \\
c_2 &= \left( \frac{v \bar{x}^2 + \phi \bar{y}_1}{\bar{x}} \right) (\beta_1 \bar{y}_1 + \eta \bar{z}) + (\alpha_1 + \theta) ((\kappa + \phi) \bar{x} - \phi) \bar{y}_1 + (\beta_1 \eta - \delta \gamma_1) \bar{y}_1 \bar{z} \text{ e} \\
c_3 &= \eta \bar{y}_1 \bar{z} \left[ \beta_1 \left( \frac{v \bar{x}^2 + \phi \bar{y}_1}{\bar{x}} \right) (\alpha_1 + \theta) ((\kappa + \phi) \bar{x} - \phi) \right] - \left( \frac{v \bar{x}^2 + \phi \bar{y}_1}{\bar{x}} \right) \delta \gamma_1 \bar{y}_1 \bar{z}.
\end{aligned}$$

A primeira igualdade de 4.28 implica que  $((\kappa + \phi) \bar{x} - \phi) \bar{y}_1 = v(1 - \bar{x}) \bar{x}$ , logo  $((\kappa + \phi) \bar{x} - \phi) \bar{y}_1 > 0$  pois  $0 < \bar{x} \leq 1$ . Temos ainda que

$$\begin{aligned}
c_1 c_2 - c_3 &= \left( \frac{v \bar{x}^2 + \phi \bar{y}_1}{\bar{x}} \right) (\beta_1 \bar{y}_1 + \eta \bar{z}) \left[ \left( \frac{v \bar{x}^2 + \phi \bar{y}_1}{\bar{x}} \right) + \beta_1 \bar{y}_1 + \eta \bar{z} \right] + (\beta_1 \eta - \delta \gamma_1) (\beta_1 \bar{y}_1 + \eta \bar{z}) \bar{y}_1 \bar{z} \\
&\quad + \left[ \beta_1 \bar{y}_1 + \left( \frac{v \bar{x}^2 + \phi \bar{y}_1}{\bar{x}} \right) \right] (\alpha_1 + \theta) v (1 - \bar{x}) \bar{x}
\end{aligned}$$

Observe então que, se o equilíbrio  $F_{xy_1z}$  existe (condições dadas nos Teoremas 4.6, 4.7 e 4.8) como temos por hipótese que  $\beta_1 \eta - \gamma_1 \delta \geq 0$ , podemos concluir que  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ ,  $c_3 > 0$  e  $c_1 c_2 - c_3 > 0$ .

Utilizando então o Critério de Routh-Hurwitz (Teorema A.1 do Apêndice A) concluímos que as raízes do polinômio

$$\lambda^3 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3 = 0$$

têm parte real negativa e assim a estabilidade/instabilidade de  $F_{xy_1y_2}$  depende apenas do sinal de  $\lambda_3 = \alpha_2 \bar{x} - \gamma_2 \bar{z} - \rho_2 \bar{y}_1$ . Segue o resultado. ■

Concluimos então a seguinte tabela com a classificação local dos equilíbrios que pertencem a fronteira de  $\mathbb{R}_+^4$ .

-	Equilíbrio	Classificação Local
Trivial	$F_0(0, 0, 0, 0)$	Sela não hiperbólica
No semieixo positivo $x$	$F_x(1, 0, 0, 0)$	Sela hiperbólica
No semieixo positivo $y_1$	-	-
No semieixo positivo $y_2$	-	-
No semieixo positivo $z$	-	-
No semiplano positivo $xy_1$	$F_{xy_1}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, 0, 0)$	Assintoticamente estável se $\alpha_2\tilde{x} - \rho_2\tilde{y}_1 < 0$ e $\xi > \delta\tilde{y}_1$ e Sela hiperbólica se $\alpha_2\tilde{x} - \rho_2\tilde{y}_1 > 0$ ou $\xi < \delta\tilde{y}_1$
No semiplano positivo $xy_2$	$F_{xy_2}(1, 0, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, 0)$	Assintoticamente estável se $\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2 < 0$ e Sela hiperbólica se $\alpha_1\beta_2 - \rho_1\alpha_2 > 0$
No semiplano positivo $xz$	-	-
No semiplano positivo $y_1y_2$	-	-
No semiplano positivo $y_1z$	-	-
No semiplano positivo $y_2z$	-	-
No semiespaço positivo $xy_1y_2$	$F_{xy_1y_2}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0)$	Assintoticamente estável se $\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2 \geq 0$ e $\xi > \delta\tilde{y}_1$ e Sela hiperbólica se $\beta_1\beta_2 - \rho_1\rho_2 \geq 0$ e $\xi < \delta\tilde{y}_1$
No semiespaço positivo $xy_1z$	$F_{xy_1z}(\bar{x}, \bar{y}_1, 0, \bar{z})$	Assintoticamente estável se $\beta_1\eta - \gamma_1\delta \geq 0$ e $\alpha_2\bar{x} - \gamma_2\bar{z} - \rho_2\bar{y}_1 < 0$ e Sela hiperbólica se $\beta_1\eta - \gamma_1\delta \geq 0$ e $\alpha_2\bar{x} - \gamma_2\bar{z} - \rho_2\bar{y}_1 > 0$
No semiespaço positivo $xy_2z$	-	-
No semiespaço positivo $y_1y_2z$	-	-

Vamos agora para a seção que trabalhará a existência de equilíbrios positivos no interior de  $\mathbb{R}_+^4$ .

## 4.5 Sustentabilidade do Modelo Ecosfera - Agricultura Tradicional - Agricultura Auxiliar - Indústria

A dissipatividade do sistema 4.1 é dada pelo Teorema 4.1, portanto, para garantirmos a sustentabilidade do modelo, precisamos de Persistência Uniforme para esse sistema.

Temos então o seguinte teorema de Persistência desse capítulo.

**Teorema 4.11.** *Suponha que o sistema 4.1 satisfaz os seguintes itens:*

1.  $\beta_1\eta - \gamma_1\delta > 0$ ,  $\alpha_1\eta - \gamma_1\xi > 0$  e  $\alpha_1\delta - \beta_1\xi > 0$  (condição para dissipatividade);
2.  $F_{xy_1}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, 0, 0)$  é um ponto de sela hiperbólico, repulsor na  $y_2$ -direção e na  $z$ -direção.;
3.  $F_{xy_2}(1, 0, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, 0)$  é um ponto de sela hiperbólico repulsor na  $y_1$ -direção;
4.  $F_{xy_1z}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, 0, \tilde{z})$  é um ponto de sela hiperbólico repulsor na  $y_2$ -direção;
5.  $F_{xy_1y_2}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0)$  é um ponto de sela hiperbólico repulsor na  $z$ -direção;
6.  $F_{xy_1y_2}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, 0)$  é globalmente assintoticamente estável com relação as soluções que iniciam no interior de  $\mathbb{R}_{xy_1y_2}^+$ ;

Então o sistema 4.1 é persistente uniforme.

**Demonstração:** Veja [1].

■

**Teorema 4.12.** *Se todas as condições do Teorema 4.11 são satisfeitas, então o sistema 4.1 exibe persistência uniforme e contém um equilíbrio da forma  $F^* = (x^*, y_1^*, y_2^*, z^*)$  com  $x^* > 0$ ,  $y_1^* > 0$ ,  $y_2^* > 0$  e  $z^* > 0$ .*

**Demonstração:** Veja [1].

■

Podemos então, concluir finalmente o seguinte resultado:

**Teorema 4.13.** *Suponha que o sistema 4.1 satisfaz as hipóteses do Teorema 4.11, então esse sistema é dissipativo e persistente uniforme, e portanto, sustentável.*

## 4.6 Considerações Finais sobre o Modelo Ecosfera - Agricultura Tradicional - Agricultura Auxiliar - Indústria

Nesse capítulo, estudamos um modelo que separa a agricultura em duas partes: a agricultura tradicional e a agricultura auxiliar. Ao fazer essa separação, fomos capazes de fazer uma maior abrangência sobre a questão da sustentabilidade. Diferentemente dos modelos apresentados nos Capítulos 2 e 3, onde determinamos condições sob as quais a agricultura (normal e auxiliar) se extingue, neste capítulo, fomos mais precisos na determinação de qual parte da agricultura será extinta e as condições em que cada extinção ocorre.

O principal objetivo desse capítulo foi, como nos anteriores, estudar e discutir o Modelo Ecosfera - Agricultura Tradicional - Agricultura Auxiliar - Indústria em busca de uma coexistência entre essas variáveis que foi concluída no Teorema 4.13 através da sustentabilidade do fluxo que é solução do sistema 4.1.

## Conclusões e Perspectivas Futuras

Através desse trabalho, pode-se perceber como a Teoria da Persistência pode ser útil e eficaz para o estudo de modelos de Equações Diferenciais Ordinárias. No nosso caso, o esforço para obter dissipatividade e persistência uniforme foi menor que o de encontrar pontos de equilíbrio no interior do conjunto trabalhado (Teoria Clássica). Apesar de se mostrar eficaz, a Teoria da Persistência também apresenta algumas restrições. Utilizando essa teoria, concluímos a existência de um atrator global, entretanto não conseguimos concluir qual é esse atrator ou qual sua forma. Apresentamos ainda nesse trabalho uma definição clara e concisa de fluxo sustentável, que está intimamente relacionada ao conceito intuitivo de sustentabilidade que conhecemos.

Ainda na teoria da Persistência, um trabalho a ser realizado na área poderia ser um método que ajude a estimar um valor ótimo do  $\varepsilon_0$  na definição de Persistência Uniforme.

Para um outro trabalho futuro, poderíamos verificar a adequação ao mundo real dos resultados encontrados que garantiram a sustentabilidade dos modelos e ainda tentar melhorar as estimativas feitas, de forma a aproximar os resultados da realidade dando aos modelos um pouco mais de aplicabilidade.

# Apêndice A

## Critério de Routh-Hurwitz

Apresentaremos aqui, um importante critério que nos mostra uma condição necessária e suficiente para que todas as raízes de um polinômio, com coeficientes reais, sejam negativas ou tenham a parte real negativa. Utilizamos como referência para esse apêndice [2].

**Teorema A.1** (Critério de Routh-Hurwitz). *Dado o polinômio,*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

onde os coeficientes  $a_i$  são constantes reais, para  $i = 1, \dots, n$ , definimos as  $n$  matrizes de Hurwitz usando os coeficientes  $a_i$  do polinômio:

$$H_1 = ( a_1 ), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} e$$

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

onde  $a_j = 0$  se  $j > n$ . Todas as raízes do polinômio  $P(\lambda)$  são negativas ou têm parte real negativa se, e somente se, os determinantes de todas as matrizes de Hurwitz são positivos:

$$\det H_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

**Demonstração para o caso  $n=2$ :** Para  $n=2$ , devemos mostrar que  $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$  tem todas as raízes negativas ou com parte real negativa se, e somente se,  $\det H_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $\det H_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ , ou seja, que  $\det H_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & \\ & \end{pmatrix} > 0$  e  $\det H_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} > 0$ . Temos então que  $a_1 > 0$  e  $a_1 a_2 > 0$ . Sabemos que as raízes de  $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$  são dadas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

Se  $a_1^2 - 4a_2 \leq 0$  o resultado segue diretamente, pois  $a_1 > 0$ . Se  $a_1^2 - 4a_2 > 0$ , então a raiz  $\lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$  é claramente negativa. Para  $\lambda_1$ , observe que

$$a_1 = \sqrt{a_1^2} > \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \Rightarrow -a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 0$$

e assim temos o resultado.

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos agora que  $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$  tem todas as raízes negativas ou com parte real negativa.

Se  $a_1^2 - 4a_2 < 0$  então  $0 < a_1^2 < 4a_2$ . Daí,  $a_2 > 0$  e como a raiz terá parte real negativa, segue que,  $-\frac{a_1}{2} < 0$  o que implica que  $a_1 > 0$ .

Se  $a_1^2 - 4a_2 \geq 0$  então  $-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 0$  e assim,  $0 \leq \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < a_1$ . Temos ainda que  $-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 0 \Rightarrow a_2 > 0$  pois, caso contrário teríamos  $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} > a_1$ . Segue assim o resultado para  $n=2$ . ■

**Observação A.1.** Para polinômios de grau 2, 3, 4 e 5 o Critério de Routh-Hurwitz se torna:

- $n = 2$  :  $a_1 > 0$  e  $a_2 > 0$ ;
- $n = 3$  :  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$  e  $a_1 a_2 > a_3$ ;
- $n = 4$  :  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_4 > 0$  e  $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ ;
- $n = 5$  :  $a_i > 0$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$  e  $(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5(a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] AGYEMANG, I.; FREEDMAN, H.I. *An environmental model for the interactions of industry with two competing agricultural resources*, **Math. Comput. Modelling** 49, No. 7-8, 1618-1643 (2009).
- [2] ALLEN, L. J. S. *An Introduction to Mathematical Biology*, Pearson Education. 368p. (2006)
- [3] APEDAILLE, L.P.; FREEDMAN, H.I.; SCHILIZZI, S.G.M.; SOLOMONOVICH, M. *Equilibria and dynamics in an economic predator-prey model of agriculture*, **Math. Comput. Modelling** 19, No.11, 1-15 (1994).
- [4] BHATIA, N. P.; SZEGÖ, G. P. *Dynamical systems: Stability theory and applications*. Lecture Notes in Mathematics 35. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag. VI, 416 p. (1967).
- [5] BUTLER, G.; FREEDMAN, H.I.; WALTMAN, P. *Uniformly persistent systems*, **Proc. Am. Math. Soc.** 96, 425-430 (1986).
- [6] BUTLER, G.; WALTMAN, P. *Persistence in dynamical systems*, **J. Differ. Equations** 63, 255-263 (1986).
- [7] FICHMANN, L. ; SALLUM, E. M. . *Sistemas Dinâmicos: Noções Básicas*. (2001).
- [8] FREEDMAN, H.I.; MOSON, P. *Persistence definitions and their connections*, **Proc. Am. Math. Soc.** 109, No.4, 1025-1033 (1990).
- [9] FREEDMAN, H.I.; RUAN, S.; TANG, M. *Uniform persistence and flows near a closed positively invariant set*. **J. Dyn. Differ. Equations** 6, No.4, 583-600 (1994)
- [10] FREEDMAN, H.I.; WALTMAN, P. *Persistence in models of three interacting predator-prey populations*. **Math. Biosci.** 68, 213-231 (1984).
- [11] GARD, T. C. *Uniform persistence in multispecies population models*. **Math. Biosci.** 85, 93-104 (1987).
- [12] HOFBAUER, J.; SO, J. W. H. *Uniform persistence and repellers for maps*. **Proc. Am. Math. Soc.** 107, No.4, 1137-1142 (1989).

- 
- [13] LIMA, E. L. *Espacos metricos*. Projeto Euclides, 4. Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, CNPq. VIII, 299 p. (1977)
- [14] MAITI, A.; PATRA, B.; SAMANTA, G.P. *Persistence and stability of a food chain model with mixed selection of functional responses*. **Nonlinear Anal., Model. Control** 11, No. 2, 171-185 (2006).
- [15] SMITH, H. L.; THIEME, H. R. *Dynamical systems and population persistence*. Graduate Studies in Mathematics 118. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xvii, 405 (2011).
- [16] SOLOMONOVICH, M.; APEDAILE, L.P.; FREEDMAN, H.I. *Predictability and trapping under conditions of globalization of agricultural trade: An application of the CDS approach*, **Math. Comput. Modelling** 33, No.4-5, 495-516 (2001).
- [17] SOLOMONOVICH, M.; APEDAILE, L.P.; FREEDMAN, H.I.; GEBREMEDIHEN, A.H.; SCHILIZZI, S.G.M.; BELOSTOTSKI, L. *A dynamical economic model of sustainable agriculture and the ecosphere*, **Appl. Math. Comput.** 84, No.2-3, 221-246 (1997).
- [18] SOLOMONOVICH, M.; APEDAILE, L.P.; FREEDMAN, H.I.; SCHILIZZI, S.G.M.; BELOSTOTSKI, L. *Stability and bifurcations in an environmental recovery model of economic agriculture-industry interactions*, **Natural Resource Modeling** 11, No.1, 35-79 (1998).
- [19] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides, 11. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq. XVI, 327 p. (1979).
- [20] WALTMAN, P. *A brief survey of persistence in dynamical systems*. **Delay differential equations and dynamical systems**, Proc. Conf., Claremont/CA (USA) 1990, Lect. Notes Math. 1475, 31-40 (1991).